Der Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer

nach "Differential Topology", V.Guillemin/A.Pollack, Kapitel 2, §5 (S.85-91)

OSTROVSKI Georg, BELLOT Gilles

14. Januar 2007

1 Einleitung

Der klassische Jordansche Kurvensatz besagt, dass jede einfach geschlossene Kurve im R^2 den Raum in zwei disjunkte Teile zerlegt, das „Innere“ und das „Äussere“ der Kurve. Dieses Ergebnis schien so offensichtlich, dass niemand sich die Mühe machte, den Satz aufzuschreiben oder gar ihn zu beweisen. Der Satz trägt den Namen von Camille Jordan[1], da das Ergebnis zum ersten Mal 1887 als Satz in dessen Buch „Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique“ erschien. Jordan empfand es als recht schwer den Satz zu beweisen und tatsächlich ist der Beweis in seinem Buch einfach falsch. Der erste korrekte Beweis vom Jordanschen Kurvensatz stammt von Oswald Veblen[2] aus dem Jahre 1905. L.E.J. Brouwer[3] untersuchte später, was in höheren Dimensionen passiert und zeigte im Jahre 1912:

Jordan-Brouwer Zerlegungssatz. *Das Komplement einer kompakten, zusammenhängenden Hyperfläche X im R^n besteht aus zwei zusammenhängenden offenen Mengen, dem Äußeren und dem Inneren. Der Abschluss des Inneren ist eine kompakte Mannigfaltigkeit, deren Rand gleich X ist.*

M.a.W: Die kompakte zusammenhängende Hyperfläche X teilt den R^n in zwei disjunkte Teile, das Innere und das Äußere.

Dieser Satz wird uns jetzt im Folgenden beschäftigen. Wir werden einen Beweis konstruieren, der uns auch ein schönes Verfahren liefern wird, wie man recht schnell herausfinden kann, ob ein bestimmter Punkt innen oder aussen liegt.

[1] Französischer Mathematiker, 1838-1922
[2] US-Amerikanischer Mathemiker, 1880-1960
[3] Niederländischer Mathematiker, 1881-1966; Luitzen Egbertus Jan Brouwer, bekannt als Bertus

2 Definitionen

Sei nun X eine eine kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit $\dim X = n-1$ und $f : X \to R^n$ eine glatte Abbildung. Insbesondere interessiert uns der Fall, dass f die Inklusionsabbildung einer Hyperfläche[4] in den R^n ist. Wir wollen uns ansehen, wie X von f im R^n „verbogen“ wird. Sei also $z \in R^n$ nicht im Bild von f. Um zu sehen, wie $f(X)$ sich um z windet, schauen wir uns an wie oft der Einheitsvektor

$$u_{f,z}(x) := \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}$$

der die Richtung von z nach $f(x)$ angibt, in eine bestimmte Richtung zeigt.

Bemerkung. Wir werden im Folgenden vereinfacht auch u_f oder u schreiben, soweit z und f aus dem Kontext heraus klar sind.

Aus dem Kapitel „Intersection Theory“ wissen wir, dass $u : X \to S^{n-1}$ fast jeden Wert gleich oft mod 2 annimmt (fast jede Richtung gleich oft mod 2 trifft) nämlich $\deg_2(u)$ mal:

$$\deg_2(u) = \#u^{-1}(\vec{v}) \text{ für fast alle } \vec{v} \in S^{n-1} \text{ (genauer: für alle regulären Werte } \vec{v} \text{ von } u)$$

Dank dieser Tatsache ist folgender Begriff wohldefiniert:

Definition 1. $W_2(f, z) := \deg_2(u)$ *ist die mod-2-Windungszahl von* f *um* z.

Bemerkung. $W_2(X, z)$ ist die mod-2-Windungszahl der Inklusionsabbildung von X.

Sei nun X der Rand einer kompakten Mannigfaltigkeit D mit Rand und sei $F : D \to R^n$ eine glatte Fortsetzung von f.

Bemerkung. Wir schreiben $F|_X$ als $\partial F = f$.

Bevor wir uns den Zerlegungssatz vorknöpfen können, brauchen wir noch eine weitere Definition, die uns später viel Schreibarbeit ersparen wird.

Definition 2. *Sei* X *wie gehabt,* $x \in X, z \in R^n \backslash X$.
$V(x, z) :=$ *„x ist durch eine (stetige) Kurve in X^c mit z verbindbar“ (d.h. x und z liegen in der gleichen Wegzusammenhangskomponente von X^c)*
$V^\circ(x, z) :=$ *„$\forall$ offene Umgebung U um $x \in X \exists y \in U \backslash X : V(y, z)$“*

[4]eine Hyperfläche ist eine Fläche mit Kodimension 1

3 Den Weg frei kämpfen

Bewaffnet mit dem Begriff der mod-2-Windungszahl und einigen topologischen Grundbegriffen, werden wir nun folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Sei X der Rand von D, einer n-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand, $F : D \to R^n$ eine glatte Fortsetzung von f und z ein regulärer Wert von F mit $z \notin im(f)$. Dann ist $F^{-1}(z)$ endlich und $W_2(f, z) = \#F^{-1}(z)$ mod 2, d.h. modulo 2 windet f X so oft um z, wie z Urbildpunkte hat.*

Der Beweis gliedert sich in folgende 5 Punkte:

① $z \notin im(F) \Rightarrow W_2(f, z) = 0$

② $F^{-1}(z)$ endlich

③ $D' := D \backslash \bigcup U_i$ kompakt, dabei $\{y_1, ..., y_s\} = F^{-1}(z)$, $U_i \subseteq D$ offene, paarweise und von X disjunkte Umgebungen um y_i; $\partial D' := X \cup \bigcup \partial U_i$

④ $W_2(f, z) = \sum W_2(f_i, z)$ mod 2, mit $f_i := F|_{\partial U_i}$

⑤ $W_2(f_i, z) = 1\ \forall i$

Beweis. ①

$$
\begin{aligned}
&F(x) \neq z \forall x \in D \\
&\Rightarrow u_f \text{ kann stetig zu } u_F \text{ fortgesetzt werden (denn } u_F \text{ ist wohldefiniert)} \\
&\Rightarrow \deg_2(u_f) = 0 \text{ (S.81, „Intersection Theory“)}
\end{aligned}
$$

② **$F^{-1}(z)$ ist endlich:**

$$
\begin{aligned}
\{z\} \text{ abgeschlossen } &\Rightarrow F^{-1}(z) \text{ abgeschlossen} \\
&\Rightarrow F^{-1}(z) \text{ kompakt, als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{z regulärer Wert} &\Rightarrow DF_z \text{ surjektiv (als lineare Abb. } R^n \to R^n) \\
&\Rightarrow DF_z \text{ Isomorphmismus}
\end{aligned}
$$

D.h. für beliebiges $y_\alpha \in F^{-1}(z)$ $\exists$ offene Umgebung $U_\alpha \subseteq D$ von y_α und eine offene Umgebung V_α um z, so dass $F|_{U_\alpha}$: $U_\alpha \to V_\alpha$ diffeomorph ist. Diese U_α liefern also eine offene Überdeckung von $F^{-1}(z)$, diese besitzt wegen Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung. Da in jedem U_α nur ein $y_\alpha \in F^{-1}(z)$ enthalten ist ($F|_U$ ist diffeomorph, also insbesondere bijektiv), gibt es also auch nur endlich viele y_α.

③ **Sei $F^{-1}(z) = \{y_1, ..., y_s\}$. Seien U_i offene Umgebungen um y_i, die paarweise und von X disjunkt sind (geht, da es nur endlich viele gibt, und keines der y_i auf X liegt). Dann ist $D' := D \backslash \bigcup U_i$ ebenfalls kompakt:**

$$\begin{aligned}
\text{D kompakt} &\Rightarrow \text{D abgeschlossen}\\
&\Rightarrow D^c \text{ offen}\\
&\Rightarrow D^c \cup U_i \text{ offen}\\
&\Rightarrow (D^c \cup U_i)^c \text{ abgeschlossen}\\
&\Rightarrow D \cap U_i^c \text{ abgeschlossen}\\
&\Rightarrow D \backslash U_i \text{ abgeschlossen, da } U_i \subseteq D \ \forall i\\
&\Rightarrow D \backslash \bigcup U_i =: D' \text{ abgeschlossen (und beschränkt) und } \partial D' := X \cup \bigcup \partial U_i
\end{aligned}$$

④ Sei $F' := F|_{D'}$, $f' := \partial F' = F|_{\partial D'} = F|_{X \cup \bigcup \partial U_i}$ und $f_i := F|_{\partial U_i} = f'|_{\partial U_i}$ Dann gilt:

- D' erfüllt mit $X \cup \bigcup \partial U_i$ als Rand und den Abbildungen F', f' die gleichen Voraussetzungen wie D, X, F, f in 1.), daher gilt: $W_2(f', z) = 0$, weil $z \notin \operatorname{im}(F')$ und $f' = \partial F'$
- Für fast alle $\vec{v} \in S^{n-1}$ gilt:

$$\begin{aligned}
W_2(f', z) = \deg_2(u_{f'}) = \#u_{f'}^{-1}(\vec{v}) \mod 2 &= (\#u_f^{-1}(\vec{v}) + \sum_{i=1}^{s} \#u_{f_i}^{-1}(\vec{v})) \mod 2\\
&\Rightarrow 0 = (\#u_f^{-1}(\vec{v}) + \sum \#u_{f_i}^{-1}(\vec{v})) \mod 2\\
&\Rightarrow \deg_2(u_f) = \sum \deg_2(u_{f_i}) \mod 2\\
&\Rightarrow W_2(f, z) = \sum W_2(f_i, z) \mod 2
\end{aligned}$$

⑤ Wir wählen jetzt die U_i (paarweise und von X disjunkt) nötigenfalls durch Verkleinerung so, dass $F(U_i) =: B_i$ Bälle um z ergeben. (Für U_i klein genug ist $F|_{U_i} \colon U_i \to B_i$ dann ein Diffeomorphismus - siehe (2)).

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow F(\partial U_i) = \partial B_i = S^{n-1} \text{ (um } z\text{, Radius nicht von Bedeutung) - bijektiv}\\
&\Rightarrow u_{f_i} : \partial U_i \to S^{n-1} \text{ ist bijektiv}\\
&\Rightarrow \deg_2(u_{f_i}) = 1\\
&\Rightarrow W_2(f_i, z) = 1
\end{aligned}$$

Aus (4) und (5) folgt nun:

$$W_2(f,z) = \sum_{i=1}^{s} W_2(f_i,z) \mod 2 = s \mod 2 = \#F^{-1}(z) \mod 2$$
$$\Rightarrow f \text{windet } X \text{ so oft um } z, \text{ wie } z \text{ Urbildpunkte hat} \mod 2$$

□

4 Jordan-Brouwer Zerlegungssatz

Sei nun X eine kompakte, zusammenhängende Hyperfläche im R^n. Wenn X den R^n wirklich in ein „Inneres“ und ein „Äusseres“ teilen sollte, dann müsste X der Rand einer kompakten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit sein, nämlich dem „Inneren“. In diesem Fall besagt der so eben bewiesene Satz (angewendet auf die Inklusionsabbildung der Mannigfaltigkeit), dass, wenn $z \in R^n \backslash X$, $W_2(X, z)$ entweder 0 oder 1 ist, je nachdem ob z im „Inneren“ oder im „Äusseren“ liegt (denn dann ist z im Bild bzw. nicht im Bild der Inklusionsabbildung). Diese Überlegungen führen zum

Satz 2 (Jordan-Brouwer Zerlegungssatz)**.** *Das Komplement einer kompakten, zusammenhängenden Hyperfläche X im R^n besteht aus zwei zusammenhängenden offenen Mengen, dem „Äusseren“ D_0 und dem „Inneren“ D_1. Weiterhin ist $\bar{D}_1$ eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial \bar{D}_1 = X$.*

Der Beweis des Satzes gliedert sich wieder in mehrere Teilpunkte:

① Sei $z \in X^c$ beliebig. Dann gilt $V^\circ(x, z)\ \forall x \in X$.

② X^c hat höchstens zwei Zusammenhangskomponenten.

③ Seien $z_0, z_1 \in X^c$. Wenn beide in der gleichen Komponente liegen, gilt: $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$.

④ Sei $z \in X^c$, $\vec{v} \in S^{n-1}$ ein Richtungsvektor und $r := \{z + t\vec{v} : t \geq 0\}$ der Strahl an z in Richtung $\vec{v}$. Dann ist r genau dann transversal zu X, wenn $\vec{v}$ ein regulärer Wert der Richtungsabbildung $u : X \to S^{n-1}$ ist. In diesem Kontext ist „r transversal zu X“ gleichbedeutend mit der Aussage „in den Schnittpunkten ist r nicht tangential zu X“. (Insbesondere ist also fast jeder solche Strahl r transversal zu X)

⑤ Sei nun r so ein (zu X transversaler) Strahl an z_0, der mit X einen nicht-leeren Schnitt besitzt. Die Schnittmenge ist endlich. Sei z_1 ein weiterer Punkt auf r mit $z_1 \notin X$ und sei l die Anzahl der Schnittpunkte von r mit X zwischen z_0 und z_1, dann gilt: $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \mod 2$.

⑥ X^c hat genau zwei Zusammenhangskomponenten:
$D_0 := \{z : W_2(X, z) = 0\}$ und $D_1 := \{z : W_2(X, z) = 1\}$.

⑦ Für betragsmäßig große z gilt: $W_2(X, z) = 0$.

⑧ Zusammenfassung und Beweis des Satzes.

Beweis. ① **Für beliebiges $z \in X^c$ gilt $V^\circ(x,z)\ \forall x \in X$:**

Sei M die Menge aller $x \in X$, für die $V^\circ(x,z)$ gilt, für beliebiges aber festes z. Wir zerlegen den Teilbeweis nochmal in drei Teile:

(a) M **ist nicht leer:**

$$\text{Sei } d : X \to R$$
$$x \mapsto dist(x,z) = \|x - z\|$$

Da X kompakt ist, nimmt d auf X sein Minimum an. Sei also $x_0 \in X$ so, dass $d(x_0)$ minimal ist, d.h. $\|x_0 - z\| := \min_X \|x - z\|$. Man sieht nun, dass die Verbindungsstrecke von x_0 und z die geforderte Eigenschaft erfüllt, d.h. es gilt $V^\circ(x_0, z)$.

(Angenommen $\gamma(t) := tx_0 + (1-t)z$ schneidet X im Punkt y
$\Rightarrow \|y - z\| = \|tx_0 + z - tz - z\| = \|t(x_0 - z)\| = t\|x_0 - z\| < \|x_0 - z\|$ für $t \in [0,1)$ $\lightning$)

(b) M **ist abgeschlossen** ($\Leftrightarrow M^c := X \backslash M$ offen):
Sei $x \in M^c$ beliebig

$\Rightarrow \neg V^\circ(x,z)$
$\Rightarrow \exists$ offene Umgebung U um x, so dass $\forall x' \in U \backslash X : \neg V(x', u)$
Sei U so eine Umgebung um x
$\Rightarrow \forall \widehat{x} \in U \cap X$ ist U weiterhin eine solche offene Umgebung, so dass $\forall x' \in U \backslash X : \neg V(x', z)$
$\Rightarrow \neg V(\widehat{x}, z) \forall \widehat{x}$ in offener Umgebung um x
$\Rightarrow M^c$ offen
$\Rightarrow M$ abgeschlossen

(c) M **ist offen:**
Dies ist etwas schwieriger zu zeigen. Sei $x_0 \in M$ beliebig. Da X eine Hyperfläche ist, gibt es einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ mit offener Umgebung U um x_0 und V um $v_0 := \varphi(x_0)$ so, dass $\varphi(U \cap X) = (R^{n-1} \times \{0\}) \cap V$ (oBdA so gewählt, dass V ein offener Ball ist, nötigenfalls durch Einschränken immer möglich).
Wir wollen zeigen: $V^\circ(x,z)$ (d.h. $x \in M$) $\forall x \in U \cap X$.
Sei also $x \in U \cap X$ beliebig und $v := \varphi(x)$, weiterhin U' eine beliebige offene Umgebung um x ($\Rightarrow U' \cap U$ offene Umgebung um $x \in X$). Wir wissen, $\exists y_0 \in U \backslash X : V(y_0, z)$ (Bemerkung: $w_0 := \varphi(y_0) \notin R^{n-1} \times \{0\}$). Es können nun zwei Fälle eintreten:

i. $w_0 \in R^{n-1} \times R^-$, wähle dann $w \in W^- := \varphi(U' \cap U) \cap (R^{n-1} \times R^-)$
ii. $w_0 \in R^{n-1} \times R^+$, wähle dann $w \in W^+ := \varphi(U' \cap U) \cap (R^{n-1} \times R^+)$

Betrachte nun die Kurve

$$\begin{aligned}\gamma : [0,1] &\to V \\ t &\mapsto tw_0 + (1-t)w\end{aligned}$$

Ihre Spur liegt entweder komplett in $V \cap (R^{n-1} \times R^-)$ oder in $V \cap (R^{n-1} \times R^+)$, schneidet also nicht $R^{n-1} \times \{0\}$.

$\Rightarrow \varphi^{-1} \circ \gamma$ Kurve in $U \backslash X$, die y_0 mit $\varphi^{-1}(w) =: y \in U' \cap U$ verbindet
$\Rightarrow V(y, y_0) \wedge V(y_0, z)$
$\Rightarrow V(y, z)$
$\Rightarrow V^\circ(x, z)$, da $y \in U'$ und U' beliebige Umgebung von x

$\Rightarrow V^\circ(x, z) \forall x \in U \cap X$, also $U \cap X \subseteq M$
$\Rightarrow M$ offen

Wir wissen also, dass M nicht-leer, offen und abgeschlossen ist. Aus Analysis I wissen wir aber: $M \subseteq X$ offen und abgeschlossen $\Rightarrow M = \emptyset$ oder $M = X$.
Also gilt $M = X$ und damit $V^\circ(x, z) \forall x \in X$.

② X^c **hat höchstens zwei Zusammenhangskomponenten:**

Sei $x_0 \in X$ beliebig. Wie oben sei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus mit $\varphi(X \cap U) = (R^{n-1} \times \{0\}) \cap V$. Da Diffeomorphismen den (Weg-)Zusammenhang erhalten, gilt mit $V^+ := V \cap (R^{n-1} \times R^+)$, $V^- := V \cap (R^{n-1} \times R^-)$, $V_0 := V \cap (R^{n-1} \times \{0\})$:

$\varphi^{-1}(V^+) =: U^+$ ist zusammenhängend und
$\varphi^{-1}(V^-) =: U^-$ ist zusammenhängend

φ bijektiv, $V = V^+ \dot\cup V^- \dot\cup V_0$
$\Rightarrow U = U^+ \dot\cup U^- \dot\cup (U \cap X)$

Zusammen mit (1) folgt nun:

$\forall z \in X^c \exists y \in U \backslash X : V(y, z)$, dabei $y \in U^+ \dot\cup U^-$
$\Rightarrow \forall z \in X^c : (\exists y \in U^+ : V(y, z) \vee \exists y \in U^- : V(y, z))$
$\Rightarrow X^c$ kann höchstens zwei Zusammenhangskomponenten besitzen

③ **Für zwei Punkte z_0, z_1 der gleichen Zusammenhangskomponente von X^c gilt $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$:**

Seien z_0, z_1 aus der gleichen Zusammenhangskomponente.
Wähle beliebige Kurve $z : [0,1] \to X^c, z(0) = z_0$ und $z(1) = z_1$.

Definiere $H : [0,1] \times X \to S^{n-1}$ mit $H(t,x) = \frac{x-z(t)}{|x-z(t)|}$ (wohldefiniert, da $z(t) \notin X$).

$$\Rightarrow H(0,x) = \frac{x-z_0}{|x-z_0|} =: u_0(x) \ \wedge H(1,x) = \frac{x-z_1}{|x-z_1|} =: u_1(x)$$

$\Rightarrow H$ ist Homotopie zwischen u_0 und $u_1 : X \to S^{n-1}$

$\Rightarrow \deg_2(u_0) = \deg_2(u_1)$ nach Satz aus „Intersection Theory“ (S.81)

$\Rightarrow W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$

④ **Sei $z \in X^c$, $\vec{v} \in S^{n-1}$ ein Richtungsvektor und $r := \{z + t\vec{v} : t \geq 0\}$ der Strahl an z in Richtung $\vec{v}$. r ist genau dann transversal zu X, wenn $\vec{v}$ ein regulärer Wert der Richtungsabbildung $u : X \to S^{n-1}$ ist:**

Zunächst sei folgendes Ergebnis aus „Transversality“ (S.33, Nr. 7) zitiert:
$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ glatt, $g \pitchfork W$ mit W Untermannigfaltigkeit von Z
Dann gilt: $f \pitchfork g^{-1}(W) \Leftrightarrow g \circ f \pitchfork W$

Definiere
$$g : R^n \backslash \{z\} \to S^{n-1},\ g(x) := \frac{x-z}{|x-z|}$$

$\Rightarrow u = g \circ i : X \to S^{n-1}$ wobei i die Inklusionsabbildung von X ist

Außerdem gilt $g \pitchfork \{\vec{v}\}$ ($\{\vec{v}\}$ ist hier als 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von S^{n-1} zu verstehen), denn:

$$g \pitchfork \{\vec{v}\}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{im}(dg(x)) + T_{g(x)}\{\vec{v}\} = T_{g(x)}S^{n-1} \forall x \in g^{-1}(\vec{v})$$

Letzteres gilt, da $\mathrm{im}(dg(x)) = T_{g(x)}S^{n-1} \forall x$ (g ist Submersion) und $T_{g(x)}\{\vec{v}\} = \{0\}$.
Nach dem eben zitierten Satz gilt also:

$$i \pitchfork g^{-1}(\vec{v}) \Leftrightarrow u \pitchfork \{\vec{v}\}$$

Da $\{\vec{v}\}$ 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, heißt $u \pitchfork \{\vec{v}\}$ aber nichts anderes, als dass u Submersion in allen Punkten $u^{-1}(\vec{v})$ sein muss, also dass v regulärer Wert von u ist. Beachtet man noch $X \pitchfork g^{-1}(\vec{v}) :\Leftrightarrow i \pitchfork g^{-1}(\vec{v})$, folgt:

$$X \pitchfork g^{-1}(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{v} \text{ regulärer Wert von } u$$

Wegen $g^{-1}(\vec{v}) = r$ folgt sofort die Behauptung.

⑤ **Sei $r = \{z_0 + t\vec{v} : t \geq 0\}$ ein zu X transversaler Strahl an z_0, der mit X einen nicht-leeren Schnitt besitzt. Die Schnittmenge ist endlich. Sei z_1 ein weiterer Punkt auf r mit $z_1 \notin X$ und sei l die Anzahl der Schnittpunkte von r mit X zwischen z_0 und z_1, dann gilt:**

$W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \mod 2$**:**

Definiere zunächst

$$u_i : X \to S^{n-1}, u_i(x) := \frac{x - z_i}{|x - z_i|} \text{ für } i = 0, 1$$

Es gilt $r \cap X = u_0^{-1}(\vec{v})$. Aus der „Intersection Theory“ (oder alternativ mit dem Stack of Records Theorem), wissen wir, dass $\#u_0^{-1}(\vec{v})$ (und damit auch $\#(r \cap X)$) endlich und (mod 2) gleich $\deg_2(u_0) = W_2(X, z_0)$ ist, da nach (4) $\vec{v}$ regulärer Wert von u_0 ist. Ebenso gilt $W_2(X, z_1) = \#u_1^{-1}(\vec{v}) \mod 2$. Bemerkung:

$$u_1^{-1}(\vec{v}) = (r \cap X) \backslash \{z \in r \cap X : z \text{ zwischen } z_0 \text{ und } z_1\}$$

Mit l als der Anzahl dieser Schnittpunkte zwischen z_0 und z_1 gilt also:

$$\#u_0^{-1}(\vec{v}) = \#u_1^{-1}(\vec{v}) + l$$
$$\Rightarrow W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \mod 2$$

⑥ X^c **hat genau zwei Zusammenhangskomponenten,**
$D_0 := \{z : W_2(X, z) = 0\}$ **und** $D_1 := \{z : W_2(X, z) = 1\}$**:**

Wähle $z_0 \in X^c$ beliebig und einen beliebigen Strahl $r = \{z_0 + t\vec{v} : t \geq 0\}$ so, dass $r \cap X \neq \emptyset$ und $r \pitchfork X$ (dies geht, da nach (4) $r \pitchfork X$ für fast alle $\vec{v} = \frac{x - z_0}{|x - z_0|}$, $x \in X$ gilt).

$$r \cap X = \{p_1, ..., p_s\} = \{z_0 + t_1\vec{v}, ..., z_0 + t_s\vec{v}\}\,, \text{ oBdA } t_1 < ... < t_s$$

Wähle $t \in (t_1, t_2)$ beliebig (im Fall $s = 1$ ein beliebiges $t > t_1$) und definiere $z_1 := z_0 + t\vec{v}$. Dann ist p_1 einziger Schnittpunkt von r und X zwischen z_0 und z_1 und es gilt:

$\Rightarrow W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + 1 \mod 2$ (wegen (5))
$\Rightarrow D_0, D_1 \neq \emptyset$
$\Rightarrow X^c$ hat genau mind. zwei Zusammenhangskomponenten.
$\Rightarrow X^c$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten wegen (2).

⑦ **Für betragsmäßig genügend großes** z **gilt** $W_2(X, z) = 0$**:**

X kompakt
$\Rightarrow X$ beschränkt in R^n
$\Rightarrow \exists a, b \in R^n$ so, dass $X \subseteq [a, b]$ (n-dimensionaler Quader)
Wähle $z \notin [a, b]$ beliebig ($\Rightarrow z \notin X$), betrachte u_z
$\Rightarrow$ OBdA $\operatorname{im}(u) \subseteq S^{n-1} \cap (R^{n-1} \times R^+)$
$\Rightarrow \forall \vec{v} \in S^{n-1} \cap (R^{n-1} \times R^-) : \#u^{-1}(\vec{v}) = 0$
Da $\#u^{-1}(\vec{v}) = deg_2(u) = W_2(X, z)$ für fast alle $\vec{v}$ gleich ist, gilt $W_2(X, z) = 0$
$\Rightarrow \forall z \notin [a, b] : W_2(X, z) = 0$

⑧ Letztlich bleibt uns nur noch, die Beweisteile zusammenzubauen und ihnen den letzten „Schliff“ zu geben:

X kompakt, insbesondere also abgeschlossen
$\Rightarrow D_0 \cup D_1 = X^c$ offen
$\Rightarrow D_0, D_1$ offen (disjunkt, ergeben vereinigt keine zusammenhängende Menge)

D_1 beschränkt nach (7)
$\Rightarrow \bar{D}_1$ kompakt

$R^n = D_0 \dot{\cup} D_1 \dot{\cup} X$, D_0 offen
$\Rightarrow \partial \bar{D}_1 \subseteq X$

Nach (1) gibt es in jeder off. Umgebung eines jeden Punktes $x \in X$
Punkte aus D_1
$\Rightarrow X \subseteq \partial \bar{D}_1$, also insgesamt $X = \partial \bar{D}_1$

Nun bleibt lediglich noch zu zeigen, dass $\bar{D}_1$ wirklich (berandete) Mannigfaltigkeit ist. Da D_1 offen ist, muss man dazu nur noch passende Parametrisierungen für Umgebungen um Punkte in $\partial \bar{D}_1$ finden.
Sei also $x \in \partial \bar{D}_1 = X$ beliebig. Da X Hyperfläche ist, gibt es eine offene Umgebung U von x, ein offenes $V \subseteq R^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$, sodass gilt: $\varphi(U \cap X) = V \cap (R^{n-1} \times \{0\})$.
Definiere: $V^+ := V \cap (R^{n-1} \times R^+)$, $V^- := V \cap (R^{n-1} \times R^-)$
Aus (1) wissen wir schon: $\varphi^{-1}(V^+)$, $\varphi^{-1}(V^-)$ sind (weg-)zusammenhängend.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \varphi^{-1}(V^+) \subseteq D_1, \varphi^{-1}(V^-) \subseteq D_0 \text{ oder andersrum}\\
&\Rightarrow \varphi^{-1}(V \cap (R^{n-1} \times R^{\geq 0})) \subseteq \bar{D}_1\\
&\Rightarrow \varphi^{-1} \text{ parametrisiert Rand von } \bar{D}_1\\
&\Rightarrow \bar{D}_1 \text{ kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand}
\end{aligned}$$

□

Nebenbei liefert uns der Beweis des Zerlegungssatzes noch eine einfache Methode festzustellen, ob ein gegebener Punkt $z \notin X$ innerhalb oder außerhalb von X liegt:

Satz 3. *Sei $z \in X^c$ und r ein zu X transversaler Strahl an z. Dann ist z genau dann innerhalb von X wenn die Schnittmenge von r und X eine ungerade Anzahl von Elementen besitzt.*

Beweis. Sei $z \notin X$, $r = \{z + t\vec{v} : t \geq 0\}$ ein zu X transversaler Strahl an z. Nach (7) wissen wir: Für genügend großes T gilt mit $z_T := z + T\vec{v}$: $W_2(X, z_T) = 0$. Da X beschränkt ist, kann man annehmen, dass alle Schnittpunkte von r und X zwischen z und z_T liegen, es gelte $l := \#(r \cap X)$. Nach (5) gilt $W_2(X, z) = W_2(X, z_T) + l \bmod 2$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
&z \text{ innerhalb von } X \\
&\Leftrightarrow z \in D_1 \\
&\Leftrightarrow W_2(X, z) = 1 \\
&\Leftrightarrow l \bmod 2 = 1 \\
&\Leftrightarrow l = \#(r \cap X) \text{ ungerade}
\end{aligned}$$

□