Das λ-Lemma

nach "Geometric Theory of Dynamical Systems (1982)", Jacob Palis Jr./Welington Celso De Melo, Kapitel 2, §7 (S.80-88)

BELLOT Gilles

4. Dezember 2007

1 Einleitung

Dieser Artikel beschäftigt sich mit dem λ-Lemma, auch Neigungslemma (engl.: inclination lemma) genannt, einem wichtigen, lokalen Resultat. Das Lemma wird vollständig bewiesen, es werden einige Korollare gezogen, es wird ein etwas verfeinerter Satz von Grobman[1]-Hartman[2] für Flüsse gezeigt und schliesslich wird bewiesen, dass eine hyperbolische Singularität eines Vektorfeldes strukturell stabil ist.

Der hier vorgestellte Beweis, sowie die meisten Folgerungen und Anwendungen, folgen den Beweisideen von Palis[3]-DeMelo[4], die das λ-Lemma wohl als erste bewiesen haben.

2 Vorbereitung

Sehen wir uns zuerst einmal an, wie die Struktur eines dynamischen Systems in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes aussieht. Sei $f \in C^r(V, \mathbb{R}^m), V \subseteq \mathbb{R}^m$, ein Diffeomorphismus mit 0 als hyperbolischem Fixpunkt. Dann ist $A = Df(0)$ wegen, $df \circ df^{-1} = d(f \circ f^{-1}) = d(id) = id$, ein hyperbolischer Isomorphismus, d.h. $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \emptyset$.

Wir betrachten die Zerlegung des $\mathbb{R}^m$ in $E^s \oplus E^u$, wobei E^s den stabilen und E^u den unstabilen Eigenraum bezeichnet. (Dies läuft wohl auch unter dem Namen Spektralzerlegungssatz von Smale[5], engl.: spectral decomposition theorem).

[1] Vadim Matveevich Grobman - Russischer Mathematiker
[2] Philip Hartman - U.S. Amerikanischer Mathematiker
[3] Jacob Palis Junior, 1940-*, Uberaba, Brasilien
[4] Welington Celso De Melo, 1946-*, Guapé, Brasilien
[5] Stephen Smale, 1930-*, Flint, Michigan, Vereinigte Staaten von Amerika, Fields-Medaille in 1966

Dementsprechend kann auch A zerlegt werden, in A^s und A^u, mit $A^s : E^s \to E^s$, $A^u : E^u \to E^u$ und $A = A^s \oplus A^u$, d.h. A^s ist die Einschränkung von A auf E^s und A^u ist die Einschränkung von A auf E^u. Es gilt: $\sigma(A^s) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $\sigma(A^u) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Die lokale stabile Mannigfaltigkeit $W^s_{loc}(0)$ ist, nach Hadamard[6]-Perron[7], der Graph einer C^r-Abbildung $\varphi^s : B^s_{\zeta_s}(0) \to E^u$ mit $\varphi^s(0) = 0$ und $D\varphi^s(0) = 0$, wobei $B^s_{\zeta_s}(0) \subseteq E^s$ ein Ball ist mit Radius ζ_s um 0. Analog ist die lokale unstabile Mannigfaltigkeit $W^u_{loc}(0)$ der Graph einer C^r-Abbildung $\varphi^u : B^u_{\zeta_u} \to E^s$ mit $\varphi^u(0) = 0$ und $D\varphi^u(0) = 0$, wobei $B^u_{\zeta_u} \subseteq E^u$ ein Ball ist mit Radius ζ_u um 0.

Mit Hilfe dieser Funktionen können wir nun ein Koordinatensystem finden, in dem $W^s_{loc}(0)$ und $W^u_{loc}(0)$ „gerade gezogen sind“. Sehen wir uns dafür, nach Palis-DeMelo, folgende Abbildung an:

$$\begin{aligned}\varphi : &B^s_{\zeta_s} \oplus B^u_{\zeta_u} \to E^s \oplus E^u \\ &(x_s, x_u) \mapsto (x_s - \varphi^u(x_u), x_u - \varphi^s(x_s))\end{aligned}$$

Dies φ ist wieder eine C^r-Abbildung und es gilt: $D\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 & D\varphi^u(0) \\ D\varphi^s(0) & 1 \end{pmatrix} = 1$, d.h. aus dem Satz über Umkehrabbildungen folgt, dass φ lokal ein C^r-Diffeomorphismus ist.

Betrachten wir nun die Abbildung $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. $\tilde{f}$ ist wieder eine C^r-Abbildung und es gilt $\tilde{f}(0) = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} D\tilde{f}(0) = D((\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(0)) &= D\varphi(f \circ \varphi^{-1}(0)) \circ Df(\varphi^{-1}(0)) \circ D\varphi^{-1}(0) \\ &= D\varphi(f(0)) \circ Df(0) \circ 1 \\ &= 1 \circ Df(0) \circ 1 \\ &= Df(0) \\ &= A \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{f}$ ist um 0 lokal diffeomorph.

Weiterhin gilt, dass die lokale stabile Mannigfaltigkeit von $\tilde{f}$ eine Umgebung um 0 in E^s und die lokale unstabile Mannigfaltigkeit von $\tilde{f}$ eine Umgebung um 0 in E^u ist.

Wir können also jetzt immer annehmen, dass W^s_{loc} und W^u_{loc} eines Diffeomorphismus Umgebungen um den Fixpunkt im stabilen, respektiv unstabilen, Unterraum der Linearisierung des Diffeomorphismus sind.

[6]Jacques Salomon Hadamard, 1865-1963, französischer Mathematiker
[7]Oskar Perron, 1880-1975, deutscher Mathematiker

3 Das λ-Lemma

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$ so, dass $\|A^s\| \leq a < 1$ und $\|(A^u))^{-1}\| \leq a < 1$.

Lemma (λ-Lemma)**.** *Sei $B^s_{\zeta_s}(0) \subset W^s_{loc}(0) \subset E^s$, $B^u_{\zeta_u}(0) \subset W^u_{loc}(0) \subset E^u$ und $V = B^s_{\zeta_s}(0) \times B^u_{\zeta_u}(0)$ eine Umgebung um 0. Sei $q \in W^s_{loc}(0) \setminus \{0\}$ und D^u eine Scheibe mit $dim D^u = dim E^u$ und $D^u \pitchfork W^s_{loc}(0)$ in q. Sei $D^u_n \subset f^n(D^u) \cap V$ so, dass $f^n(q) \in D^u_n$. Dann gilt für ein gegebenes $\epsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : D^u_n$ ist ϵ-C^1-nahe $B^u_{\zeta_u}(0)$.*

Zu beachten ist, dass das λ-Lemma uns nicht nur sagt, dass wir uns $B^u_{\zeta_u}(0)$ beliebig nähern, sondern, dass wir dies auch noch stetig differenzierbar tun, will heissen, dass auch die Ableitungen beliebig klein werden.

Beweis. Wir wollen also zeigen, wie genau D^u nun gestaucht und gestreckt wird. Der Beweis hat eigentlich zwei Teile, wir zeigen zuerst, dass, wenn oft genug iteriert, beliebige Tangentialvektoren an $f^n(D^u)$ sich den Tangentialvektoren der unstabilen Mannigfaltigkeit bis auf ϵ nähern und dann, dass der Diameter dieser Vektoren auch echt größer wird.

In V gilt:

$$\begin{aligned}
&f(x_s, x_u) = (A^s x_s + \varphi_s(x_s, x_u), A^u x_u + \varphi_u(x_s, x_u)) \text{ mit} \\
&(Df)(0) = (A^s, A^u), x_s \in B^s_{\zeta_s}(0), x_u \in B^u_{\zeta_u}(0) \\
&\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_u}|_{B^u_{\zeta_u}(0)} = 0 = \frac{\partial \varphi_u}{\partial x_s}|_{B^s_{\zeta_s}(0)} (\text{„gerade gezogen“}) \\
&\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0,0) = 0 \text{ für } i, j = s, u
\end{aligned}$$

Wegen Stetigkeit $\exists k$ mit $0 < k < 1$, $a_1 = a + k < 1, b = (a^{-1} - k) > 1, k < \frac{(b-1)^2}{4}$ und $\exists V' \subset V$ so, dass $k \geq max_{V'} \|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\|, i, j = s, u$.

Sei jetzt $q \in V'$ und $B^u_{\zeta_u}(0)$ so, dass $B^u_{\zeta_u}(0) \subset V'$, also eventuell muss ζ_u kleiner gewählt werden. Sei $v_0 \in (TD^u)_q$ mit $\|v_0\| = 1$. In $V = B^s_{\zeta_s}(0) \times B^u_{\zeta_u}(0)$ können wir $v_0 = (v^s_0, v^u_0)$ schreiben. Sei λ_0 die Steigung von v_0, d.h. $\lambda_0 = \frac{\|v^s_0\|}{\|v^u_0\|}$, $\|v^u_0\| \neq 0$, da $D^u \pitchfork B^s_{\zeta_s}(0)$ in q.

Betrachten wir nun, was unter Iteration mit der Steigung λ_0 passiert, für $q \in B^s_{\zeta_s}(0)$. Betrachte hierfür:

$$\begin{aligned}
&q_1 = f(q), q_2 = f^2(q), \ldots, q_n = f^n(q) \\
&v_1 = Df_q(v_0), v_2 = Df_{q_1}(v_1), \ldots, v_n = Df_{q_{n-1}}(v_{n-1})
\end{aligned}$$

Für $q \in B^s_{\zeta_s}(0)$ gilt:

$$\begin{aligned}
Df_q(v_0) &= \begin{pmatrix} A^s + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_s}(q) & \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_u}(q) \\ \frac{\partial \varphi_u}{\partial x_s}(q) & A^u + \frac{\partial \varphi_u}{\partial x_u}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^s_0 \\ v^u_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^s v^s_0 + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_s}(q) v^s_0 + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_u}(q) v^u_0 \\ 0 + A^u v^u_0 + \frac{\partial \varphi_u}{\partial x_u}(q) v^u_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\|v_1^s\|}{\|v_1^u\|} = \frac{\|A^s v_0^s + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_s}(q) v_0^s + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_u}(q) v_0^u\|}{\|A^u v_0^u + \frac{\partial \varphi_u}{\partial x_u}(q) v_0^u\|}$

Aus

$\|v_1^s\| \leq a\|v_0^s\| + k\|v_0^s\| + k\|v_0^u\|$($\Delta$-Ungleichung)
$\|v_1^u\| \geq a^{-1}\|v_0^u\| - k\|v_0^u\|$(Umgekehrte Δ-Ungleichung, sowie obige Bedingungen an k)

folgt

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\leq \frac{\|v_0^s\|(a+k) + \|v_0^u\|k}{\|v_0^u\|(a^{-1}-k)} \\ &= \frac{\lambda_0(a+k)}{a^{-1}-k} + \frac{k}{a^{-1}-k} \\ &\leq \frac{\lambda_0 + k}{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lambda_2 = \frac{\|v_2^s\|}{\|v_2^u\|} &\leq \frac{\|v_1^s\|(a+k) + \|v_1^u\|k}{\|v_1^u\|(a^{-1}-k)} \\ &\leq \frac{\lambda_1 + k}{b} \\ &\leq \frac{\lambda_0}{b^2} + k\sum_{i=1}^{2} b^{-i}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_n = \frac{\|v_n^s\|}{\|v_n^u\|} \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + k\sum_{i=1}^n b^{-i} \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + \frac{k}{b-1}$

Beweis hiervon per Induktion und mit Hilfe der geometrischen Reihe:
$\lambda_1 \leq \frac{\lambda_0}{b} + k\sum_{i=1}^1 b^{-i}$
$\lambda_n \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + k\sum_{i=1}^n b^{-i}$

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1} \leq \frac{\lambda_n + k}{b} &\leq \frac{\frac{\lambda_0}{b^n} + k\sum_{i=1}^n b^{-i} + k}{b} \\ &= \frac{\lambda_0}{b^{n+1}} + k\sum_{i=2}^{n+1} b^{-i} + \frac{k}{b} \\ &= \frac{\lambda_0}{b^{n+1}} + k\sum_{i=1}^{n+1} b^{-i}\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_0}{b^n} = 0$ und $\frac{k}{b-1} < \frac{(b-1)^2}{4(b-1)} = \frac{b-1}{4}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_0 : \lambda_n \leq \frac{b-1}{4}$.

Wir haben also gezeigt, dass, wenn wir mit einem $q \in B_{\zeta_s}^s(0)$ starten, wir nach genügend Iterationen eine Steigung $\lambda_n \leq \frac{b-1}{4}$ kriegen. Jetzt wollen wir dann zeigen, dass alle Vektoren einer Teilmenge von TD_n^u nach genügend Iterationen eine beliebig kleine Steigung haben.

Sei $0 < k_1 < \min(\epsilon, k)$, sei $\delta < \epsilon$ und $B^s_{\delta\cdot\zeta_s}(0)$ ein Ball mit Radius $\delta \cdot \zeta_s$. Sei $V_1 = B^s_{\delta\cdot\zeta_s}(0) \times B^u_{\zeta_u}(0)$.

Wegen $\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_u}|_{B^u_{\zeta_u}(0)} = 0$, Stetigkeit und Kompaktheit von $B^u_{\zeta_u}(0)$ (eventuell ζ_u kleiner wählen und dann Abschluss betrachten) gilt dann: $k_1 \geq \max_{V_1} \|\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_u}\|$.

OBdA war v_0 so gewählt, dass λ_0 die größtmöglichste Steigung ist $\forall v \in (TD^u)_q$ mit $\|v\| = 1$.
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, q_{n_0} \in V_1$, $\forall n \geq n_0$, $\forall v \in (TD^u_n)_{q_n}, v \neq 0 : \lambda_n \leq \frac{b-1}{4}$.

Wegen der Stetigkeit von $(TD^u_{n_0})$ existiert ein $\tilde{D^u} \subset D^u_{n_0}$ mit Zentrum q_{n_0} so, dass $\lambda \leq \frac{b-1}{2}$ $\forall v \in (T\tilde{D^u})_p, \|v\| = 1, p \in \tilde{D^u}$.

Sei also nun $v \in (T\tilde{D^u})_p$, $p \in \tilde{D^u}$ beliebig. Wir können wieder $v = (v^s, v^u)$ schreiben und $\lambda_{n_0} = \frac{\|v^s\|}{\|v^u\|}$. Wir betrachten wieder die Veränderung der Steigung unter Iteration: $Df_p(v) = \begin{pmatrix} A^s v^s + \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_s}(q)v^s + \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_u}(q)v^u \\ \frac{\partial\varphi_u}{\partial x_s}(p)v^s + A^u v^u + \frac{\partial\varphi_u}{\partial x_u}(q)v^u \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\lambda_{n_0+1} &\leq \frac{a\|v^s\| + k\|v^s\| + k_1\|v^u\|}{a^{-1}\|v^u\| - k\|v^s\| - k\|v^u\|} \\
&= \frac{\|v^s\|(a+k) + \|v^u\|k_1}{\|v^u\|(a^{-1} - k) - \|v^s\|k} \\
&= \frac{\|v^u\|(\frac{\|v^s\|}{\|v^u\|}(a+k) + k_1)}{\|v^u\|(a^{-1} - k - \frac{\|v^s\|}{\|v^u\|}k)} \\
&\leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - \lambda_{n_0}} \\
&\leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{\frac{1}{2}(b+1)} \\
&= \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b_1}
\end{aligned}$$

mit $b_1 = \frac{1}{2}(b+1)$.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\lambda_{n_0+2} &\leq \frac{\lambda_{n_0+1} + k_1}{b_1} \\
&\leq \frac{\frac{\lambda_{n_0}+k_1}{b_1} + k_1}{b_1} \\
&= \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^2} + k_1 \sum_{i=1}^{2} b_1^{-i}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\lambda_{n_0+n} &\leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^n} + k_1 \sum_{i=1}^{n} b_1^{-i} \\ &\leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^n} + \frac{k_1}{b_1 - 1}\end{aligned}$$

Der Beweis funktionert wieder mit Induktion und geometrischer Reihe:
$\lambda_{n_0+1} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1} + k_1 \sum_{i=1}^{1} b_1^{-i}$
$\lambda_{n_0+n} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^n} + k_1 \sum_{i=1}^{n} b_1^{-i}$

$$\begin{aligned}\lambda_{n_0+n+1} &\leq \frac{\lambda_{n_0+n} + k_1}{b_1} \\ &\leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^{n+1}} + k_1 \sum_{i=2}^{n+1} b_1^{-i} + \frac{k_1}{b_1} \\ &= \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^{n+1}} + k_1 \sum_{i=1}^{n+1} b_1^{-i}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \tilde{n} : \lambda_{n+\tilde{n}} \leq \epsilon + \frac{\epsilon}{b_1-1} = \epsilon(1 + \frac{1}{b_1-1})$.

OBdA war v so gewählt, dass λ_{n_0} die maximale Steigung aller Einheitsvektoren in $(T\tilde{D^u})$ war. Sei $\tilde{D_n^u} := f^n(\tilde{D^u}) \cap V_1$.

$\Rightarrow$ Für gegebenes $\epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \bar{n}\ \forall v \in (T\tilde{D_n^u}) : \lambda \leq \epsilon$.

Jetzt wollen wir die Norm eines Vektors $v \in \tilde{D_n^u}$ vergleichen mit der von $Df_p(v)$: $(v_n^s, v_n^u) \mapsto Df(v_n^s, v_n^u) = (v_{n+1}^s, v_{n+1}^u)$.

$$\frac{\sqrt{\|v_{n+1}^s\|^2 + \|v_{n+1}^u\|^2}}{\sqrt{\|v_n^s\|^2 + \|v_n^u\|^2}} = \frac{\|v_{n+1}^u\|}{\|v_n^u\|} \frac{\sqrt{1+\lambda_{n+1}^2}}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}$$

Aus:

$$\|v_{n+1}^u\| \geq a^{-1}\|v_n^u\| - k\|v_n^s\| - k\|v_n^u\|$$

folgt:

$$\frac{\|v_{n+1}^u\|}{\|v_n^u\|} \geq a^{-1} - k - k\lambda_n$$

Da λ_n,λ_{n+1} beliebig klein sind, folgt, dass für Vektoren $\neq 0$ tangential zu $f^n(\tilde{D^u}) \cap V_1$, die Norm unter Iteration wächst und sich $b = a^{-1} - k > 1$ annähert, d.h., dass der Diameter von $f^n(\tilde{D^u}) \cap V_1$ wächst.

Diese beiden Sachen zusammen, also wachsender Diameter und die Tatsache, dass Tangentialvektoren beliebig kleine Steigung haben, implizieren, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so, dass für $n > n_0$: $f^n(\tilde{D^u}) \cap V_1$ ist C^1-ϵ-nahe $B_{\zeta_u}^u(0)$.

□

4 Fundamentalbereich und Korollare

Für die weitere Anwendung des λ-Lemmas brauchen wir den Begriff des Fundamentalbereiches, zunächst aber noch ein

Lemma. *Sei* $f^s := f|_{W_{loc}^s(0)}$
$\Rightarrow Df^s(0) = A^s$, $\|A^s\| \leq a < 1$
$\Rightarrow f^s$ *ist eine Kontraktion.*

Beweis. f ist stetig
$\Rightarrow$ f ist auf kompakter Menge Lipschitz[8]-stetig.
Df ist stetig
$\Rightarrow$ Df nimmt auf kompakter Menge (Minimum und) Maximum an, $\|A^s\| \leq a < 1$, dies ist aber gerade die Lipschitz-Konstante von f. (Mittelwertsatz) □

Sei jetzt B^s ein offener Ball um 0, dann ist nach obigem Lemma $f(\partial B^s) \subset B^s$. $(\partial B^s = \bar{B}^s \backslash B^s)$. Dies führt zu folgender

Definition. *Der Anulus*[9], $G^s(0) = \overline{B^s \backslash f(B^s)}$ *heißt Fundamentalbereich für* $W_{loc}^s(0)$. $\partial G^s(0) = \partial B^s \cup f(\partial B^s)$.

[8]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832-1903, deutscher Mathematiker
[9]Anulus, i, m: Siegelring, Ring

Bemerkung. Für den Fundamentalbereich gilt:

① $x \in W^s(0)\backslash\{0\} \Rightarrow$ Jede Trajektorie von x trifft $G^s(0)$ mindestens einmal und maximal zweimal $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(G^s(0)) = W^s(0)\backslash\{0\}$

② $x \in G^s(0)^\circ \Rightarrow f^n(x) \notin G^s(0) \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

Wir brauchen noch eine weitere Definition.

Definition. *Eine Umgebung $N^s(0)$, engl. neighbourhood, um $G^s(0)$, mit $N^s(0) \cap W^u_{loc}(0) = \emptyset$, heißt fundamentale Umgebung für die stabile Mannigfaltigkeit um 0.*

Bemerkung. $G^u(0)$ und $N^u(0)$ sind analog definiert.

Jetzt wo wir die neuen Definitionen haben, können wir die Früchte unserer Arbeit, und der Plackerei mit den Abschätzungen, ernten und zwei Korollare einsammeln.

Korollar 1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Seien $p_1, p_2, p_3 \in M$ hyperbolische Fixpunkte eines C^r-Diffeomorphismus f. Wenn $W^u(p_1) \pitchfork W^s(p_2)$ und $W^u(p_2) \pitchfork W^s(p_3)$, dann ist auch $W^u(p_1) \pitchfork W^s(p_3)$.*

Beweis. Sei q_{23} transversaler Schnittpunkt von $W^u(p_2)$ und $W^s(p_3)$. Sei $D_2 \subset W^u(p_2)$, mit $p_2 \in D_2$ und $q_{23} \in D_2$. Da D_2 einen transversalen Schnittpunkt mit $W^s(p_3)$ hat, $\exists \epsilon > 0$ so, dass $\tilde{D_2} \in B_\epsilon(D_2)$ auch einen transversalen Schnittpunkt mit $W^s(p_3)$ hat. Dies gilt wegen Stabilität der Transversalität unter glatten Abbildungen.

Sei q_{12} transversaler Schnittpunkt von $W^u(p_1)$ und $W^s(p_2)$, sei $D_1 \subset W^u(p_1)$ so, dass $p_1 \in D_1$ und $q_{12} \in D_1$.

Wir können also das λ-Lemma auf D_1 anwenden, d.h. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\tilde{D_1} \subset f^{n_0}(D_1) \in B_\epsilon(D_2)$, d.h. es gibt $q_{13} \in \tilde{D_1} \cap W^s(p_3)$.

Da $W^u(p_1)$ invariant ist unter f, ist $f^{n_0}(D_1) \subset W^u(p_1)$
$\Rightarrow q_{13}$ ist tranversaler Schnittpunkt von $W^u(p_1)$ und $W^s(p_3)$. □

Korollar 2. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ hyperbolischer Fixpunkt eines C^r-Diffeomorphismus f und sei $N^s(p)$ eine fundamentale Umgebung von $W^s(p)$. Sei U eine Umgebung um p.*

Dann gilt: $U\backslash W^u_{loc}(p) \subset \bigcup_{n\geq 0} f^n(N^s(p))$.

Beweis. Wie bereits bemerkt gilt: $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(G^s(p)) = W^s(p)\backslash\{p\}$ und $G^s(p) \subset N^s(p)$. Das λ-Lemma sagt uns dann, dass alle Punkte in $U\backslash W^u_{loc}(p)$ zu einer bestimmten Iteration einer Scheibe gehören, welche transversal zu $G^s(p)$ und in $N^s(p)$ enthalten ist. □

5 Fundamentalbereich und Flüsse

Wir wollen nun zeigen, dass das λ-Lemma auch auf Flüsse angewendet werden kann, d.h. wir wollen das λ-Lemma für Vektorfelder beweisen und zwar mit Hilfe des λ-Lemmas für Diffeomorphismen.

Lemma. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ hyperbolische Singularität für $X \in X^r(M)$ und φ der Fluss des Vektorfeldes. Sei $B^s \subset W^s_{loc}(p)$ und $B^u \subset W^u_{loc}(p)$ und $V = B^s \times B^u$ eine Umgebung um p. Sei $q \in W^s_{loc}(p) \setminus \{p\}$ und D^u eine Scheibe mit $dim D^u = dim W^u_{loc}(p)$ und $D^u \pitchfork W^s_{loc}(p)$ in q. Sei $D^u_t := \varphi^t(D^u) \cap V$ so, dass $\varphi^t(q) \in D^u_t$.*

Für ein gegebenes $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $t_0 > 0$ so, dass für $t > t_0$ gilt: D^u_t ist C^1-ϵ-nahe B^u.

Beweis. Wir haben das λ-Lemma für Diffeomorphismen, d.h. für diskrete Zeit schon bewiesen. Es bleibt also jetzt noch zu zeigen, dass es auch für stetigen Zeitfluss gilt.

Sei also $p \in M$ eine hyperbolische Singularität, seien $W^u_{loc}(p)$ und $W^s_{loc}(p)$ die unstabile, resp. stabile, lokale Mannigfaltigkeit von p. Sei D^u eine Scheibe welche zu $W^s_{loc}(p)$ transversal ist, mit $dim D^u = dim W^s_{loc}(p)$ und $q \in W^s_{loc}(p)$ und $q \in D^u$, q beliebig.

Sei $K = \{\varphi^t(q) : 0 < t < 1, q \in \partial B^s(p) \subset W^s_{loc}(p) \text{ mit } \partial B^s(p) \pitchfork X \text{ in } W^s_{loc}(p)\}$, K kompakt (cf. Fundamentalbereich für Diffeomorphismen). Weil φ C^r ist und weil $W^s_{loc}(p)$ invariant ist unter φ, sind die Scheiben $D^u(\varphi^t(q)) = \varphi^t(D^u)$ welche $\varphi^t(q)$ enthalten, transversal zu $W^s_{loc}(p)$.

Setze also $f := \varphi^1$, d.h f ist der induzierte Diffeomorphismus an $t = 1$.
$\Rightarrow$ p ist hyperbolischer Fixpunkt für f und $W^s_{loc}(p)$, $W^u_{loc}(p)$ für f sind die gleichen wie für das Vektorfeld.

Sei $x \in K$ beliebig, sei $D^u_n(x)$ die Komponente von $f^n(D^u(x)) \cap V$ welche $f^n(x)$ enthält. Nach dem λ-Lemma für Diffeomorphismen gilt nun, dass für ein gegebenes $\epsilon > 0$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass für $n > n_0$ gilt, dass $D^u_n(x)$ ϵ-C^1-nahe B^u ist. $\square$

Bevor wir uns Anwendungen des λ-Lemmas ansehen, wollen wir noch den Begriff des Fundamentalbereiches für Flüsse definieren.

Definition. *Sei $X \in X^r(M)$ ein Vektorfeld, p hyperbolische Singularität, $W^s_{loc}(p)$ die lokale stabile Mannigfaltigkeit um p. Sei $B^s(p) \subset W^s_{loc}(p)$ ein Ball so, dass die Sphäre $G^s(p) = \partial B^s(p)$ transversal zum Vektorfeld in $W^s_{loc}(p)$ ist.*

Dann heißt $G^s(p)$ Fundamentalbereich für $W^s_{loc}(p)$.

Bemerkung. Zuerst noch zwei Bemerkungen:

① Analoges gilt für die lokale unstabile Mannigfaltigkeit.

② Wegen $\lim_{t\to\infty}(\varphi^t) = 0$ und $\lim_{t\to-\infty}(\|\varphi^t\|) = \infty$ gilt, dass jede Bahn den Fundamentalbereich schneidet und wegen Transversalität gilt dann, dass es genau einen Schnittpunkt gibt.

6 Grobman-Hartman, Faserung und strukturelle Stabilität

In der Vorlesung haben wir das λ-Lemma gebraucht, um zu zeigen, dass homokline transversale Schnittpunkte Chaos erzeugen. Wir wollen hier nun mit Hilfe des λ-Lemmas das lokale Verhalten von dynamischen Systemen untersuchen. Nach der Vorlesung wissen wir, dass wir, weg von Singularitäten, das Vektorfeld gerade ziehen können, d.h. wir können eine Koordinatentransformation durchführen so, dass das transformierte System in einer Umgebung um q, mit $f(q) \neq 0$, konstant ist (Flow-Box Theorem). Die einzig interessante Frage ist also die, nach dem Verhalten von dynamischen Systemen in der Nähe einer Singularität. Eine solche Untersuchung des lokalen Verhaltens in der Nähe einer Singularität lieferte der Satz von Grobman-Hartman.

Der Satz von Grobman-Hartman sagte uns, dass ein Diffeomorphismus in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes homöomorph zu seiner Linearisierung ist, d.h. für Vektorfelder, dass, lokal um eine Singularität, ein Vektorfeld homöomorph zu seiner Linearisierung ist. Das Problem aber ist, dass wir das wirklich nur homöomorph hinkriegen, also nur stetig, nicht aber stetig-differenzierbar, d.h. es bleiben, bei Koordinatentransformation, nicht alle Informationen über das System erhalten. So ist zum Beispiel die Transversalität unter stetigen Abbildungen nicht stabil und auch die Eigenwerte müssen nicht erhalten bleiben (beide stellen Bedingungen an die Ableitung und diese müssen unter Stetigkeit nicht erhalten bleiben). Dies wollen wir „verbessern“ und wollen versuchen, wenigstens ein paar Informationen zu retten.

Die Idee ist jetzt, nicht zu versuchen, alles zu linearisieren, sondern uns z.B. auf die Lösungen zu beschränken, die wirklich in die Singularität „reinlaufen“. Im linearen Fall sind dies natürlich diejenigen Lösungen die in E^s liegen. Eine Untersuchung dieser Lösungen im nicht linearen Fall lieferte dann der Satz über die lokale stabile Mannigfaltigkeit, dessen Beweis vom Satz von Grobman-Hartman unabhängig ist(!), und welcher besagt, dass wir zwar keinen Unterraum haben in dem diese Lösungen liegen, dass dieser aber auch nur „verbogen“ wird, d.h. wir haben eine Mannigfaltigkeit, welche alle Lösungen enthält die gegen die Singularität laufen.

Und eben diese Idee wollen wir nun aufgreifen und versuchen, den Satz von Grobman-Hartman dahingehend zu verändern, dass wir wenigstens z.B. die Lösungen die wirklich in die Singularität reinlaufen lokal C^r zur Linearisierung konjugieren können. Diese Überlegungen führen dann zu folgendem Satz:

Satz 1 (Grobman-Hartman)**.** *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ eine hyperbolische Singularität eines Vektorfeldes $X \in X^r(M)$.*

Dann gibt es eine Umgebung U um p und eine stetige Abbildung $\pi_s : U \to B^s$, wobei $B^s = U \cap W^s_{loc}(p)$ eine Scheibe ist welche p enthält, mit folgenden Eigenschaften:

① $\pi_s^{-1}(p) = B^u = U \cap W^u_{loc}(p)$ *ist eine Scheibe, welche p enthält.*

② $\forall x \in B^s : \pi_s^{-1}(x)$ *ist eine C^r-Untermannigfaltigkeit von M, welche transversal zu $W^s_{loc}(p)$ am Punkt x ist.*

③ π_s *ist eine C^r-Abbildung bis auf Punkte in B^u.*

④ π_s *definiert eine Faserung, welche invariant unter dem Fluss von X ist, d.h. für $t \to 0$ gilt: $\pi_s^{-1}(\varphi^t(x)) \subset \varphi^t(\pi_s^{-1}(x))$.*

Beweis. Wir können wieder annehmen, dass X ein Vektorfeld über einer Umgebung V um 0 in $R^m = E^s \oplus E^u$ ist, mit 0 als hyperbolische Singularität. (mit Hilfe einer lokalen Karte). Ausserdem ist dann $W^s_{loc}(0) \subset E^s$ offen und $W^u_{loc}(0) \subset E^u$ auch, mit $0 \in W^s_{loc}(0)$ und $0 \in W^u_{loc}(0)$.

Sei $B^u \subset E^u$ ein Ball welcher 0 enthält. Für B^u klein genug ist der Zylinder $G^s(0) \times B^u$ transversal zum Vektorfeld.

In diesem Zylinder gibt es eine C^r-Abbildung $\pi_s : G^s(0) \times B^u \to W^s_{loc}(0)$ und zwar die Projektion auf E^s und $\forall x \in G^s(0)$ gilt, dass die Fasern $\pi_s^{-1}(x)$ transversale Scheiben zu $W^s_{loc}(0)$ sind. Wir haben den Satz also schon fast bewiesen, wir müssen es noch auf Punkte auf B^s erweitern. Nach Korollar 2 des λ-Lemma gilt aber:
$U \backslash E^u \subset \bigcup_{t \geq 0} \varphi^t(G^s(0) \times B^u)$ für eine Umgebung U um 0.

Sei $x \in U \cap E^u$: $\pi_s(x) = 0 \Rightarrow$ (1).

Sei $x \in U \backslash E^u$: $\exists t > 0$: $\varphi^{-t}(x) \in G^s(0) \times B^u$. Definiere nun $\pi_s(x) = (\varphi^t \circ \pi_s \circ \varphi^{-t})(x)$ $\Rightarrow$ (2).

Nach dem λ-Lemma ist π_s stetig für Punkte aus E^u. In $U \backslash E^u$ ist π_s eine C^r-Abbildung $\Rightarrow$ (3). Punkte aus E^u fliessen „nur auf der unstabilen Mannigfaltigkeit“, d.h. die kriegen wir nicht in $G^s(0) \times B^u$. □

Bemerkung. Ein ähnlicher Beweis gilt auch für Diffeomorphismen.

Mit Hilfe der eben definierten Faserung wollen wir uns nun ansehen, was passiert, wenn wir ein bisschen am Vektorfeld „wackeln“. Dazu brauchen wir zuerst noch eine neue Definition.

Definition. *Ein System $\dot{x} = f(x, \mu)$ heißt strukturell stabil in μ, falls es ein $\epsilon > 0$ gibt so, dass $\dot{x} = f(x, \mu)$ und $\dot{x} = f(x, \bar{\mu})$ topologisch äquivalent sind für alle $\bar{\mu} \in B_\epsilon(\mu)$.*

M.a.W. es existiert ein Homöomorphismus, welcher die Flüsse der beiden Systeme konjugiert.

Ist ein System für ein $\bar{\mu}$ nicht strukturell stabil, so bezeichnet man dies als Bifurkation des Systems in $\bar{\mu}$.

Satz ohne Beweis (Theorem von Andronov[10]-Pontryagin[11] (1937)). Ein ebenes dynamisches System ist strukturell stabil $\Leftrightarrow$

① Alle Singularitäten des Systems sind hyperbolisch.

② Alle periodischen Bahnen sind hyperbolisch (Poincaré-Abbildung hat keinen Eigenwert 1).

③ Es gibt keine Lösung, die zum selben Sattel zurückgeht oder zwei verschiedene Sattel verbindet, d.h. stabile und unstabile Separatrizen sind zusammenhängend.

Beweis. Der Beweis benutzt die Klassifizierung aller Trajektorien eines ebenen dynamischen Systems mit Hilfe des Satzes von Poincaré-Bendixson. Die Hinrichtung ist „einleuchtend“ und einige dieser Ideen wurden auch schon in der Vorlesung aufgegriffen (cf. Floquet[12]-Multiplikatoren). Das Interessante an diesem Satz ist, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind (und dies ist auch der weitaus schwierigere Teil des Beweises). □

Bemerkung. Die letzte Bedingung kann man auch anders formulieren: Es gibt weder homokline noch heterokline Bahnen.

Jetzt wollen wir aber auch noch etwas beweisen. Wir wollen all das, was wir jetzt gelernt haben benutzen, um zu zeigen, dass eine hyperbolische Singularität lokal strukturell stabil ist.

Erinnerung. Index: $\eta(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}, a \notin |\gamma|, \eta(\gamma, a) \in \mathbb{Z}, \eta(-\gamma, a) = -\eta(\gamma, a),$ $\eta(\gamma, a) = 0$ im Außengebiet).

Satz 2. *Eine hyperbolische Singularität ist lokal strukturell stabil.*

Beweis. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ eine hyperbolische Singularität für $X \in X^r(M)$. Sei N eine Umgebung um X so, dass $\forall Y \in N$ gilt, dass $p_y \in B_\epsilon(p)$ eine hyperbolische Singularität, vom gleichen Index wie p, für Y ist. Sei φ der Fluss von X und $\tilde{\varphi}$ der Fluss von Y.

Seien $h^s : W^s_{loc}(p) \to W^s_{loc}(p_y)$ und $h^u : W^u_{loc}(p) \to W^u_{loc}(p_y)$ Homöomorphismen, welche die Flüsse von X und Y konjugieren.

Dafür wollen wir h^s und h^u zuerst auf einem Fundamentalbereich definieren und dann mit Hilfe der Flüsse auf $W^s_{loc}(p)$ bzw. $W^u_{loc}(p)$ erweitern.

[10] Alexandr Aleksandrovich Andronov, Russischer Physiker, 1901-1952
[11] Lev Pontryagin, Russischer Mathematiker, 1908-1988
[12] Achille Marie Gaston Floquet, 1847-1920, französischer Mathematiker

Sei also $G^s(p)$ ein Fundamentalbereich für $W^s_{loc}(p)$ und $G^u(p), G^s(p_y), G^u(p_y)$ analog, diese sind transversal zu X bzw. Y.

Sei $x \in W^s_{loc}(p)$, wie bereits bemerkt trifft die Bahn von x $G^s(p)$ genau einmal. Sei $h^s : G^s(p) \to G^s(p_y)$ ein Homöomorphismus, z.B. $h^s(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$.

Wir wollen h^s auf $W^s_{loc}(p)$ erweitern. Setze $h^s(p) = p$. Für $x \in W^s_{loc}(p) \setminus \{p\}$ $\exists! t \in \mathbb{R}$ mit $\varphi^{-t}(x) \in G^s(p)$. Setze also $h^s(x) = (\tilde{\varphi}^t \circ h^s \circ \varphi^{-t})(x)$.

Ist dies h^s der von uns gesuchte Homöomorphismus? Es gilt: $\tilde{\varphi}^{-t} h^s = h^s \varphi^{-t}$, d.h. unser h^s konjugiert die Flüsse schonmal.

Dass h^s invertierbar ist, folgt daraus, dass φ und $\tilde{\varphi}$ Flüsse, also C^r sind, und, dass h^s auf $G^s(p)$ ein Homöomorphismus war.

Bleibt noch zu zeigen, dass sowohl h^s als auch $(h^s)^{-1}$ stetig sind.

Sei dafür $x \in W^s_{loc}(p) \setminus \{p\}$ beliebig. Sei $\{x_n\}$ eine Folge welche gegen x konvergiert. Wähle nun $t_n, t_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi^{-t_n}(x_n) \in G^s(p)$ und $\varphi^{-t_0}(x) \in G^s(p)$.

$$\begin{aligned}
\text{Da } \varphi, \tilde{\varphi} \text{ stetig } &\Rightarrow t_n \to t_0 \text{ und } \varphi^{-t_n}(x_n) \to \varphi^{-t_0}(x) \\
&\Rightarrow h^s(x_n) = (\tilde{\varphi}^{t_n} \circ h^s \circ \varphi^{-t_n})(x_n) \to (\tilde{\varphi}^{t_0} \circ h^s \circ \varphi^{-t_0})(x) = h^s(x) \\
&\Rightarrow h^s \text{ stetig.}
\end{aligned}$$

Das gleiche Argument zeigt auch die Stetigkeit von $(h^s)^{-1}$, da $\varphi^{-1}, \tilde{\varphi}^{-1}$ stetig sind.

Bleibt noch zu zeigen, dass h^s und $(h^s)^{-1}$ auch in p stetig sind.

Wegen $\lim_{t\to\infty} \tilde{\varphi}^t(y) = p_y$ für $y \in G^s(p_y)$ und wegen Kompaktheit von $G^s(p_y)$ folgt, dass es für ein gegebenes $\epsilon > 0$ ein t_ϵ gibt so, dass $\tilde{\varphi}^t(y) \in B_\epsilon(p_y)$ $\forall t > t_\epsilon$.

Da aber $\varphi^t(p) = p$ $\forall t$ $\exists \delta > 0$ so, dass für $x \in B_\delta(p)$ und $\varphi^{-t} \in G^s(p)$ gilt, dass $t > t_\epsilon$
$\Rightarrow \|h^s(x)\| = (\tilde{\varphi}^{t_\epsilon} \circ h^s \circ \varphi^{-t_\epsilon})(x) \in B_\epsilon(p_y)$ für $x \in B_\delta(p)$
$\Rightarrow h^s$ stetig in p.

Das gleiche Argument gilt auch für $(h^s)^{-1}$.

Ueber Umkehrung des Zeitflusses gelten die Argumente auch für h^u und $(h^u)^{-1}$.
$\Rightarrow h^s$ und h^u sind Homöomorphismen, welche die Flüsse von X und Y konjugieren.

Betrachten wir nun die Faserung welche durch $\pi^X_s : U_p \to W^s_{loc}(p)$,
$\pi^X_u : U_p \to W^u_{loc}(p)$, $\pi^Y_s : U_{p_y} \to W^s_{loc}(p_y)$, $\pi^Y_u : U_{p_y} \to W^u_{loc}(p_y)$, gegeben ist.

Für $q \in U_p$ setze $h(q) = \tilde{q}$ mit $\tilde{q}$ so, dass $\pi^Y_s(\tilde{q}) = h^s(\pi^X_s(q))$ und $\pi^Y_u(\tilde{q}) = h^u(\pi^X_u(q))$.
$\Rightarrow$h ist ein Homöomorphismus welcher die Flüsse von X und Y konjugiert.

Die vorhin definierte Faserung liefert ein stetiges Koordinatensystem in welchem Flüsse als Produkt dargestellt werden und so ist $h = h^s \oplus h^u$.

$\square$