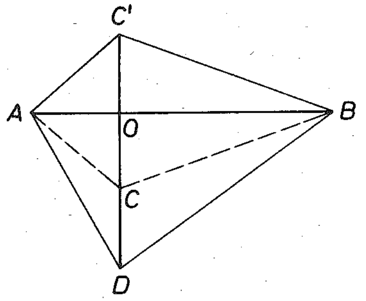
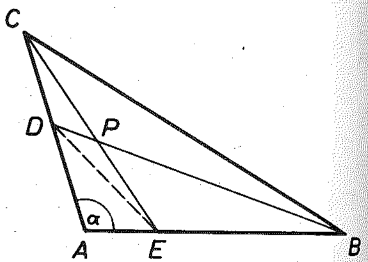
1690. Legyen az OD félegyenes pontja C. Ekkor a $CO<DO$ feltétel miatt C az OD szakasz pontja. Az AOC, esetleg elfajuló, háromszög derékszögű, így $ACO\sphericalangle<90°$, ezért $ACD\sphericalangle>90°$, így $AD>AC$.
Hasonlóan $BD>BC$. Ezek összege: $AD+BD > AC+BC$.
Ha O a CD belső pontja, akkor C-nek O-ra való tükrözésével a megoldás az előbbi esetre visszavezethető (**1690.** ábra).



1690



1691

1691. $\alpha\geq 90°$, így az ABD háromszögben $BD>BA$, valamint az AEC háromszögben $CE>AC$.
Ezért $BD+CE > BA+AC = (BE+EA)+(AD+DC) = BE+DC+$ $+(EA+AD)$.
Az AED háromszögben $EA+AD > ED$.
Ezért $BD+CE > BE+ED+DC$.
(**1691.** ábra).

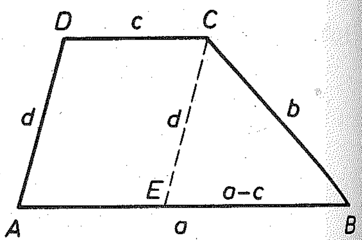
1692. Az $ABCD$ trapézban $a\parallel c$ és a feltétel szerint

$a+b = c+d$.

Feltehető, hogy $a\geq c$.
Legyen $CDAE$ paralelogramma. Itt $E\in AB$, valamint

$AE=c$, $EB = a-c$ és $EC=d$.

Ezért $c+d = a+b = c+EB+b$.
Ebből következik, hogy $d = EB+b$.
Ez csak úgy lehet, ha $B=E$.
Tehát $ABCD$ paralelogramma.
(**1692.** ábra).



1692

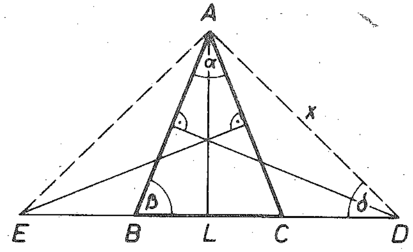
1693. D az AB felezőmerőlegesének pontja. Ezért $AD=BD$. Az ABC és ADB egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlőek, így ezek a háromszögek hasonlóak. $\delta=\alpha$. Az $ALD\triangle$-ből

$$\frac{\frac{1}{2}DE}{AD} = \cos\delta = \cos\alpha,$$

azaz

$$\frac{DE}{AD} = 2\cos\alpha \text{ következik.}$$

(**1693.** ábra).



1693

1694. Az n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2} = 54$.

Ebből $n>0$ miatt $n=12$.

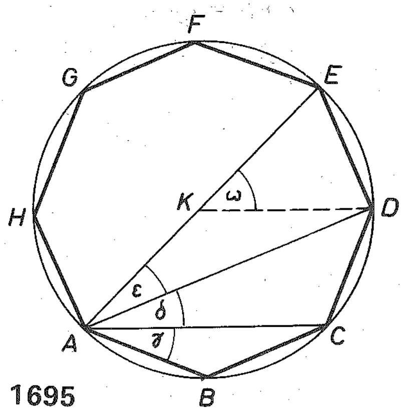
Az n oldalú szabályos sokszög egy szöge: $\alpha = \frac{(n-2)180°}{n}$.

Ezért: $\alpha = \frac{10\cdot 180°}{12} = 150°$.

(Vagy: az n oldalú szabályos sokszög egy oldalához tartozó középponti szög $\frac{360°}{n}$, itt $\frac{360°}{12} = 30°$. A 12 oldalú szabályos sokszög egy szöge: $180°-30° = 150°$.)

1695. A K középpontú, KE sugarú kör egyenlő íveihez ($\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}=$stb.) tartozó középponti szög $\frac{360°}{8} = 45°$, ezeken az íveken nyugvó kerületi szögek $\gamma=\delta=\varepsilon=\ldots = \frac{45°}{2} = 22{,}5°$.

Ezek egyúttal az A-ból induló szomszédos átlók által bezárt szögek. Az A-ból induló bármely 2 átló hajlásszöge $n\cdot 22{,}5°$, ahol $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
(Pl. AB és AD szöge $2\cdot 22{,}5° = 45°$, AB és AH szöge $6\cdot 22{,}5° = 135°$.)
(**1695.** ábra).



1695

1696. Ismert, hogy a háromszög belső és a hozzá tartozó külső szögfelezői merőlegesek egymásra. Ezért, ha a belső szögfelezők metszéspontja K és az ABC háromszög külső szögfelezői által meghatározott háromszög $A'B'C'$, az $A'BKC$ négyszög húrnégyszög.

Ezért $\alpha' = 180° - \omega$. De a KBC háromszögben $\omega = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) =$

$= 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$, tehát $\alpha' = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Ugyanúgy $\beta' = 90° - \frac{\beta}{2}$,

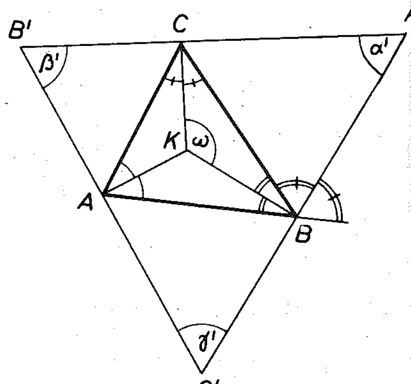
$\gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Megjegyzés: $\alpha' + \beta' + \gamma' =$

$= 90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} + 90° -$

$- \frac{\gamma}{2} = 180°$.

(**1696.** ábra).



1696

1697. A megoldást paraméteresen lásd az **1698**-as feladatnál. Ha $\alpha = 66°$, $\beta = 72°$, akkor $\gamma = 42°$, így a hatszög két-két szemköztes szöge: $90° + 33° = 123°$, $90° + 36° = 126°$, $90° + 21° = 111°$. (*Megjegyzés:* teljesül a szögösszegre az $(n-2)180° = 720°$.)

1698. A szögfelezők metszéspontja: K. K-nak a BC oldal felezőpontjára, F-re vonatkozó tükörképe A'. A középpontos tükrözés miatt $KBA'C$ paralelogramma.
Ezért a megfelelő háromszögek belső szögösszege alapján:

$$\alpha' = \omega_a = 180° - \frac{\beta+\gamma}{2} = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Ugyanúgy: $\beta' = \omega_b = 90° + \frac{\beta}{2}$,

$$\gamma' = \omega_c = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

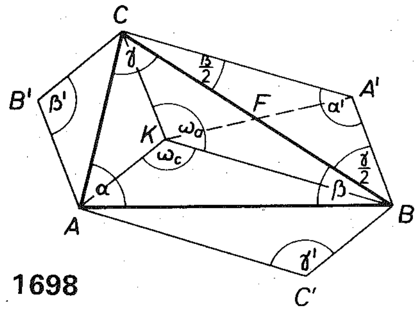
A további szögek az ABC háromszög belső szögfelezői és megfelelő oldalai által bezárt szögek váltószögeként adódik. Így

$$B'AC'\sphericalangle = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2},$$

$$C'BA'\sphericalangle = \beta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90° + \frac{\beta}{2},$$

$$A'CB'\sphericalangle = \gamma + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

(**1698.** ábra).



1698

1699. Jelöljük φ-vel a két belső szögfelező hajlásszögét. φ az ABF háromszög külső szöge, ezért $\varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180° - \gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{85°}{2} = 47{,}5°$.
(**1699.** ábra).

1700. Az AOB háromszögben $AOB\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180° - \frac{180° - \gamma}{2} =$

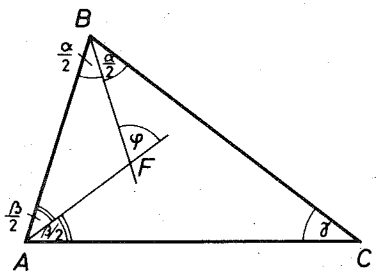
$= 90° + \frac{\gamma}{2} = 126°$.
(**1700.** ábra).

1701. Az AOB háromszögben (**1700.** ábra).

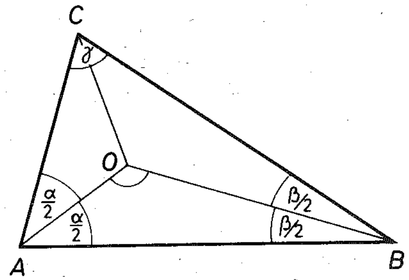
$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 145° = 180°$,

$\alpha + \beta = 180° - \gamma = 70°$,

$\gamma = 110° > 90°$, tehát az
ABC háromszög tompaszögű.



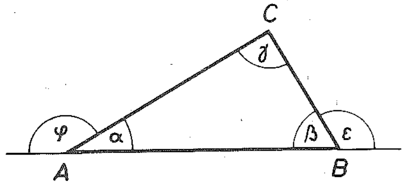
1699



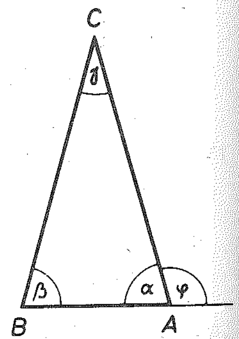
1700

1702. Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = (n-2)180°$. A konvex sokszög külső szögei a belső szögek mellékszögei, ezért ezek összege $(180°-\alpha_1)+(180°-\alpha_2)+\ldots+(180°-\alpha_n) = n180°-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) = n180°-(n-2)180° = 360°$, tehát független n-től.

1703. Legyen φ az α-nak, ε a β-nak mellékszöge.
Ezért $\alpha+\varphi = 180°$ (I) és $\beta+\varepsilon = 180°$ (II). A feltételek szerint
$\varphi=5\alpha$ (III) és $\varepsilon=2\beta$ (IV).
I és III-ból $\alpha=30°$,
II és IV-ből $\beta=60°$.
Minthogy $\alpha+\beta = 90°$, a harmadik szög $\gamma=90°$, tehát a háromszög derékszögű.
(**1703.** ábra).



1703



1704

1704. A feltételből adódik $\alpha=\beta$ és $\varphi=3{,}5\gamma$, ahol φ az α mellékszöge. Másrészt $\varphi = \gamma+\beta$, mert φ az ABC háromszög külső szöge. Az ABC háromszög belső szögeinek összege $180° = 2\beta+\gamma = 5\gamma+\gamma = 6\gamma$. Innen $\gamma=30°$, $\alpha=\beta=75°$.
(**1704.** ábra).

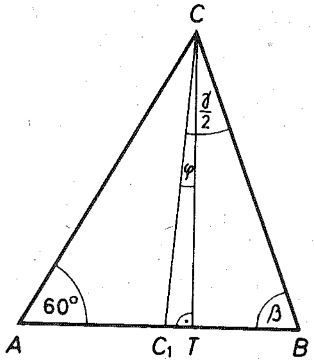
1705. Ha $\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$, akkor $0°<\beta<90°$ áll fenn. Van olyan háromszög, amelynek szögei

1) ε, φ, $180°-(\varepsilon+\varphi)$,

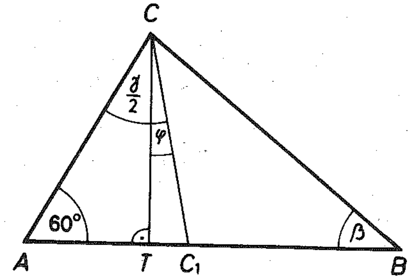
2) $90°-\varepsilon$, $90°-\varphi$, $\varepsilon+\varphi$,

ahol ε, φ tetszőlegesen kicsi,
azaz β szög tetszőlegesen megközelítheti a 0°-ot és a 90°-ot is.

1706. *a)* Ha $\beta=60°$, akkor $\varphi=0°$.
b) Ha $\beta>60°$: az ábra jelöléseit alkalmazva az ATC, ill. BTC derékszö-



1706b



1706c

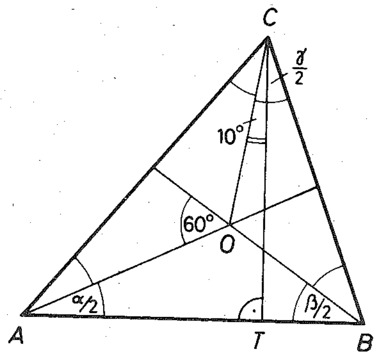
gű háromszögben $\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right)+60° = 90°$, ill. $\left(\frac{\gamma}{2}-\varphi\right)+\beta = 90°$. A két egyenlet különbsége: $2\varphi+60°-\beta = 0°$, azaz: $\varphi = \frac{\beta}{2}-30°$. (**1706.***b)* ábra).

c) Ha $\beta<60°$: a BTC, ill. ATC derékszögű háromszögben $\left(\frac{\gamma}{2}+\varphi\right)+\beta = 90°$, ill. $60°+\left(\frac{\gamma}{2}-\varphi\right) = 90°$. A két egyenlet különbsége $2\varphi+\beta-60° = 0°$, azaz $\varphi = 30°-\frac{\beta}{2}$. (**1706.***c)* ábra).

Összefoglalva a 3 esetet: $\varphi = \left|30°-\frac{\beta}{2}\right|$.

1707. Az AOB háromszög egyik külső szöge 60°. Ezért
$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2} = 60°$, így $\gamma=60°$.

A CTB háromszögben
$\frac{\gamma}{2}-10°+\beta = 90°$, ebből $\beta=70°$ s végül $\alpha=50°$ adódik (**1707.** ábra).



1707

1708. Tegyük fel $\alpha > \beta \geq \gamma$. Ennek megfelelően jelöljük a háromszög szögeit. A feltétel szerint $\beta = 3\varphi$, $\gamma = 2\varphi$, valamint $\alpha = 2(\beta+\gamma) = 10\varphi$.
A háromszög szögeinek összege: $\alpha+\beta+\gamma = 15\varphi = 180°$.
Ebből $\varphi = 12°$,

$\alpha = 120°$, $\beta = 36°$, $\gamma = 24°$.

1709. Ismert, hogy az n-szög (belső) szögeinek összege $(n-2)180°$.
Így $1560° = (n-2)180° + \alpha$, ahol α a sokszög egyik külső szöge és nyilván $\alpha < 180°$.
Minthogy $1560° = 8 \cdot 180° + 120°$, így $n-2 = 8$ miatt 10 oldalú a sokszög.

1710. A feltétel szerint APB, BPC, CPA háromszögek egyenlő szárúak, azaz P az ABC háromszög köré írható körének középpontja. A kerületi és középponti szögek összefüggése alapján

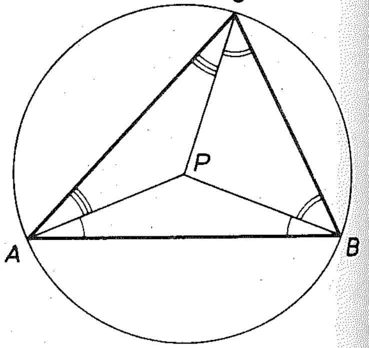
$APB\sphericalangle = 2\gamma$, amiből $PAB\sphericalangle = 90° - \gamma = \alpha + \beta - 90°$,

$BPC\sphericalangle = 2\alpha$, $\quad PBC\sphericalangle = 90° - \alpha$,

$CPA\sphericalangle = 2\beta$, $\quad PCA\sphericalangle = 90° - \beta$.

(**1710.** ábra).

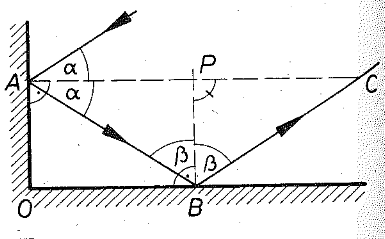
Megjegyzés: a feladat a kerületi-középponti szögek összefüggése nélkül is megoldható.



1710

1711. Ismert, hogy a beesési és visszaverődési szög egyenlő. Az először beérkező és másodjára visszaverődő sugarak lehetnek *a)* ellentétes irányúak, vagy *b)* egyező irányúak.

a) A feltétel szerint $2\alpha + 2\beta = 180°$, azaz $\alpha + \beta = 90°$.
Az $AOBP$ négyszög húrnégyszög, ezért $AOB\sphericalangle = BPC\sphericalangle$.
Minthogy ez utóbbi az ABP háromszög külső szöge,
$AOB\sphericalangle = \alpha + \beta$.
Ebből következik, hogy a két síktükör merőleges egymásra (**1711.***a)* ábra).

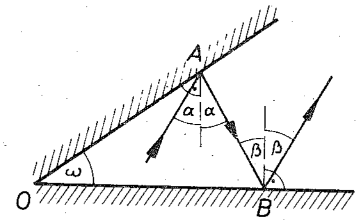


1711a

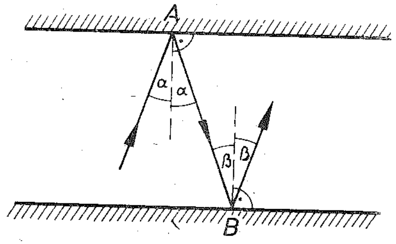
b) A feltétel szerint az ábrán váltószögek szerepelnek, így $2\alpha = 2\beta$, amiből $\alpha = \beta$.

Az AOB háromszögnek B-nél lévő külső szöge:
$90° + \beta = \omega + 90° + \alpha$, ezért $\omega = 0°$.

Ez azt jelenti, hogy a két tükör párhuzamos (az AOB háromszög nem jön létre) (**1711.** *b), c)* ábra).

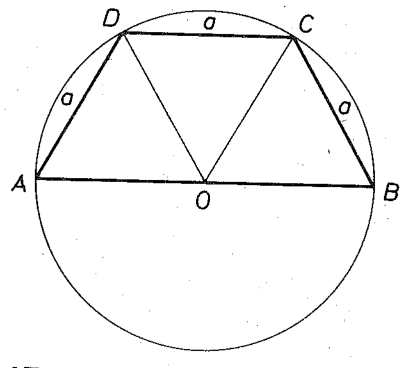


1711b

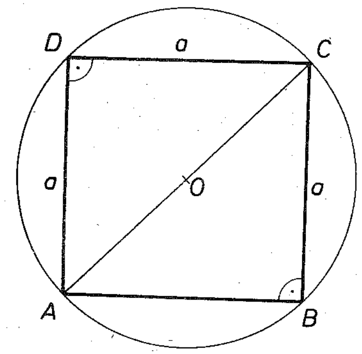


1711c

1712. Ha a trapéz két csúcsát összekötő egyenes áthalad a köréírt kör középpontján, akkor ez vagy *a)* az AB oldal ($AB > CD$), vagy *b)* pl. az AC átló egyenese lehet.
a) $AD = DC = CB$ miatt $AOD\sphericalangle = DOC\sphericalangle = COB\sphericalangle = 60°$.
Így a trapéz szögei 60° és 120° (**1712.***a)* ábra).
b) Thalesz tétele szerint $ADC\sphericalangle = 90°$, $ABC\sphericalangle = 90°$, ezért $\alpha = 90°$, tehát $ABCD$ négyszög téglalap, sőt $AD = DC$ miatt négyzet (**1712.***b)* ábra).
A feladatban szereplő trapéz vagy olyan szimmetrikus trapéz, melynek hegyesszöge 60°, vagy négyzet.



1712a

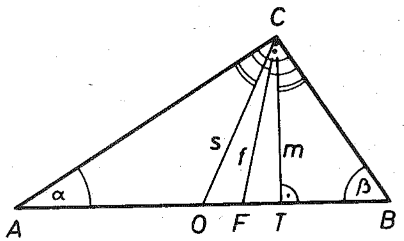


1712b

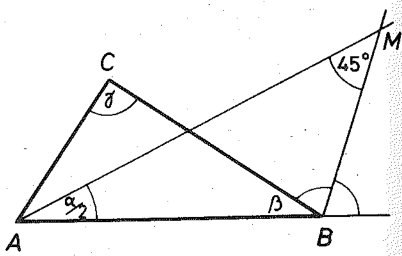
1713. Jelöljük az $ABCD$ négyszög szögeit rendre α, β, γ és δ-val. A feltétel szerint $\alpha+\beta = \gamma+\delta$.
Minthogy a négyszög belső szögeinek összege 360°, így $\alpha+\beta = \gamma+\delta =$ $= 180°$. Ebből $AD \| BC$ következik, tehát ennek a négyszögnek van két párhuzamos oldala, azaz trapéz.

1714. Az AB oldal kétszer akkora, mint a vele párhuzamos középvonal. Ezért a feltétel szerint $AB = AC$, a háromszög egyenlő szárú, alapja BC, melynek felezőmerőlegese éppen az A-ból induló szögfelező.

1715. A BCT derékszögű háromszögben $BCT\sphericalangle = 90°-\beta = \alpha$ és az AOC egyenlő szárú háromszögben $OCA\sphericalangle = \alpha$. Így az f-re vonatkozó szimmetria miatt f felezi a TCO szöget is (**1715.** ábra).



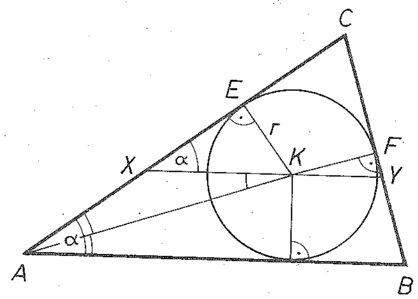
1715



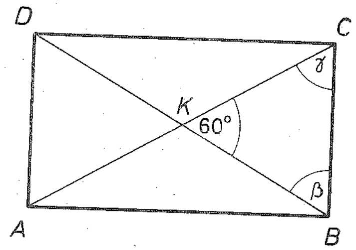
1716

1716. Mivel BM külső szögfelező, ezért $CBM\sphericalangle = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Az ABM háromszög szögösszege $\dfrac{\alpha}{2}+\beta+\dfrac{\alpha+\gamma}{2}+45° = 180°$. Ebből $\gamma = 90°$ következik (**1716.** ábra).

1717. Az ABC háromszögbe beírható kör K középpontja illeszkedik az XY szakaszra, ahol $XY \| AB$.
Bizonyítjuk, hogy $AX+BY = XY$. A feltételek alapján $KAB\sphericalangle =$ $= AKX\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$ (váltószögek, AK szögfelező).
Ezért $AKX\triangle$ egyenlő szárú: $AX = KX$ (I)
ugyanígy bizonyítható, hogy $BY = KY$ (II).
Az I. és II. összegezéséből kapjuk a bizonyítandó összefüggést (**1717.** ábra).



1717

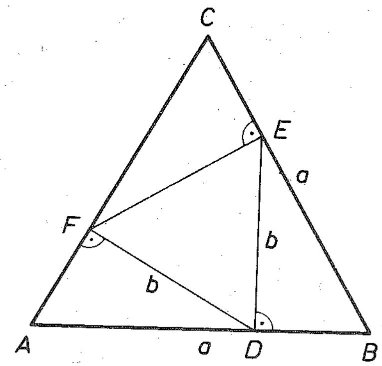


1718

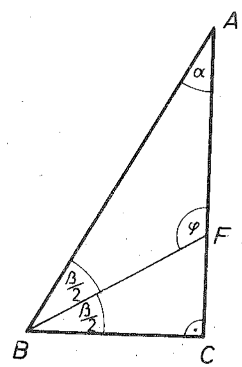
1718. A BKC háromszög egyenlő szárú, mivel a téglalap átlói egyenlők és felezik egymást. $KC = KB$, ezért $\beta = \gamma = 60°$, azaz BKC egyenlő oldalú háromszög. Ebből adódik az állítás (**1718.** ábra).

1719. BDE háromszögben $b = BD\sqrt{3}$ és $BD = \dfrac{1}{2}BE$. Másrészt a derékszögű háromszögek egybevágósága miatt $BD = CE = AF$, illetve $AD = BE =$ $= CF$. Ebből $BD = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{1}{3}a$, így $b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ (**1719.** ábra).

1720. A feltétel szerint BCF és ABF háromszögek egyike egyenlő szárú. $\dfrac{\beta}{2} < 45°$ miatt ez csak az ABF háromszög lehet. BCF háromszög külső szöge $\varphi = 90°+\dfrac{\beta}{2}$, így az egyenlő oldalak $AF = BF$, illetve az egyenlő szögek $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ (**1720.** ábra).

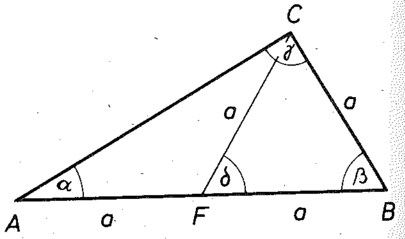


1719

1720


Az ABC háromszög szögeinek összegéből $3\alpha = 90°$, tehát $\alpha = 30°$. A BCF háromszögre igaz, hogy $2CF = BF = FA$, tehát a BF szögfelező $1:2$ arányban osztja a szemköztes CA oldalt.

1721. A feltétel szerint BCF szabályos háromszög, így $\beta = \delta = 60°$. Az ACF egyenlő szárú háromszög külső szöge $\delta = 2\alpha$. Ezért $\alpha = 30°$ és $\gamma = 90°$. Ebből $AC = a\sqrt{3}$ (**1721.** ábra).



1721

1722. I. *megoldás.* Az ABE derékszögű háromszögben $EB = a\sqrt{3}$, a DCE derékszögű háromszögben $DC = a = CE\sqrt{3}$.

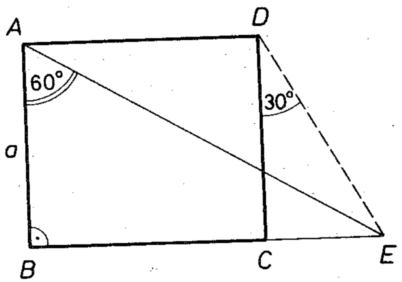
Ezek segítségével EB szakasz kétféleképpen is kifejezhető:

$EB = a\sqrt{3} = 3CE$;

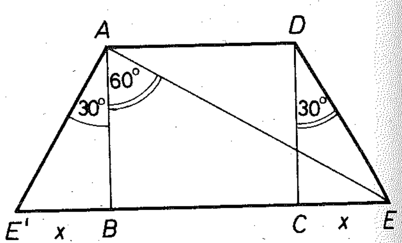
$EB = 5 + CE$.

Így $CE = 2{,}5$ cm és $EB = 7{,}5$ cm (**1722**/I. ábra).

II. *megoldás.* ED-t tükrözve DC-re és $\overrightarrow{DA}$-val eltolva kapjuk az EAE' derékszögű háromszöget. Erre alkalmazva a magasságtételt $AB^2 = (5+x)x$ és ismerve, hogy ABE' háromszögben $AB = x\sqrt{3}$, x értéke kiszámítható. $x = 2{,}5$ cm. $EB = 7{,}5$ cm (**1722**/II. ábra).



1722/I.

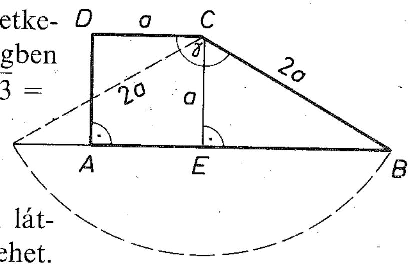


1722/II.

1723. $CE \| AD$ és $CE = AD = a$. Ebből következik, hogy az ECB háromszögben $EB = a\sqrt{3}$. $AB = AE + EB = a + a\sqrt{3} = a(1+\sqrt{3})$.

$\gamma = 90° + 60° = 150°$ (**1723.** ábra).

Megjegyzés: a trapéz szerkesztéséből látszik, hogy a csak a rövidebbik alap lehet.



1723

1724. Kétféleképpen helyezkedhet el A és B az S síkhoz képest.

a) Ha A-t és B-t az S sík nem választja szét:

$CB \| A'B'$ és $CB = A'B' = a$, $BB' \| CA'$ és $BB' = CA' = a$.

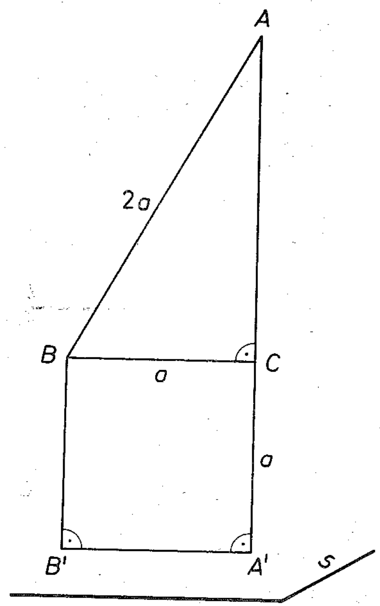
Az ABC derékszögű háromszögre:

$AC = BC\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

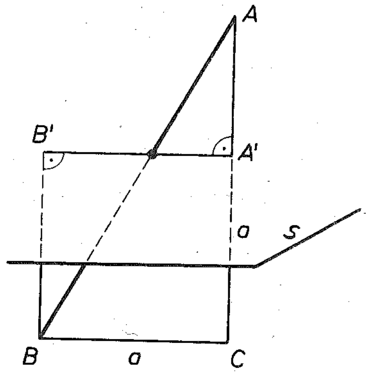
$AA' = AC + CA' = a(1+\sqrt{3})$ (**1724.***a)* ábra).

b) Ha A-t és B-t az S sík szétválasztja, a gondolatmenet az előbbivel azonos, csak az utolsó részben van eltérés:

$AA' = AC - A'C = a(\sqrt{3} - 1)$ (**1724.***b)* ábra).

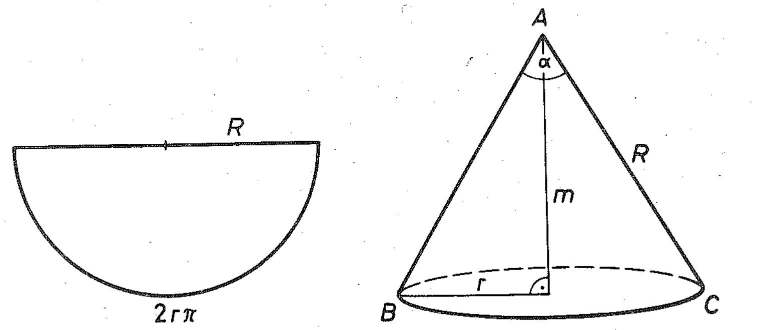


1724a



1724b

1725. A kiterített palást íve $\frac{2R\pi}{2} = R\pi$ és a kúp alapkörének kerülete $2r\pi$ a feladat szerint egyenlő: $R\pi = 2r\pi$, így $R = 2r$. Ezért a kúp tengelymetszete: ABC háromszög egyenlő oldalú, azaz $\alpha = 60°$ (**1725.** ábra).



1725

1726. A megoldás elvét lásd az **1725**-ös feladat megoldásánál. Ebből adódik: a kúp alapkörének kerülete $2r\pi = 10\pi$, így $r = 5$ cm.
ABC háromszög ezek szerint szabályos, ezért $m = 5\sqrt{3}$ cm.

1727. A háromszög köré írt kör K középpontja az oldalfelező-merőlegesek metszéspontja. K valamelyik súlyvonalra, illetve valamelyik szögfelezőre csak akkor esik, ha a súlyvonal, illetve a szögfelező azonos a háromszög valamely oldalfelező-merőlegesével. Ezért
igaz: *b), e)*; hamis: *a), c), d)* és *f)*.
A K pont középvonalra csak úgy eshet, ha annak valamely végpontjára esik. Ez csak a derékszögű háromszögre teljesül. Ezért
igaz: *h)*; hamis: *g), i)*.

1728. *a)* Igaz.
Minden szögtartomány tartalmazza a szögfelező félegyenesét. Ezért a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontját – a beírt kör középpontját – a háromszög belsejében tartalmazza.
b) Igaz, mivel minden háromszögre igaz az állítás.
c) Hamis, *a)* alapján.
Ha a háromszög egyenlő szárú, azaz szimmetrikus, akkor az alappal szemköztes szög felezője, az alap szakaszfelező-merőlegese és az alaphoz tartozó magasságvonal egybeesik. Ezért az egyenlő szárú háromszög beírt körének középpontja illeszkedik erre az egyenesre.
(Más háromszög esetén a felsorolt egyenesek nem illeszkedőek.)

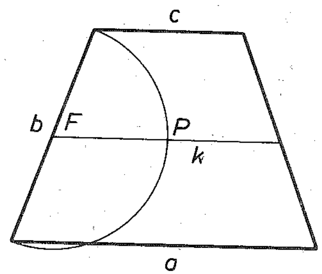
Ezek alapján:
d) Hamis. *e)* Igaz. *f)* Hamis. *g)* Hamis. *h)* Igaz. *i)* Hamis.

1729. *a)* A feltétel szerint

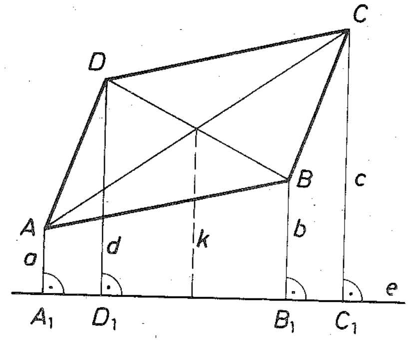
$b = k$, és ismert, hogy $k = \frac{a+c}{2}$.
Ezért a trapéz kerülete:
$K = a + 2b + c = 4k$.

b) A Thalész-kör középpontja F, sugara $\frac{b}{2} = \frac{k}{2}$.

A Thalész-kör a középvonalat P-ben metszi. $FP = \frac{k}{2}$ miatt P a középvonal felezőpontja (**1729.** ábra).



1729



1730

1730. Jelöljük a paralelogramma csúcsainak az e egyenesre eső merőleges vetületeit A_1, B_1, C_1, D_1-gyel, a csúcsok e egyenestől mért távolságait rendre a, b, c, d-vel.
Vizsgáljuk az AA_1C_1C és a DD_1B_1B (esetleg elfajuló) trapézokat. Mivel a paralelogramma átlói felezve metszik egymást, ezért a két trapéz középvonala egybeesik.
Fejezzük ki a középvonalat a vele párhuzamos oldalakkal!

$$k = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2},$$

azaz $a + c = b + d$, amit bizonyítani kellett (**1730.** ábra).
Megjegyzés: Elfajuló trapézt kapunk, ha a paralelogramma valamelyik átlója merőleges e-re.

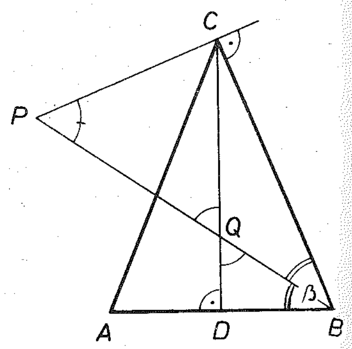
1731. A PBC derékszögű háromszögben

$$CPB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

A DQB derékszögű háromszögben

$$DQB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

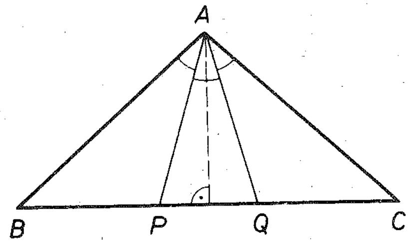
Felhasználva, hogy $PQC\sphericalangle = DQB\sphericalangle$ csúcsszögek, $CPQ\sphericalangle = PQC\sphericalangle$ adódik, tehát a PQC háromszög egyenlő szárú (**1731.** ábra).



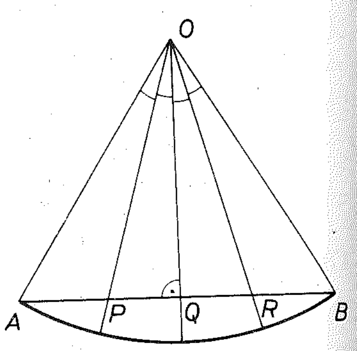
1731

1732. Mivel az ABC háromszög szimmetrikus, ezért az APQ háromszög is szimmetrikus. Így az $APQ\sphericalangle$ hegyesszög, $APB\sphericalangle$ tompaszög. Ezért ABP háromszögben $AB > AP$ (**1732.** ábra).
Az ABQ háromszögben $AB > AQ$ $(= AP)$, ezért a szögfelezőtétel szerint:

$$BP > PQ.$$



1732



1733

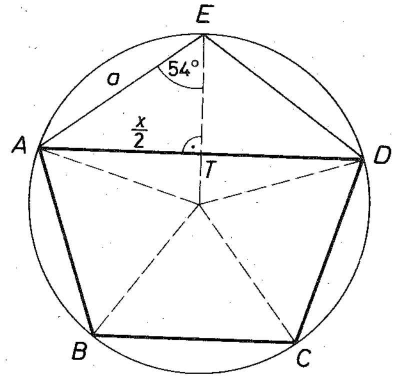
1733. A feladatban szereplő sugarak az AOB szöget negyedelik, de az AB húrt nem negyedelik. Jelöljük a szögnegyedelőknek az AB húrral való metszéspontjait P, Q, R-rel. Ekkor a szimmetria miatt $AP = RB$ és $PQ = QR$.
Mivel $OQ < OA$, ezért az $AOQ\sphericalangle$ szögfelezője az AQ oldalt Q-hoz közelebb metszi. (Lásd a szögfelezőtételt.) (**1733.** ábra).

1734. Két különböző típusú négyszög állítható össze a 2-2 szakaszból:
a) Ha az egymás mellett fekvő oldalak különbözőek (1, 2, 1, 2 hosszúságúak), akkor a négyszög *paralelogramma* lesz, mivel szemköztes oldalai egyenlőek. A paralelogramma szögei nem meghatározottak, így speciális esetként adódik egy téglalap is.
b) Ha a négyszög két-két szomszédos oldala egyenlő, akkor ez deltoid. (Ebben az esetben is végtelen sok négyszöget kapunk.)

1735. A szabályos ötszög tengelyesen szimmetrikus, így a keletkezett négyszög is tengelyesen szimmetrikus lesz. Mivel két oldala párhuzamos, ezért a négyszög szimmetrikus trapéz.
A szabályos ötszög szögei 108°-osak, így a trapéz szögei 72°, 72°, 108°, 108°.
A trapéz ismeretlen oldalát, $AD = x$-et, többféleképpen is meghatározhatjuk (I, II):
I. Az ATE derékszögű háromszögből (**1735**/I. ábra)

$$\frac{x}{2} = a \sin 54°,$$

$$AD = x = 2a \sin 54°.$$

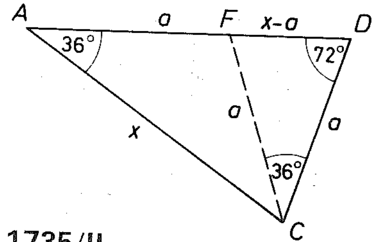


1735/I.

II. Vizsgáljuk az ACD háromszöget! (**1735**/II. ábra.)
A háromszög szögei: 72°, 72°, 36°, oldalai: x, x, a.

A C csúcsnál levő szög felezője az AD oldalt F pontban metszi.
A szögeket figyelembe véve megállapítható, hogy az FDC háromszög egyenlő szárú ($FC = a$) és hasonló a DCA háromszöghöz. Másrészt az AFC háromszög is egyenlő szárú, $AF = FC = a$.
Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{x-a}{a} = \frac{a}{x}.$$



1735/II.

Az egyenlet rendezésével x-re

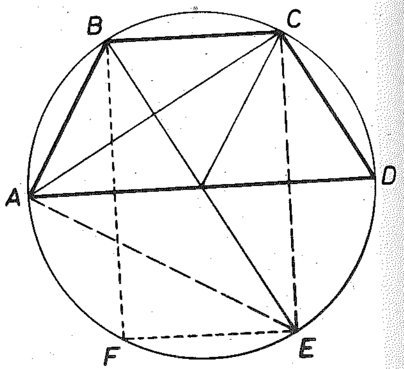
$$x = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

adódik.

Megjegyzés: A fenti levezetésekből sin 54° pontos értékét is megkaptuk:

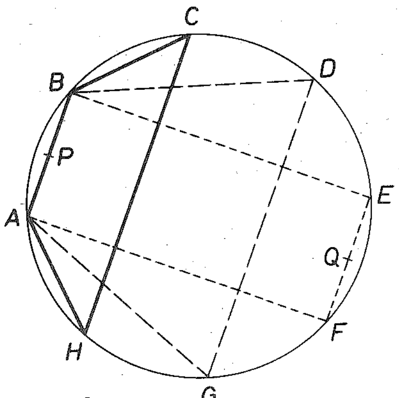
$$\sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

1736. A lehetséges esetek:
$ABCD$ szimmetrikus trapéz szögei 60°, 60°, 120°, 120° (3 db szabályos háromszögből áll).
$ABCE$ deltoid szögei 90°, 60°, 90°, 120° (2 db 30°–60°-os derékszögű háromszög; Thalész-tétel).
$BCEF$ téglalap (Thalész-tétel).
Más típusú négyszög nem jön létre.
Felhasználtuk, hogy a szabályos hatszög 6 db szabályos háromszögből építhető fel (**1736.** ábra).

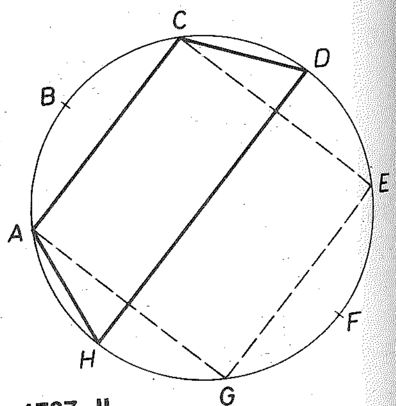


1736

1737. A szóba jöhető trapézok – a szabályos nyolcszög tulajdonságait figyelembe véve – szimmetrikusak. A trapéz szimmetriatengelye illeszkedik a szabályos nyolcszög valamelyik szimmetriatengelyére.



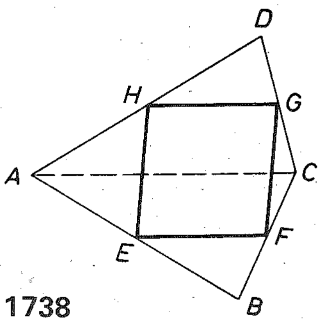
1737. I.



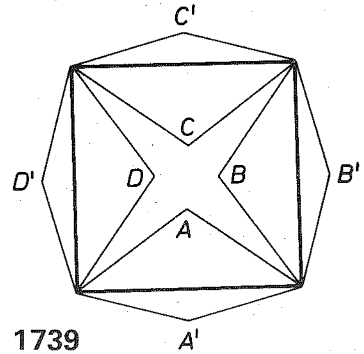
1737. II.

a) A közös szimmetriatengely a szabályos nyolcszög szemköztes oldalfelező pontjaira (P, Q) illeszkedő egyenes. A megfelelő trapéz nem hosszabb alapjának végpontjai: A, B közvetlen szomszédos csúcspontok. A másik alap lehet: CH, DG, FE (téglalap) (**1737. I.** ábra).
A közös szimmetriatengely a szabályos nyolcszög szemköztes csúcspontjaira (B, F) illeszkedő egyenes. A megfelelő trapézok nem hosszabb alapjának végpontjai: A, C, második szomszédos csúcspontok. A másik alap lehet: DH vagy EG (négyzet) (**1737. II.** ábra).
Több eset nincs, mert a 3., illetve 4. szomszédos csúcspontokra épülő trapézok az *a)* vagy *b)* esetben már szerepeltek.
b) Az $ABCH$ trapéz szögei: 45°; 45°; 135°; 135°; az $ABDG$ és az $ACDH$ trapéz szögei: 67,5°; 67,5°; 112,5°; 112,5°; az $ABEF$ és az $ACEG$ trapéz minden szöge 90°.

1738. A H, E, F, G oldalfelező pontok, ezért EF az ABC, GH a CDA háromszög AC oldalával párhuzamos középvonala. Így $EF \| AC \| GH$ és $EF = GH = \frac{1}{2} AC$. Ezért minden négyszög (térbeli is) oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg.
A feltétel szerint $EFGH$ rombusz, ezért az $ABCD$ négyszög átlói egyenlőek (a rombusz oldalának kétszeresével).
Tehát ha egy négyszög oldalfelező pontjai rombuszt határoznak meg, akkor a négyszög átlói egyenlők (**1738.** ábra).



1738



1739

1739. Az adott négyzet belsejében lévő és a négyzeten kívül fekvő 4-4 pont négyzetet határoz meg.
Négyszöget kaphatunk, ha a 8 pont közül úgy választunk ki 4-et, hogy a külső négyzet csúcsaiból rendre
a) 4-et, *b)* 3-at, *c)* 2-t, *d)* 1-et, illetve *e)* 0-t,
s a többit a belső négyzet csúcspontjai közül választjuk (**1739.** ábra).

Ennek megfelelően:

a) $A'B'C'D'$ négyzet.

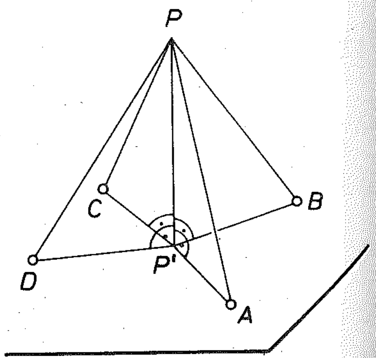
b) $A'B'C'B$, $A'B'C'D$ deltoidok. Az A, illetve a C illeszkedik $A'C'$ egyenesre, így ebből nem kapunk négyszöget.

c) Ha a külső négyzet két *szomszédos* csúcspontját választjuk ki: $A'B'AB$, $A'B'CD$ szimmetrikus trapézok.
($A'B'BC$ nem speciális konkáv négyszög.)
Ha a nagy négyzet két *szemköztes* csúcspontját választjuk ki: $A'BC'D$ rombusz.

d) $ABCB'$, $ABCD'$ deltoidok. (A', illetve C' nem felelnek meg, lásd a *b)* esetet.)

e) $ABCD$ négyzet.

1740. Legyen P-nek az $ABCD$ síkjára eső merőleges vetülete P'. A feltételek miatt a PAP', PBP', PCP' és PDP' derékszögű háromszögek egybevágóak (2-2 oldal és a nagyobbikkal szemköztes szög egyenlő), így $P'A=P'B=P'C=P'D$, tehát A, B, C és D egy P' középpontú kör pontjai. Tehát $ABCD$ húrnégyszög. Alkothatnak négyzetet, téglalapot, spec. rombuszt (négyzetet), speciális deltoidot (négyzetet), szimmetrikus trapézt, speciális érintőnégyszöget (**1740.** ábra).



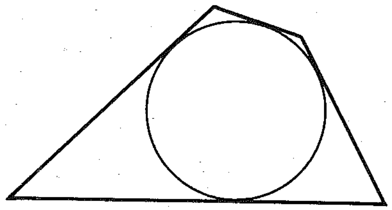
1740

1741. A feltétel szerint a négyszög három oldala egyenlő: $a=b=c$.
α) négyzet legyen: szükséges feltétel pl.: $a\perp b$ vagy $b\perp c$ vagy $a=d$ legyen.
(Kettő együtt elégséges feltétel is.)
β) deltoid legyen: szükséges feltétel: $d=a$. (Így a négyszög rombusz, azaz speciális deltoid lesz.)
Ez együttal elégséges feltétel is.
γ) érintőnégyszög legyen l. *β)* pont.

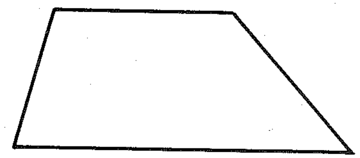
1742. A feltétel szerint a négyszög két szomszédos oldala egyenlő: $a=b$ és merőleges egymásra: $a\perp b$.
α) négyzet legyen: szükséges feltétel pl. $c\parallel a$ vagy $c\perp b$.

Ezek szükséges, de nem elégséges feltételek. Elégséges feltétel pl. $c\perp b$ és $c=b$.
β) trapéz legyen: szükséges feltétel pl. $a\parallel c$.
Ez egyúttal elégséges feltétel is.
γ) húrnégyszög legyen: szükséges (és egyben elégséges) feltétel $c\perp d$.

1743. *a)* Igaz, mert a rombuszra teljesül, hogy olyan konvex négyszög, amelyben két-két szemköztes oldal összege egyenlő.
b) Hamis. (Például: **1743.***b)* ábra).
c) Igaz. Mivel a téglalapnak van két párhuzamos oldala, ezért trapéz.
d) Igaz. A szimmetrikus trapéz szemköztes szögeinek összege 180°.



1743b



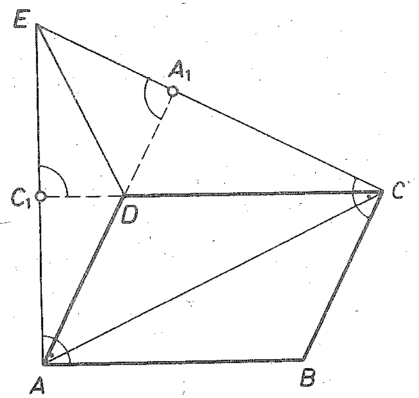
1745d

1744. *a)* Hamis. Ha a deltoid egymással egyenlő szögei nem 90°-osak, akkor nem húrnégyszög.
b) Igaz. A *konvex* deltoid érintőnégyszög, hiszen két-két szemköztes oldalának összege egyenlő.
c) Hamis. A rombusz olyan deltoid, amely egyben trapéz is.
d) Hamis. Deltoidnak nevezzük azt a négyszöget, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő. Tehát a deltoid oldalai rendre a, a, b, b, ahol a és b nem feltétlenül egyenlőek.
e) Igaz. A négyzet olyan téglalap, amely deltoid is.
f) Hamis. Lehet konkáv is.

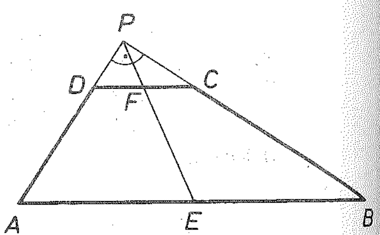
1745. *a)* Igaz, mivel *minden* deltoid tengelyesen szimmetrikus.
b) Igaz.
c) Igaz: a szimmetrikus trapéz.
d) Hamis. (Pl.: **1745.***d)* ábra).
e) Igaz. Pl.: a négyzet, a konvex deltoidok stb.
f) Hamis. (Lásd az **1743.***b)* ábráját!)

1746. Jelöljük az AD és CE egyenesek metszéspontját A_1-gyel, CD és AE egyenesek metszéspontját C_1-gyel!
$AA_1\parallel BC$ és $BC\perp CE$ miatt $AA_1\perp CE$, valamint
$CC_1\parallel BA$ és $BA\perp AE$ miatt $CC_1\perp AE$.

Ezért AA_1 és CC_1 az ACE háromszög két magasságvonala, D metszéspontjuk a magasságpont. Így az ED egyenes az ACE háromszög AC oldalához tartozó magasságvonala, tehát $ED \perp AC$ (**1746.** ábra).



1746



1747

1747. Mivel E az AB szakasz felezőpontja, ezért a PE súlyvonal felezi a CD alapot is (F-ben). Így $EF = EP - FP$.
Az ABP és DCP derékszögű háromszögekben

$$EP = \frac{1}{2}AB \text{ és } FP = \frac{1}{2}CD.$$

Tehát $EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$ (**1747.** ábra).

1748. A kör íveinek hossza (i), a hozzájuk tartozó középponti (ω) és kerületi (α) szögek közötti összefüggés alapján:

$i_1 : i_2 = \omega_1 : \omega_2 = \alpha_1 : \alpha_2$,

$16 : 10 = \alpha_1 : 35°$.

Innen

$\alpha_1 = 56°$.

1749. Mivel a megadott szögek összege 360°, ezért a kör középpontja a háromszög belsejében van.
Az AB ívhez tartozó $ACB\sphericalangle$ kerületi szög fele az AB íven nyugvó $AOB\sphericalangle$ középponti szögnek. Így a háromszög szögei a megadott szögek $\frac{1}{2}$-szeresei:

50°, 55°, 75°.

1750. Az ívek adott arányából következik, hogy a háromszög hegyesszögű. Az ABC háromszög oldalai a köré írt kör középpontjából 2α, 2β, 2γ szögben látszódnak. Az $\alpha = 3\delta$, $\beta = 4\delta$, $\gamma = 5\delta$ és $\alpha + \beta + \gamma = 180°$-ból $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 75°$.

1751. A megoldás gondolatmenetét lásd az **1750**-esnél. Itt α, $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$ szerepel. A háromszög szögei: 30°, 60° és 90°, tehát a feltételeknek eleget tevő háromszögek derékszögűek.

1752. A középponti szögek arányát figyelembe véve $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 360°$, amiből $\alpha = 60°$ (lásd az **1750**-es megoldását is). A háromszög szögei $\frac{\alpha}{2} = 30°$, $\frac{2\alpha}{2} = 60°$, $\frac{3\alpha}{2} = 90°$. A kapott derékszögű háromszög átfogója a kör átmérője $2r$, a két befogó r és $r\sqrt{3}$.

1753. A körívek, a hozzájuk tartozó középponti és kerületi szögek összefüggése alapján

$7 : 11 = \omega : (2\pi - \omega) = \alpha : (\pi - \alpha)$. Eszerint $\alpha = \frac{7\pi}{18}$ rad.

1754. Az összetartozó kerületi és középponti szögek α és ω. Ezért $2\alpha = \omega$. A feltétel szerint $\omega + \alpha = \frac{11\pi}{6}$. Ezekből: $\alpha = \frac{11\pi}{18}$ rad.

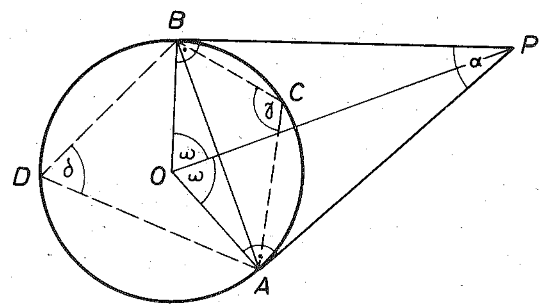
1755. A keresett szögek δ és γ.

Az AOP derékszögű háromszögből $\omega = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

δ és 2ω összetartozó kerületi és középponti szögek, ezért $\delta = \omega = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

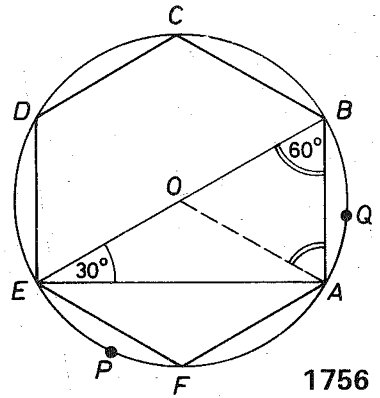
Az $ACBD$ húrnégyszög lévén $\gamma = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

(**1755.** ábra.)

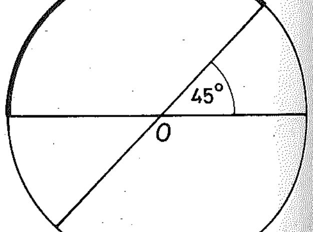


1755

1756. Az $AOB\sphericalangle=60°$, ezért – a középponti és kerületi szögek összefüggése alapján – a kisebbik $\widehat{AB}$-hez tartozó kerületi szög: $BEA\sphericalangle=30°$, a kiegészítő ívhez tartozó szög 150°-os (pl. $APB\sphericalangle=30°$, $AQB\sphericalangle=150°$). Ugyanígy az AC ívhez tartozó középponti és kerületi szögeket figyelembe véve pl. $APC\sphericalangle=60°$, $AQC\sphericalangle=120°$. A legnagyobb átló egyúttal a kör átmérője, így ez a körvonal szóba jöhető pontjaiból 90°-ban látszik (**1756.** ábra).



1756

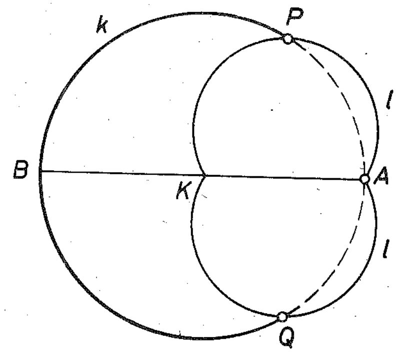


1757

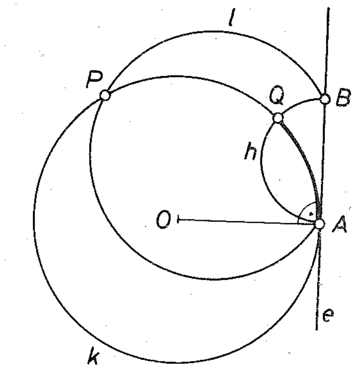
1757. A nagyobbik ívhez tartozó középponti szög $180°-45°=135°$. Ezért a középponti és kerületi szögek összefüggése alapján a keresett szög $\frac{135°}{2}=67{,}5°$ (**1757.** ábra).

1758. A keresett pontok az AK húrhoz tartozó 60°-os (l) körök és az adott (k) kör segítségével határozhatók meg. Ezek a pontok (**1758.** ábra):
a) P és Q (l és k metszéspontjai).
b) PB és BQ ívek pontjai (PQ ív) P és Q nélkül. (A k körnek azok a pontjai, amelyek az l látókörökön kívül vannak.)
c) PA és QA ívek pontjai P, A, Q nélkül
(k körnek azon pontjai, amelyek az l körökön belül vannak).
Megjegyzés: 1. Felhasználtuk azt az ismert tényt, hogy adott szakasz a látókörön belüli pontokból az α látószögnél nagyobb, külső pontokból α-nál kisebb szögben látszik.
2. $\alpha=60°$ esetén P és Q nemcsak látókörrel szerkeszthető meg.

1759. A keresett pontok az AB szakaszhoz tartozó l látókör és az adott k kör segítségével határozhatók meg.
a) P (a 30°-os l látókör és k kör metszéspontja).
b) Q (AB átmérőjű h Thalész-kör és k metszéspontja).



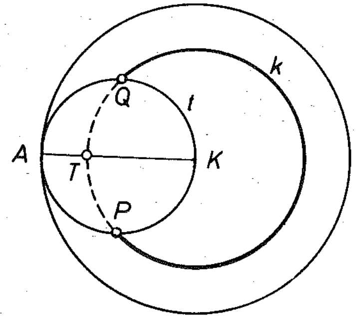
1758



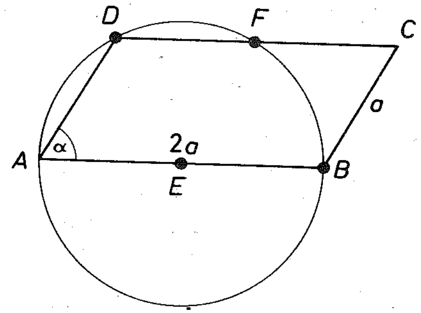
1759

c) AQ kisebbik ív megfelelő pontja A és Q nélkül.
Megjegyzés: lásd az **1758.** megoldásához fűzött megjegyzés 1) pontját is (**1759.** ábra).

1760. A belső k körvonal és az AK átmérőjű Thalész-körvonal (t) közös pontjai P és Q (**1760.** ábra).
a) k körvonal P és Q pontjából látszik az AK szakasz derékszögben.
b) Az AK szakasz tompaszögben látszik a k körvonal azon pontjaiból, amelyek t körlemez belső pontjai, kivéve a T pontot.
c) Az AK szakasz hegyesszögben látszik a k körvonal azon pontjaiból, amelyek a t körlemezen kívül fekszenek.



1760



1761

1761. Legyenek a paralelogramma oldalai $AB=DC=2a$, $AD=BC=a$, az AB, illetve DC felezőpontjai E, illetve F.
A DC oldal azon pontjai, amelyekből AB derékszögben látszik, az AB átmérőjű Thalész-kör és DC közös pontjai. $\alpha=60°$ miatt $EA=ED=$ $=EF=a$, ezért a keresett pontok F és D (**1761.** ábra).

Hasonlóan megmutatható, hogy a DC oldal az AB oldal E és B pontjából látszik derékszögben.
Az AD és BC oldalak belső pontjaiból AB és DC oldalak egyike sem látszik derékszögben.
Így a paralelogramma kerületén az E, B, F és D pontokból látszik valamelyik hosszabbik oldal derékszögben.

1762. A C-beli érintő metszi az AB egyenest, ezért $\alpha \neq 45°$.

I. $\alpha > 45°$: (**1762**/I. ábra).
a) Ha $ACD\triangle$ egyenlő szárú, akkor $\alpha < 90°$ miatt $AD = AC$. A DAC háromszög egyik külső szöge $\alpha = 2\delta$. Ezért $DCO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \alpha = 90°$, így $\alpha = 60°$.
b) Ha $BCD\triangle$ egyenlő szárú, akkor $BCD\sphericalangle > 90°$ miatt $BC = DC$ és $\beta = \delta$. Az ABC derékszögű háromszögből $\beta = 90° - \alpha$. A BCD háromszög belső szögeinek összege:

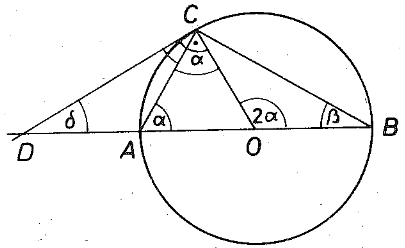
$$3(90° - \alpha) + 90° = 180°.$$

Ebből $\alpha = 60°$

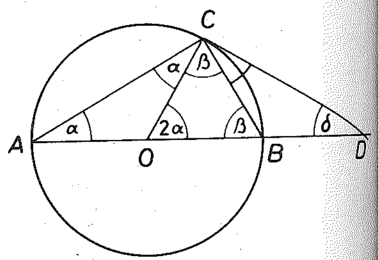
II. Ha $\alpha < 45°$ (**1762.**/II. ábra.)
a) Ha $ACD\triangle$ egyenlő szárú, akkor $ACD\sphericalangle > 90°$ miatt $AC = DC$ és $\delta = \alpha$. Az ACD háromszög belső szögeinek összege:

$$3\alpha + 90° = 180°.$$

Ebből $\alpha = 30°$.
b) Ha $BCD\triangle$ egyenlő szárú, akkor $ABC\sphericalangle = \beta < 90°$ miatt $BC = BD$. $CAB\sphericalangle = \alpha$ a BC íven nyugvó kerületi szög. Ez megegyezik az ugyanezen íven nyugvó $BCD\sphericalangle$ érintő szárú kerületi szöggel.
A fentiek szerint $\delta = \alpha$. Tehát ACD háromszög is egyenlő szárú. Így *a)* szerint $\alpha = 30°$.



1762/I.



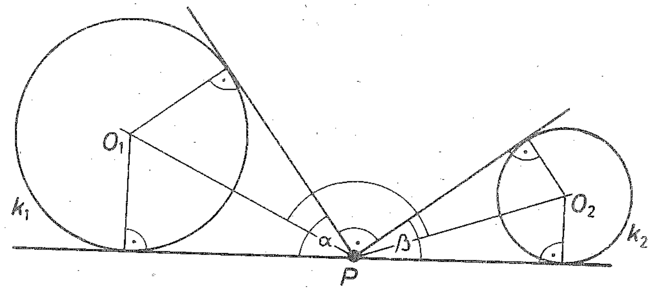
1762/II.

1763. A P pontból k_1 körhöz húzott érintők szögét jelöljük α-val, a k_2 körhöz húzott érintők szögét β-val. A feladat szerint $\alpha + \beta = 90°$. O_1P, illetve O_2P a tengelyes szimmetria miatt felezi α-t, illetve β-t. Így

$$O_1PO_2\sphericalangle = \frac{1}{2}\alpha + 90° + \frac{1}{2}\beta = 135°.$$

(**1763.** ábra.)

1763

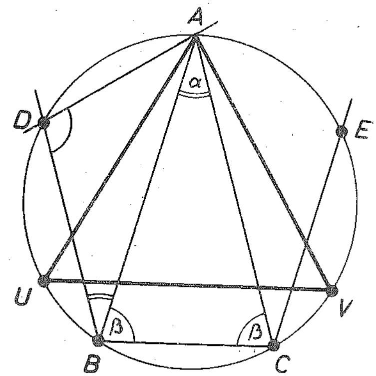


1764. A tengelyes szimmetria miatt $AU = AV$, ezért elég belátni, hogy $UAV\sphericalangle = 60°$.
$BD \parallel AC$ miatt $DBA\sphericalangle = \alpha$.
$DBCA$ húrnégyszög, ezért $\delta = BDA\sphericalangle = 180° - \beta$.
Az ABD háromszögből $DAB\sphericalangle = 180° - \alpha - \delta = (180° - \delta) - \alpha = \beta - \alpha$.

$$UAV\sphericalangle = \frac{2}{3}DAB\sphericalangle + \alpha = \frac{1}{3}(2\beta + \alpha) = \frac{1}{3} \cdot 180° = 60°.$$

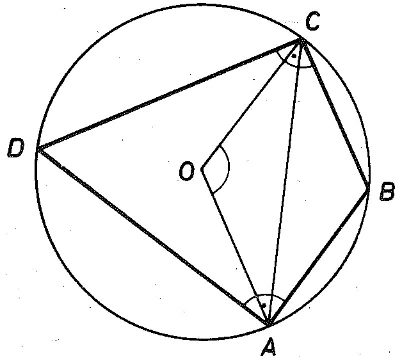
Tehát a VAU háromszög szabályos (**1764.** ábra).

1764

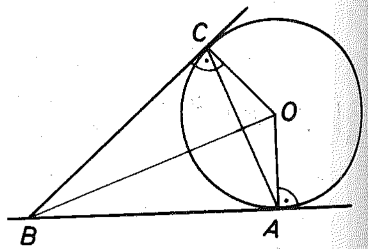


1765. A feltételek szerint a négyszög húrnégyszög és BD átlója a köré írt kör egyik átmérője.

Ha az AC átló az O pontból 120°-os szögben látszik, akkor a kisebbik $\widehat{AC}$ ívre is igaz ez. Az ehhez az $\widehat{AC}$ ívhez tartozó kerületi szögek 60°-osak.
Mivel $ABCD$ húrnégyszög, ezért a kiegészítő ívhez tartozó $ABC\sphericalangle = 120°$ (**1765.** ábra).



1765



1766

1766. Az $AOCB$ négyszög deltoid. (Két-két egyenlő oldala a körsugár, illetve a B pontból húzott érintőszakaszok.)
A deltoid átlói merőlegesek egymásra. Így az átlók metszéspontjából az oldalak (pl.: AB is) derékszög alatt látszanak (**1766.** ábra).

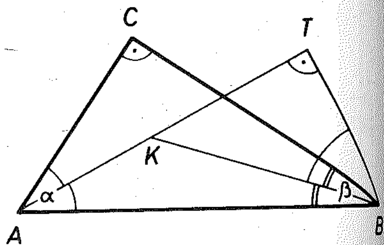
1767. Be kell látni, hogy BTK derékszögű háromszög egyenlő szárú. Ehhez elég megmutatni, hogy $KBT\sphericalangle = 45°$ (**1767.** ábra).
Az ABT derékszögű háromszögben

$$TAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}, \text{ ezért}$$

$$ABT\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

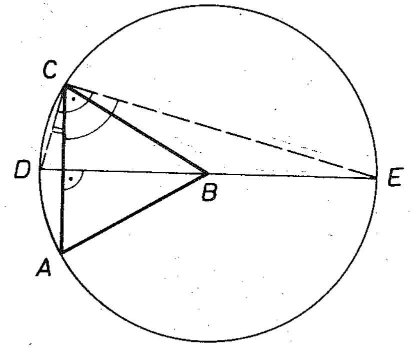
Innen, minthogy $\alpha + \beta = 90°$, ezért

$$KBT\sphericalangle = ABT\sphericalangle - \frac{\beta}{2} = 45°.$$



1767

1768. BD szögfelező, ezért az AD ívhez tartozó középponti szög 30°-os, ugyanezen ívhez tartozó kerületi szög $ACD\sphericalangle = 15°$.
A DEC háromszög derékszögű (Thalész-tétel), ezért $ACE\sphericalangle = 75°$ (**1768.** ábra).



1768

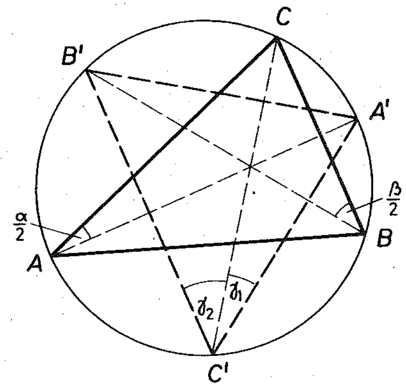
1769. Az A-ból induló szögfelező felezi a BC ívet. Az $\widehat{A'C}$-hez tartozó kerületi szög $\gamma_1 = \frac{\alpha}{2}$. Ugyanígy $\gamma_2 = \frac{\beta}{2}$.

Tehát: $\gamma' = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\alpha+\beta}{2}$,

ugyanígy: $\beta' = \frac{\alpha+\gamma}{2}$,

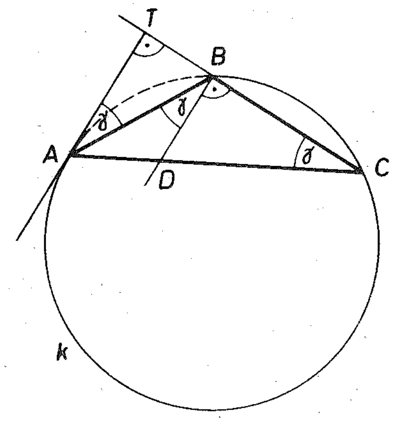
továbbá: $\alpha' = \frac{\beta+\gamma}{2}$.

(**1769.** ábra.)



1769

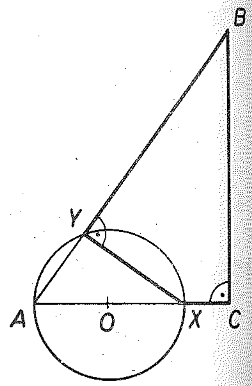
1770. A feltételeknek megfelelő ABC háromszögben $\beta = 90° + \gamma$ és legyen $BD \perp BC$, továbbá az A-ból induló magasság $AT \perp BC$. Így $BD \| AT$ miatt $TAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle = \gamma$ (váltószögek). Az $\widehat{AB}$-hez tartozó kerületi szög és ezen ívet tartalmazó, A csúcsú érintőszárú kerületi szög is γ. Minthogy a körhöz A-ban csak egy érintő húzható, ezért AT egyenes a kör A-beli érintője (**1770.** ábra).



1770

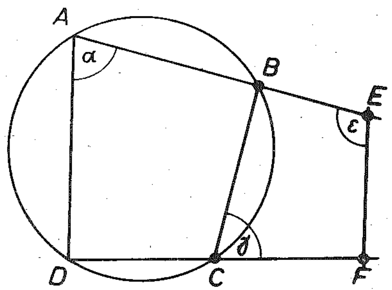
1771. $XYB\sphericalangle = 90°$, mert Y az AX átmérőjű Thalész-kör egy (A-tól és X-től különböző) pontja. Ezért $BCXY$ húrnégyszög (szemköztes szögeinek összege 180°) (**1771.** ábra).

1772. $ABCD$ húrnégyszög, ezért $BCD\sphericalangle = 180° - \alpha$, továbbá ennek mellékszöge $\gamma = \alpha$. Az $AD \| EF$ feltétel miatt $\varepsilon = 180° - \alpha$. A $BCFE$ négyszög 2 szemköztes szögének összege: $\varepsilon + \gamma = 180°$, tehát $BCFE$ húrnégyszög (**1772.** ábra).

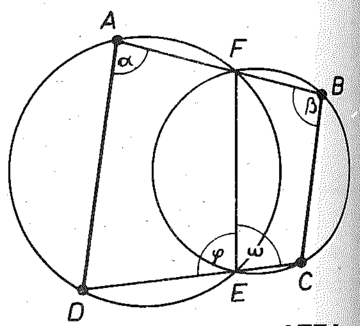


1771

1773. A szabályos hatszög oldalfelező pontjai a hatszögbe írt körre illeszkednek. Ennek a körnek bármely négy pontja – definíció szerint – húrnégyszöget alkot.



1772



1774a

1774. *a)* Ha F és AB és E a CD szakasz belső pontja: Az $AFED$ húrnégyszög: $\varphi = 180° - \alpha$; φ-nek mellékszöge $\omega = 180° - \varphi = \alpha$ (**1774.** *a)* ábra). $BCEF$ húrnégyszög: $\beta + \omega = 180°$, amelyekből $\beta + \alpha = 180°$. Ez azt jelenti, hogy $BC \| AD$, tehát $ABCD$ trapéz.

b), illetve *c)*

Ha F az AB szakasz pontja és E a CD szakaszon kívül van (vagy fordítva), illetve

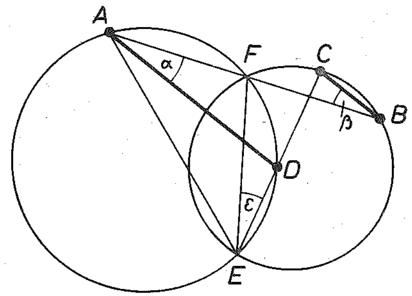
ha F az AB és E a CD szakaszon kívül van:

Az $AFDE$, illetve az $AEFD$ négyszög húrnégyszög, ezért $\alpha = \varepsilon$,

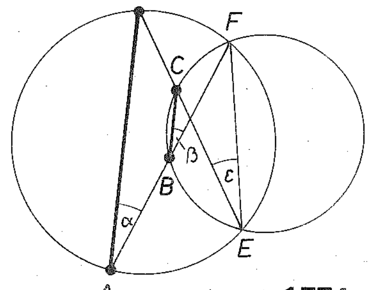
$BCFE$ négyszög húrnégyszög, ezért $\beta = \varepsilon$,

tehát $\alpha = \beta$.

Ebből következik, hogy $AD \| BC$, így a vizsgált négyszög trapéz (**1774.** *b)*, **1774.** *c)* ábra).

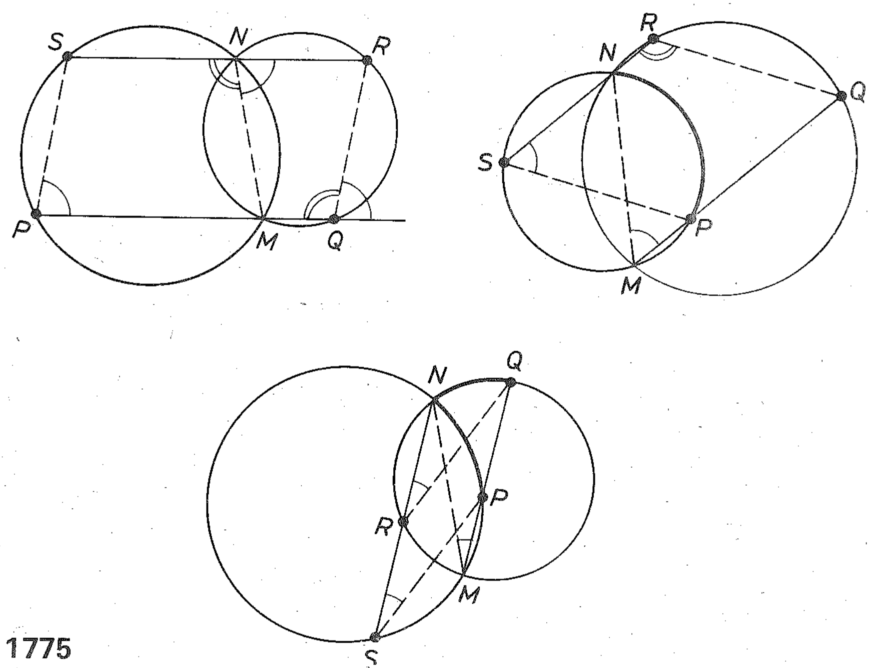


1774b



1774c

1775. A feltétel szerint $PQ \| RS$; az **1774.** megoldása alapján $PS \| QR$, tehát a vizsgált négyszög paralelogramma (**1775.** ábra).

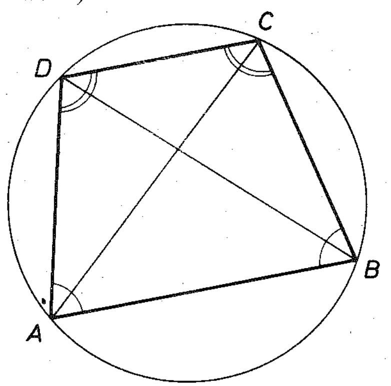


1775

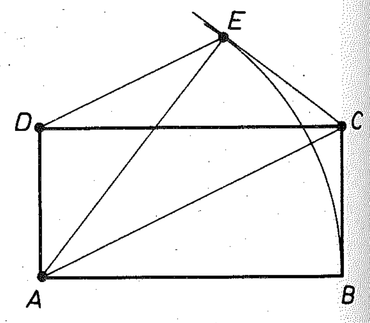
1776. Az $AC = BD$ feltételből vagy

a) $ABC\sphericalangle = DAB\sphericalangle$ (és $ADC\sphericalangle = DCB\sphericalangle$) egyenlőség (**1776.** ábra), vagy *b)* $ABC\sphericalangle = DCB\sphericalangle$ (és $ADC\sphericalangle = DAB\sphericalangle$) egyenlőség következik. Így az $ABCD$ négyszögben két-két szomszédos szög egyenlő. Tehát $ABCD$ szimmetrikus trapéz.

1777. A megadott szerkesztés miatt az $ACED$ négyszög olyan húrnégyszög, amelynek az átlói egyenlőek: $AE = DC(=AB)$.
Az **1776**-os feladat megoldásában bizonyítottuk, hogy ha egy húrnégyszög átlói egyenlőek, akkor a négyszög szimmetrikus trapéz (**1777.** ábra).

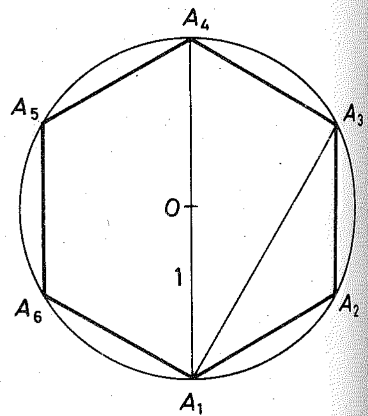


1776



1777

1778. A feltétel szerint $OA_1 = 1$.
OA_1A_2 háromszög szabályos, ezért $A_1A_2 = 1$.
Az $A_1A_3A_4$ derékszögű háromszögben $A_3A_4 = 1$ és $A_1A_4 = 2$, ezért $A_1A_3 = \sqrt{3}$.
Tehát
$A_1A_2 = A_1A_6 = 1$, $A_1A_3 = A_1A_5 = \sqrt{3}$
és $A_1A_4 = 2$.
Ebből következik, hogy
$A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_1A_5 \cdot A_1A_6 = 6$
(**1778.** ábra).



1778

1779. Igen. Például a téglalap (ha nem négyzet).

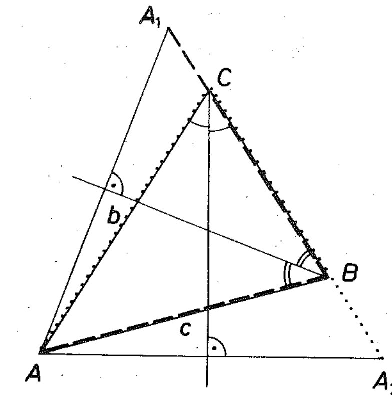
1780. A húrsokszög egyenlő oldalaihoz egyenlő középponti szögek és egybevágó A_iOA_{i+1} egyenlő szárú háromszögek tartoznak. O középpontú, $\dfrac{360°}{n}$ szögű forgatással a fenti n oldalú sokszög képe önmaga.
Tehát ha egy húrsokszög oldalai egyenlőek, akkor szögei is egyenlőek.

1781. A BA és BC félegyenes szimmetrikus a B csúcson átmenő szögfelezőre, így A_1 a BC félegyenes pontja. Hasonlóan A_2 is illeszkedik a CB félegyenesre.
A tükrözés miatt $c = AB = A_1B$, illetve $b = CA = CA_2$. Az a oldalnak a b és c oldalakhoz való viszonyától függően a levezetés innen két részre bomlik:
a) Ha $a \leqq b$ ($a \leqq c$ és $a > c$ esetén az egyenletek azonosak).
Az **1781.** *a)* ábra alapján:

$$A_1A_2 = A_1B + BA_2 = c + BA_2,$$
$$BA_2 = CA_2 - CB = b - a.$$

Ezekből

$$A_1A_2 = c + b - a.$$



1781a

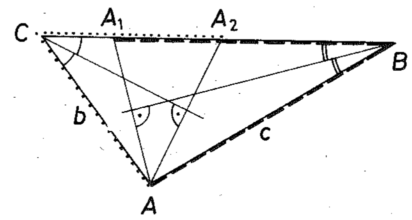
b) Ha $a > b$ ($a \leqq c$ és $a > c$ esetén az egyenletek azonosak).
Az **1781.** *b)* ábra alapján:

$$A_1A_2 = A_1B - A_2B = c - A_2B,$$
$$A_2B = BC - CA_2 = a - b,$$

így

$$A_1A_2 = c + b - a.$$

A végeredmény tehát minden háromszögre azonos.

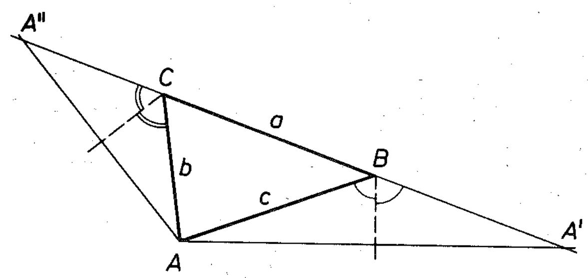


1781b

1782. Az A csúcsnak a B csúcson átmenő külső szögfelezőre vonatkozó tükörképe A' a BC oldalegyenes B kezdőpontú C-t nem tartalmazó félegyenesére esik és $c = AB = A'B$.
Hasonlóan A'' a BC oldalegyenes C kezdőpontú B-t nem tartalmazó félegyenesére illeszkedik és $b = CA = CA''$.
Ezért

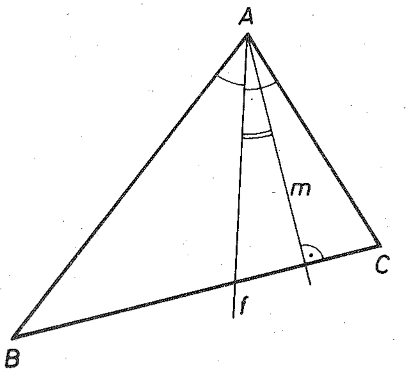
$$A'A'' = A'B + BC + CA'' = a + b + c$$

(**1782.** ábra).

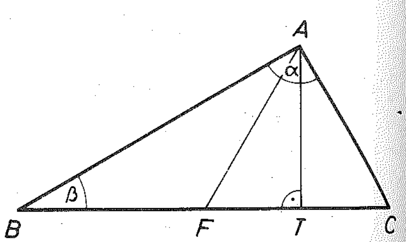


1782

1783. Ha az A csúcson átmenő m magasságvonalának az A-beli f szögfelezőre vonatkozó tükörképe az AB egyenes, akkor f és m szöge megegyezik f és AB hajlásszögével (**1783.** ábra). Mivel f felezi a $BAC\sphericalangle$-et, ezért m az AC egyenessel azonos. Ebből $AC \perp BC$ következik. Tehát az ABC háromszög derékszögű ($\gamma = 90°$).



1783

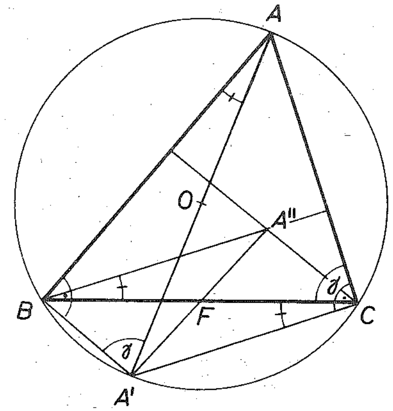


1784

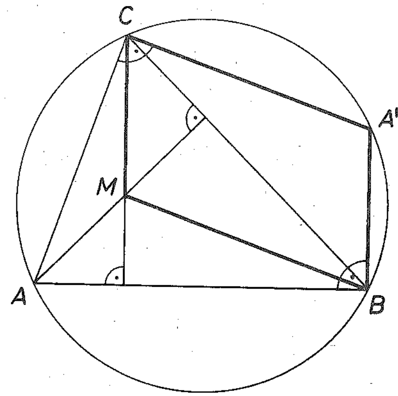
1784. Az ABT háromszög derékszögű és $\beta = 30°$, ezért $BAT\sphericalangle = 60°$ (**1784.** ábra).
Ha T-nek az A-n átmenő súlyvonalra vonatkozó tükörképe illeszkedik AB-re, akkor s_a felezi a $BAT\sphericalangle$-et, azaz $BAF\sphericalangle = 30°$. Ezért BFA egyenlő szárú háromszög, $BF = FA$.
Mivel F felezi a BC oldalt, ezért $BF = FC$.
Így az F középpontú, BF sugarú körre illeszkedik az A csúcs, tehát $\alpha = 90°$, az ABC háromszög derékszögű.

1785. $AA'B$ háromszög (a tükrözés miatt) derékszögű: $A'B \perp AB$.
A $BA'CA''$ négyszög középpontosan szimmetrikus, tehát paralelogramma: $CA'' \parallel A'B$ (**1785.** ábra).
Tehát $CA'' \perp AB$.
Hasonlóan mutatható meg, hogy $BA'' \perp AC$.
A'' az ABC háromszög két magasságvonalára illeszkedik, ezért A'' a háromszög magasságpontja.

1786. A kör átmérője AA', ezért $A'B \perp AB$ (I),
illetve $A'C \perp AC$ (II).
Az ABC háromszög magasságpontja M, ezért $CM \perp AB$ (III),
illetve $BM \perp AC$ (IV).
Az I. és III.-ból következik: $A'B \parallel CM$ (**1786.** ábra), továbbá a II. és IV. egyenletből: $A'C \parallel BM$, ami azt jelenti, hogy $A'BMC$ paralelogramma.



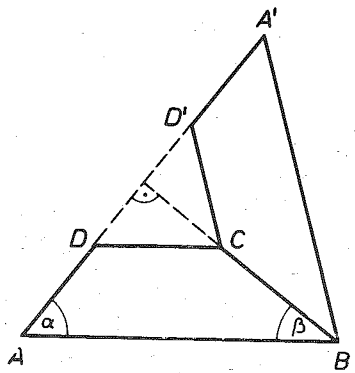
1785



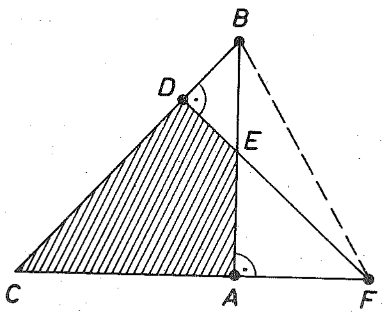
1786

1787. A tengelyes tükrözés miatt $AA' \perp BC$, illetve $DD' \perp BC$. A feltételt is figyelembe véve $AD \perp BC$, azaz $\alpha + \beta = 90°$ (**1787.** ábra).

1788. *a)* $AB \perp CF$ és $BC \perp DF$ miatt A és D az FB átmérőjű Thalész-kör 1-1 pontja ($ADBF$ húrnégyszög).
b) A és D a CE átmérőjű Thalész-kör 1-1 pontja: $ACDE$ húrnégyszög (**1788.** ábra).



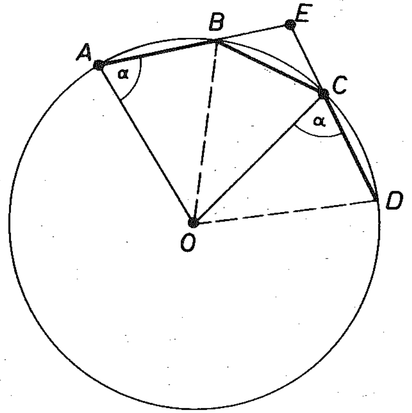
1787



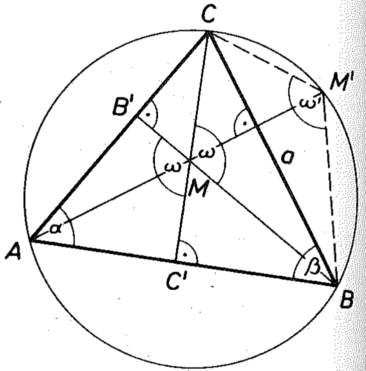
1788

1789. ABO és CDO egybevágó egyenlő szárú háromszögek, az alapon fekvő szögük α.

$OCE\sphericalangle$ az $OCD\sphericalangle = \alpha$ mellékszöge, így
$OCE\sphericalangle = 180° - \alpha$, tehát $OCEA$ húrnégyszög (**1789.** ábra).



1789



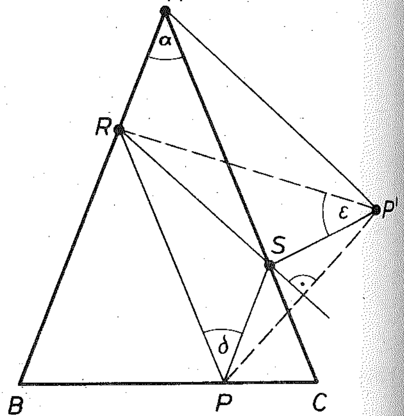
1790

1790. Jelölhetjük az ABC háromszög szögeit úgy, hogy $\gamma \geqq \beta$ legyen. Ábránkon (**1790.** ábra) $\gamma < 90°$.
A B-ből, illetve C-ből induló magasságok talppontjai B', illetve C', a magasságpont M. Az $AB'MC'$ húrnégyszög (2 szemközti szöge 90°–90°-os).
$\omega = 180° - \alpha$;
$\omega' = \omega$ a tükrözés miatt. Tehát M'-ből az a oldal $180° - \alpha$ szögben látszódik.

Megjegyzés:

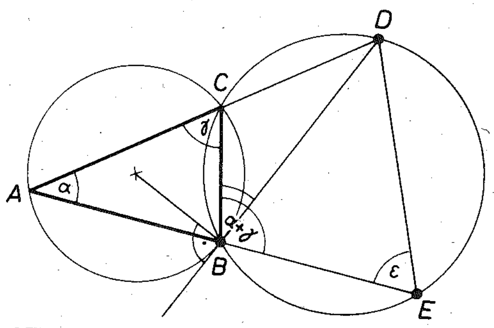
a) Az eredmény azt is jelenti, hogy $ABM'C$ húrnégyszög.
b) $\gamma = 90°$ esetén $M' = B$, nem keletkezik szög, továbbá $\gamma > 90°$ esetén $\omega' = \alpha$ adódik.

1791



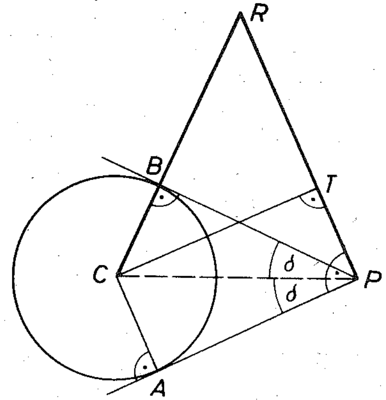
1791. Az R és S szerkesztése miatt $\delta = \alpha$, P' szerkesztése miatt $\varepsilon = \delta$. Ezekből $\alpha = \varepsilon$. Ezért A és P' az RS-hez tartozó α látószögű látókör pontjai, tehát $ARSP'$ húrnégyszög (**1791.** ábra).
Megjegyzés: Az $ARSP'$ négyszög szimmetrikus trapéz.

1792. $CBE\sphericalangle = \alpha + \gamma$, mert az ABC háromszög külső szöge.
$CBD\sphericalangle = \alpha$, mert a CB ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög. Ezért $DBE\sphericalangle = \gamma$.
$BCDE$ húrnégyszög, így $\varepsilon + BCD\sphericalangle = 180°$, ahol $BCD\sphericalangle = 180° - \gamma$. Ebből $\varepsilon = \gamma$. Tehát a BDE háromszög egyenlő szárú (**1792.** ábra).



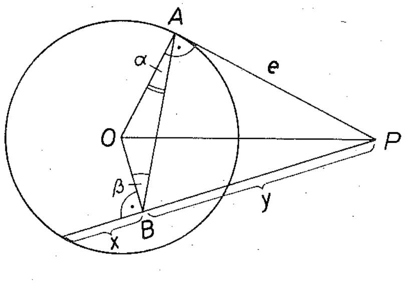
1792

1793. *I. megoldás:* AP-t toljuk el C-be, így megkapjuk a CRP háromszög PR-hez tartozó magasságát. E háromszög másik magassága BP.
$CT = AP$ a szerkesztés miatt,
$BP = AP$ a CP-re vonatkozó szimmetria miatt.
Tehát $CT = BP$. Így a CRP háromszög két magassága egyenlő, ezért e háromszög egyenlő szárú (**1793.** ábra).
II. megoldás:
$BPC\sphericalangle = CPB\sphericalangle = \delta$ a CP-re vonatkozó szimmetria miatt.
$PR \perp PA$, ezért $CPR\sphericalangle = 90° - \delta$.
Másrészt a PCB derékszögű háromszögben
$PCB\sphericalangle = 90° - \delta$,
tehát a CRP háromszög egyenlő szárú.



1793

1794. *I. megoldás:* A szerkesztés miatt $OA > OB$, ezért a szemközti szögekre igaz, hogy $\beta > \alpha$,
$PAB\sphericalangle = 90° - \alpha$,
$PBA\sphericalangle = 90° - \beta$.
A fentieket figyelembe véve $90° - \alpha > 90° - \beta$, tehát az állítás igaz (**1794.** ábra).



1794

II. megoldás: A húr hossza $2x$, $PB=y$, az érintőszakasz: e. Az érintő- és szelőszakaszok tétele értelmében:

$e^2 = (y+x)(y-x)$. Ebből $e^2+x^2 = y^2$, tehát $e<y$.

Így az APB háromszögben az e és y oldallal szemköztes szögekre is $ABP\sphericalangle < PAB\sphericalangle$.

1795. Jelöljük a P-re illeszkedő érintőkön fekvő érintési pontokat E-vel és F-fel, továbbá a G pontbeli érintőnek az előző érintőkkel való metszéspontjait Q-val és R-rel.

a) Illeszkedjen G a rövidebb EF ívre. (**1795.** *a)* ábra).

Bizonyítandó, hogy $QOR\sphericalangle$ állandó, azaz G-től független.

$PEOF$ húrnégyszög, mert két szemköztes szöge 90°-os. Ezért a kisebbik $EOF\sphericalangle = 180°-EPF\sphericalangle = 180°-\varphi$.

QOE és QOG, valamint RGO és RFO derékszögű háromszögek – az oldalak egyenlősége miatt – egybevágóak, ezért

$EOQ\sphericalangle = QOG\sphericalangle$ és $GOR\sphericalangle = ROF\sphericalangle$.

Így

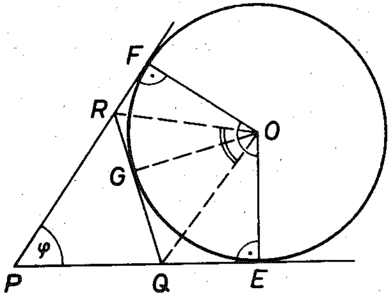
$$QOR\sphericalangle = QOG\sphericalangle + GOR\sphericalangle = \frac{1}{2}EOF\sphericalangle = 90° - \frac{\varphi}{2}.$$

Mivel a kör és P adottak voltak és ezek φ-t egyértelműen meghatározzák, ezért $QOR\sphericalangle = 90° - \dfrac{\varphi}{2}$ is állandó.

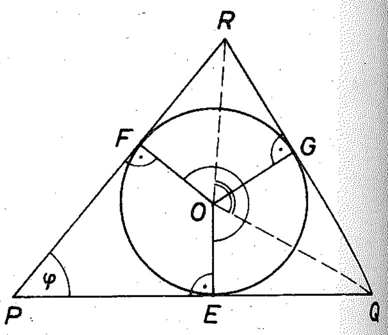
b) Legyen G a hosszabbik EF ív pontja (**1795.** *b)* ábra).

A nagyobbik (G-t tartalmazó)

$EOF\sphericalangle = 360°-(180°-EPF\sphericalangle) = 180°+\varphi$.



1795a



1795b

Itt is megmutatható (az előző részben felhasznált derékszögű háromszögek segítségével), hogy

$$QOR\sphericalangle = \frac{1}{2}EOF\sphericalangle = 90° + \frac{\varphi}{2}.$$

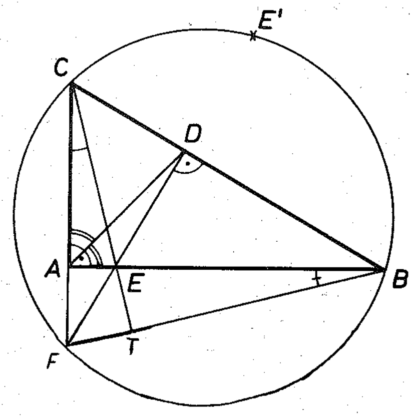
Tehát ha G-t a nagyobbik EF köríven tetszőlegesen választjuk, akkor $QOR\sphericalangle$-et P és a kör egyértelműen meghatározza.

Megjegyzés: Az adott kör a PQR háromszög *a)* QR oldalához írt köre, illetve *b)* beírt köre. Így a keresett szögek az **1696**-os és **1699**-es feladatok megoldásából is meghatározhatók.

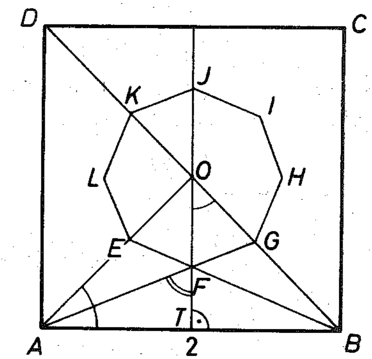
1796. Az FBC háromszögben $AB \perp CF$ és $FD \perp BC$, ezért E e háromszög magasságpontja (**1796.** ábra).

a) Tehát CE is magasságvonal, azaz $CE \perp BF$. Ebből $ETB\triangle \sim EAC\triangle$ következik, amiből adódik, hogy $EBF\sphericalangle = ECA\sphericalangle$.

b) Az **1790**-es feladat megoldásából következik, hogy a magasságpontnak a háromszög oldalaira vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körre illeszkednek.



1796



1797

1797. *a)* Tetszőleges két szomszédos csúcs az O pontból $\dfrac{360°}{8} = 45°$-os szögben látszik.

Megmutatjuk, hogy a csúcsoknak O-tól mért távolsága azonos (**1797.** ábra).

A szerkesztési utasítás szerint F és G is illeszkedik az $OAB\sphericalangle$ szögfelezőjére. Alkalmazzuk a szögfelező-tételt az ATO és az AOB egyenlő szárú derékszögű háromszögekre (figyelembe véve, hogy $AB=2$, $AO = OB = OG+GB = \sqrt{2}$ és $AT = OT = OF+FT = 1$),

$$OF : FT = \sqrt{2} : 1 \quad \text{és} \quad OG : GB = \sqrt{2} : 2.$$

Ezekből $OF = OG = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$.

Tehát a nyolcszög szabályos.

b) A fenti levezetésből következik, hogy a szabályos nyolcszög köré írható körének sugara $R = OF = 2-\sqrt{2}$.

1798. *a)* Igaz.
b) Igaz. (Lásd *a)*-t.)
c) Hamis. (Lásd *a)*-t.)
d) Igaz.
e) Igaz. (Lásd *d)*-t.)
f) Hamis. (Lásd *d)*-t.)
g) Hamis. (Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelyére csak egy oldalfelező pont, az alap felezőpontja illeszkedik.)
h) Hamis. (Lásd *g)*-t.)
i) Igaz. (Lásd *g)*-t.)

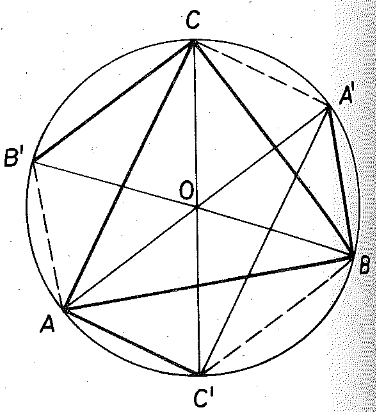
1799. A tükrözés miatt AA', BB' és CC' a kör egy-egy átmérője. Így az $AC'A'C$, $C'BCB'$ és $BA'B'A$ négyszögek középpontosan szimmetrikusak, ezért szemköztes oldalaik egyenlőek (**1799.** ábra):

$AC'=CA'$,
$CB'=BC'$,
$BA'=AB'$.

A három egyenletet összeadva a bizonyítandó

$$AC'+CB'+BA' = CA'+BC'+AB'$$

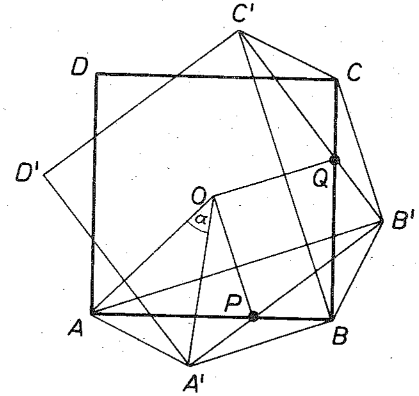
egyenlőséget kapjuk.



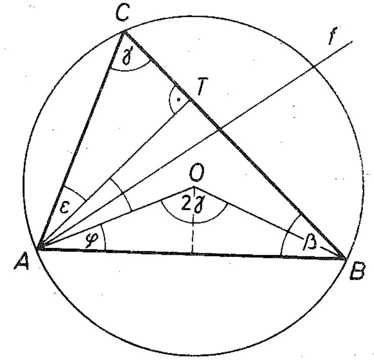
1799

1800. Az $AA'BB'$ négyszög O pont körüli 90°-os elforgatottja $BB'CC'$ négyszög.

Az $AA'BB'$ négyszög átlóinak metszéspontja P. Ennek O körüli 90°-os elforgatottja a $BB'CC'$ négyszög átlóinak Q metszéspontja. Így POQ egyenlő szárú derékszögű háromszög. Ebből következik, hogy az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyzet megfelelő oldalainak metszéspontjai négyzetet alkotnak (**1800.** ábra).



1800

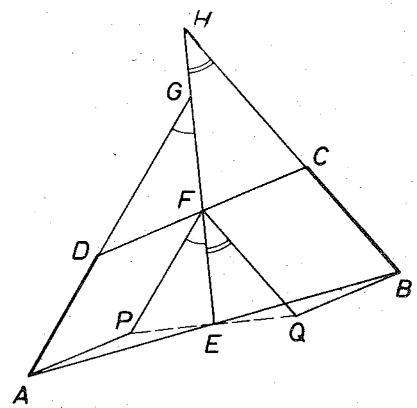


1801

1801. Elég belátni, hogy $CAT\sphericalangle = OAB\sphericalangle$. $AOB\sphericalangle = 2ACB\sphericalangle = 2\gamma$, mert ugyanazon íven nyugvó középponti, illetve kerületi szögek (**1801.** ábra). Az AOB egyenlő szárú háromszögből $\varphi = 90°-\gamma$, az ACT derékszögű háromszögből $\varepsilon = 90°-\gamma$, tehát $\varphi=\varepsilon$.

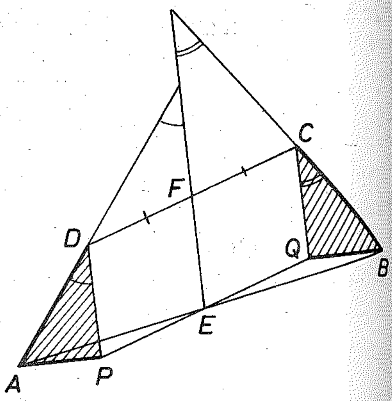
1802. Legyen az $ABCD$ négyszög két egyenlő oldala $AD=BC$. Szerkesszük meg az $FDAP$ és $FCBQ$ paralelogrammákat. Ezekre fennáll (**1802.** *a)* ábra):

$FP=DA=CB=FQ$, ezért PFQ egyenlő szárú háromszög.
$PFE\sphericalangle = AGE\sphericalangle$ és
$QFE\sphericalangle = BHE\sphericalangle$. Tehát elég belátni, hogy $PFE\sphericalangle = QFE\sphericalangle$.
$APBQ$ négyszög paralelogramma (hiszen $AP=DF=FC=QB$, és $AP \parallel QB$), ezért átlói felezik egymást. Így E a PQ szakasz felezőpontja, FE a PQF egyenlő szárú háromszög F csúcsához tartozó szögfelezője.



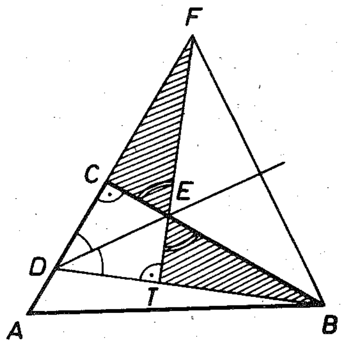
1802a

Megjegyzés: egy másik lehetséges megoldáshoz ad segítséget az **1802.** *b)* ábra.

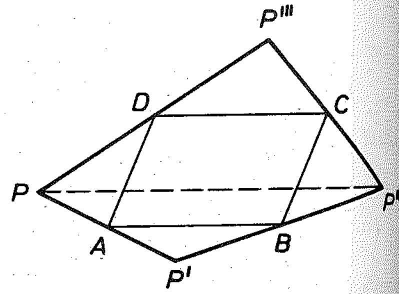


1802b

1803. Az $FDB\sphericalangle$ felezőjének pontja E, ezért $EC=ET$, továbbá $DC=DT$ (**1803.** ábra).
$ECF\triangle \cong ETB\triangle$ (egy oldal és 2 szögük páronként egyenlő), ezért $CF=TB$. A fentiekből adódik: $DF=DB$.



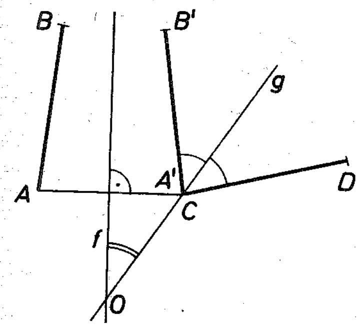
1803



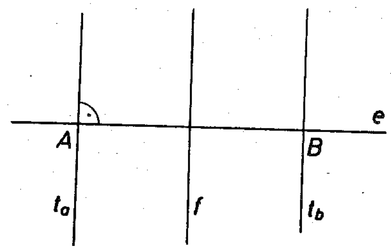
1804

1804. Legyen P a feltételeknek eleget tevő pont (**1804.** ábra).
P-nek A-ra vonatkozó tükörképe P',
P'-nek B-re vonatkozó tükörképe P'',
P''-nek C-re vonatkozó tükörképe P''',
P'''-nek D-re vonatkozó tükörképe P^*.
Be kell látni, hogy P azonos P^*-gal. Egyrészt $BC \| P'P'''$, mert BC a $P'P''P'''$ háromszög középvonala. Ugyanezért $BC = \frac{1}{2} P'P'''$. Másrészt $ABCD$ paralelogramma miatt ez érvényes AD-re is: $AD \| P'P'''$, illetve $AD = \frac{1}{2} P'P'''$. Ezért AD a $PP'P'''$ és $P^*P'P'''$ háromszögnek is A-ra illeszkedő, $P'P'''$-vel párhuzamos középvonala, melynek „másik" végpontja D. Így P^*P''' és PP'''-nek a P'''-n kívül a D is közös pontja, tehát a két egyenes azonos, $P^*D=P'''D=PD$, tehát P^* egybeesik P-vel.
Megjegyzés: Adott P esetén a fenti szerkesztési utasítással kaphatunk hurkolt négyszöget is.

1805. *a)* Ha az AB és CD szakaszok egy-egy megfelelő végpontja azonos (pl. $A=C$), akkor a keresett forgatás középpontja a közös pont (A).
b) Különben AC f felezőmerőlegesére, majd a $B'CD\sphericalangle$ ($\neq 0$) g szögfelezőjére vonatkozó tükrözések egymásutánja AB-t CD-be viszi.
A feladat szerint $AB \nparallel CD$, ezért $f \nparallel g$.
Két egymást O-ban metsző (f és g) egyenesekre vonatkozó tükrözések egymásutánja egy O körüli elforgatással helyettesíthető. (A forgatás szöge f és g szögének kétszerese.)
Így a keresett forgatás középpontja az f és g egyenesek O metszéspontja. (**1805.** ábra).



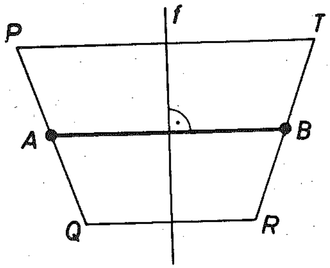
1805



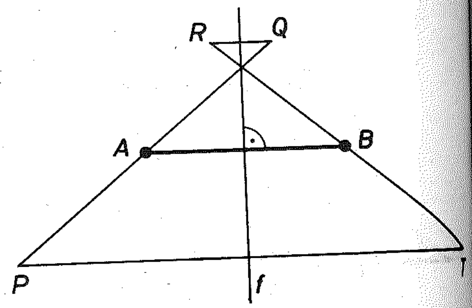
1806/I.

1806. *I. megoldás.* Az A pontra vonatkozó tükrözés helyettesíthető az A ponton átmenő $e=AB$ és a rá merőleges t_a egyenesre vonatkozó tükrözések egymásutánjával. Hasonlóan a B pontra vonatkozó tükrözés a t_b és e egyenesre vonatkozó tükrözések egymásutánjával helyettesíthető (**1806**/I. ábra).
Ennek alapján az A pontra és az f egyenesre vonatkozó tükrözések egymásutánja az e egyenesre vonatkozó tükrözés és a $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$ vektorral való eltolás egymásutánjával helyettesíthető. Ez megegyezik az f-re és B-re vonatkozó tükrözések egymásutánjával.
II. megoldás. P-ből indulva a tükrözésekkel létrejött Q, R, illetve T pontra igaz, hogy $QR \| AB \| PT$, azaz $PTRQ$ trapéz, melynek közép-

vonala AB. Tehát B a TR felezőpontja, azaz R tekinthető a T pont B-re vonatkozó tükörképének (**1806**/II. ábra).
Megjegyzés: A tükrözéssel kapott T, R, Q a P-vel alkothatnak hurkolt négyszöget, vagy illeszkedhetnek az AB egyenesre. Ezen esetekre is kimutatható az állítás igaz volta (**1806**/M ábra).

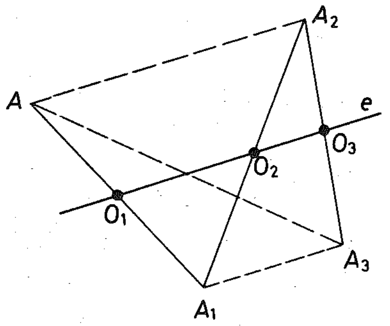


1806/II.

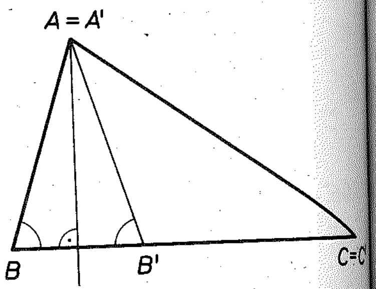


1806/M

1807. Az O_1 és O_2 középpontú tükrözések egymásutánja a $v = 2\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AA_2}$ eltolással helyettesíthető. Az A_2-nek O_3-ra vonatkozó tükörképe A_3, ezért O_3 az A_2A_3 felezőpontja. Ezért – mivel $AA_2 \| e$ –, az AA_2A_3 háromszög középvonalát tartalmazza az e egyenes (**1807.** ábra).
Megjegyzés: Ha A -•- e, akkor A_3 -•- e, tehát az állítás ekkor is igaz.



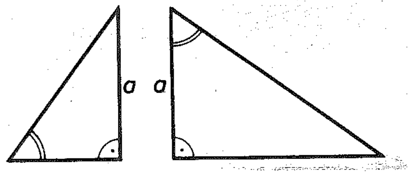
1807



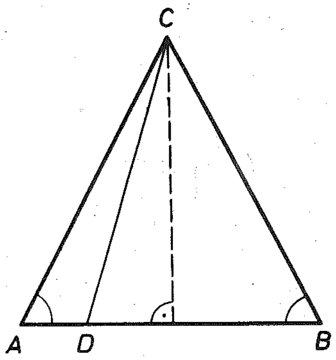
1808

1808. Nem. A feltételeket az ABC és $AB'C$ háromszög egyaránt teljesíti, de nem egybevágóak (**1808.** ábra).

1809. Nem (lásd az **1809.** ábrát). Az egybevágósághoz biztosítani kell, hogy a szereplő 2 szög a 2 háromszögben megfelelő szögek legyenek. Ezt az oldalhoz viszonyított helyzetük adja meg.



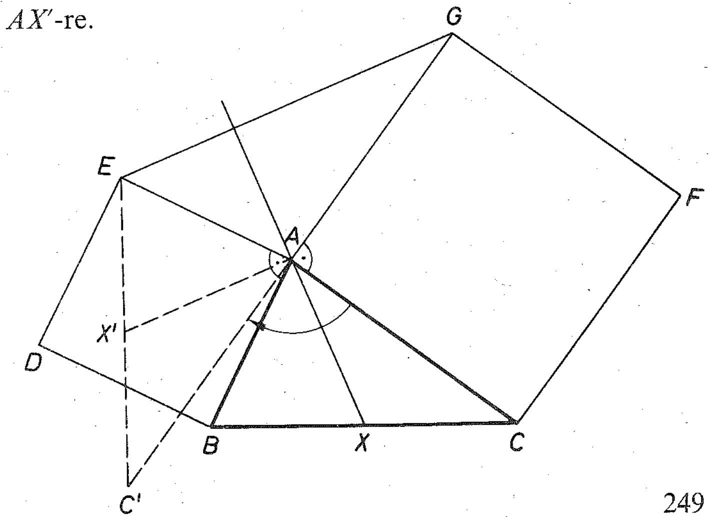
1809



1810

1810. Az ADC és BDC háromszögben $DC < AC = BC$, így a két háromszögben két oldal és a rövidebbel szemközti szög páronként egyenlő. **Ebből** nem következik, hogy a két háromszög egybevágó. (**1810. ábra.**)

1811. *I. megoldás.* Belátjuk, hogy az ABC háromszög AX **súlyvonala merőleges az** EG **szakaszra és fele akkora.** (Ebből következik, **hogy az** AEG háromszög A-ból induló magasságvonala felezi a BC szakaszt.) (**1811.**/I. ábra.)
Két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha valamelyiknek a 90°-os elforgatottja, a másik egyenessel egyállású egyenes.
Forgassuk el az ABC háromszöget A pont körül 90°-kal az ábra szerint. Ekkor $A' = A$, $B' = E$ és C' illeszkedik az AG egyenesre. AX' az $EC'G$ háromszög középvonala, hiszen A, illetve X' felezi a $C'G$, illetve $C'E$ szakaszt. Ezért $AX = AX' = \frac{1}{2}EG$, és AX merőleges az EG szakasszal párhuzamos AX'-re.



1811/I.

II. megoldás. A vektorösszeadás szabálya szerint

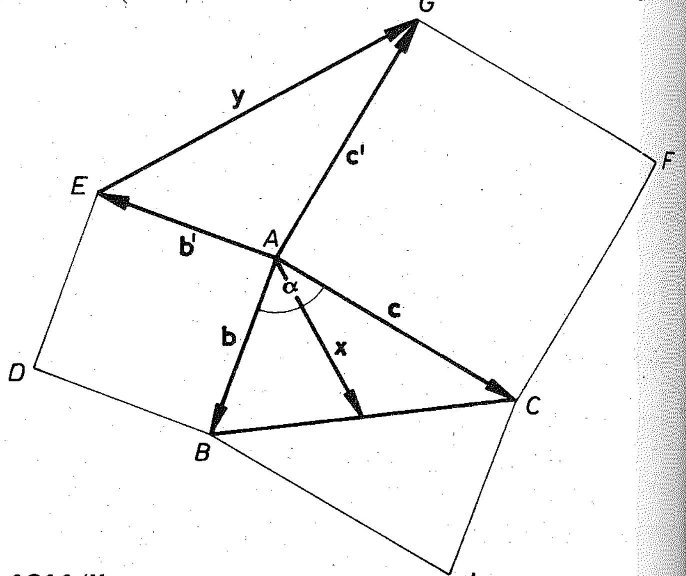
$2\mathbf{x} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{c}'-\mathbf{b}'$.

A $|\mathbf{b}| = |\mathbf{b}'|$, $|\mathbf{c}| = |\mathbf{c}'|$ és $\mathbf{bb}'=0$, $\mathbf{cc}'=0$ összefüggéseket figyelembe véve

$2\mathbf{xy} = (\mathbf{c}+\mathbf{b})(\mathbf{c}'-\mathbf{b}') = \mathbf{bc}'-\mathbf{cb}'$.

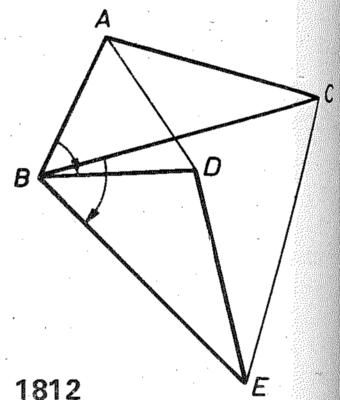
$\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}'$ szöge és $\mathbf{c}$ és $\mathbf{b}'$ szöge egyenlő $(\alpha+90°)$, ezért $2\mathbf{xy}=0$.

Ebből $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ következik (**1811**/II. ábra).



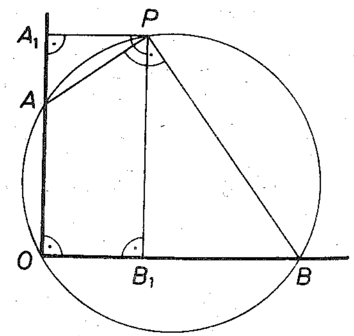
1811/II.

1812. Forgassuk el az ABC háromszöget 60°-kal az ábra szerint B pont körül úgy, hogy A pont képe D legyen. Ekkor C pont képe E lesz. Ezért az ABC és DBE háromszögek egybevágóak, azaz $AC=DE$ (**1812.** ábra).



1812

1813. $APB\sphericalangle=90°$, mert $OAPB$ húrnégyszög (**1813.** ábra).
$A_1PB_1\sphericalangle=90°$, mivel OA_1PB_1 téglalap.
Ezért $APA_1\sphericalangle = 90°-APB_1\sphericalangle = BPB_1\sphericalangle$.
Megjegyzés: A bizonyításban nem használtuk fel, hogy P az AOB szögfelezőjének pontja. A megoldásból adódik, hogy $PAA_1\triangle\sim PBB_1\triangle$. Ha P a szögfelezőre illeszkedik, e két háromszög egybevágó.

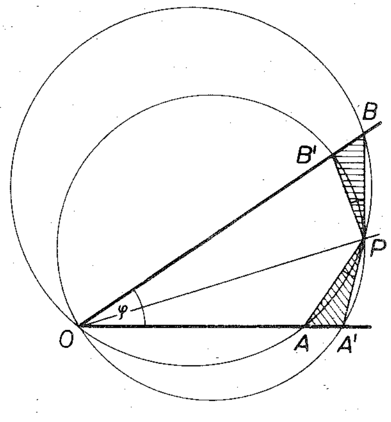


1813

1814. Az $AOP\sphericalangle = POB\sphericalangle = \frac{\varphi}{2}$, ezért a hozzájuk tartozó körívek, illetve húrok egyenlőek, tehát

$PB'=PA'$ és $PB=PA$.

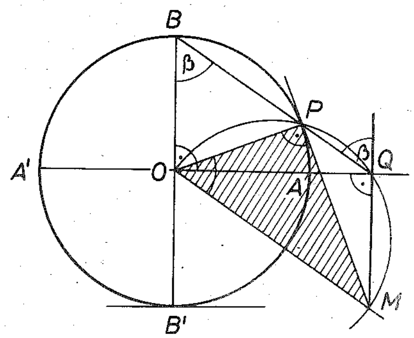
$OA'PB'$ és $OAPB$ négyszögek húrnégyszögek, ezért
$A'PB'\sphericalangle = 180°-\varphi = APB\sphericalangle$,
így $A'PA\sphericalangle=B'PB\sphericalangle$.
A fentiekből következik, hogy
$AA'P\triangle \cong BB'P\triangle$.
Ezért $AA'=BB'$ (**1814.** ábra).



1814

1815. Ha P az AOB síknegyed pontja (**1815.** ábra):

$OB\|QM$, ezért $MQP\sphericalangle = 180°-\beta$.
$OMQP$ húrnégyszög, ezért
$MQP\sphericalangle = 180°-POM\sphericalangle$.
Így $POM\sphericalangle=\beta$.
Az OBQ és OPM háromszögben $OB=OP=r$ és az ezeken nyugvó szögek egyenlőek, ezért
$OBQ\triangle\cong POM\triangle$.



1815

Így az $OMQP$ húrnégyszög átlói: OQ és MP egyenlőek, tehát a **1776.** feladat megoldása szerint e négyszög szimmetrikus trapéz.
Ezért $QM=r=OB'$, azaz M illeszkedik a kör B' pontbeli érintőjére.
Megjegyzés: Ha P az A-val, A'-vel vagy B-vel esik egybe, M pont nem határozható meg, illetve Q nem létezik. Ha $P=B'$, akkor $M=B'$, így az állítás nyilvánvalóan igaz. P más helyzetében a bizonyítás lényegében a fentiek szerint történik.

1816. Az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója: $a\sqrt{2}$. A feltétel szerint:

$$a\sqrt{2} = a+3.$$

Ebből $a = 3(\sqrt{2}+1)$ cm és
a háromszög kerülete: $k = 3a+3 = 3(3\sqrt{2}+4)$ cm.

1817. Az a oldalú szabályos háromszög magassága

$$m = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A feltétel szerint

$$a = a\frac{\sqrt{3}}{2}+2.$$

Ebből

$$a = 4(2+\sqrt{3}) \text{ cm és}$$

$$k = 12(2+\sqrt{3}) \text{ cm.}$$

1818. Az a oldalú szabályos háromszög magassága

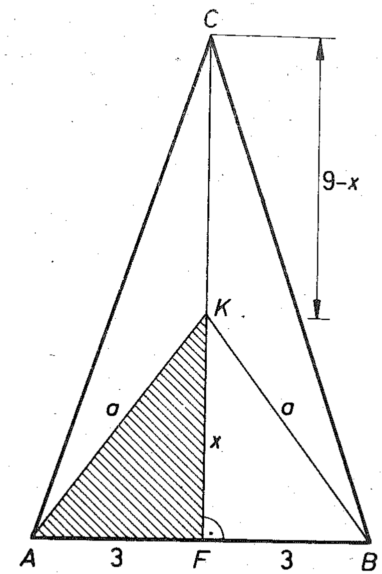
$$m = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A feltétel szerint
$m = a-6$.
Ebből

$$m = 6(3+2\sqrt{3}) \text{ cm.}$$

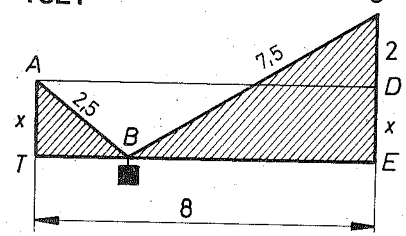
1819. Az a, b befogójú derékszögű háromszög
átfogójának négyzete: $a^2+b^2 = 41^2$ és
a háromszög területe: $\frac{1}{2}ab = 180$.
Innen a két befogó 9 cm és 40 cm.

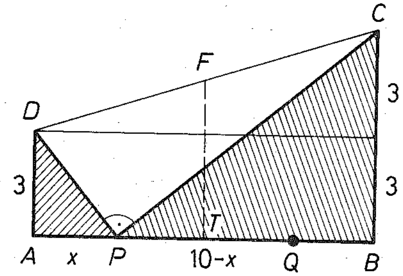
1820. A keresett távolság $FK=x$. Az ABC háromszög szimmetriája miatt, $AK=BK=a$, így a feltétel szerint $2a+(9-x) = 15$. Az AFK derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel szerint $x = \sqrt{a^2-9}$. E két összefüggésből adódó $a^2-3a+15 = 0$ egyenlet gyökei $a=3$ és $a=5$. Az előbbi alapján $x=0$ cm, tehát K az alap felezőpontjára esik. Az utóbbiból $x=4$ cm, így K az ABC háromszög köréírt körének a középpontja (**1820.** ábra).



1820

1821. A keresett szakasz $AT=x$. A feltételből adódóan $AB=2{,}5$ és $BC=7{,}5$. Az ABT és BCE derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét, figyelembe véve, hogy $AD=8$, írható:
$\sqrt{2{,}5^2-x^2}+\sqrt{7{,}5^2-(2+x)^2} = 8$. Ebből megfelelő rendezéssel két négyzetre emelés után kapjuk: $68x^2+36x-319 = 0$. Ebből kerekítve $x=1{,}9$ m-t kapunk (**1821.** ábra).

1821




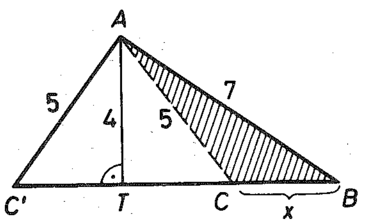
1822

1822. A megoldás feltétele, hogy a DC átmérőjű Thalész-körnek AB szakasszal legyen közös pontja. Itt ez teljesül, mert $FP = \frac{DC}{2} = \frac{\sqrt{109}}{2} > \frac{9}{2} = FT$. A feltétel szerint $CPD\sphericalangle=90°$. Ezért $APD\sphericalangle=PCB\sphericalangle$, így a $PAD\triangle \sim CBP\triangle$ alapján felírható $\frac{10-x}{6} = \frac{3}{x}$.

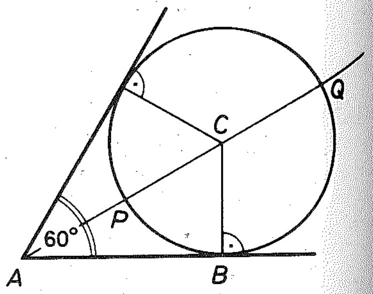
Az ebből kapható $x^2-10x+18 = 0$ egyenlet gyökei $5+\sqrt{7}$ és $5-\sqrt{7}$, azaz 7,65 cm és 2,35 cm a megoldás (**1822.** ábra).
Megjegyzés: A két értékből látható, hogy P és Q az AB felezőpontjára szimmetrikus. Ez a szerkesztésből is nyilvánvaló.

1823. Két ilyen háromszög létezik ABC és ABC'. Az ATC derékszögű háromszögből $TC=3$. Az ABT derékszögű háromszögre felírva Pitagorasz tételét $(3+x)^2+4^2 = 7^2$. Innen $3+x = \sqrt{33}$. Ebből
$a = CB = x = \sqrt{33}-3$ és $a' = C'B = x+6 = \sqrt{33}+3$ (**1823.** ábra).

1824. Az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Az ABC derékszögű háromszögben a 30°-os szöggel szemközti befogó 3 cm, ezért $AC=6$ cm. Minthogy $BC=CP=CQ=3$ cm, így $AP=3$ cm és $AQ=9$ cm (**1824.** ábra).



1823

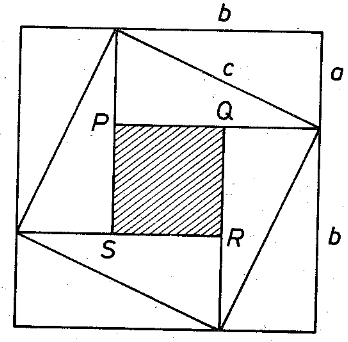


1824

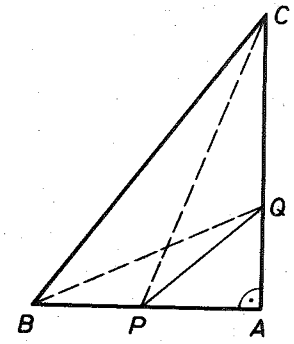
1825. Az AOB háromszögre felírjuk a cosinustételt,
$AB^2 = a^2+b^2-2ab\cos 60° = a^2+b^2-ab$.

1826. A derékszögű háromszög oldalainak szokásos jelölésével az állítás így írható fel: $c \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$. $\sqrt{2}$-vel szorozva, majd négyzetre emelve kapjuk: $2c^2 \geqq (a+b)^2$. A Pitagorasz-tételből $c^2 = a^2+b^2$, ezért a $2c^2 \geqq$ $\geqq a^2+b^2+2ab$ összefüggésből $c^2-2ab \geqq 0$ vagyis $a^2+b^2-2ab \geqq 0$, ami $(a-b)^2 \geqq 0$ alakban írható. Ez mindig igaz; egyenlőség $a=b$ esetén adódik. A lépések ekvivalensek, tehát a kiinduló összefüggés is igaz.
Megjegyzés: 1) Az állítás igaz volta leolvasható a Pitagorasz-tétel bizonyításából ismert ábra kiegészítéséből. Itt c^2-2ab a $PQRS$ négyzet területét adja (**1826.** *M.* ábra). 2) A négyzetes és a számtani közép közötti összefüggésből az állítás közvetlenül adódik.

1827. Felírjuk a Pitagorasz-tételt (**1827.** ábra)
az ABQ háromszögre $BQ^2 = AB^2+AQ^2$ (I.),
APC háromszögre $PC^2 = AP^2+AC^2$ (II.),
ABC háromszögre $BC^2 = AB^2+AC^2$ (III.),
APQ háromszögre $PQ^2 = AP^2+AQ^2$ (IV.).
Az I. és II. egyenlet összege ugyanannyi, mint a III. és IV. összege, amit bizonyítani akartunk.



1826. *M*



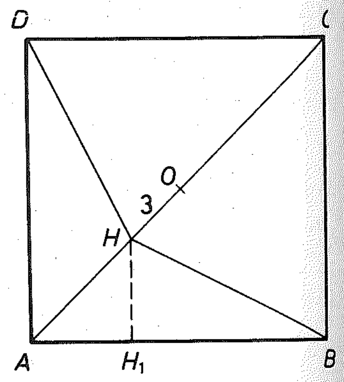
1827

1828. A Pitagorasz-tétel megfordítása szerint az *a), b), d), f)* pontokban szereplő háromszögek derékszögűek.
A Pitagorasz-tételből következik, hogy a *c)* pontban szereplő szakaszok nem derékszögű háromszög oldalai.
Az *e)* pontnál a és b viszonylagos értékétől függ, hogy a háromszög derékszögű-e:
Ha $\sqrt{2}(a+b)$ lenne a derékszögű háromszög legnagyobb oldala, akkor a számításból $b=0$ adódik. Ilyen háromszög nincs, mert a feltétel szerint $b>0$.

1829. Ha $HO=3$ cm, akkor a négyzet átlója $AC = 6\cdot HO = 18$ cm, s a négyzet oldala $AB = 9\sqrt{2}$ cm (**1829.** ábra).
Ebből $HA=6$ cm, és $HC=12$ cm.
Legyen $HH_1 \| BC$, ekkor H_1 az AB A-hoz közelebb eső harmadoló

pontja, és $HH_1 = \frac{1}{3}BC = 3\sqrt{2}$ cm (pl. a párhuzamos szelők tétele alapján).
$HD = HB$-t a HH_1B derékszögű háromszögből kapjuk:

$$HD = HB = \sqrt{HH_1^2 + H_1B^2} =$$
$$= \sqrt{18+72} = 3\sqrt{10} \text{ (cm)}.$$



1829

1830. A feltételek szerint:

$a = b+3, \quad \sqrt{a^2+b^2}+6 = a+b.$

Ezekből $a = 12$ dm, $b = 9$ dm a téglalap két oldala.

1831. Legyen $AP = PC = x$, ekkor $PB = 9-x$. A PBC háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt, az

$x^2 = (9-x)^2+3^2$

egyenlőséget kapjuk. Ebből $x = 5$ (**1831.** ábra).
Tehát P az A csúcstól 5 cm távolságra van.

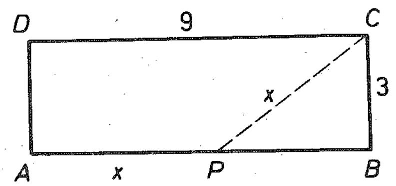
1832. Legyen $PC = x$, ekkor $AP = 12-x$ és $PB = x-2$. A PBC háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt kapjuk (**1832.** ábra):

$x^2 = (x-2)^2+6^2.$

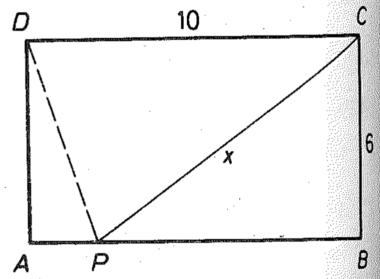
Ebből $x = 10$, $AP = 2$, s az APD derékszögű háromszögből a keresett szakasz

$PD = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$ (cm).

Megjegyzés: $AP < 10$ adódott, tehát van AB-nek ilyen tulajdonságú belső pontja.



1831



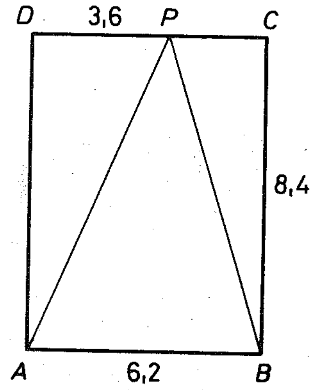
1832

1833. Két eset lehetséges.

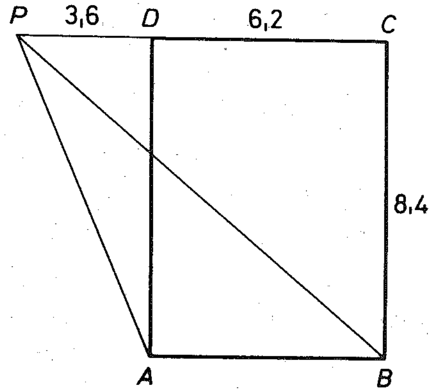
a) P a DC oldal pontja (**1833.** *a)* ábra):
$PC = 6{,}2-3{,}6 = 2{,}6$ (cm).
PA-t és PB-t a Pitagorasz-tétel felhasználásával határozzuk meg.

$PA = \sqrt{8{,}4^2+3{,}6^2} = \sqrt{83{,}52} \approx 9{,}1$ (cm),

$PB = \sqrt{8{,}4^2+2{,}6^2} = \sqrt{77{,}32} \approx 8{,}8$ (cm).



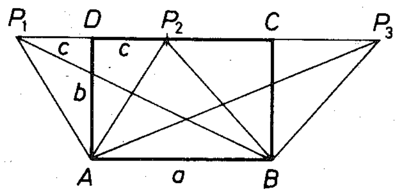
1833a



1833b

b) P nincs a PC szakaszon (**1833.** *b)* ábra): $PC = 6{,}2+3{,}6 = 9{,}8$ (cm), $PA = \sqrt{83{,}52} \approx 9{,}1$ (cm), $PB = \sqrt{9{,}8^2+8{,}4^2} = \sqrt{166{,}6} \approx 12{,}9$ (cm).

1834. A feladatot a Pitagorasz-tétel alkalmazásával oldhatjuk meg (**1834.** ábra).



1834

Ha P a téglalap CD oldalán kívül, a D csúcshoz fekszik közelebb (P_1), akkor

$P_1A = \sqrt{c^2+b^2}$, $P_1C = a+c$, $P_1B = \sqrt{(a+c)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}.$

Ha P a CD szakasz pontja (P_2), akkor

$P_2A = \sqrt{c^2+b^2}$, $P_2C = a-c$, $P_2B = \sqrt{(a-c)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}.$

Ha P a téglalap CD oldalán kívül, a C csúcshoz fekszik közelebb (P_3), akkor

$P_3A = \sqrt{c^2+b^2}$, $P_3C = c-a$, $P_3B = \sqrt{(c-a)^2+b^2} =$
$= \sqrt{(a-c)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}.$

Ezek szerint:

a) Csak akkor van ilyen csúcs – a B –, ha P a DC egyenes D kezdőpontú, C-t nem tartalmazó félegyenesének a pontja.

b) Csak akkor van ilyen csúcs – a B –, ha P a DC félegyenes pontja.

c) A téglalap A csúcsa a keresett csúcs.

1835. Jelöljük T-vel a C pontnak az AB oldalra eső merőleges vetületét. Ekkor $TB = \frac{1}{2}(AB-CD) = 1{,}2$ cm és $AT = 8{,}4$ cm (**1835.** ábra).

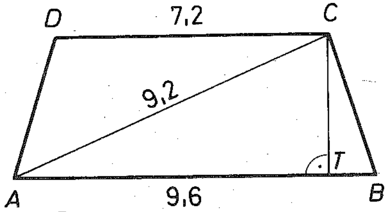
A trapéz magassága az ATC derékszögű háromszögből:

$$CT^2 = AC^2 - AT^2 = 9{,}2^2 - 8{,}4^2 = 14{,}08, \quad CT = \sqrt{14{,}08}.$$

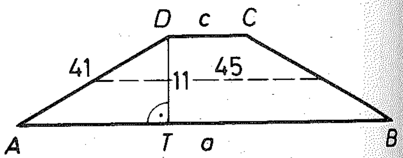
A trapéz szára a CTB derékszögű háromszögből:

$$CB^2 = CT^2 + TB^2 = \sqrt{14{,}08+1{,}44} = \sqrt{15{,}52},$$

$$CB = \sqrt{15{,}52} \approx 3{,}9 \text{ (cm)}.$$



1835



1836

1836. Jelöljük T-vel a D csúcsnak az AB hosszabbik alapra eső merőleges vetületét (**1836.** ábra). Ekkor $AT = \frac{a-c}{2}$. Az ADT derékszögű háromszögből

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = AD^2 - DT^2,$$

azaz $\quad (a-c)^2 = (41^2 - 11^2)\cdot 4.$

Innen $\quad a-c = 4\sqrt{390},$

másrészt $\quad a+c = 2\cdot 45 = 90.$

Így $\quad a = 45 + 2\sqrt{390} \approx 84{,}5$ (mm),

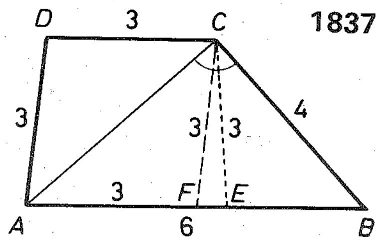
$\quad c = 45 - 2\sqrt{390} \approx 5{,}5$ (mm).

1837. Húzzunk a C ponton keresztül párhuzamost AD-vel. Az így kapott $AFCD$ paralelogramma 3 cm oldalú rombusz. Ezért F felezi az AB oldalt. Ez azt jelenti, hogy C pont rajta van az AB átmérőjű körön, tehát $ACB\sphericalangle = 90°$. AC az ABC háromszögből Pitagorasz-tétellel számítható ki (**1837.** ábra):

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 20,$$

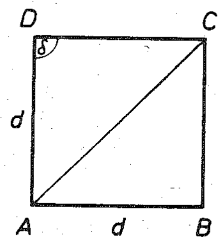
$$AC = 2\sqrt{5} \text{ cm}.$$

Megjegyzés: $AC < BD$, mert az $AECD$ szimmetrikus trapéz átlói $AC = ED$ és a BDE tompaszögű háromszögben $ED < BD$.

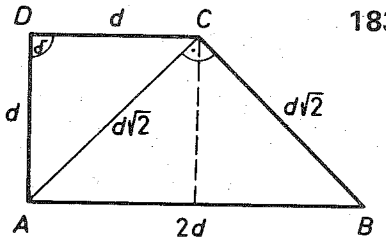


1837

1838. Az AC átló által lemetszett ACD háromszögben $\delta = 90°$, ezért $AD = DC = d$. A másik egyenlő szárú derékszögű háromszögnek vagy az átfogója $AC = d\sqrt{2}$ (*a)*), vagy a befogója (*b)*). Az *a)* esetben (**1838.** *a)* ábra) d oldalú négyzet területe $t = d^2$, a *b)* esetben (**1838** *b)* ábra) a trapéz alapjai d és $2d$, $t = \frac{d+2d}{2}\cdot d = \frac{3}{2}d^2$.



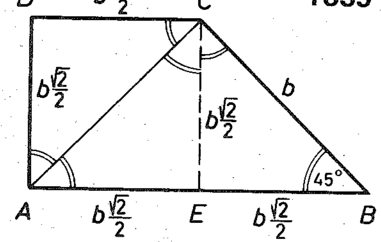
1838a



1838b

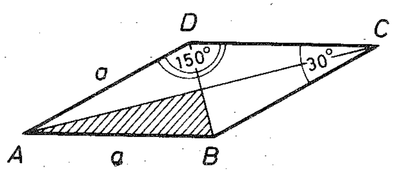
1839. Ha $\gamma > 90°$, akkor csak $\gamma = 3\cdot 45° = 135°$ esetén lehet a 3 egyenlő szárú háromszög derékszögű. Ezért a háromszögek befogói $EB = EC = AE = AD = DC = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, a trapéz kerülete: $b + 4\frac{b\sqrt{2}}{2} = b(1+2\sqrt{2})$ (**1839.** ábra).

1840. Az $ABCD$ rombusz területe $T = a^2 \sin 150° = 1$, ebből $a = \sqrt{2}$. Az átlók többféle úton is kiszámíthatók (**1840.** ábra). I. Az átlók által létrehozott



1839

1840



derékszögű háromszögből a félátlók sin, illetve cos szögfüggvénnyel megkaphatók:

$AC = 2a\cos 15° = 2\sqrt{2}\cos 15° = \sqrt{3}+1,$ illetve $(2{,}73)$,

$BD = 2a\sin 15° = 2\sqrt{2}\sin 15° = \sqrt{3}-1,$ illetve $(0{,}73)$.

II. két cosinustétellel:

$$AC^2 = 2a^2 - 2a^2\cos 150° = 4\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$AC = 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1;$$

$$BD^2 = 2a^2 - 2a^2\cos 30° = 4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

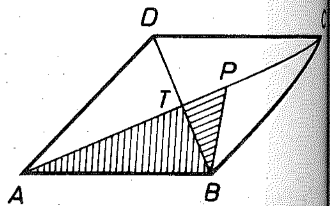
$$BD = 2\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1.$$

1841. Ha P az átlók T metszéspontjára esik, az állítás az ABT derékszögű háromszögre vonatkozó Pitagorasz-tételt jelenti (**1841.** ábra). Ha $PT \neq 0$, akkor

ABT háromszögre $AB^2 = BT^2 + AT^2$ és

PBT háromszögre $PB^2 = BT^2 + PT^2$.

A két egyenlet különbsége: $AB^2 - PB^2 = AT^2 - PT^2 = (AT+PT)(AT-PT) = AP \cdot PC$, így az összefüggés teljesül. Felhasználtuk, hogy a rombusz átlói felezik egymást, azaz $AT = CT$.



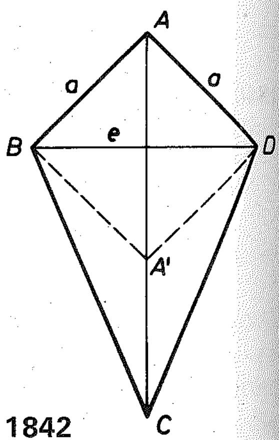
1841

1842. A feltételek miatt $ABA'D$ négyszög a oldalú négyzet, melynek átlója e. Ezért $a = \frac{e\sqrt{2}}{2}$.

Továbbá $A'D = A'C = a$, így a deltoid szimmetriatengely átlója

$$AC = AA' + A'C = e + a = \frac{e(2+\sqrt{2})}{2}$$

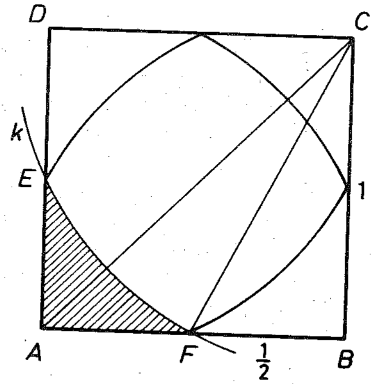
(**1842.** ábra).



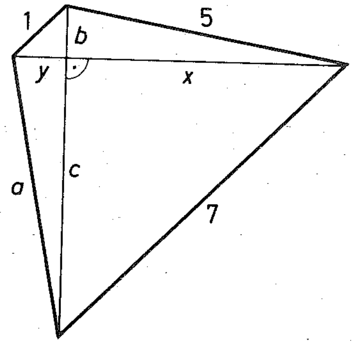
1842

Megjegyzés: Belátható, hogy A a BD átlóhoz közelebbi csúcspont, így A' az átlószakaszra illeszkedik.

1843. A négyzet belsejében C ponttól $\frac{\sqrt{5}}{2}$-nél távolabb azok a pontok vannak, amelyek a $CF = \frac{\sqrt{5}}{2}$ sugarú, C középű k körön kívül esnek, az ábrán az EAF idom belső pontjai, ahol E és F a négyzet oldalfelezőpontjai. Ugyanígy kapjuk meg az A-tól, B-től, illetve D-től $\frac{\sqrt{5}}{2}$-nél távolabbi pontokat. A 4 körlemez közös pontjai egyik csúcstól sincsenek $\frac{\sqrt{5}}{2}$-nél távolabb (**1843.** ábra). Ezzel igazoltuk az állítást.



1843



1844

1844. A konvex négyszöget a két egymásra merőleges átló 4 derékszögű háromszögre bontja. Ezekre alkalmazva a Pitagorasz-tételt

$$\begin{array}{lll} & x^2+b^2 = 25 & x^2+c^2 = 49 \\ & y^2+c^2 = a^2 & y^2+b^2 = 1 \\ \hline \text{összegük:} & x^2+y^2+b^2+c^2 = 25+a^2; & x^2+y^2+b^2+c^2 = 50. \end{array}$$

A két utóbbi egyenlet összehasonlításából $a^2 = 25$, tehát a negyedik oldal $a = 5$ hosszúságegység (**1844.** ábra).

Megjegyzés: Ilyen négyszög létezik: pl. az a trapéz, melynek alapjai 1 és 7 egység, szárai 5 egység.

1845. A gömbfa átmérője egyúttal a téglalap átlója, ami Pitagorasz-tétellel meghatározható.

$d^2 = 36^2+22^2 = 1780, \qquad d\approx 42,2$ cm.

1846. A téglalap átlója a kör átmérője, oldalai $3x$, illetve $4x$. Pitagorasz tétele szerint:

$(3x)^2+(4x)^2 = 20^2$. Ebből $x=4$, ezért az oldalak 12 cm, illetve 16 cm.

1847. A szabályos hatszög középpontja és két szomszédos csúcspontja r oldalú szabályos háromszöget határoz meg.

a) A szabályos hatszög szemköztes oldalainak távolsága két, r oldalú szabályos háromszög magasságának az összege $2\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$, illetve $4\sqrt{3}$ cm.

b) A szabályos hatszög szemköztes csúcspontjainak távolsága r magasságú szabályos háromszög oldalának kétszerese. Az $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$-ból a keresett távolságra $2a = \frac{4r}{\sqrt{3}}$, itt $\frac{16}{\sqrt{3}}$ cm adódik.

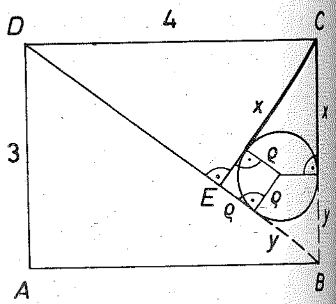
1848. A szabályos háromszögbe beírt r sugarú kör és a köré írt R sugarú kör középpontja a háromszög súlypontja, ami harmadolja a súlyvonalat. Ezért $R=2r$, másrészt a feltétel miatt $R = r+2$. Ezekből $r=2$ cm, $R=4$ cm. A szabályos háromszög magassága $R+r = 6$ cm. Ebből a háromszög oldala: $a = 4\sqrt{3}$ cm.

1849. A téglalap átlója $BD=5$ (Pitagorasz-tétellel). A BCD derékszögű háromszögre alkalmazva a befogótételt $EB\cdot BD = 9$, ebből $EB = \frac{9}{5}$ (**1849.** ábra).

EC kiszámítása: a BCD háromszög területének kétféle felírásából

$2t = 3\cdot 4 = 5\cdot EC$ s így $EC = \frac{12}{5}$.

A beírt kör ϱ sugara megkapható a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét figyelembe



1849

véve: $EB+EC = (x+\varrho)+(y+\varrho) = 2\varrho+3 = \frac{21}{5}$, mert $x+y = BC = 3$. Így $\varrho = \frac{3}{5}$ hosszúságegység.

1850. A szabályos háromszög köréírt és beírt körének középpontja, súlypontja és magasságpontja egybeesik. Ezért a köréírt kör R sugara és a beírt kör r sugara között $R=2r$ áll fenn, valamint a háromszög m magassága $m = R+r$.

Ezért $3r = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, illetve $\frac{3}{2}R = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ebből

a) az $R=8$ cm sugarú körbe írt szabályos háromszög oldala

$a = \sqrt{3}R = 8\sqrt{3}$ cm,

b) az $r=8$ cm sugarú kör köré írt szabályos háromszög oldala

$a = 2\sqrt{3}r = 16\sqrt{3}$ cm.

1851. 9, 12 és 15 pitagoraszi számhármas, ezért a háromszög derékszögű. A háromszög átfogója 15 cm, ezért a köréírt kör sugara ennek fele: 7,5 cm.

1852. A három egyenlő sugarú kör középpontjai: A, B, C, sugara r (**1852.** ábra).

Az ABC háromszög oldalai $2r$ hosszúságúak, ezért szabályos. A háromszög O középpontja az adott k kör középpontja.

Az ABC háromszög köréírt körének sugara:

$OA = 1-r$,

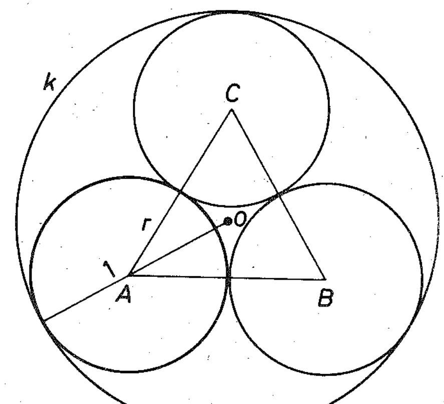
ezért magassága

$m = \frac{3}{2}(1-r)$.

Másrészt

$m = 2r\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ezért $r = 2\sqrt{3}-3$ egység.



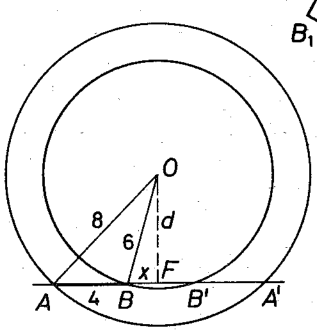
1852

1853. Legyenek a szelőnek a körökkel való metszéspontjai A, A', illetve B, B'. A húrok közös felezőpontját jelöljük F-fel, s legyen $FO=d$, $BF=x$ (**1853.** ábra).
Írjuk fel az AFO és BFO derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tételt!

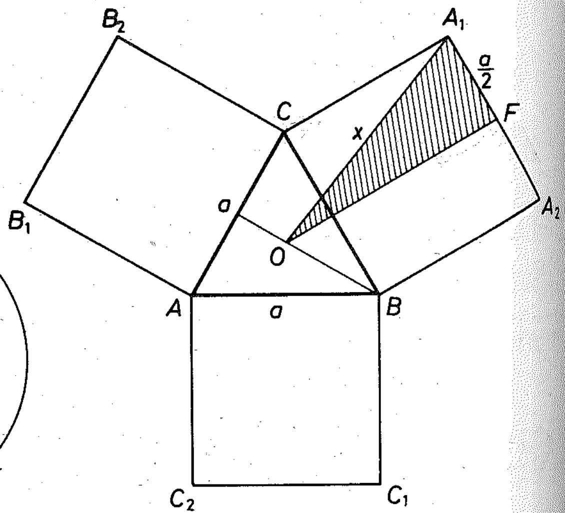
$$d^2+(4+x)^2 = 8^2,$$

$$d^2+x^2 = 6^2.$$

Ezekből ($x=1{,}5$ cm) $d=\sqrt{33{,}75}\approx 5{,}81$ (cm).



1853



1854

1854. A kapott alakzat a szabályos háromszög szimmetriatengelyeire szimmetrikus, ezért $OA_1=OA_2=OB_1=OB_2=OC_1=OC_2$, azaz az $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ pontok egy O középpontú, $x=OA_1$ sugarú körön vannak (**1854.** ábra).
Az A_1A_2 szakasz felezőpontja F. Az OFA_1 derékszögű háromszögben

$$x^2 = OF^2+FA_1^2,$$

ahol $OF = a+\dfrac{1}{3}a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ és

$$FA_1 = \frac{a}{2}.$$

Innen $x = \dfrac{a}{3}\sqrt{12+3\sqrt{3}} = 2{,}4\sqrt{12+3\sqrt{3}}$ (cm) $\approx 9{,}95$ (cm).

1855. A párhuzamos húrok szakaszfelező-merőlegese közös és átmegy a kör középpontján (**1855.** ábra). A besatírozott derékszögű háromszögek segítségével a 16 cm-es húr a középponttól

$$d_1 = \sqrt{12^2-8^2} = 4\sqrt{5}\ \text{(cm)} \qquad (\approx 8{,}944\ \text{cm}),$$

a 20 cm-es húr pedig

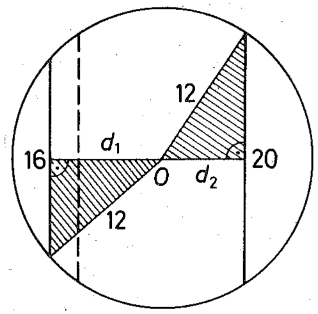
$$d_2 = \sqrt{12^2-10^2} = 2\sqrt{11}\ \text{(cm)} \qquad (\approx 6{,}633\ \text{cm})$$

távolságra van.
Ha a két párhuzamos húrt a kör középpontja elválasztja, akkor távolságuk

$$d_1+d_2 = (4\sqrt{5}+2\sqrt{11})\ \text{cm} \qquad (\approx 15{,}58\ \text{cm}),$$

ha nem választja el, akkor távolságuk

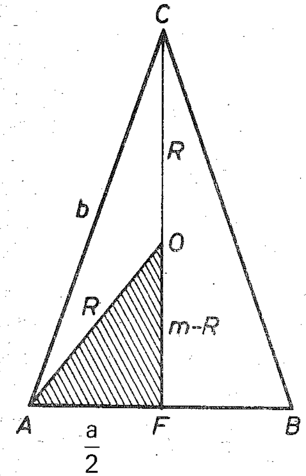
$$d_1-d_2 = (4\sqrt{5}-2\sqrt{11})\ \text{cm} \qquad (\approx 2{,}31\ \text{cm}).$$



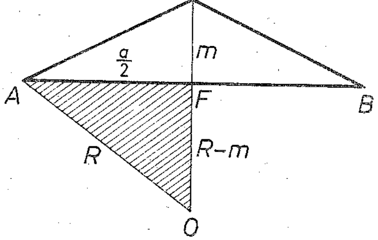
1855

1856. Jelöljük az alap felezőpontját F-fel, a körülírt kör középpontját O-val. Az OAF derékszögű háromszög oldalai $\dfrac{a}{2}$, $|m-R|$ és R (**1856.***a*), *b*) ábra). Ezekre $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+(m-R)^2 = R^2$.

1856a



1856b



Másrészt a feltétel szerint

$$a+m = 2R, \quad \text{azaz} \quad m-R = R-a,$$

így

$$(R-12)^2+36 = R^2.$$

Innen $R=7{,}5$, $m=3$.
Tehát az ABC egyenlő szárú háromszög tompaszögű és szára az AFC háromszögből:

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+m^2} = 3\sqrt{5}\ (\text{cm}) \quad (\approx 6{,}71\ \text{cm}).$$

1857. Az adott K, illetve O középpontú köröket és a húrt érintő r sugarú, O_1 és O_2 középpontú körök a szimmetria miatt egybevágóak (**1857.** ábra). Ismert, hogy két kör pontosan akkor érinti egymást, ha sugaraikra és centrálisukra $r_1+r_2 = c$ vagy $|r_1-r_2| = c$ igaz. Ennek alapján

$$O_1O = r+1{,}5, \quad O_1K = 4{,}5-r \quad \text{és} \quad OK=3.$$

Az O_1KO háromszög O_1 csúcsához tartozó magasság talppontja T. $EFTO_1$ téglalap, ezért $TK = 1{,}5+r$, és így $TO = 1{,}5-r$.
Az O_1OT és a KO_1T derékszögű háromszögekből

$$O_1T^2 = O_1O^2-TO^2$$

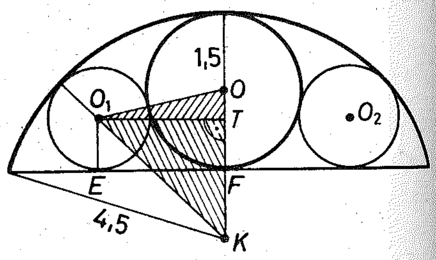
és

$$O_1T^2 = O_1K^2-TK^2,$$

azaz

$$(r+1{,}5)^2-(1{,}5-r)^2 = $$
$$= (4{,}5-r)^2-(1{,}5+r)^2.$$

Ebből a körök keresett sugara $r=1$ cm.



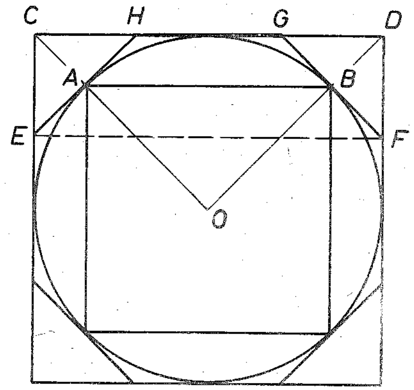
1857

1858. A körbe és a kör köré írt négyzetek oldalai legyenek párhuzamosak, és szimmetriatengelyei a szabályos nyolcszögnek is legyenek szimmetriatengelyei (**1858.** ábra).
Ekkor a szabályos nyolcszög oldala nem más, mint a kör A-beli érintőjének az a szakasza, amely a körülírt négyzetbe esik.
A beírt négyzet oldala AB,

a körülírt négyzet oldala $CD=EF$, a körülírt szabályos nyolcszög oldala $EH=HG=GF$.
$EFGH$ szimmetrikus trapéz alapjai EF, HG és középvonala AB. Ezért

$$AB = \frac{CD+HG}{2},$$

amit bizonyítani kellett.
Megjegyzés: Az állítást úgy is bizonyíthatjuk, ha a szakaszokat a kör sugarával fejezzük ki. ($AB=\sqrt{2}r$, $CD=2r$, $HG = 2(\sqrt{2}-1)r$.)



1858

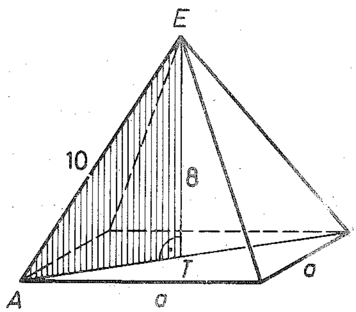
1859. A gúla magasságának T talppontja egyúttal az alaplap középpontja is (**1859.** ábra).

Ha az alapél a, $AT = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Az ATE derékszögű háromszögben

$$AT^2+TE^2 = AE^2,$$

azaz $\dfrac{a^2}{2} = 100-64$,

amiből $a = 6\sqrt{2}$ cm.



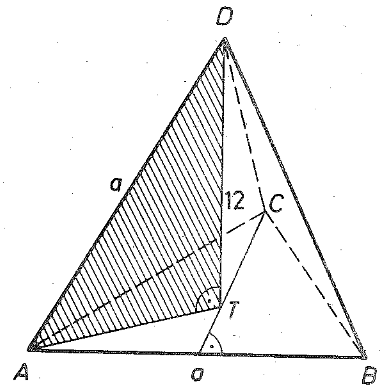
1859

1860. A szabályos tetraéder D csúcsából az ABC lapra bocsátott merőleges talppontja T, az ABC szabályos háromszög súlypontja (**1860.** ábra).
Az ATD derékszögű háromszögben:

$$AD=a,\ TD=12,\ AT = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ és}$$

$$AD^2 = TD^2+AT^2.$$

Ebből a tetraéder éle: $a = 6\sqrt{6}$ cm.



1860

1861. Az **1859**-es feladat ábráját használjuk fel. Az ATE derékszögű háromszögben

$AT^2 + TE^2 = AE^2$, ahol $AT = 2\sqrt{2}$ cm, $AE = 6$ cm,

$TE = m$.

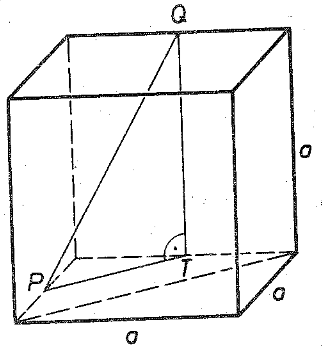
Innen $m = 2\sqrt{7}$ cm.

1862. A keresett PQ szakasz a PQT derékszögű háromszög átfogója. $QT = a$,

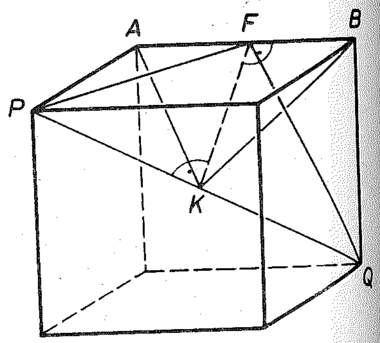
$$PT = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

$$PQ^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2, \quad \text{ebből} \quad PQ = \frac{a}{2}\sqrt{6}.$$

$a = 2$ esetén $PQ = \sqrt{6}$ hosszúságegység (**1862.** ábra).



1862



1863

1863. Kitérő egyenesek távolsága a mindkettőjükre merőleges ún. normáltranszverzális hossza. Két egyenlő szárú háromszöggel (PQF és ABK) bizonyítható, hogy FK a keresett szakasz (merőleges PQ-ra is és AB-re is) hossza egy lapátló fele: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**1863.** ábra).

1864. A megadott arányok alapján az egy csúcsba futó élek: $2x$, $5x$, $14x$. A testátló $f^2 = 4x^2 + 25x^2 + 196x^2$, ebből $f = 15x$. A keresett arányok:

$$\frac{15x}{2x} = \frac{15}{2}; \quad \frac{15x}{5x} = 3; \quad \frac{15x}{14x} = \frac{15}{14} \quad \text{mind racionális.}$$

1865. A közölt számok akkor és csak akkor lehetnek egy téglatest oldalélei és testátlója, ha teljesül rájuk az ún. térbeli Pitagorasz-tétel.
Teljesül: *a), c), d)*.
Nem teljesül: *b), e)*.

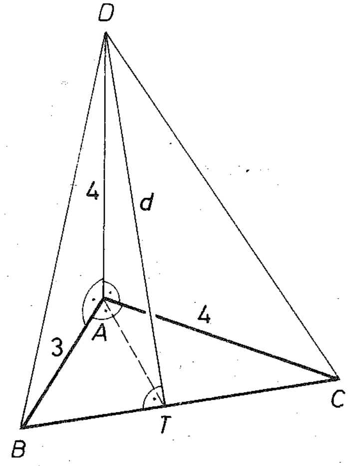
1866. ABC háromszögből Pitagorasz-tétellel $BC = 5$.
Felírhatjuk az ABC háromszög területét két úton:

$$t = \frac{1}{2}\cdot AT\cdot 5 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4,$$

ebből

$$AT = \frac{12}{5}.$$

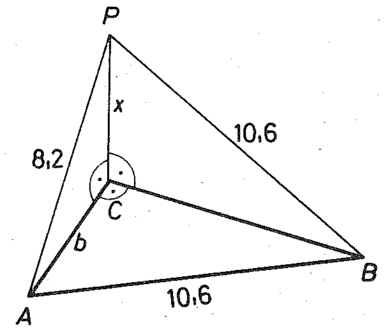
Az ADT derékszögű háromszögből $d^2 = 4^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{544}{25}$, ezért a keresett szakasz $\frac{4\sqrt{34}}{5}$ egység (**1866.** ábra).



1866

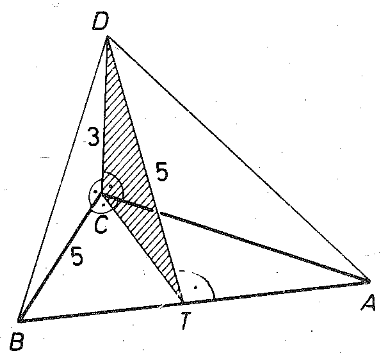
1867. A keresett szakasz $CP = x$. Létrejött 2 egybevágó háromszög (2 oldal és a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő). $ABC\triangle \cong PBC\triangle$, ezért $x = b$. Így ACP háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, tehát $x\sqrt{2} = 8{,}2$ (**1867.** ábra).
Ebből

$$x = \frac{8{,}2}{\sqrt{2}} = 4{,}1\sqrt{2}\ (\approx 5{,}80)\ \text{(cm)}.$$



1867

1868. D pontnak az AB-től való távolsága a D-ből az AB-re állított merőleges egyenesből kimetszett DT szakasz hossza (**1868.** ábra).



1868

A DCT derékszögű háromszögben $CT=4$ cm. (Pitagorasz-tétellel.) A három merőleges egyenes tétele alapján $CT \perp AB$. A BTC derékszögű háromszögben $TB=3$ cm. Az ABC derékszögű háromszögre alkalmazva a befogótételt $3 \cdot AB = 5^2$, ahonnan $AB = \frac{25}{3}$ cm.

1869. A feltételek szerint $a-b = 5$ (I.) és $a^2+b^2 = c^2$ (II.). A háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva $2t=ab=12c$ (III.). Az I-et négyzetre emelve, majd figyelembe véve a II. és III. összefüggést, kapjuk:

$25 = a^2+b^2-2ab = c^2-24c$, ahonnan $c=25$ dm.

Megjegyzés: Ilyen háromszög létezik, s az adatok e háromszöget egyértelműen meghatározzák.

1870. *I. megoldás* (**1870.** ábra). A keresett távolság, a K középpontnak az ABC háromszög síkjától való KT távolsága nem más, mint a CKF derékszögű háromszög K-ból induló magassága. Ezért e háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva

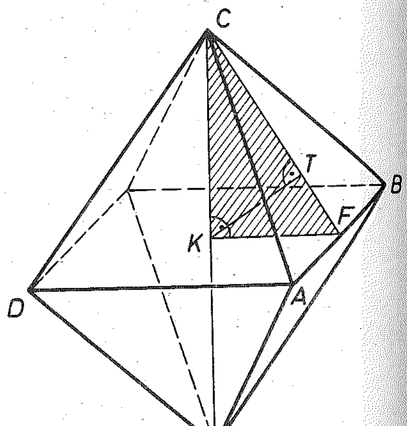
$2t = KT \cdot CF = KF \cdot KC.$

Az $AB=\sqrt{6}$ oldalú négyzet középvonalának fele $KF = \frac{\sqrt{6}}{2}$. A szabályos oktaéder tulajdonságai alapján $KC \perp KB$ és $KC = KB = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}$.

Az AB oldalú szabályos háromszög magassága $CF = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Mindezt figyelembe véve

$$KT = \frac{KF \cdot KC}{CF} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{3}}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}} = 1.$$



1870

II. megoldás. A szabályos oktaéder felbontható 8 egybevágó szabályos gúlára, melyek alaplapja az oktaéder egy-egy határoló lapja (pl. ABC háromszög), magassága pedig e lapoknak a K középponttól való távolsága (pl. KT). Az oktaéder térfogata egyrészt e 8 tetraéder térfogatának összege, másrészt alapjával összeillesztett 2 szabályos 4 oldalú gúla térfogatának összege. Ezen összefüggésből is eljuthatunk a fenti eredményhez.

1871. A Pitagorasz-tétel szerint $a^2+b^2 = c^2$.
A háromszög területének négyszerese $2ab=2cm$.
A két egyenlet különbsége: $(a-b)^2 = c^2-2cm$.
A feltétel szerint $a-b = m$, így m-re az

$m^2+2cm-c^2 = 0$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek pozitív gyöke:

$m = c(\sqrt{2}-1)$.

1872. Felhasználjuk, hogy a derékszögű háromszög kétszeres területe $ab=cm$, és hogy a Pitagorasz-tétel szerint $a^2+b^2 = c^2$, kapjuk:

$m^2+(a-b)^2 = m^2+a^2+b^2-2ab = m^2+c^2-2cm = (c-m)^2$.

Ezért az m, $a-b$ és $c-m$ szakaszok a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján, egy derékszögű háromszög oldalai.

1873. A szimmetria miatt P-nek a B és C csúcsoktól mért távolsága azonos (**1873.** ábra).
A BFP derékszögű háromszögből a keresett $d=BP$ távolságot a Pitagorasz-tétel segítségével határozzuk meg. Felhasználhatjuk, hogy $BF = \frac{a}{2}$ és $AF = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

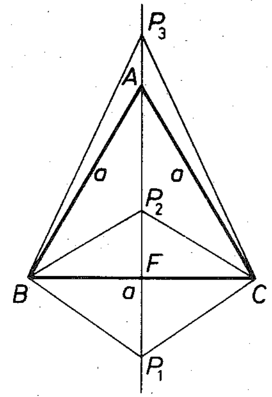
P-t az AF egyenesen A-tól kétféle irányba mérhetjük fel.
Ha P az AF félegyenes pontja (P_1, P_2), akkor

$FP = \left| b-a\frac{\sqrt{3}}{2} \right|$, és a keresett távolság:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}.$$

Ha P az A kezdőpontú, F-et nem tartalmazó félegyenes pontja (P_3), akkor $FP = b+a\frac{\sqrt{3}}{2}$, és a keresett távolság:

$d = \sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}.$



1873

1874. (Az **1873**-as ábráját használjuk.)
Ha P a B és C csúcstól b távolságra van, akkor P illeszkedik a BC oldalfelező-merőlegesére. $\left(P \text{ csak akkor létezik, ha } b \geqq \frac{a}{2}.\right)$

PFB derékszögű háromszögben $PB=b$, $BF=\frac{a}{2}$, ezért

$$PF=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad \text{másrészt} \quad AF=a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

BC oldalfelező-merőlegesét az A és F pont két félegyenesre és egy (AF) szakaszra bontja. A PA távolság attól függ, hogy P a felsorolt ponthalmazok melyikének pontja.
Az ábrának megfelelően:

$$P_1A=AF+P_1F=a\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}};$$

$$P_2A=AF-P_2F=a\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}};$$

$$P_3A=P_3F-AF=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}-a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Megjegyzés:

$b<\frac{a}{2}$ esetén nincs P.

$b=\frac{a}{2}$ esetén $P=F$.

Ha $\frac{a}{2}<b<a$, akkor két P pont van: P_1 és P_2 típusúak.

Ha $a\leqq b$, akkor két P pont van: P_1 és P_3 típusúak.

Tehát $b>\frac{a}{2}$ esetén a három képlet közül a fentiek szerint kell kiválasztani a két megfelelőt.

1875. Legyen P az A csúcstól b távolságra. A P pontnak a C-től és O-tól mért távolságának leolvasásához felhasználjuk, hogy a négyzet átlója $a\sqrt{2}$. A B és D csúcsoktól mért távolságát a POD derékszögű háromszög segítségével határozzuk meg: $PD^2=PO^2+OD^2$ (**1875.** ábra).

Ha P a négyzeten kívül, a C csúcshoz fekszik közelebb, mint A-hoz (P_1), akkor

$$P_1C=b-a\sqrt{2}, \quad P_1O=b-a\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P_1D=P_1B=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}.$$

Ha P az OC szakasz pontja (P_2), akkor

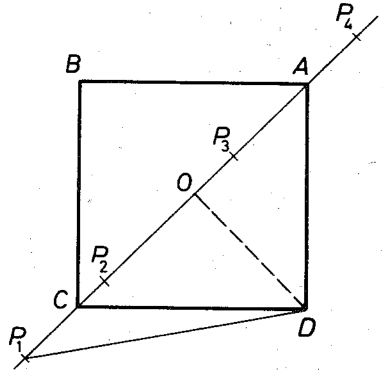
$$P_2C=a\sqrt{2}-b, \quad P_2O=b-a\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P_2D=P_2B=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}.$$

Ha P az OA szakasz pontja (P_3), akkor

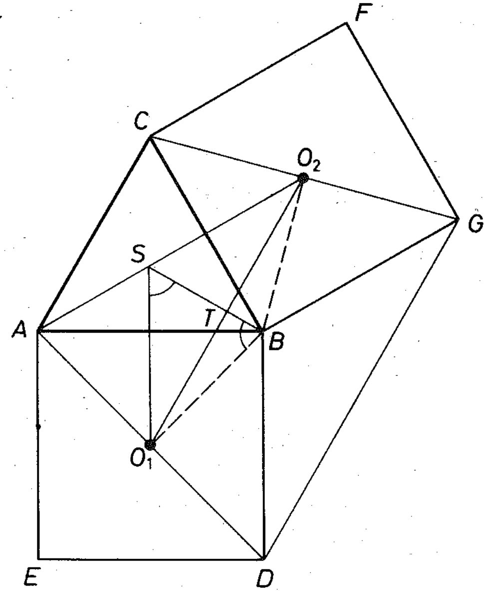
$$P_3C=a\sqrt{2}-b, \quad P_3O=a\frac{\sqrt{2}}{2}-b, \quad P_3D=P_3B=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}.$$

Ha P a négyzeten kívül az A csúcshoz fekszik közelebb, mint C-hez (P_4), akkor

$$P_4C=a\sqrt{2}+b, \quad P_4O=a\frac{\sqrt{2}}{2}+b, \quad P_4D=P_4B=\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}.$$



1875



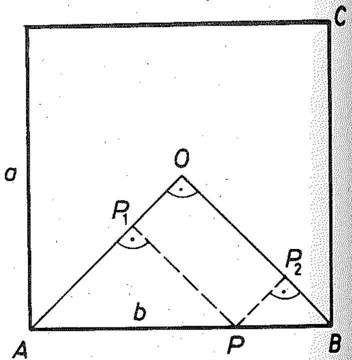
1876

1876. *I. megoldás:* Az O_1O_2S egyenlő szárú háromszög szára $SO_1=$ $=\frac{a}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, szárszöge 120° (**1876.** ábra).

Az alap felét az STO_1 derékszögű háromszögből kapjuk. $O_1T = \frac{a}{4}(1+\sqrt{3})$. Ebből $O_1O_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a$.

II. megoldás: Az O_1O_2B egyenlő szárú háromszög szára $O_1B = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, szárszöge 150°.
Ebből az alapot cosinustétellel kapjuk.
III. megoldás: O_1O_2 az $ADGC$ szimmetrikus trapéz középvonala.

1877. Ha P az AB oldal pontja, akkor $AP=b\leq a$.
Állítsunk P-ből merőlegest a két átlóra; a talppontok P_1, P_2. A keresett szakaszok PP_1 és PP_2.
APP_1 egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $PP_1 = b\frac{\sqrt{2}}{2}$, hasonlóan a PP_2B egyenlő szárú derékszögű háromszögben $PP_2 = (a-b)\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**1877.** ábra).

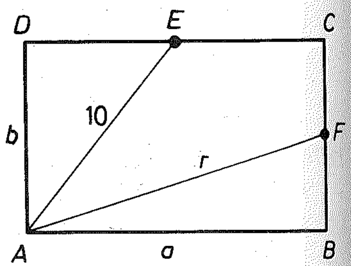


1877

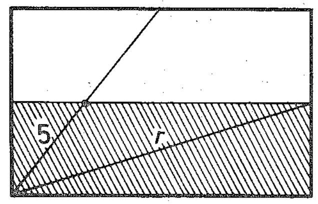
1878. Az ABF derékszögű háromszögből $r^2 = a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$, az AED derékszögű háromszögből $10^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2$.

E két egyenletből $a = 4\sqrt{\frac{r^2-25}{15}}$, $b = 2\sqrt{\frac{400-r^2}{15}}$ (**1878.***a)* ábra).

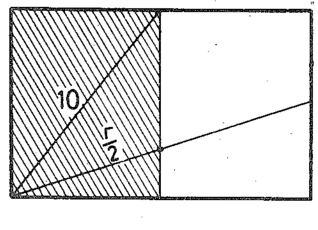
Megjegyzés: Az összefüggésekből látszik: $5<r<20$ lehet csak. Lásd még ehhez a *b), c)* ábrákat.



1878a



1878b



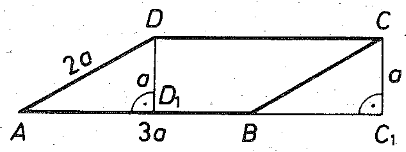
1878c

1879. A hosszabbik átlót az ACC_1, a rövidebbik átlót a BDD_1 derékszögű háromszögből határozhatjuk meg. ADD_1 és BCC_1 derékszögű háromszögek egybevágóak és $BC_1 = AD_1 = a\sqrt{3}$. Ezt felhasználva kapjuk:

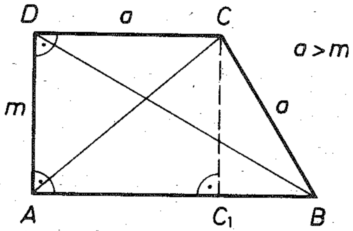
$AC^2 = (AB+BC_1)^2+CC_1^2$, azaz $AC = a\sqrt{13+6\sqrt{3}}$,

és $BD^2 = (AB-AD_1)^2+DD_1^2$, azaz $BD = a\sqrt{13-6\sqrt{3}}$.
(**1879.** ábra).

1880. A rövidebbik átló az ACD derékszögű háromszögből:
$AC = \sqrt{a^2+m^2}$.
C_1 a C csúcs AB oldalra eső merőleges vetülete. A CC_1B derékszögű háromszögből (**1880.** ábra)
$C_1B = \sqrt{a^2-m^2}$.



1879



1880

Ezért a hosszabbik alap: $AB = a+\sqrt{a^2-m^2}$. A hosszabbik átlót az ABD derékszögű háromszögből kapjuk meg:
$BD = \sqrt{m^2+(a+\sqrt{a^2-m^2})^2} = \sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-m^2}}$.

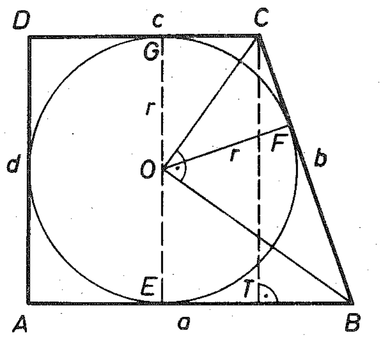
1881. *I. megoldás:* Az O középpontú körhöz B-ből, illetve C-ből húzott érintőszakaszok egyenlők. Ezért
egyrészt $BE = BF = a-r$, illetve $CF = CG = c-r$,
másrészt $COB\sphericalangle = 90°$.

Így a COB háromszögre felírhatjuk a magasságtételt:
$r^2 = (c-r)(a-r)$.

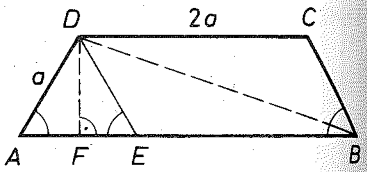
Ebből $r = \dfrac{ac}{a+c}$ (**1881.** ábra).

II. megoldás: Az adott trapéz érintőnégyszög, ezért $b+d = a+c$, ahol $d=2r$.
A CTB derékszögű háromszögben $b^2-d^2 = (a-c)^2$.

Az egyenletrendszerből: $d = 2r = \dfrac{2ac}{a+c}$.



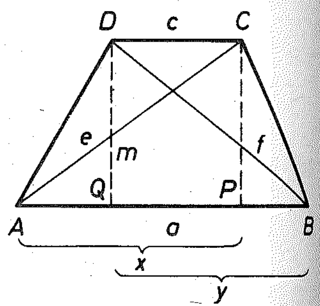
1881



1882

1882. Az $EBCD$ paralelogrammában $EBC\sphericalangle = 60°$, ezért az $ABCD$ trapéz szimmetrikus, s így átlói egyenlőek. A trapéz magassága az a oldalú szabályos háromszög magassága $FD = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. A trapéz átlóját a DFB derékszögű háromszögből határozzuk meg.
$BD^2 = FD^2+FB^2$, ahol $FB = FE+EB = 2{,}5a$,
azaz $BD = a\sqrt{7}$ (**1882.** ábra).

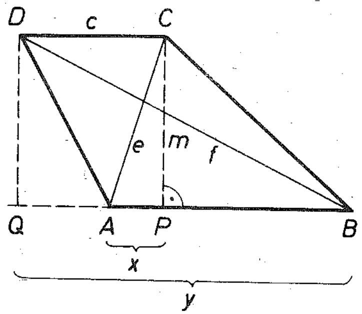
1883. Legyen a C-ből, illetve D-ből húzott magasság talppontja P, illetve Q, $AP=x$ és $QB=y$.
Az APC, illetve BQD derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tételből $x = \sqrt{e^2-m^2}$, $y = \sqrt{f^2-m^2}$.



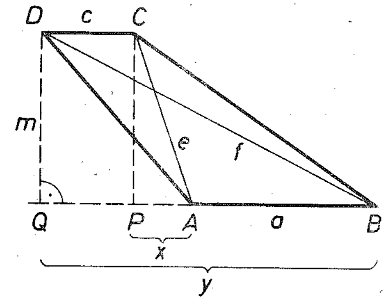
1883a

Minthogy $a = x+y-c$ (I.) (**1883.** *a), b)* ábra), így $a = \sqrt{f^2-m^2}+\sqrt{e^2-m^2}-c$ (II.). A feltételek szerint $f \geqq m$, $e \geqq m$, és x és y közül legalább az egyik nagyobb mint c, ezért $a>0$ teljesül.

Megjegyzés: A „nagyon ferde" trapéz esetében I. $a = |y-x|-c$, illetve II. $a = \left|\sqrt{e^2-m^2}-\sqrt{f^2-m^2}\right|-c$ adódik (**1883.***c)* ábra).



1883b

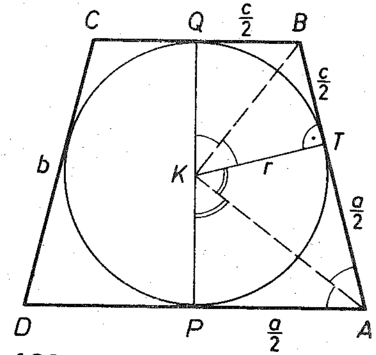


1883c

1884. Ha az alapoknak közös a felezőmerőlegese (PQ), akkor a trapéz tengelyesen szimmetrikus.
A-ból és B-ből a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők.

$BQ = BT = \dfrac{c}{2}$, $\quad AP = AT = \dfrac{a}{2}$

(**1884.** ábra).
BK és AK szögfelező lévén könnyen belátható, hogy AKB háromszög derékszögű, alkalmazható rá



1884

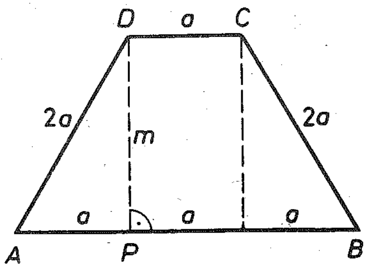
$$\left.\begin{array}{lll} \text{a magasságtétel} & \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{c}{2} = r^2, & ac=4r^2, \\ \text{másrészt} & \dfrac{a}{2}+\dfrac{c}{2} = b, & a+c = 2b \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Az egyenlet-}\\ \text{rendszert}\end{array}$$

megoldva $a = b+\sqrt{b^2-4r^2}$, $c = b-\sqrt{b^2-4r^2}$.

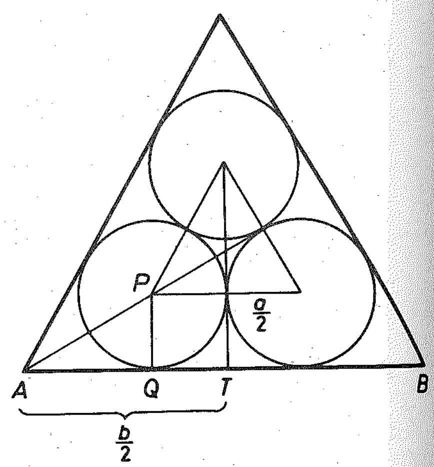
Megjegyzés: A feltételek miatt itt valós értékek adódnak.

1885. Az $ABCD$ szimmetrikus trapézból a D-ből induló magasság, DP a $2a$ átfogójú, a befogójú derékszögű háromszöget metszi le, ezért $DAP\sphericalangle = 60°$. Így $DP = a\sqrt{3}$. A keresett $(AC =)$ BD átló a BDP derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel adódik:

$$BD^2 = BP^2 + PD^2 = (2a)^2 + (a\sqrt{3})^2; \qquad BD = a\sqrt{7} \qquad \textbf{(1885.}\ \text{ábra).}$$



1885



1886

1886. Az adott (a oldalú) és a keresett (b oldalú) szabályos háromszög súlyvonal egyenesei egybeesnek, tehát súlypontjuk közös (**1886.** ábra).

I. megoldás: Az APQ derékszögű háromszög $PQ = \dfrac{a}{2}$ oldalával szemközti szöge 30°-os, így $AQ = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$. A keresett háromszög oldala

$$b = 2AT = 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{a}{2}\right) = a(\sqrt{3}+1).$$

II. megoldás: A súlypont itt egyúttal a két szabályos háromszög hasonlósági középpontja. Így az oldalak és a megfelelő súlyvonalak harmadának arányát figyelembe véve:

$$b : a = \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{a}{2}\sqrt{3}\right) : \left(\frac{1}{3}\,\frac{a}{2}\sqrt{3}\right),$$

amiből $b = a(\sqrt{3}+1)$ adódik.

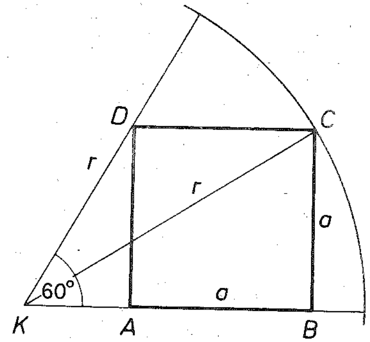
1887. A KAD derékszögű háromszög egyik szöge 60°-os. Ezért $KA = a : \sqrt{3}$.

A KBC háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt $KB = \dfrac{a}{\sqrt{3}} + a$ miatt

$$\left[\frac{a(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right]^2 + a^2 = r^2.\ \text{Ebből}\ a = r\frac{3}{7+2\sqrt{3}} = r\sqrt{\frac{3(\sqrt{7}-2\sqrt{3})}{37}} \approx 0{,}5354$$

(**1887.** ábra).

(*Megjegyzés:* 1. A négyzet K középpontú hasonlósággal meg is szerkeszthető. 2. A feladat megoldható a $KAC\triangle$-re felírt koszinusztétellel is.



1887

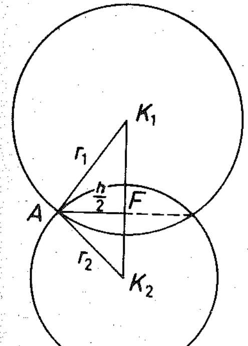
1888. A K_1 és K_2 középpontú körök egyik metszéspontja A. Az AK_1K_2 háromszög magassága $AF = \dfrac{h}{2}$.

Az AK_1F és AK_2F derékszögű háromszögekre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt. K_1, K_2 és F viszonylagos helyzetétől függően a középpontok távolsága:

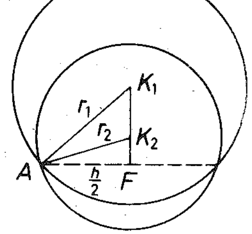
$$K_1K_2 = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} \quad \textbf{(1888.}\ a)\ \text{ábra), illetve}$$

$$K_1K_2 = \left|\sqrt{r_1^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} - \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}\right| \quad \textbf{(1888.}\ b)\ \text{ábra).}$$

Megjegyzés: A feltételekből adódóan itt mindig valós érték adódik.



1888a



1888b

1889. Az **1888**-as feladat jelöléseit és alapgondolatát felhasználva, továbbá $K_1F=x$ és $K_2F=y$ jelölést alkalmazva kapjuk: $x^2=r_1^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2$ és

$y^2=r_2^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2$.

Ezen egyenletekből kapjuk:

a) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=c(x-y)=r_1^2-r_2^2$ összefüggést, ha $x+y=c$, illetve

b) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(x+y)c=r_1^2-r_2^2$, ha $x\geqq y$ és $x-y=c$.

Ezt az előbbiekkel összevetve mindkét esetben $x=\frac{c^2+r_1^2-r_2^2}{2c}$

$\left(\text{és } y=\left|\frac{c^2-r_1^2+r_2^2}{2c}\right|\right)$ adódik, s meghatározhatjuk a keresett húr hosszát:

$$h=\frac{1}{c}\sqrt{2c^2r_1^2+2r_1^2r_2^2+2r_2^2c^2-c^4-r_1^4-r_2^4},$$

ami átírható így is:

$$h=\frac{1}{c}\sqrt{(r_1^2+r_2^2+c^2)^2-2(r_1^4+r_2^4+c^4)}.$$

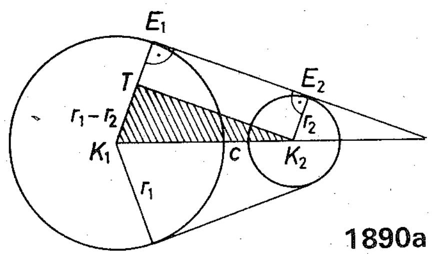
1890. A körök K_1, K_2 középpontjai és az E_1, E_2 érintési pontok trapézt határoznak meg. A keresett érintőszakasz $E_1E_2 \| K_2T$ és $E_1E_2=K_2T$, K_2T a trapéz K_2-re illeszkedő magassága. A Pitagorasz-tételt felírva a K_1K_2T derékszögű háromszögre

a) közös külső érintő esetén (**1890.***a)* ábra):

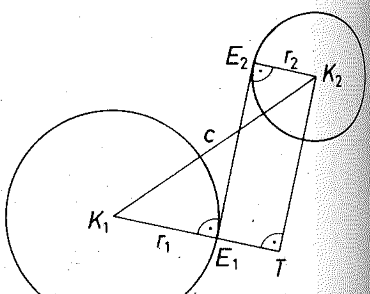
$E_1E_2=\sqrt{c^2-(r_1-r_2)^2}$, továbbá

b) közös belső érintő esetén (**1890.***b)* ábra):

$E_1E_2=\sqrt{c^2-(r_1+r_2)^2}$.



1890a

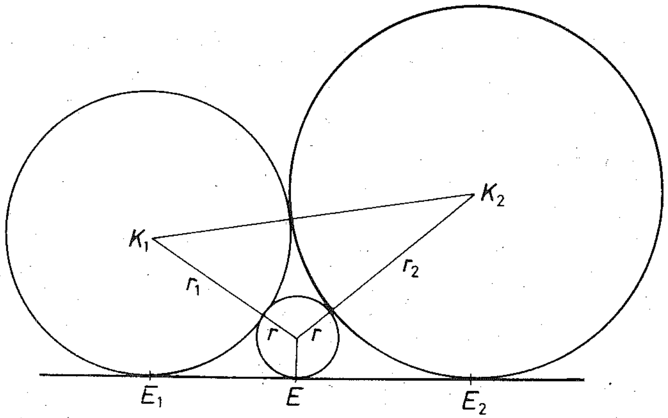


1890b

1891. Az **1890**-es feladat jelöléseit és gondolatmenetét alkalmazva $E_1E_2=$ $=\sqrt{c^2-(r_1-r_2)^2}$. Itt a két kör érintése miatt $c=r_1+r_2$, ezért $E_1E_2=$ $=2\sqrt{r_1r_2}$ összefüggést kapjuk.

1892. Az **1890**-es feladat jelöléseit alkalmazva kapjuk – mint az **1891**-es feladatban – $E_1E_2=2\sqrt{r_1r_2}$. Érintse a keresett r sugarú kört az érintő E-ben. Az előbbieket alkalmazva $E_1E=2\sqrt{r_1r}$ és $EE_2=2\sqrt{rr_2}$ (**1892.** ábra).

Ezekből, felhasználva az $E_1E_2=E_1E+EE_2$ összefüggést is, a keresett sugár: $r=\frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$.



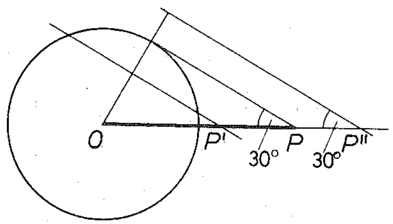
1892

1893. A szabályos háromszög szimmetriatengelye az OP egyenes. Ezért az ezzel 30°-os szöget bezáró, P-re illeszkedő egyenesek és a kör közös pontjai lesznek a háromszög további csúcspontjai.

Az **1893.** *c)* ábra mutatja, hogy csak $d\leqq 2r$ esetén van ilyen ABP háromszög. (Egy háromszög, ha $d=2r$, két háromszög, ha $d<2r$.)

A szabályos háromszög a oldalát az ATO derékszögű háromszögből határozhatjuk meg, figyelembe véve, hogy az ATP háromszögben

$$PT=\frac{a}{2}\sqrt{3} \quad \text{és} \quad AT=\frac{a}{2}.$$



1893c

a) Ha $d>r$, az ATO, ill. $A'T'O$ derékszögű háromszögben

$$OT = \frac{a}{2}\sqrt{3}-d, \quad OT' = d-\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

A Pitagorasz-tétel szerint mindkét esetben

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}-d\right)^2 + \frac{a^2}{4}, \quad \text{azaz} \quad a^2-ad\sqrt{3}+(d^2-r^2) = 0.$$

Ez a-ban másodfokú egyenlet, melynek gyökei a keresett oldalak:

$$a = \frac{d\sqrt{3}+\sqrt{4r^2-d^2}}{2} \quad \text{és} \quad a' = \frac{d\sqrt{3}-\sqrt{4r^2-d^2}}{4}$$ (**1893.** *a)* ábra).

b) Ha $d<r$, szintén két megfelelő háromszöget kapunk.

$$OT_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}-d.$$

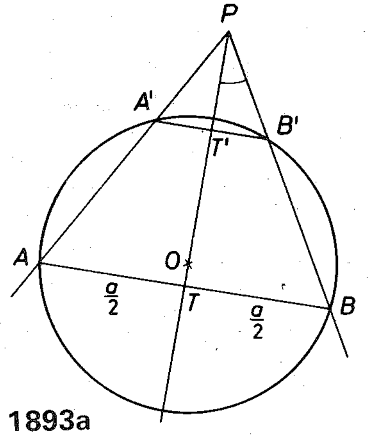
Az A_1T_1O derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel a fenti másodfokú egyenletre vezet (**1893.** *b)* ábra).

Az A_2T_2O háromszögben $OT_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3}+d$, amiből

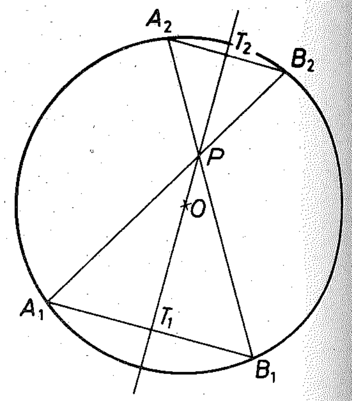
$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}+d\right)^2 + \frac{a^2}{4}, \quad \text{azaz} \quad a^2+ad\sqrt{3}+(d^2-r^2) = 0.$$

Ennek pozitív gyöke: $a_2 = \dfrac{\sqrt{4r^2-d^2}-d\sqrt{3}}{2}$.

Az a, a_2, illetve a', a_2 értékpárok közül $a'+a_2 = 0$, ez nem megoldás. A keresett oldalakat $a_1=a$ és a_2 adja meg.



1893a

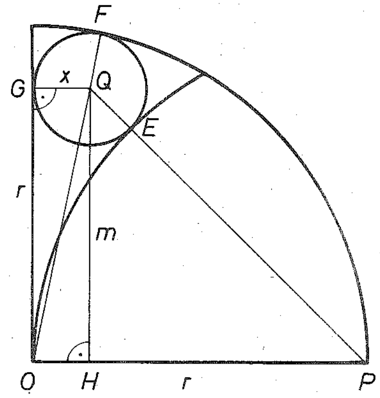


1893b

1894. Jelöljük az ismeretlen sugarat x-szel! Egymást érintő körök középpontjai és az érintési pont egy egyenesre illeszkednek (**1894.** ábra).
Ezért $OQ = OF-QF = r-x$ és $QP = QE+EP = x+r$.
Legyen az OPQ háromszög Q csúcsbeli magasságának talppontja H. $QG \perp OG$, ezért az $OHQG$ téglalap, s így $OH=QG=x$.
Az OPQ háromszög QH magasságát kétféleképpen fejezzük ki az OHQ és a PHQ derékszögű háromszögből:

$$m^2 = (r-x)^2-x^2,$$
$$m^2 = (r+x)^2-(r-x)^2.$$

Ezekből $x = \dfrac{r}{6}$.



1894

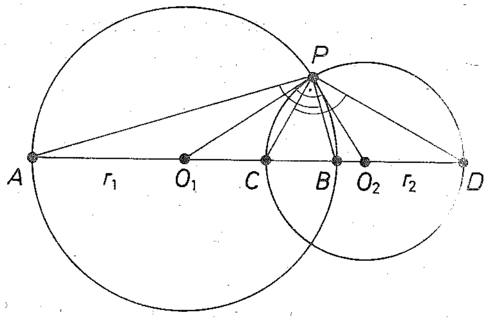
1895. Jelöljük a körök sugarait r_1-gyel és r_2-vel. A két kör merőlegesen metszi egymást, ezért O_1O_2P háromszög derékszögű. ABP és CDP derékszögű háromszögek a Thalész-tétel szerint (**1895.** ábra). A fentiek miatt

$$O_1O_2^2 = r_1^2+r_2^2,$$
$$(2r_1)^2 = PA^2+PB^2,$$
$$(2r_2)^2 = PC^2+PD^2.$$

Ezért

$$O_1O_2^2 = \frac{PA^2+PB^2+PC^2+PD^2}{4},$$

amit bizonyítanunk kellett.

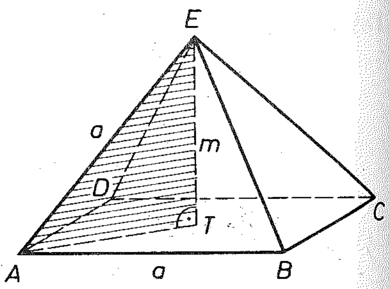


1895

1896. A gúla csúcsának alaplapra eső merőleges vetülete a négyzet középpontja: T (**1896.** ábra).

$AT = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, s így az ATE derékszögű háromszögben

$$m^2 = a^2 - \frac{a^2}{2}, \quad \text{azaz} \quad a = m\sqrt{2}.$$



1896

1897. *a)* Kétféleképpen írjuk fel az $A'B'D'$ derékszögű háromszög területét: $x\sqrt{a^2+b^2} = ab$ (**1897.** *a)* ábra).
Innen a keresett távolság:

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b) $A'D'$ merőleges az $ABB'A'$ lapra, ezért merőleges $A'B$ lapátlóra is. Tehát $A'BD'$ derékszögű háromszög.
Ebben $A'D' = b$,

$$A'B = \sqrt{a^2+c^2} \quad \text{(lapátló)}$$

és

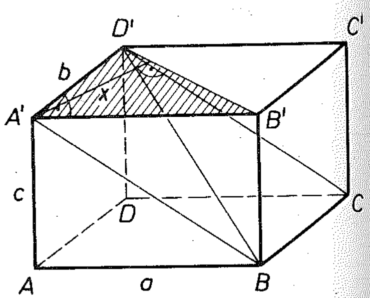
$$BD' = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad \text{(testátló)}.$$

Az előző módszert alkalmazva az $A'BD'$ háromszögre (**1897.** *b)* ábra):

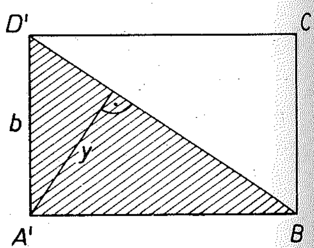
$$y\sqrt{a^2+b^2+c^2} = b\sqrt{a^2+c^2},$$

azaz a keresett távolság

$$a = \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$



1897a



1897b

1898. Az előző feladat *b)* része alapján, ha a kocka élét x-szel jelöljük:

$$a = \frac{x\sqrt{2}x}{\sqrt{3}x} = x\sqrt{\frac{2}{3}},$$

s innen a kocka éle $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,a$.

1899. A háromszög síkjában a köré írt kör középpontja (az oldalfelező-merőlegesek metszéspontja) van egyenlő távolságra a csúcsoktól (**1899.** ábra).
Ha egy pont (a térben) egyenlő távol van a háromszög csúcsaitól, akkor illeszkedik a köré írt kör középpontjában a síkra emelt merőleges egyenesre.
Ez derékszögű háromszög esetén az átfogó felezőpontjában emelt merőleges egyenes.
Tehát az ABP egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságát kell meghatározni, ha a szár d, és az alap $\sqrt{a^2+b^2}$. Ebből

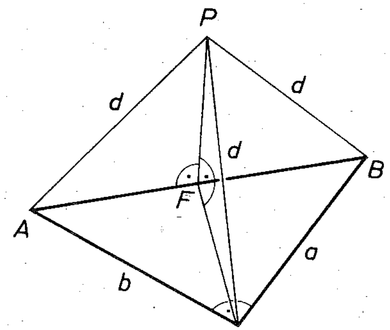
$$PF^2 = d^2 - \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2,$$

$$PF = \frac{\sqrt{4d^2-a^2-b^2}}{2}.$$

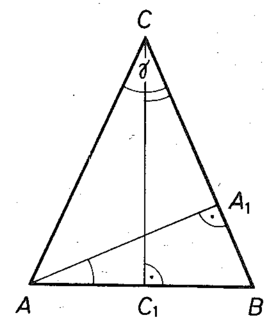
1900. $A_1AB\sphericalangle$ és $C_1CB\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek. Mivel CC_1 az ACB szög felezője, ezért

$\gamma = 2A_1AB\sphericalangle$.

(A keresett arány 2 : 1.)
(**1900.** ábra).



1899



1900

1901. A feladat a párhuzamos szelők témakörébe tartozó összefüggésekkel vagy az ABE és ACD háromszögek hasonlóságával oldható meg.

a) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{1{,}5}$, ebből $x = \dfrac{4}{3}$;

b) $\dfrac{y}{1{,}4} = \dfrac{3{,}5}{2}$, ebből $y = 2{,}45$.

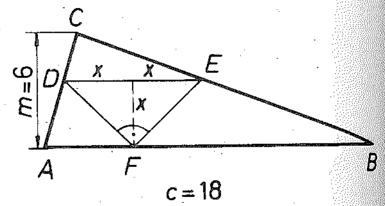
1902. Az a alapú, b szárú háromszögre felírva kétszer a terület kétszeresét: $2t = 8a = 6b$, másrészt az egyenlő szárú háromszöget az alaphoz tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. A Pitagorasz-tétel szerint $b^2 = 8^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. A két összefüggésből $a = \frac{48}{\sqrt{55}}$, $b = \frac{64}{\sqrt{55}}$.

1903. Az $ABC\triangle \sim BDC\triangle$, mert 2-2 szögük páronként egyenlő. Ezért $a : 9 = 16 : a$. Ebből $a = 12$ $(a = BC)$.

1904. Az $ABC\triangle \sim ADB\triangle$, mert 2-2 szögük páronként egyenlő, ezért $AD : 2 = 2 : 4$. Ebből $AD = 1$, $DC = 3$.

1905. Az $ABC\triangle \sim DEC\triangle$, ezért, ha $DE = 2x$, felírható $2x : (m - x) = c : m$. Ebből $x = \frac{cm}{2m + c} = \frac{18}{5} = 3{,}6$. Így a DEF háromszög oldalai: $DE = \frac{36}{5} = 7{,}2$; $EF = \frac{18}{5}\sqrt{2} = 3{,}6\sqrt{2}$ (**1905.** ábra).

Megjegyzés: a feltétel – ABC háromszög hegyesszögű – biztosítja, hogy létezik DEF háromszög.



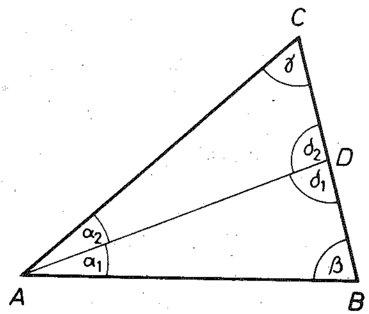
1905

1906. AC másik harmadolópontja R.
$RQC\triangle \sim ABC\triangle$, a hasonlósági arány $1 : 3$ és
$RQP\triangle \cong AKP\triangle$, ezért

$$KA = RQ = \frac{1}{3}AB. \text{ Minthogy } KB = KA + AB, \quad \frac{AK}{BK} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{4}{3}AB} = \frac{1}{4}.$$

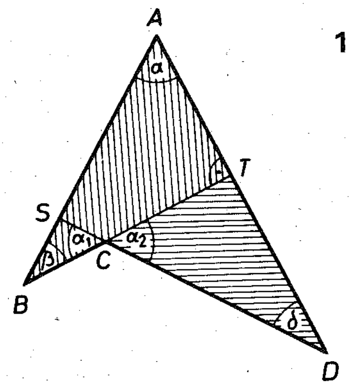
1907. Mivel az ABC háromszöget két háromszögre bontjuk, ezért a szelő átmegy az egyik csúcson. Legyen a szelő AD. A feltétel szerint ADB és ADC háromszögek hasonlóak (ahol nem biztos, hogy például B-nek C csúcs felel meg) (**1907.** ábra).
δ_1 az ADC háromszög (δ_2 mellett fekvő) külső szöge, ezért $\delta_1 > \gamma$ és $\delta_1 > \alpha_2$. Így $\delta_1 = \delta_2 = 90°$ esetén lehet csak hasonló a két háromszög.

Két eset lehetséges:
a) Ha $\beta = \gamma$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú és $AB = AC$.
b) Ha $\beta = \alpha_2$, akkor $\gamma = 90° - \beta$, így ABC derékszögű háromszög, ahol $\alpha = 90°$.

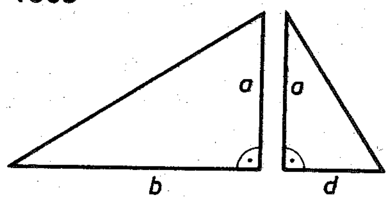


1907

1908. A két háromszög hasonlósága miatt $\alpha_2 = \alpha$ és $\delta = \beta$, ahol $\alpha + \beta = 90°$. $\alpha_1 = \alpha_2$, mert csúcsszögek. Ezért a BSC háromszögben $\alpha_1 + \beta = 90°$, azaz $BSC\sphericalangle = 90°$. Tehát $AB \perp CD$ (**1908.** ábra).
Megjegyzés: Ha a hasonló háromszögekben az A-nak megfelelő pont nem a C lenne, az állítás hamis lenne.



1908



1909

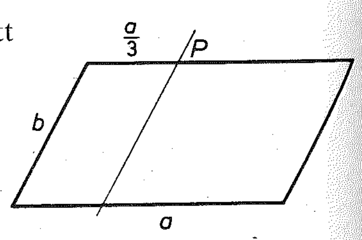
1909. A feltétel szerint $a^2 = bd$. Ebből $\frac{a}{b} = \frac{d}{a}$ következik, ami az oldalak által közbezárt szögek egyenlősége (90°) miatt éppen azt jelenti, hogy a két háromszög hasonló (**1909.** ábra).

1910. A megadott téglalap kerülete $k = 8{,}4\ \text{dm} = 84\ \text{cm}$. Ezért a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{52}{84} = \frac{13}{21}$. Az adott téglalaphoz hasonló téglalap oldalai $\left(24 \cdot \frac{13}{21} = \right) \frac{104}{7}$ cm és $\frac{78}{7}$ cm.

1911. A két paralelogramma hasonlósága miatt

$$\frac{\frac{a}{3}}{b} = \frac{b}{a}.$$

Ebből $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ (**1911.** ábra).



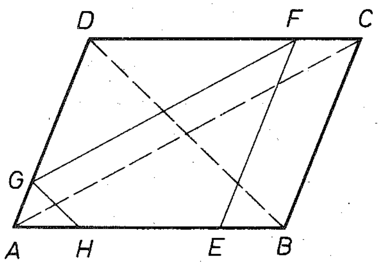
1911

1912. A feladatot a párhuzamos szelők tételével vagy hasonló háromszögek segítségével oldhatjuk meg (**1912.** ábra).

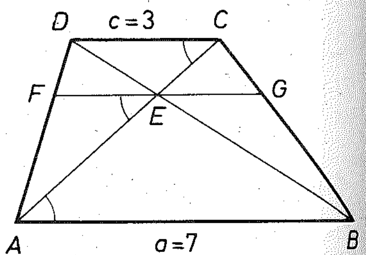
$EBCF$ paralelogramma, ezért $FC = EB = \frac{1}{4} AB$. Mivel $FG \| AC$, így $AG = \frac{1}{4} AD$. Hasonlóan $GH \| BD$-ből következik, hogy $AH = \frac{1}{4} AB$.

Ezért H az AB szakasz másik negyedelőpontja.

Megjegyzés: Az eredmény független AB és BC hosszától, csak az $EB : AB$ aránytól függ.



1912



1913

1913. *a)* $ABE\triangle \sim CDE\triangle$, ezért $AB : CD = AE : EC$. Tehát az átlók $7 : 3$ arányban osztják egymást.

b) Az átlók E metszéspontján átmenő, az alapokkal párhuzamos egyenes a szárakat F és G pontban metszi.

$DCA\triangle \sim FEA\triangle$, ezért $FE : DC = AE : AC$. Tudjuk az *a)* pontból, hogy $AE : AC = 7 : 10$. Ebből $FE = 2{,}1$ cm.

Hasonlóan megmutatható, hogy $EG = 2{,}1$ cm. Tehát $FG = 4{,}2$ cm (**1913.** ábra).

Megjegyzés: Általában a trapéz átlói az alapok arányában ($a : c$) osztják egymást és $FE = EG = \frac{ac}{a+c}$.

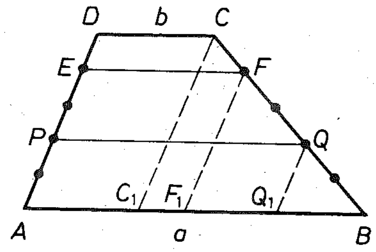
1914. Legyen $CC_1 \| FF_1 \| QQ_1 \| AD$ (**1914.** ábra).

Ekkor $C_1B = a - b$ és $PQ - EF = F_1Q_1$.

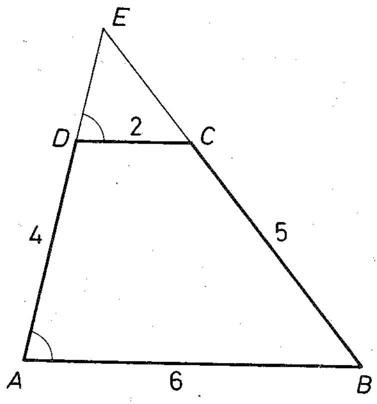
A C_1BC háromszög CB oldalának ötödölő pontjain át CC_1-gyel párhuzamos egyenesek a C_1B szakaszt öt egyenlő részre osztják.

Ezért $F_1Q_1 = \frac{2}{5} C_1B.$

Tehát $PQ - EF = \frac{2}{5}(a - b).$



1914



1915

1915. *a)* A szárak egyenesének metszéspontja E. $EDC\triangle \sim EAB\triangle$, ezért

$$\frac{AE}{DE} = 3, \quad \text{illetve} \quad \frac{BE}{CE} = 3.$$

Tehát a kiegészítő háromszög ismeretlen oldalai: $DE = 2$ és $CE = 2{,}5$ egység.

b) Az **1913.***a)* megoldása szerint ez az arány $1 : 3$ (**1915.** ábra).

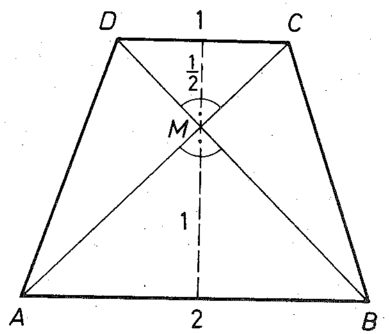
1916. Az átlók metszéspontja M, $CDM\triangle \sim ABM\triangle$, megfelelő oldalainak aránya $1 : 2$, valamint $CD = 1$ miatt $AB = 2$. A két háromszög egyenlő szárú derékszögű, az átfogóhoz tartozó magasságok összege

$m = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$ (**1916.** ábra).

Az $ABCD$ trapéz területe

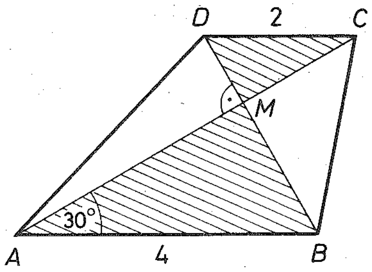
$$t = \frac{a+c}{2} m = \frac{2+1}{2} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{9}{4} \text{ területegység.}$$

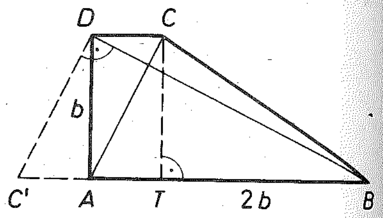


1916

1917. Az $ABCD$ trapéz AC átlóját a rövidebb BD átló M-ben metszi. $ABM\triangle$ az AB oldalú szabályos háromszög fele, ezért $BM = \frac{1}{2}AB = 2$ cm. Az $MCD\triangle \sim MAB\triangle$, megfelelő oldalaik aránya $1:2$. Ezért $MD = \frac{1}{2}MB = 1$. Tehát $BD = 3$ cm (**1917.** ábra).



1917



1918

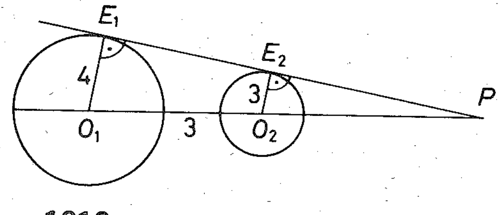
1918. Az adott szár $AD = b$, ebből $AB = 2b$. C-t tükrözve AD felezőpontjára, a kapott C' AB egyenesére esik. $ACDC'$ paralelogramma, ezért $DC' \perp BD$. $BC'D$ derékszögű háromszögre alkalmazva a magasságtételt $AC' \cdot AB = b^2$, $AC' = DC = \frac{b}{2}$ (**1918.** ábra).

A BCT derékszögű háromszögből $BC^2 = TB^2 + TC^2 = \left(\frac{3}{2}b\right)^2 + b^2$, $BC = \frac{b}{2}\sqrt{13}$. Az átlók hossza a $BC'D$ háromszögből befogótétellel kiszámítható: $(DC')^2 = C'A \cdot C'B$, azaz $DC' = AC = \frac{b}{2}\sqrt{5}$.

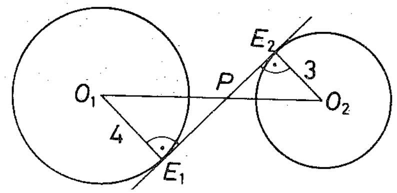
$BD^2 = AB \cdot C'B$, ezért $BD = b\sqrt{5}$.

Megjegyzés: A mértani közép tételek helyett lehet Pitagorasz-tételével dolgozni, vagy például ABD és DAC háromszögek hasonlóságával.

1919. A körök középpontja O_1 és O_2, a közös érintő érintési pontja E_1, E_2. A keresett szakasz $PO_2 < PO_1$, $PO_2E_2\triangle \sim PO_1E_1\triangle$, ezért $PO_2 : PO_1 = 3:4$.
a) Külső érintés esetén $PO_1 = PO_2 + 10$, ebből $PO_2 = 30$ cm, $PO_1 = 40$ cm (**1919.***a* ábra).



1919a



1919b

b) Belső érintés esetén, $PO_1 + PO_2 = 10$, ezért $PO_2 = \frac{30}{7}$ cm, $PO_1 = \frac{40}{7}$ cm (**1919.***b)* ábra).

1920. Az ABC egyenlő szárú háromszög BC alapjának felezőpontja F, a beírható kör középpontja: K. A kör az AB szárat T-ben érinti, $TA = x = b - \frac{a}{2}$, $BC = a$, $AC = b$.

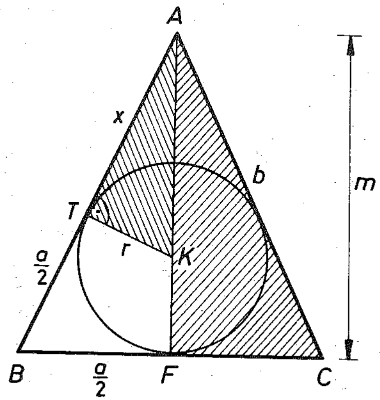
$AKT\triangle \sim ACF\triangle$, $x : r = m : \frac{a}{2}$.

$AKT\triangle$-re Pitagorasz tételét felírva: $x^2 + r^2 = (m-r)^2$ (**1920.** ábra).
Az x-et kiküszöbölve

$$a = 2r\sqrt{\frac{m}{m-2r}}.$$

A fentebbieket figyelembe véve kapható:

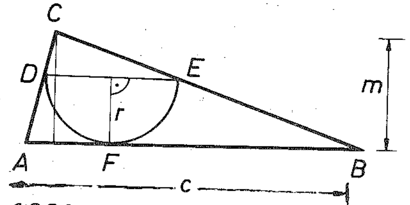
$$b = (m-r)\sqrt{\frac{m}{m-2r}}.$$



1920

1921. A gondolatmenetet lásd az **1905.** megoldásánál: DE a kör átmérője, F az érintési pont. A kör sugara (**1921.** ábra):

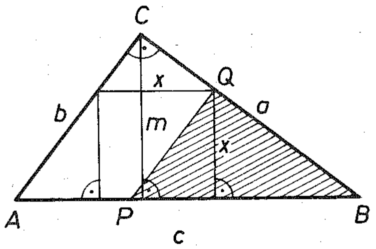
$$r = \frac{cm}{2m+c} = \frac{12 \cdot 4}{8+12} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$



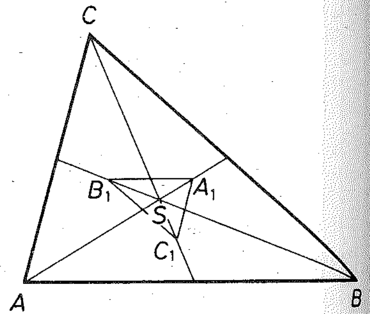
1921

1922. Ha $PQ \| AC$, akkor $PBQ\triangle \sim ABC\triangle$, ezért a megfelelő szakaszok aránya egyenlő $x:(c-x) = m:c$, másrészt az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva: $2t = mc = ab$.

Ezekből $x = \dfrac{mc}{m+c} = \dfrac{abc}{ab+c^2}$-et kapunk (**1922.** ábra).



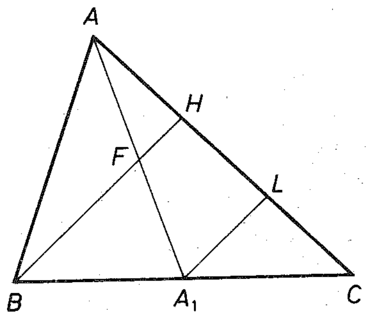
1922



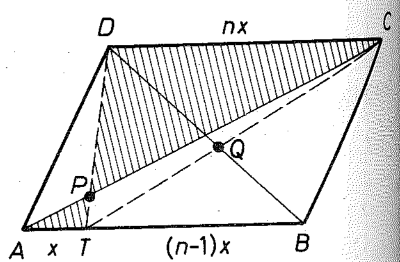
1923

1923. Az S középpontú $-\dfrac{1}{4}$ arányú hasonlóság az ABC háromszöget az $A_1B_1C_1$ háromszögbe viszi, ahol S a két háromszög közös súlypontja (**1923.** ábra).

1924. Húzzunk párhuzamost a HB egyenessel A_1-ben. Ez AC-t L-ben metszi. Így a HBC háromszögnek LA_1 középvonala, ezért $CL = HL$. Az AA_1L háromszögben HF az A_1L oldallal párhuzamos középvonal, ezért $AH = HL$ (**1924.** ábra).
Tehát H az AC oldalt harmadolja.



1924



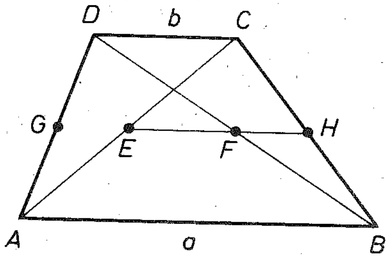
1925

1925. A szomszédos osztáspontok távolsága: x (**1925.** ábra). Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalára illeszkedő T-re igaz, hogy $AT = x$, továbbá $CD = nx$. Az ATP háromszög és CDP háromszög hasonlóak, ezért a keresett arány: $AP : PC = 1 : n$. Ugyanígy a BTQ és DCQ háromszögek hasonlóak, ezért $BQ : QD = (n-1) : n$.

1926. Legyenek G, H a szárak, E, F az átlók felezőpontjai, és $a \geqq b$ (**1926.** ábra). EH az ABC háromszög AB oldalával párhuzamos középvonala, ezért $EH = \dfrac{a}{2}$.

FH a CDB háromszög DC oldalával párhuzamos középvonala, ezért $FH = \dfrac{b}{2}$.

Így $EF = EH - FH = \dfrac{1}{2}(a-b)$.



1926

1927. A trapéz AD szárán az n-edik osztópontot $(n<k)$ P-vel jelöljük (**1927.** ábra). Legyen $PQ \| AB$. Ebből (a párhuzamos szelők tétele alapján) $QB : CB = n : k$.
A BD átló a PQ szakaszt R-ben metszi.

$PRD\triangle \sim ABD\triangle$, ezért

$$\frac{PR}{a} = \frac{PD}{AD} = \frac{k-n}{k}, \text{ azaz}$$

$$PR = a\frac{k-n}{k}.$$

Hasonlóan

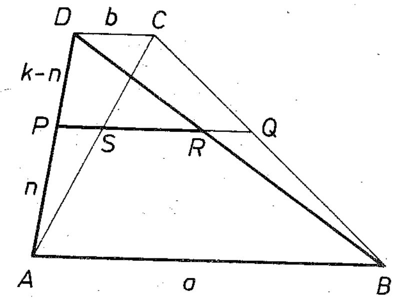
$RQB\triangle \sim DCB\triangle$, ezért $\dfrac{RQ}{b} = \dfrac{n}{k}$,

azaz $RQ = b\dfrac{n}{k}$.

Tehát $\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{k-n}{n}$.

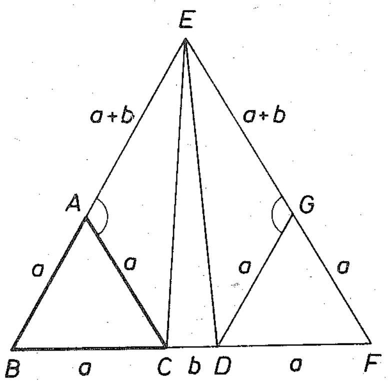
Megmutatható, hogy a PQ szakasz az AC átlót olyan S pontban metszi, amelyre $PS = RQ$, s így

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{bn}{a(k-n)}.$$

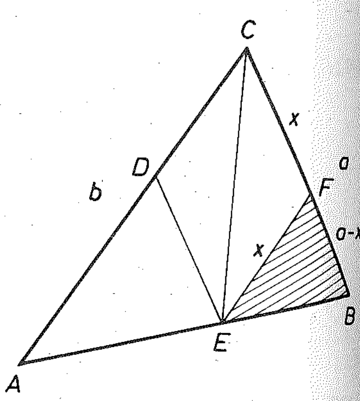


1927

1928. Kiegészítjük az ábrát a $2a+b$ oldalú BEF szabályos háromszöggé. Legyen G az EF szakasznak az a pontja, amelyre $GF=a$. Így $DG=a$. $ACE\triangle \cong GDE\triangle$, hiszen oldalai $a+b$ és a, és az ezek által bezárt szög 120°. Tehát harmadik oldaluk is egyenlő $EC=ED$ (**1928.** ábra).



1928



1929

1929. Legyen $CDEF$ a feladatban szereplő x oldalú rombusz (**1929.** ábra).

$EFB\triangle \sim ACB\triangle$, ezért $\dfrac{a-x}{x}=\dfrac{a}{b}$.

Ebből $x=\dfrac{ba}{b+a}=\dfrac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

Megjegyzés: A rombusz átlója egyben szögfelező is. Ennek felhasználásával mindig megszerkeszthető a $CDEF$ rombusz.

1930. $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$, ezért $k=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

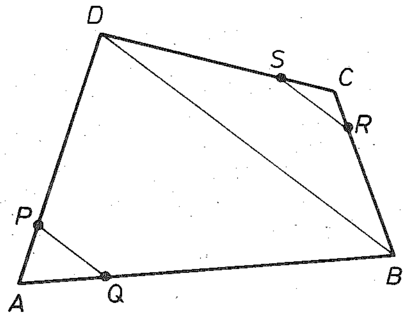
Másrészt $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{B'D'}{B'C'}$, ebből $\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{B'D'}{BD}=k$ következik.

$D'C'=B'C'-B'D'=k(BC-BD)=kDC.$

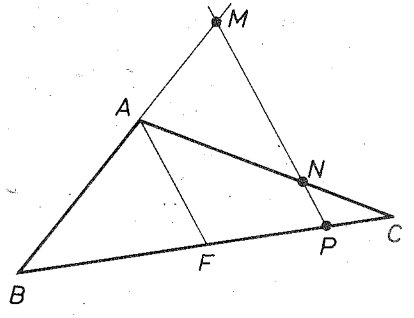
Így az ADC és $A'D'C'$ háromszögekben két-két oldal aránya és a közbezárt szögük ($ACD\sphericalangle$ és $A'C'D'\sphericalangle$) egyenlő. Tehát $ACD\triangle \sim A'C'D'\triangle$.

1931. A párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján $PQ \parallel BD$ és $RS \parallel BD$, azaz $PQ \parallel RS$ (**1931.** ábra).

A párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint $PQ=RS=\dfrac{1}{n}\cdot BD$. Ebből következik, hogy $PQRS$ paralelogramma.



1931



1932

1932. *a)* $BPM\triangle \sim BFA\triangle$, ezért $\dfrac{PM}{AF}=\dfrac{BP}{BF}$, másrészt

$CPN\triangle \sim CFA\triangle$, ezért $\dfrac{PN}{AF}=\dfrac{PC}{FC}$.

Tudjuk, hogy $BF=FC$ és $BP+PC=2BF$, ezért

$\dfrac{PM}{AF}+\dfrac{PN}{AF}=2$, azaz $PM+PN=2AF$ (**1932.** ábra).

b) A párhuzamos szelők tételét alkalmazzuk az ABC és ACB szögekre:

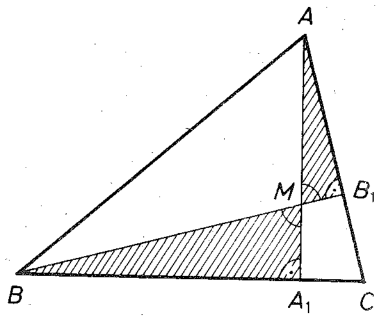
$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{FP}{BF}$ és $\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{FP}{FC}$.

Mivel $BF=FC$, ezért a két egyenletből:

$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$ adódik.

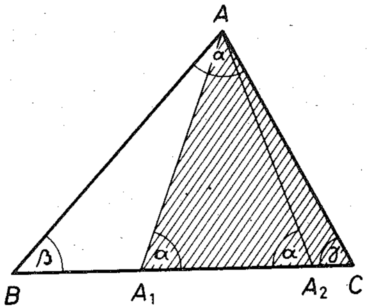
Megjegyzés: A bizonyítás a fentivel azonos akkor is, ha P a BF szakasz belső pontja.

1933. $AMB_1\sphericalangle = BMA_1\sphericalangle$, mert csúcsszögek és $MB_1A\sphericalangle = MA_1B\sphericalangle = 90°$, ezért $MB_1A\triangle \sim MA_1B\triangle$. A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így $\dfrac{AM}{MB_1}=\dfrac{BM}{MA_1}$, azaz $AM\cdot MA_1 = BM\cdot MB_1$ (**1933.** ábra).

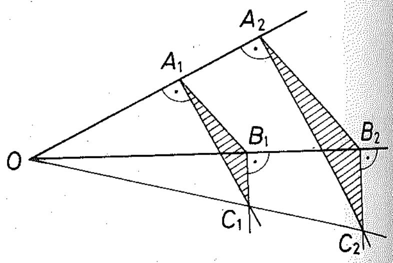


1933

1934. Az $A_1CA\triangle \sim ACB\triangle$, mert két-két szögük (α, γ) egyenlő, ezért $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C}{AC}$, tehát $AC^2 = BC \cdot A_1C$. Hasonlóan $A_2BA\triangle \sim ABC\triangle$, így $AB^2 = BA_2 \cdot BC$. Az egyenleteket összeadva és figyelembe véve, hogy $BA_2 + A_1C = BA_1 + A_1A_2 + A_1C = BC + A_1A_2$, a bizonyítandó $AB^2 + AC^2 = BC(BC + A_1A_2)$ összefüggést kapjuk (**1934.** ábra).



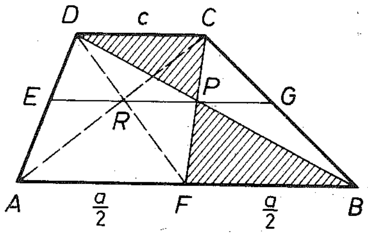
1934



1935

1935. Tekintsük az $A_1B_1C_1$ és az $A_2B_2C_2$ háromszögeket. A szerkesztési utasítás alapján oldalaik páronként párhuzamosak, így középpontosan hasonlóak. A hasonlósági középpont az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek O metszéspontja. Ezért erre kell illeszkednie a 3. csúcsokat összekötő C_1C_2 egyenesnek is (**1935.** ábra).

1936. *I. megoldás.* Az AFR és CDR háromszögek hasonlósági középpontja R, az FBP és CDP háromszögeké pedig P. Ezért R és P is a megfelelő átlót $c : \frac{a}{2}$ arányban osztja, így $PR \| AB \| CD$. Az ADF, az ACF és FCB szögekre alkalmazzuk a párhuzamos szelőszeletek tételét. A fentiek szerint $ER = RP = PG = \frac{c}{c + \frac{a}{2}} = \frac{2c}{a+2c}$ (**1936.** ábra).



1936

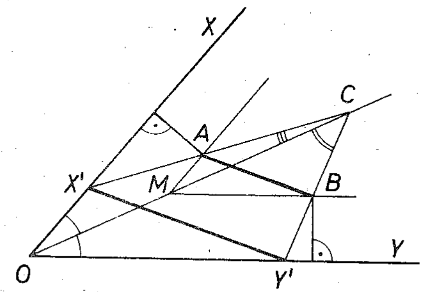
II. megoldás. Az **1913**-as feladat megoldásának gondolatmenetét alkalmazzuk az $AFCD$ és $FBCD$ trapézokra. Ebből $ER = RP = PG$ adódik.

1937. Az A-n át OX-szel, a B-n át OY-nal húzott párhuzamosok M metszéspontja – A és B szerkesztéséből adódóan – az OC szögfelezőre esik. A párhuzamos szelők tételét alkalmazva az

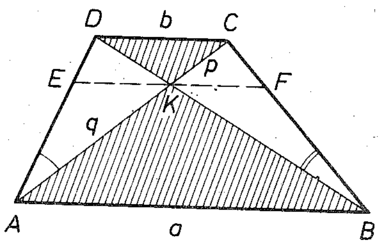
OCX' szögre $CA : CX' = CM : CO$, továbbá az

OCY' szögre $CB : CY' = CM : CO$.

Ezekből $CA : CX' = CB : CY'$. Ez a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt éppen azt jelenti, hogy $AB \| X'Y'$ (**1937.** ábra).



1937



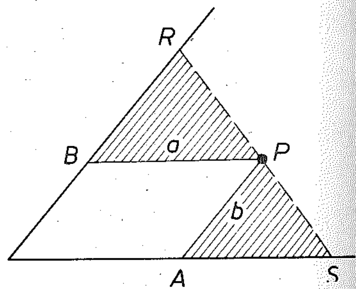
1938

1938. A CDK és ABK háromszögek hasonlóak, megfelelő oldalaik aránya a feltétel szerint $a : b = q : p$, azaz $a = \frac{bq}{p}$.

A DAC és DBC szögekre alkalmazva a párhuzamos szelőszakaszok tételét, kapjuk, hogy $EK = KF = \frac{bq}{p+q}$.

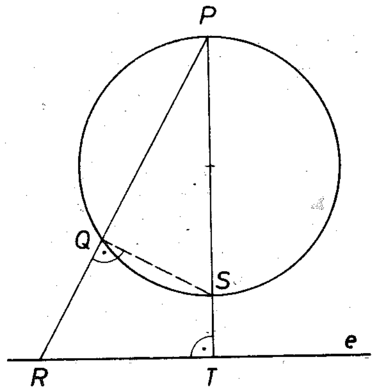
Ezért $EF = \frac{2bq}{p+q}$ (**1938.** ábra).

1939. ASP és BPR hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő: $AS : AP = BP : BR$, ebből $AS \cdot BR = AP \cdot BP$, ami független az R felvételétől (**1939.** ábra).

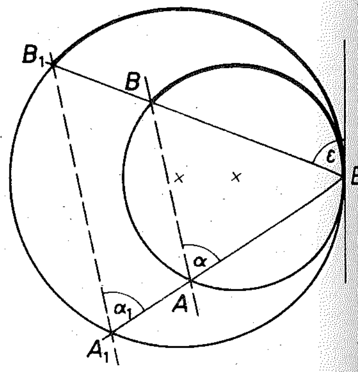


1939

1940. Az e egyenest a rá merőleges PS átmérő egyenese T-ben metszi (**1940.** ábra).
A PQS és PTR derékszögű háromszögek hasonlóak, megfelelő oldalaik aránya egyenlő: $PQ : PS = PT : PR$. Ebből $PQ \cdot PR = PS \cdot PT$, azaz $PQ \cdot PR$ független a szelő irányától.



1940



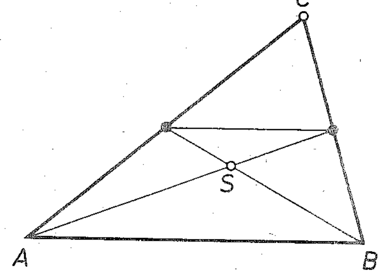
1941

1941. *I. megoldás:* A $\widehat{BE}$, illetve a $\widehat{B_1E}$ ívhez tartozó (vastagabb vonallal jelölt) kerületi és érintőszárú kerületi szögek egyenlők. Ezért $\alpha=\varepsilon$, illetve $\alpha_1=\varepsilon$, tehát $\alpha=\alpha_1$ miatt $AB \| A_1B_1$ (**1941.** ábra).
II. megoldás: A két kör közös érintési pontja a két kör hasonlósági pontja. Az E-re illeszkedő mindkét szelő a körökből összetartozó pontokat metsz ki. Ezért a feladatban szereplő húrok párhuzamosak.

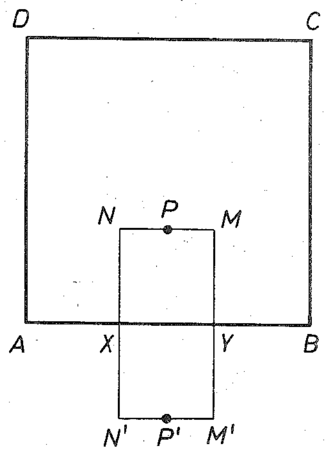
1942. Itt A, A', B', B egy egyenesre esik, ezért a hasonlósági középpont is erre az egyenesre illeszkedik.

Mivel $\lambda = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{1}{2}$, ezért a hasonlóság középpontja az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja.

1943. Az AB szakasz és középpontos hasonlósággal nyert képe, $A'B'$ egyállásúak, ezért $A'B'$ az ABC háromszög AB oldallal párhuzamos középvonala.
Két eset lehetséges
a) Ha A' az AC, B' a BC szakasz felezőpontja, akkor a hasonlóság középpontja C.
b) Ha A' a BC, B' az AC szakasz felezőpontja, akkor a hasonlóság középpontja S, a háromszög súlypontja. A háromszög súlypontja mindig a háromszög belső pontja (**1943.** ábra).

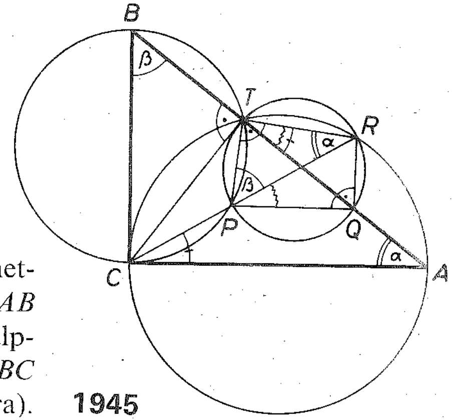
1943


1944. Nem.
Ha a hasonlóság P középpontja az MN szakasz felezőpontja, akkor az MN szakasz képe, BA vagy CD is illeszkedne az MN egyenesére. Ez itt nem áll fenn (**1944.** ábra).



1944

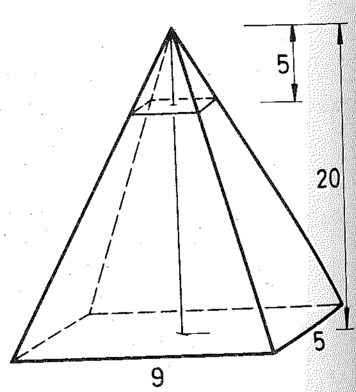
1945. A két befogó Thalész-körének metszéspontjai C és T, ahol T az AB átfogóhoz tartozó magasság talppontja, mivel T-ből az AC és BC befogó 90° alatt látszik (**1945.** ábra).



1945

A $BCPT$ és $CART$ húrnégyszögek vizsgálatából adódik, hogy $TPR\sphericalangle=\beta$ és $TRP\sphericalangle=\alpha$. Ezért a T pontból a PR szakasz derékszög alatt látszik. A PR szakasz Thalész-köre az AB szakaszt T-ben és Q-ban metszi. Bebizonyítjuk: $PQ \parallel CA$.
A $PQRT$ húrnégyszögben az RQ ívhez tartozó kerületi szögek: $RPQ\sphericalangle=$ $=RTQ\sphericalangle$, másrészt
a $CART$ húrnégyszög AR ívéhez tartozó kerületi szögek: $RTQ\sphericalangle=$ $=RCA\sphericalangle$.
Ezekből $RPQ\sphericalangle=RCA\sphericalangle$, tehát $PQ \parallel CA$.

1946. Az alaplap átlói $\sqrt{106}$ cm hosszúak, ebből a gúla oldaléle $\sqrt{20^2+\frac{106}{4}}=\frac{\sqrt{1706}}{2}$ (cm) (**1946.** ábra).
A kis gúla az eredetihez hasonló, a hasonlóság aránya $\lambda=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.
Ezért a kis gúla alapélei $\frac{9}{4}$ cm $=$ $=2{,}25$ cm, és $\frac{5}{4}$ cm $=1{,}25$ cm, oldalélei $\frac{\sqrt{1706}}{8}$ cm $\approx 5{,}16$ cm hosszúak.

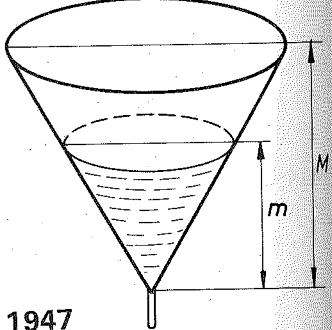


1946

1947. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő. A hasonlóság aránya a két kúp magasságának arányával egyenlő, így $\left(\frac{m}{M}\right)^3=\frac{1}{2}$,

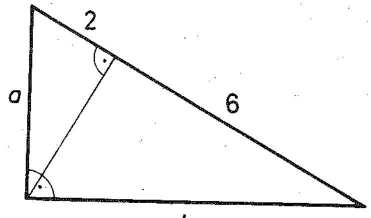
$$m=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}M.$$

Tehát a tölcsér magasságának $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ részéig kell meginni a szörpöt (**1947.** ábra).

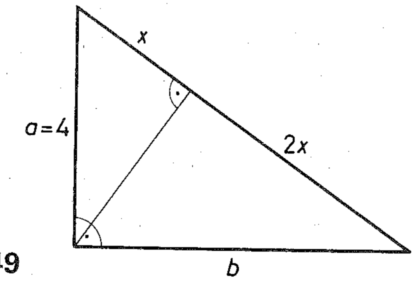


1947

1948. Az átfogó két szakasza 2 cm, illetve 6 cm (**1948.** ábra).
A befogótétel szerint $a^2=2\cdot 8=16$ és $b^2=6\cdot 8=48$, ezekből a befogók 4 cm és $4\sqrt{3}$ cm. Ezért a háromszög hegyesszögei: 30° és 60°.



1948



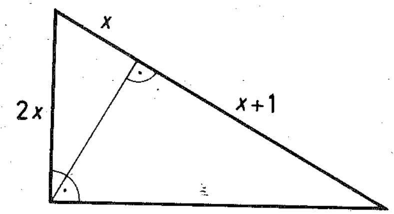
1949

1949. Az átfogó két szelete x és $2x$ (**1949.** ábra).
A befogótétel alapján $x\cdot 3x=16$. Ebből $x=\frac{4}{\sqrt{3}}$ cm, és az átfogó $4\sqrt{3}$ cm.
A másik befogó a $b^2=2x\cdot 3x=6x^2=32$ egyenletből $b=4\sqrt{2}$ cm.

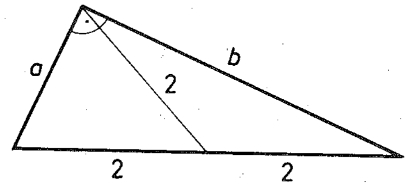
1950. Az átfogó két szelete x és $x+1$ cm, a kisebbik befogó $2x$ cm. A befogótétel szerint $(2x)^2=x(2x+1)$. Ebből ($x>0$ miatt) $x=\frac{1}{2}$ cm adódik (**1950.** ábra).
Ezért a háromszög átfogója 2 cm, a két befogó 1 cm és $\sqrt{3}$ cm.

1951. Az ABC háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha a feladatban szereplő m, p és q-ra igaz, hogy $m^2=pq$. Az $m^2=pq$ csak az $e)$-re nem teljesül. A többi háromszög derékszögű.

1952. A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonalának hossza az átfogó hosszának a fele. Ezért a feltételek szerint $ab=4$ és $a^2+b^2=$ $=4^2$. Ezekből a befogók $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ és $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ (**1952.** ábra).



1950



1952

1953. *I. megoldás:* $ABPC$ húrnégyszög, ezért $CPB\sphericalangle = 120°$. A BPC háromszöget B körül 60°-kal elforgatva C az A-ba, P a Q-ba kerül. Így $AQ = CP$, $QB = BP$ és $AQB\sphericalangle = 120°$. $PBQ\sphericalangle = 60°$, ezért a BPQ háromszög szabályos, tehát $PB = PQ$ és Q illeszkedik AP-re. Így az állítás teljesül (**1953.** ábra).

II. megoldás: Az $AB = a$, $AP = x$, $BP = y$, $CP = z$ jelölést bevezetve írjuk fel a cosinustételt a BCP és ACP háromszögekre, felhasználva, hogy $CPA\sphericalangle = 60°$ és $CPB\sphericalangle = 120°$!

$$a^2 = z^2 + y^2 - 2zy\cos 120°,$$

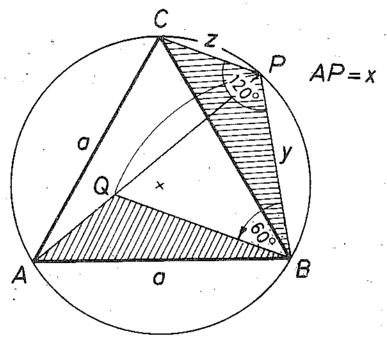
$$a^2 = z^2 + x^2 - 2zx\cos 60°.$$

A két egyenlet különbsége $\left(\text{ismerve: } \cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}\right)$:

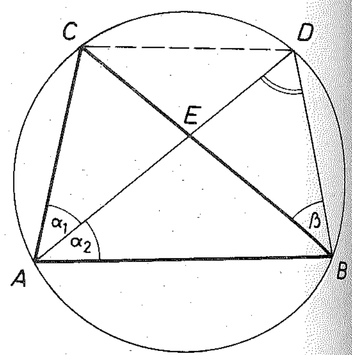
$$y^2 - x^2 + z(x+y) = 0,$$

$(x+y)(y-x+z) = 0$. Ebből $x = y+z$ adódik.

Megjegyzés: Szép a megoldás a $h = 2r\sin\alpha$ összefüggés felhasználásával is.



1953



1954

1954. AD szögfelező, ezért $\alpha_1 = \alpha_2$. $\alpha_1 = \beta$, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek. ABD és BED háromszögek hasonlók (két-két szögük egyenlő), így a megfelelő oldalak aránya egyenlő (**1954.** ábra).

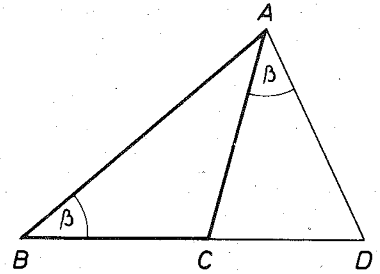
$AD : BD = BD : ED$, tehát $BD^2 = AD \cdot ED$.

1955. A feltételek szerint $a^2 = bc$ és $a^2 + b^2 = c^2$. Az ezekből adódó $b^2 + bc - c^2 = 0$ egyenlet pozitív gyöke jelenti az egyik befogót:

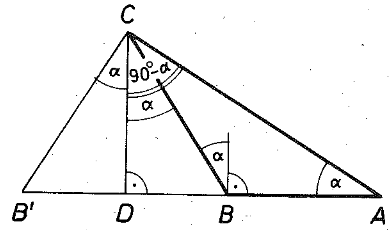
$b = \dfrac{c}{2}(\sqrt{5} - 1)$. A másik befogó: $a = c\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = \dfrac{c}{2}\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$.

1956. A feltételek szerint az ABD és a CAD háromszögek hasonlók (2-2 szögük páronként egyenlő). A megfelelő oldalak aránya ennek alapján: $AD : BD = CD : AD$, ami azt jelenti (**1956.** ábra): $AD^2 = BD \cdot CD$.

Megjegyzés: Ha D a CB félegyenes pontja, akkor AD nem mértani közepe a BD és a CD szakasznak.



1956



1957

1957. *I. megoldás:* A feltételek miatt az ACD és CBD derékszögű háromszögek hasonlóak (2-2 szögük páronként egyenlő). Ennek alapján a megfelelő oldalak aránya: $CD : AD = BD : CD$, másként $CD^2 = AD \cdot BD$ (**1957.** ábra).

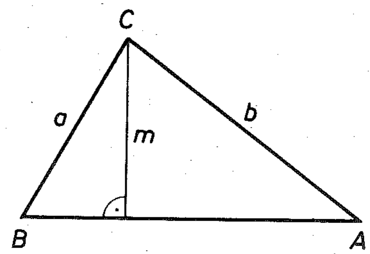
II. megoldás: A B pontot D-re tükrözve kapjuk B'-t. Ekkor $B'AC$ háromszögben $B'CA\sphericalangle = (90° - \alpha) + \alpha = 90°$ az ABC háromszög belső szögeinek összefüggése alapján. Az $AB'C$ háromszögre felírt magasságtétel: $CD^2 = AD \cdot DB' = AD \cdot DB$ az állítás teljesülését jelenti.

1958. A háromszög egy csúcsból induló oldalai és magassága között fennáll:

$0 < m \leqq a$,

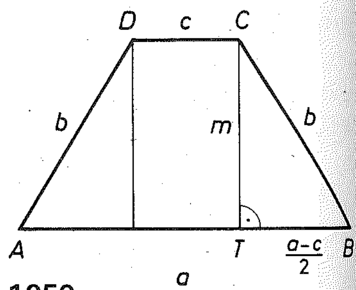
$0 < m \leqq b$.

Itt egyenlőség nem állhat fenn a két egyenlőtlenségben egyszerre. Ezért szorzatukra $m^2 < ab$, azaz $m < \sqrt{ab}$ áll fenn, amit bizonyítani kellett (**1958.** ábra).



1958

1959. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz C csúcspontjából induló magasságának talppontja T. Figyelembe véve, hogy $TB = \dfrac{a-c}{2}$, felírva a TBC (esetleg elfajuló) háromszögre a Pitagorasz-tételt: $m^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2=b^2$. Felhasználva az $m^2=ac$ feltételt: $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=b^2$ összefüggést kapjuk. Ebből $a+c=2b$, azaz $ABCD$ érintőnégyszög (**1959.** ábra).



1959

1960. Az **1884**-es megoldásának gondolatmenetében a és b jelölés cseréjével kapjuk a megfelelő eredményt:

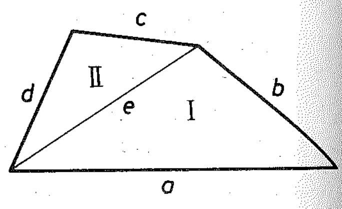
$$a=c+\sqrt{c^2-4r^2} \quad \text{és} \quad b=c-\sqrt{c^2-4r^2}.$$

1961. Tegyük fel, hogy az e átló vágja szét a négyszöget két hasonló, de nem egybevágó háromszögre. Mivel a háromszögek nem egybevágóak, ezért az I. háromszög e oldalának a II. háromszögben c vagy d, illetve a II. háromszög e oldalának az I. háromszögben a vagy b felel meg. Ha például e-nek c, illetve b felel meg, akkor a háromszögekben a megfelelő oldalak aránya (**1961.** ábra):

$\frac{e}{c}$ és $\frac{b}{e}$ egyenlő.

Ebből

$e=\sqrt{bc}$.



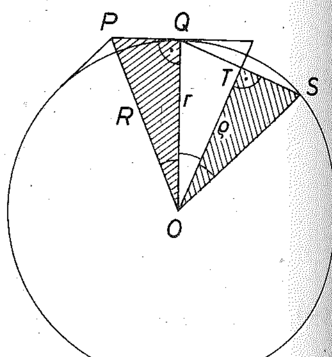
1961

Az állítás igaz az oldalak más megfeleltetése esetén is.

1962. Az adott r sugarú körbe írt szabályos nyolcszögbe írható kör sugara ϱ, a kör köré írt szabályos nyolcszög köré írható kör sugara R. A két szabályos nyolcszög hasonló, ezért $PQO\triangle \sim STO\triangle$ (**1962.** ábra).

A megfelelő oldalakra

$\frac{R}{r}=\frac{r}{\varrho}$, azaz $r^2=R\varrho$ áll fenn.



1962

Megjegyzés: A feladat megoldásakor nem használtuk ki, hogy a szabályos sokszög 8 oldalú. Ezért a kapott összefüggés tetszőleges szabályos n-szögre igaz.

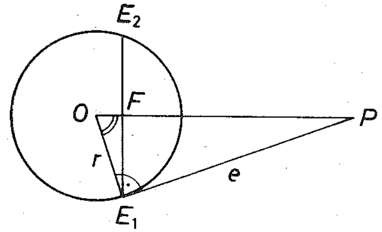
1963. Az OE_1P derékszögű háromszögből $OP=26$ cm (**1963.** ábra). OE_1P és OFE_1 derékszögű háromszögek hasonlósága alapján:

$\frac{FE_1}{OE_1}=\frac{E_1P}{OP}$, ebből

$FE_1=\frac{10\cdot 24}{26}$.

Innen a keresett húr

$E_1E_2=2FE_1=\frac{240}{13}\text{ cm}\approx 18{,}5\text{ cm}.$



1963

1964. A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele alapján (**1964.** ábra):

$PA\cdot PB=PE^2$.

A feltételek szerint:

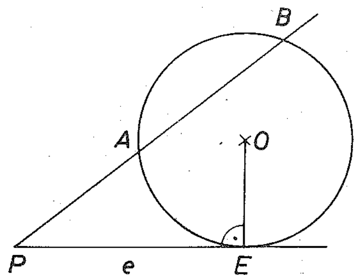
$PA=e-5$,

$AB=e+5$, s így

$PB=PA+AB=2e$, ahol $PE=e$.

Tehát $(e-5)2e=e^2$.

Ebből az érintőszakasz $e=10$ cm.



1964

1965. P pont a kör középpontjától x távolságra van (**1965.** ábra).

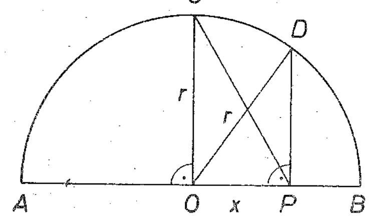
Az (esetleg elfajuló) OPC és OPD derékszögű háromszögből:

$CP^2=r^2+x^2$ és $DP^2=r^2-x^2$.

A két egyenletet összeadva a

$CP^2+DP^2=2r^2$

egyenlőséget kapjuk.



1965

1966. A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele alapján (**1966.** ábra) $PA \cdot PB = PE^2$, ahol $PB = 40$ cm és $PE = 20$ cm.

Ebből $PA = 10$ cm és $AB = 30$ cm.
Az AKF derékszögű háromszögből

$r^2 = AF^2 + FK^2 = 15^2 + 8^2$, így a kör sugara $r = 17$ cm.

1967. (Az **1966**-os ábra alapján):
A KPE derékszögű háromszögből a kör sugara:

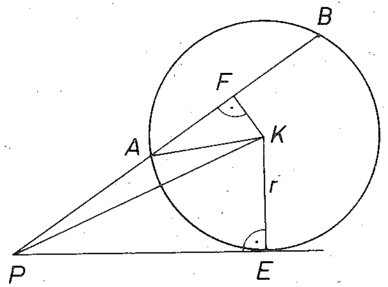
$r^2 = PK^2 - PE^2 = 6^2 - 4^2 = 20, \quad r = 2\sqrt{5}.$

Az érintő- és szelőszakaszok tétele szerint

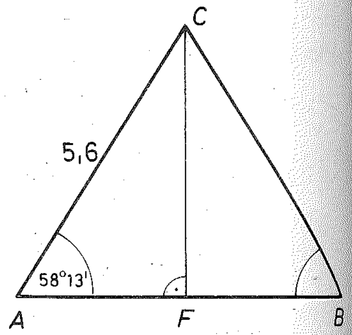
$PE^2 = PA \cdot PB$, azaz $16 = PA \cdot 8$,
$PA = 2, \quad AB = 6.$

A kör középpontjának a szelőtől mért távolságát az AKF derékszögű háromszögből kapjuk:

$FK^2 = r^2 - AF^2 = 20 - 9$, azaz $FK = \sqrt{11}$ cm.



1966



1968

1968. Az AB alapot az AFC derékszögű háromszögből kapjuk meg (**1968.** ábra):

$AB = 2AC \cos\alpha = 11{,}2 \cos 58°\,13' \approx 5{,}90$ (cm).

1969. A lejtő hossza $\dfrac{2{,}8}{\sin 24°} \approx 6{,}9$ (m),
vízszintes vetülete $2{,}8 \operatorname{ctg} 24° \approx 6{,}3$ (m).

1970. Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót p és q szakaszokra bontja. A magasságtétel szerint: $pq = m^2$. Az adatokat figyelembe véve: $p + q = 8$, $pq = 12$. Ebből a két szakasz 2 és 6 egység.
A magasságvonal a háromszöget két olyan egymáshoz és az eredeti derékszögű háromszöghöz is hasonló háromszögre bontja, amelyekben

a befogók aránya $1 : \sqrt{3}$. E háromszögek hegyesszögei 30°- és 60°-osak. Így a háromszög befogói 4 és $4\sqrt{3}$ egység.

1971. Az ATC derékszögű háromszögből (**1971.** ábra):

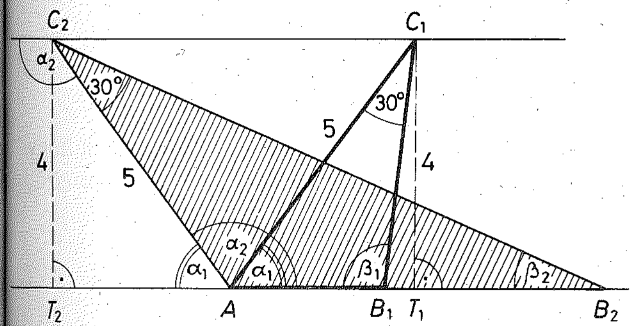
$AT = 3$ egység, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$. Ebből I. $\alpha_1 = 53{,}13°$, II. $\alpha_2 = 126{,}87°$.

I. $AC_1T_1 \sphericalangle = 36{,}87° > 30°$, ezért CT az AB_1C_1 háromszögön kívül esik.
A $B_1T_1C_1$ derékszögű háromszögben $B_1C_1T_1 \sphericalangle = 6{,}87°$, így $B_1C_1 = \dfrac{4}{\cos 6{,}87°}$ ($\approx 4{,}03$) egység, $B_1T_1 - 4 \cdot \operatorname{tg} 6{,}87°$ ($\approx 0{,}482$) egység.
Ezekből $AB_1 = 3 - 4 \operatorname{tg} 6{,}87°$ ($\approx 2{,}52$) egység, illetve $\beta_1 = 96{,}87°$.

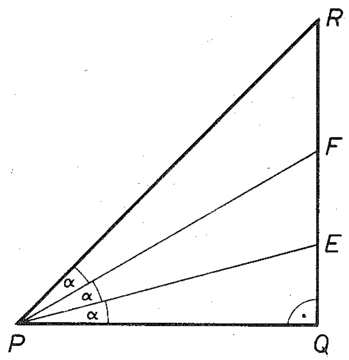
II. $B_2C_2T_2 \sphericalangle = 30° + 36{,}87° = 66{,}87°$

$B_2C_2 = \dfrac{4}{\cos 66{,}87°}$ ($\approx 10{,}2$) egység.

$AB_2 = T_2B_2 - T_2A = 4 \cdot \operatorname{tg} 66{,}87° - 3$ ($\approx 6{,}36$) egység, $\beta_2 = 23{,}13°$.



1971



1972

1972. A PQF derékszögű háromszögben $PF > PQ$, így a szögfelezőtétel szerint (**1972.** ábra)

$\dfrac{EF}{QE} = \dfrac{PF}{PQ} > 1$, azaz $EF > QE$.

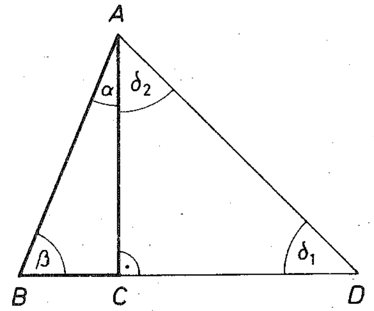
A PER háromszögben $PER \sphericalangle$ tompaszög, ezért $PR > PE$.

A szögfelezőtétel szerint $\dfrac{FR}{EF} = \dfrac{PR}{PE} > 1$, azaz $FR > EF$.

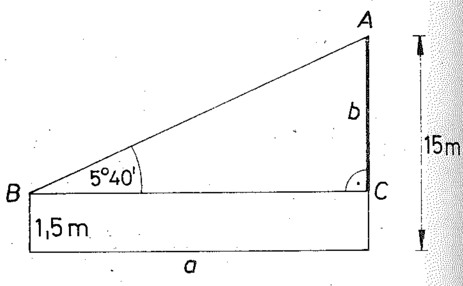
Tehát $FR > EF > QE$.

1973. Az ACD egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $\delta_1=\delta_2=45°$, $AD=BD$ miatt $\beta=\alpha+45°$ (**1973.** ábra). Az ABC háromszög belső szögösszege miatt: $\beta=90°-\alpha$, tehát $\alpha=22{,}5°$, $\beta=67{,}5°$.

1974. $b=15-1{,}5=13{,}5$. ABC derékszögű háromszögben (**1974.** ábra): $a=\dfrac{b}{\operatorname{tg} 5°\,40'}\approx 136$. Tehát a keresett távolság 136 m.



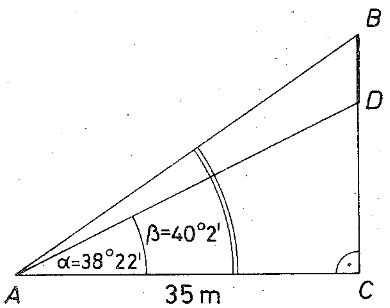
1973



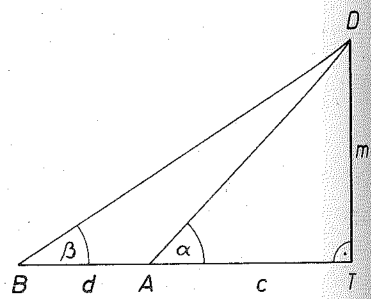
1974

1975. Az ablak „magassága”: $BD=BC-DC$ (**1975.** ábra).
Az ABC derékszögű háromszögben: $BC=AC\operatorname{tg}\beta$.
Az ADC derékszögű háromszögben: $DC=AC\operatorname{tg}\alpha$.
Mindezeket figyelembe véve:
$BD=AC(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)=35(\operatorname{tg}40°\,2'-\operatorname{tg}38°\,22')\approx 1{,}70$ (m).

1976. A vízszintes terep két megfigyelőpontja A és B, a hegy csúcsa D, a hegy magassága $DT=m$. Legyen $AT=c$ és $AB=d$. ATD és BTD háromszögek derékszögűek, ezért
$m=c\operatorname{tg}\alpha=(c+d)\operatorname{tg}\beta$. Ebből (**1976.** ábra):
$$m=\frac{d\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=466\ \text{(m)}.$$

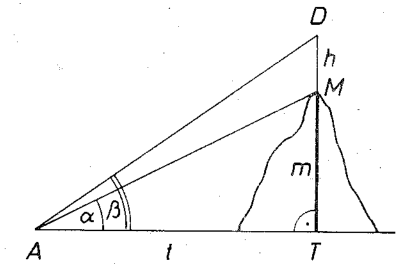


1975



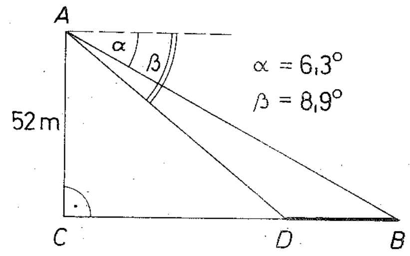
1976

1977. A vízszintes terep megfigyelőpontja A, a hegy magassága $m=MT$, a toronyé $h=MD$ (**1977.** ábra).
Legyen $AT=t$.
Az ATM derékszögű háromszögben:
$m=t\operatorname{tg}\alpha$,
az ATD derékszögű háromszögben:
$m=t\operatorname{tg}\beta-h$.
Ezekből $m=\dfrac{h\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}=731$ (m).



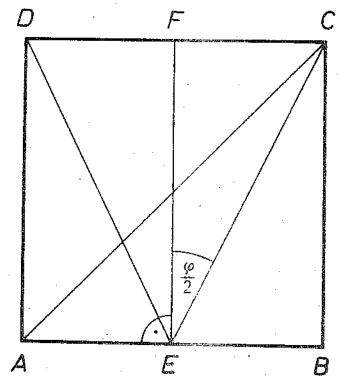
1977

1978. $BC=AC\operatorname{tg}(90°-\alpha)=52\operatorname{tg}83{,}7°$,
$DC=AC\operatorname{tg}(90°-\beta)=52\operatorname{tg}81{,}1°$.
$DB=BC-DC=$
$=AC\left[\operatorname{tg}(90°-\alpha)-\operatorname{tg}(90°-\beta)\right]=$
$=138{,}9$ m hosszú a híd.



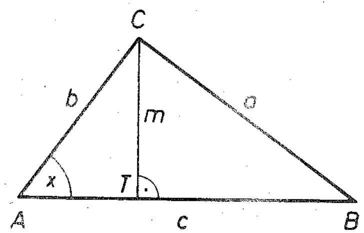
1978

1979. Az AB oldal E felezőpontjából az AC és BD átló azonos szögben $\varepsilon=90°+\dfrac{\varphi}{2}$ látszódik, mert az ábra szimmetrikus az EF középvonalra (**1979.** ábra).
Az EFC derékszögű háromszögből $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{1}{2}$.
Innen a DC-hez tartozó látószög: $\varphi=53{,}13°$ és az átlókhoz tartozó látószög $\varepsilon=116{,}6°$.



1979

1980. Az ABC és ATC derékszögű háromszögekből (**1980.** ábra): $c=\dfrac{b}{\cos x}$; $m=b\sin x$. A feladat feltétele szerint $m=\sin x\cos x$, ezért $b=\cos x$ és $c=1$.

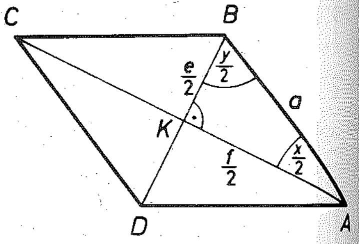


1980

1981. Az a oldalú rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. Az ABK derékszögű háromszögből (**1981.** ábra):

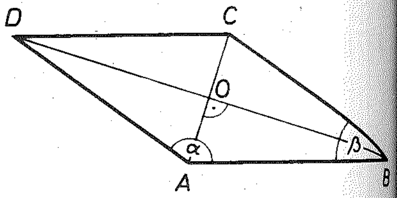
$$\sin\frac{x}{2}=\frac{e}{2a},\qquad \sin\frac{y}{2}=\frac{f}{2a},\qquad \text{ezért}$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}}{2}=\frac{e+f}{4a}=\frac{e+f}{k}.$$



1981

1982. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. Az a oldal Pitagorasz-tétellel számítható ki: $a^2=2{,}64^2+1{,}86^2$, azaz $a=3{,}23$ m.
Az α szöget tg szögfüggvénnyel határozzuk meg: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1{,}86}{2{,}64}$, ebből $\alpha=70{,}33°$, és a másik szög: $180°-\alpha=109{,}67°$

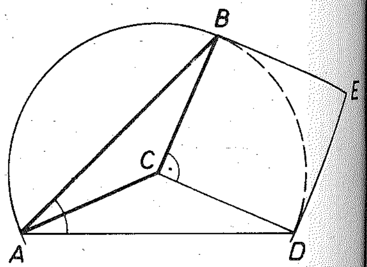


1983

1983. A rombusz átlói merőlegesek és O-ban felezik egymást valamint a rombusz megfelelő szögeit. Ennek alapján az AOB derékszögű háromszögben (**1983.** ábra):

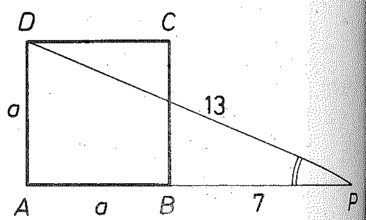
$$BO:AO=3:1 \text{ és } OAB\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}.$$

Így $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$-ból $\frac{\alpha}{2}=71{,}57°$, a rombusz szögei: $\alpha=143{,}1°$ és $\beta=180°-\alpha=36{,}9°$.



1984

1984. A C középpontú $AC=BC=DC$ sugarú kör kisebbik BD íve C-ből a feladat szerint 90° alatt látszik. Ezért az ehhez az ívhez tartozó kerületi szög $BAD\sphericalangle=45°$ (**1984.** ábra).



1985

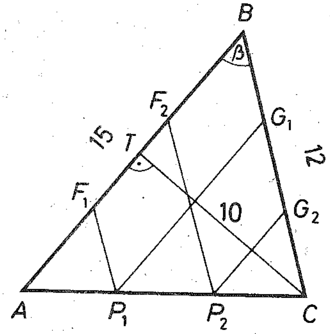
1985. Az APD derékszögű háromszögben (**1985.** ábra): $a^2+(a+7)^2=13^2$.

A négyzet oldala, ennek pozitív gyöke, $a=5$ cm.
Az APD háromszögből

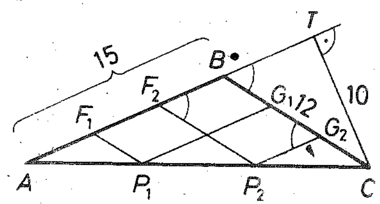
$$\operatorname{ctg} APD\sphericalangle=\frac{12}{5},\ \text{így } APD\sphericalangle=22{,}62°.$$

1986. A 13 cm átfogójú derékszögű háromszög 42°-os szöggel szemköztes befogója $b=13\sin 42°=8{,}7$ (cm). A keresett szakasz Pitagorasz-tétellel határozható meg: $a^2=b^2+6{,}2^2$, azaz $a=10{,}7$ cm.

1987. A háromszög két oldala 12 cm és 15 cm, magassága 10 m. Ilyen háromszög nem létezik. A feladatnak ilyen adatokkal nincs megoldása.



1987a



1987b

Megjegyzés: Ha az ABC háromszög oldalai: $AB=15$ cm, $BC=12$ cm, és az AB oldalhoz tartozó magassága: $CT=10$ cm, akkor a feladat megoldása:
Az ABC háromszög nincs egyértelműen meghatározva (**1987.** *a), b)* ábra). Az AC szakasznak is két harmadolópontja van: P_1, P_2.
A két háromszögben a $BF_1P_1G_1$, illetve $BF_2P_2G_2$ paralelogrammák oldalai egyenlőek, azaz mindkét esetben: $P_1F_1=4$ cm, $P_1G_1=10$ cm, illetve $P_2F_2=8$ cm és $P_2G_2=5$ cm. Az ABC háromszög β szöge a paralelogrammák egyik szöge. β-t a CBT derékszögű háromszögből határozhatjuk meg:
(*a)* esetben $CBT\sphericalangle=\beta$, *b)* esetben $CBT\sphericalangle=180°-\beta$)

$$\sin CBT\sphericalangle=\frac{10}{12},\ \text{innen } CBT\sphericalangle=56{,}44°\ (<90°).$$

Tehát mindkét háromszögből a következő két paralelogrammát kapjuk:
1. oldalai: 4 cm és 10 cm, szögei: 56,44° és 123,56°,
2. oldalai: 8 cm és 5 cm, szögei: 56,44° és 123,56°.

1988. Az AD_1D derékszögű háromszögből (**1988.** ábra):

$$d = \frac{m}{\sin\alpha} \text{ és } AD_1 = x = m \operatorname{ctg} \alpha.$$

A BC_1C derékszögű háromszögből:

$$b = \frac{m}{\sin\beta} \text{ és } C_1B = y = m \operatorname{ctg} \beta.$$

Az alapokat az

$$a = x+y+c,$$

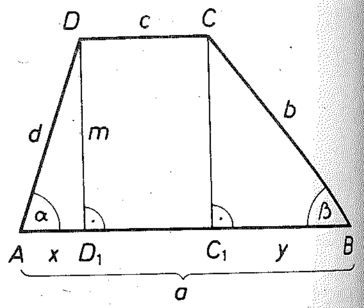
$$k = \frac{a+c}{2}$$

egyenletrendszerből kapjuk (x és y fenti értékeinek figyelembevételével):

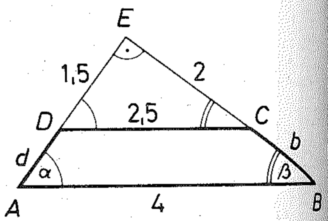
$$a = k + \frac{1}{2} m (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta),$$

$$c = k - \frac{1}{2} m (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta).$$

Megjegyzés: Az a alap felírásakor felhasználtuk, hogy $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$.



1988



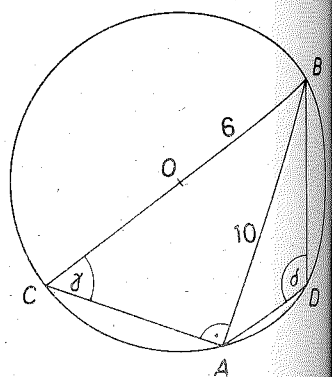
1989

1989. A párhuzamos szelőszakaszok és szelők tétele szerint (**1989.** ábra):
$\frac{d+1{,}5}{1{,}5} = \frac{4}{2{,}5}$ és $\frac{d}{b} = \frac{1{,}5}{2}$. Ezekből $d = 0{,}9$ és $b = 1{,}2$-et kapjuk.

A DCE háromszög, a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján, derékszögű. A háromszög hegyesszögei egyben a trapéz hegyesszögei az egyállású szögek miatt. Így $\sin\alpha = 0{,}8$, a trapéz hegyesszögei $\alpha = 53{,}13°$ és $\beta = 36{,}87°$.

1990. Az AB húrhoz tartozó kisebbik kerületi szög az ABC derékszögű háromszögből $\sin\gamma = \frac{10}{12}$-ből $\gamma = 56{,}44°$.

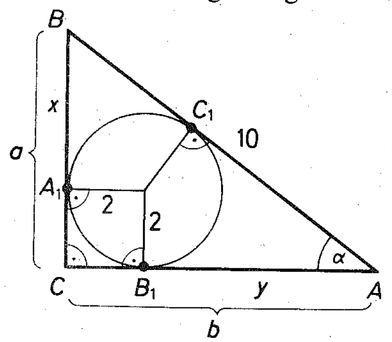
Az $ADBC$ húrnégyszögből a húrhoz tartozó nagyobbik kerületi szög $\delta = 180° - \gamma = 123{,}56°$ (**1990.** ábra).



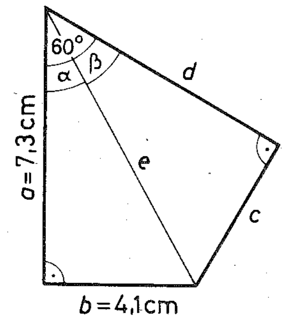
1990

1991. A körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt (**1991.** ábra): $B_1A = C_1A = y$; $A_1B = C_1B = x$, valamint $a = x+2$, $b = y+2$ és $c = x+y = 10$. A Pitagorasz-tétel szerint $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 100$, azaz $(x+2)^2 + (12-x)^2 = 100$.
Innen a háromszög befogói $2+4 = 6$ (cm) és $2+6 = 8$ (cm), és hegyesszögei $\sin\alpha = \frac{6}{10}$-ből $\alpha = 36{,}87°$, $\beta = 53{,}13°$.

Megjegyzés: A Pitagorasz-tétel helyett a háromszög területének kétféle felírásából a $2t = ab = (a+b+c)\varrho$, azaz az $(x+2)(y+2) = 48$ egyenletből és $x+y = 10$-ből is meghatározhatók a háromszög befogói.



1991



1992

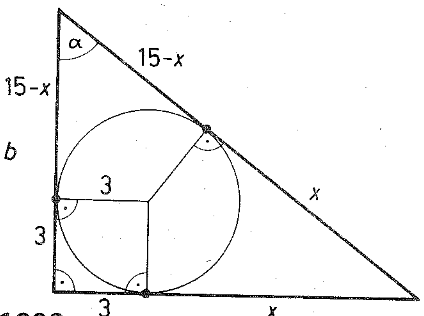
1992. A négyszöget az e átlóval két derékszögű háromszögre bontjuk. Ezekből (**1992.** ábra):

$$e = \sqrt{7{,}3^2 + 4{,}1^2} = \sqrt{70{,}10}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{4{,}1}{7{,}3}, \quad \text{azaz} \quad \alpha = 29{,}32°, \quad \text{valamint}$$

$\beta = 30{,}68°$, $c = e\sin\beta = 4{,}3$ cm és $d = e\cos\beta = 7{,}2$ cm adódik.

Megjegyzés: A b és d oldalak meghosszabbításával nyert speciális derékszögű háromszögből is meghatározhatók a keresett adatok.

1993. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, ezért ha $a = 3+x$, akkor a beírt kör érintési pontja az átfogót x és $15-x$ részekre bontja, és $b = 15-x+3 = 18-x$.
A Pitagorasz-tétel alapján $(18-x)^2 + (3+x)^2 = 15^2$ (**1993.** ábra). A másodfokú egyenlet megoldásával ($x_1 = 9$,



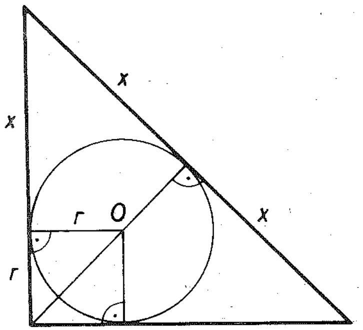
1993

$x_2=6$) a befogókra $a=12$ cm-t és $b=9$ cm-t kapunk. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; így $\alpha=53{,}13°$ és $\beta=36{,}87°$.

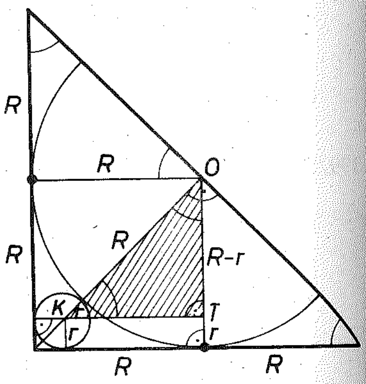
1994. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége és a szimmetria miatt a jelölt (x) szakaszok egyenlőek (**1994.** ábra).
Az átfogó $(r+x)\sqrt{2} = 2x$. Ebből $x = r(\sqrt{2}+1)$, és
a kerület $k = 4x+2r = 2(2\sqrt{2}+3)r$.

1995. Az **1994**-es feladat megoldása szerint $r = \frac{x}{\sqrt{2}+1}$, ahol $2x$ az egyenlő szárú derékszögű háromszög alapja. Ezért $r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$.

1996. Az **1994**-es feladat megoldását alkalmazzuk, ahol $b = x+r$. A feltétel szerint $b = r(\sqrt{2}+2)$, így a beírt kör sugara $r = b\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.



1994



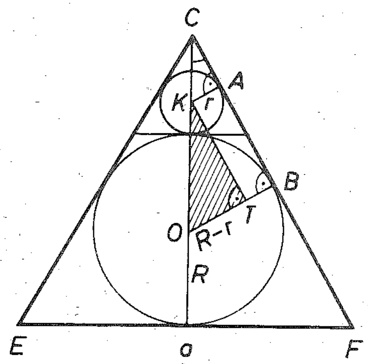
1997

1997. A beírt félkör érintési pontjaihoz tartozó sugarak egyenlő szárú derékszögű háromszögeket metszenek le az eredetiből. Így az érintési pontok a szárat felezik: $a=2R$ (**1997.** ábra).
OKT derékszögű háromszög egyenlő szárú és $OK = r+R$, $OT = R-r$.
Ezért $R+r = \sqrt{2}(R-r)$.

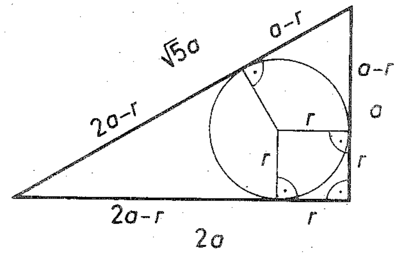
Ebből $r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot R = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\cdot a$ adódik.

1998. *I. megoldás:* $KT \| CF$, ezért KOT derékszögű háromszögben $OKT\sphericalangle = 30°$. Így $2OT=KO$, azaz $2(R-r) = R+r$. Ebből $r = \frac{R}{3}$. Mivel O egyben az EFC háromszög súlypontja, ezért $3R = m = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Innen $r = a\frac{\sqrt{3}}{18}$ (**1998.** ábra).
II. megoldás: Húzzuk meg a beírt kör EF-fel párhuzamos érintőjét. Mivel $m=3R$, ezért ez az egyenes a háromszögből egy R magasságú szabályos háromszöget vág le. E háromszög beírt körének sugarát kell meghatározni. Így $r = \frac{R}{3} = \frac{m}{9} = a\frac{\sqrt{3}}{18}$.

1999. Az előző feladat megoldásából láttuk, hogy $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$. A CAK és CBO háromszögek hasonlóságából $\frac{AC}{BC} = \frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.



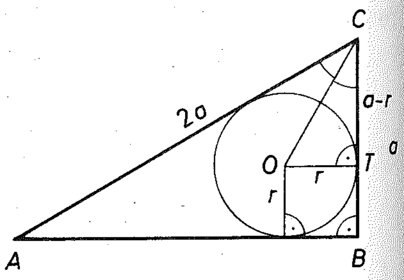
1998



2000a

2000. *a)* Ha a háromszög befogói a, $2a$ és átfogója $\sqrt{5}a$ (**2000.** *a)* ábra), akkor a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján az átfogó $(a-r)+(2a-r) = \sqrt{5}a$. Az egyenletből $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}r$, így a háromszög oldalai: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}r$, $(3+\sqrt{5})r$, $\frac{3\sqrt{5}+5}{2}r$.

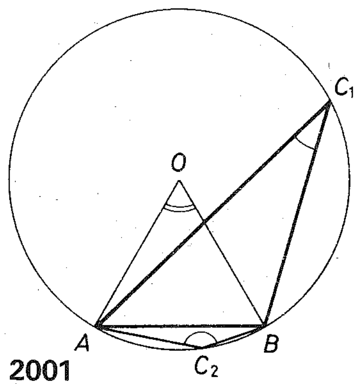
b) Ha az átfogó kétszerese az egyik befogónak, akkor a háromszögben $\alpha = 30°$ és $\gamma = 60°$. CO szögfelező, ezért $OCT\sphericalangle = 30°$, és az OCT derékszögű háromszögben $a - r = r\sqrt{3}$ (**2000.** *b)* ábra).
Ebből a háromszög oldalai
$BC = a = r(1+\sqrt{3})$,
$AB = a\sqrt{3} = r(\sqrt{3}+3)$ és
$AC = 2a = 2(1+\sqrt{3})r$.



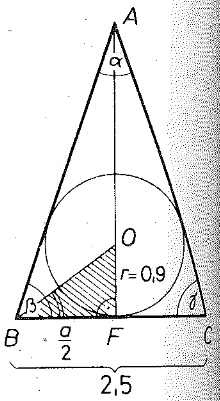
2000b

Megjegyzés: A feladat a derékszögű háromszög területének kétféle felírásával is megoldható:
$(a+b+c)r = ab\ (= 2t)$, ahol a háromszög befogói: a, b, átfogója: c.

2001. A feltételek szerint AOB szabályos háromszög, a jelölt $AOB\sphericalangle = 60°$. A kisebb AB ívhez tartozó kerületi szög 30°, a nagyobbik ívhez tartozó kerületi szög 150°. Tehát az ABC háromszög AB oldallal szemben fekvő szöge 30° vagy 150° (**2001.** ábra).



2001



2002

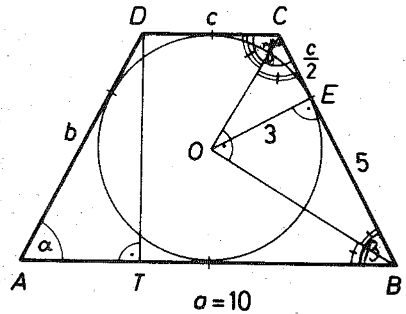
2002. A háromszög beírt körének középpontja a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja. Ezért $OBF\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$. Ezt az OBF derékszögű háromszögből kapjuk meg (**2002.** ábra):

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}} = 0{,}72, \quad \frac{\beta}{2} = 35{,}75°.$$

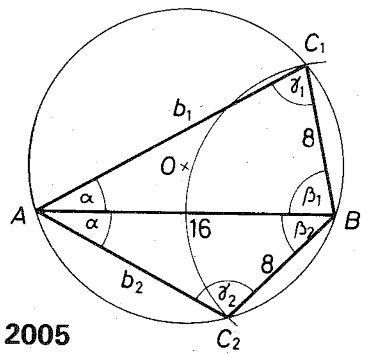
Így $\beta = \gamma = 71{,}5°$, $\alpha = 37°$.

2003. OB a β, OC a β-t 180°-ra kiegészítő γ szögfelezője, ezért BOC derékszögű háromszög (**2003.** ábra).
A beírt kör a BC szárat E-ben érinti, így az érintőszakaszok egyenlősége alapján $BE = 5$ cm és $EC = \frac{c}{2}$.
A BOC háromszögre alkalmazva a magasságtételt kapjuk:
$$3^2 = 5 \cdot \frac{c}{2}.$$
Ebből $c = 3{,}6$ cm, $b = 6{,}8$ cm.
A trapéz hegyesszögei az ADT háromszögből:
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{3{,}2}, \quad \alpha = \beta = 61{,}93°.$$

2004. Az adott c oldallal szemben fekvő (hegyes)szög a tanult
$c = 2r \sin\gamma$
összefüggésből $\sin\gamma = \frac{4}{6}$, $\gamma = 41{,}81°$. Ugyanezért
$a = 6 \sin 102° \approx 5{,}9$ (cm).
$\beta = 180° - (\alpha+\gamma) = 36{,}19°$, és $b = 6 \sin 36{,}19° \approx 3{,}5$ (cm).



2003



2005

2005. Ismert, hogy az r sugarú kör h húrja és a húrhoz tartozó φ kerületi szög között fennáll: $h = 2r \sin\varphi$ (**2005.** ábra). Tehát $8 = 16{,}8 \sin\alpha$. $8 < 16$ miatt $\alpha < \gamma$, tehát α hegyesszög, így $\alpha = 28{,}44°$.
Hasonlóan $\sin\gamma = \frac{16}{16{,}8}$. Ebből γ nincs egyértelműen meghatározva, így $\gamma_1 = 72{,}25°$ és $\gamma_2 = 107{,}75°$. Tehát két háromszög létezik.
A háromszögek harmadik szöge $\beta_1 = 79{,}31°$, illetve $\beta_2 = 43{,}81°$, és harmadik oldala ($b = 16{,}8 \sin\beta$ alapján) $b_1 = 16{,}5$ cm és $b_2 = 11{,}6$ cm.

2006. Az r sugarú körbe írt trapéz r hosszúságú oldala a kör középpontjából 60°-os szögben, az $r\sqrt{2}$ hosszúságú szárak 90°-os szögben látszanak. Ezért a keresett oldal a kör középpontjától 120°-os szögben látszik. Ebből a trapéz hosszabbik alapja $a=r\sqrt{3}$.

2007. Az egyenlő szárú háromszög a alapja az $R=10$ cm sugarú kör 36°-os középponti szögéhez tartozó húrja (**2007.** ábra). Ezért
$a = 2R\sin 18°$.
Ugyanakkor a köré írt körben az a húrhoz tartozó kerületi szög 36°, így $a = 2r\sin 36°$.

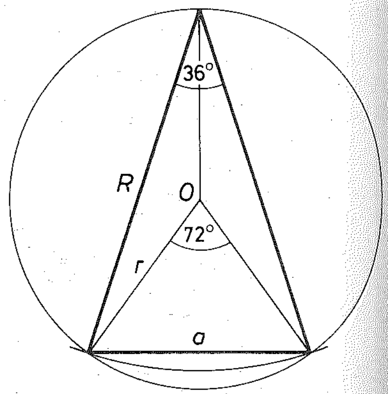
Ezekből $r = R\dfrac{\sin 18°}{\sin 36°} = \dfrac{R}{2\cos 18°} \approx 5{,}3$ (cm).

r pontos értékét (az **1735**-ös feladat megoldása alapján) a $\sin 54° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ felhasználásával kapjuk.

A $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ összefüggés alapján

$$\cos 18° = \sqrt{\frac{1+\cos 36°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin 54°}{2}}.$$

Ebből $r = \sqrt{10(5-\sqrt{5})}$ cm adódik.



2007

2008. (Az **1963**-as feladat ábráját használjuk.)

$$\varphi = E_1PO\sphericalangle = \frac{1}{2}E_1PE_2\sphericalangle = 24°\,15'.$$

Az OPE_1 derékszögű háromszögből

$$OP = \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{10}{\sin 24°\,15'} = 24{,}35 \text{ (cm) és}$$

$$E_1P = r\operatorname{ctg}\varphi = 10\operatorname{ctg} 24°\,15' = 22{,}2 \text{ (cm)}.$$

2009. (Az **1963**-as feladat ábráját használjuk.)

Az OE_1F derékszögű háromszögben $OE_1F\sphericalangle=\varphi$ és $\cos\varphi = \dfrac{1{,}4}{2{,}4}$.

Ebből $\varphi=54{,}315°$, az érintők hajlásszöge $2\varphi=108{,}63°$. Az OPE_1 derékszögű háromszögből

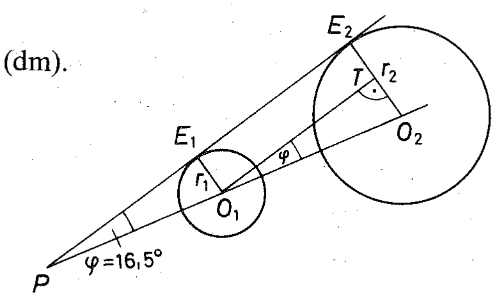
$$OP = d = \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{2{,}4}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} \approx 3{,}0 \text{ (dm)}.$$

Az OPE_1 és OE_1F háromszögek hasonlósága alapján

$$\frac{e}{d} = \frac{E_1F}{r},$$

azaz $PE_1 = e = \dfrac{1{,}4}{2{,}4}d \approx 1{,}7$ (dm).

2010. Az O_1O_2T derékszögű háromszögben (**2010.** ábra):
$TO_1O_2\sphericalangle = E_1PO_1\sphericalangle = 16{,}5°$ $(=\varphi)$,
$TO_2 = r_2 - r_1 = 1{,}6$,
így $E_1E_2 = O_1T =$
$= TO_2\operatorname{ctg}\varphi = 5{,}40$ a keresett szakasz.



2010

Mivel $O_1O_2 = \sqrt{5{,}40^2+1{,}6^2} = 5{,}63 < r_1+r_2$, ezért a két kör metszi egymást.

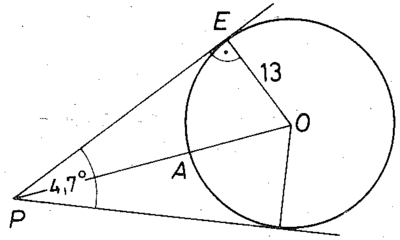
2011. (Az **1966.** feladat ábráját használjuk.) Az AKF derékszögű háromszögből $FA = \sqrt{17^2-8^2} = 15$. Így $AB=30$ cm, $PB=40$ cm. Az érintő- és szelőszakaszok tétele szerint: $PE^2 = PA\cdot PB = 10\cdot 40$, azaz $PE=20$ cm. A PEK derékszögű háromszögből $PK = \sqrt{20^2+17^2} = 26{,}2$ (cm) és

$$\operatorname{tg} KPE\sphericalangle = \frac{17}{20} = 0{,}85,\quad KPE\sphericalangle = 40{,}36°.$$

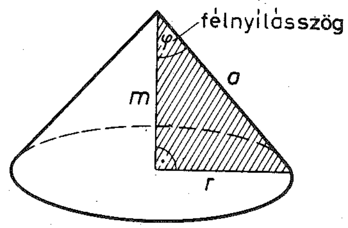
2012. A POE derékszögű háromszögből $PO = \dfrac{13}{\sin 2{,}35°} = 317$ (cm) (**2012.** ábra). P-nek a lámpaburától való távolsága $PA = PO-r = 304$ cm.

2013. Az ábrán feltüntetett derékszögű háromszögre (**2013.** ábra):
$m^2 = a^2-r^2 = 8{,}2^2-5{,}6^2 = 35{,}88$, ezért a magasság $m=6{,}0$ dm,

$\sin\varphi = \dfrac{r}{a} = \dfrac{5{,}6}{8{,}2} = 0{,}6829$. A kúp nyílásszöge $2\varphi=86{,}15°$.



2012



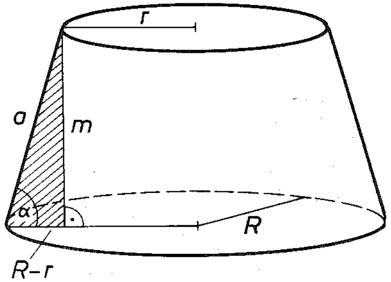
2013

2014. A **2013**-as ábra jelöléseivel:
$r = a \sin\varphi = 15 \sin 31°$; az alapkör átmérője:
$2r = 15{,}5$ cm,
$m = a\cos\varphi = 15\cos 31°$; a kúp magassága $m = 12{,}9$ cm.

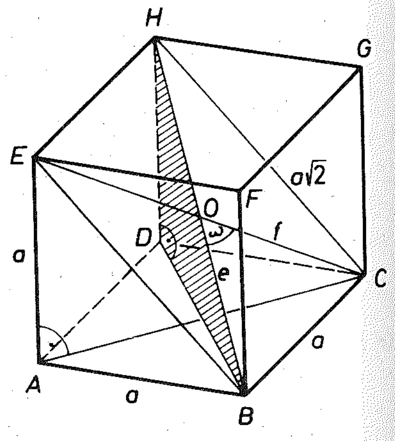
2015. A vonalkázott háromszögre felírhatjuk (**2015.** ábra):

$$\cos\alpha = \frac{R-r}{a} = \frac{2{,}9}{10{,}5};$$

a keresett szög $\alpha = 73{,}97°$.



2015



2016

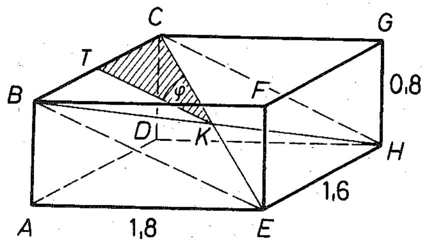
2016. Az $ABCD$ alaplap átlói: $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$ (**2016.** ábra).
A testátlókat az ábrán feltüntetett BDH egyenlő szárú derékszögű és CAE derékszögű háromszögekből Pitagorasz-tétellel kapjuk.
$e = a\sqrt{2}$, $f = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$.
A két testátlót tartalmazó síkmetszet (pl. $EBCH$) a és $a\sqrt{2}$ oldalú (nem derékszögű) paralelogramma. Az e és f szögét cosinustétellel számíthatjuk ki az OBC háromszögből:

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\frac{e}{2}\frac{f}{2}\cos\omega,$$

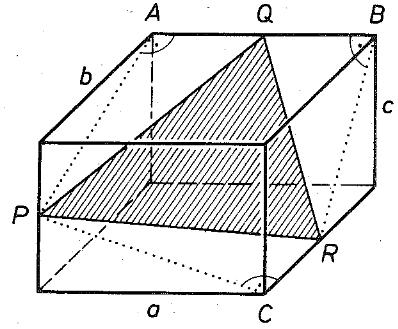
$$\cos\omega = \frac{\frac{a^2}{2} + a^2 - a^2}{2\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{2a}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \omega = 69{,}3°.$$

2017. A két testátlót tartalmazó síkmetszet téglalap, melynek oldalai 1,6 és $\sqrt{1{,}8^2 + 0{,}8^2}$ (**2017.** ábra).
A CE és BH testátlók szöge a $CKT\sphericalangle$ kétszerese: 2φ.

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{CT}{KT} = \frac{0{,}8}{\frac{1}{2}\sqrt{3{,}88}}; \qquad 2\varphi = 78°\,17'.$$



2017



2018

2018.

$$PQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2 + c^2 + 4b^2}{4} \quad \text{az } APQ,$$

$$QR^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2 + 4c^2}{4} \quad \text{a } BRQ,$$

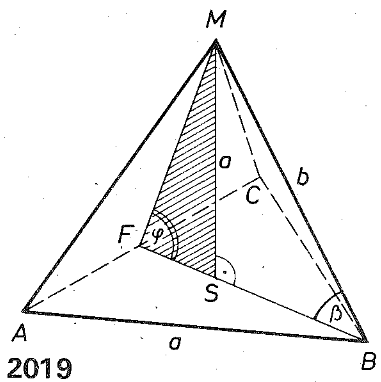
$$PR^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{b^2 + c^2 + 4a^2}{4} \quad \text{a } CPR \text{ derékszögű három-}$$

szögekből (**2018.** ábra).

Összegük: $\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

2019. A szabályos gúla magasságának talppontja az ABC alapháromszög súlypontja: S (**2019.** ábra).
SB az a oldalú szabályos háromszög súlyvonalának $\frac{2}{3}$-a:

$$SB = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



2019

Az MSB derékszögű háromszögből:

a) Pitagorasz-tétellel számítjuk ki az oldalélt:

$$b = \sqrt{a^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

b) és az oldalélnek az alaplappal bezárt szöge:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}; \qquad \beta=60°.$$

c) Az oldallapnak az alaplappal bezárt szögét az MSF derékszögű háromszögből kapjuk meg:

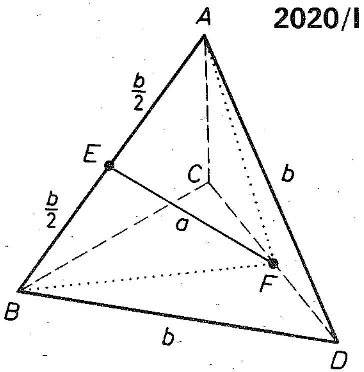
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MS}{SF} = 2\sqrt{3}; \qquad \varphi=73{,}90°.$$

2020. *I. megoldás:* Az ABF egyenlő szárú háromszög, ezért AEF háromszög derékszögű, erre felírható a Pitagorasz-tétel:

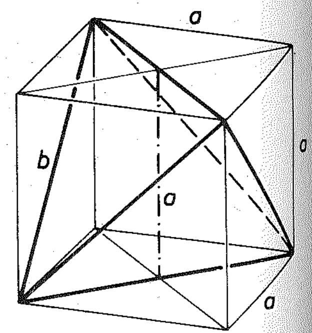
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = AF^2-a^2 \qquad (\textbf{2020}/\text{I. ábra}).$$

Minthogy itt AF az ACD szabályos háromszög magassága $AF = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, ezért $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)^2 - a^2$. Ebből $b = a\sqrt{2}$.

II. megoldás: A szabályos tetraéder köré – az ismert módon – kocka írható (**2020**/II. ábra). A tetraéder két szemközti élének távolsága éppen a kocka a élével egyenlő, a tetraéder éle pedig a kocka lapátlója: $b = a\sqrt{2}$.



2020/I.



2020/II.

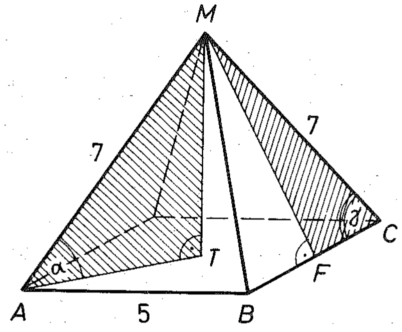
2021. *a)* Az oldalélnek az alapéllel bezárt szögét az MFC derékszögű háromszögből kapjuk: $\cos\gamma = \frac{FC}{MC} = \frac{2{,}5}{7}$; $\gamma=69{,}08°$ (**2021.** ábra).

b) Az oldalélnek az alaplappal bezárt α szögét az AMT derékszögű háromszögből számítjuk ki:

$$\cos\alpha = \frac{AT}{AM}.$$

AT az alaplap átlójának fele: $\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}$, így

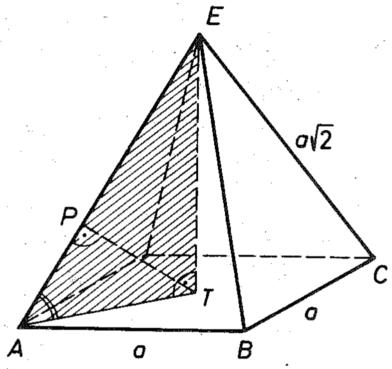
$$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{14}; \qquad \alpha=59{,}66°.$$



2021

2022. A gúla oldaléle $AE = a\sqrt{2}$, az AT szakasz kétszerese (**2022.** ábra). ACE szabályos háromszög, $EAT\sphericalangle=60°$. Így az alaplap középpontjának az oldaléltől való távolsága az AT oldalú szabályos háromszög magassága:

$$PT = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$



2022

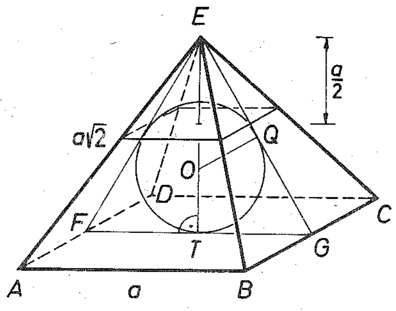
2023. *a)* A gúla oldallapjainak magassága az $a\sqrt{2}$ szárú egyenlő szárú háromszög a alaphoz tartozó magassága (**2023.***a), b)* ábra)

$$m = \sqrt{2a^2-\frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}a,$$

területe:

$$t = \frac{\sqrt{7}a^2}{4}.$$

Tehát a gúla felszíne
$A = a^2+4t = a^2(1+\sqrt{7})$.



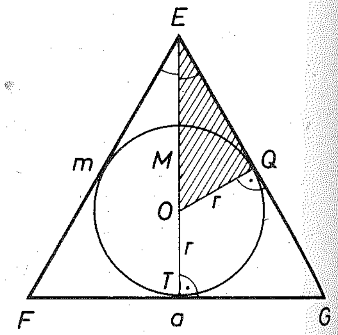
2023a,b

A gúla magassága az előző feladat eredménye alapján:

$$M = ET = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{3} = a\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Így a gúla térfogata:

$$V = \frac{tM}{3} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$



2023c

b) Az E középpontú hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{\frac{a}{2}}{M} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, ezért a kapott négyzet területe: $\lambda^2 a^2 = \dfrac{a^2}{6}$.

c) I. megoldás (**2023.***c)* ábra): Tekintsük a gúla szemköztes oldallapjai magasságára illeszkedő síkmetszetét. Ez tartalmazza a beírt gömb középpontját és a két szemköztes oldallapon az érintési pontokat. Így a beírt gömb sugara, az EFG egyenlő szárú háromszög beírt körének r sugarával azonos.

Ezt az FTE és OQE hasonló háromszögek segítségével határozhatjuk meg:

$$\frac{r}{M-r} = \frac{\frac{a}{2}}{m}.$$

Az ismert oldalakat behelyettesítve az $r = a\dfrac{\sqrt{6}\left(\sqrt{7}-1\right)}{2}$ értéket kapjuk.

Így a beírt gömb felszíne: $A_g = 4r^2\pi = \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}a^2\pi$ és

térfogata: $V_g = \dfrac{4}{3}r^3\pi = \dfrac{\sqrt{6}(5\sqrt{7}-11)}{108}a^3\pi.$

II. megoldás: Az adott gúlát a beírt gömb középpontjával közös csúcspontú gúlákra bontjuk. Ezek magassága a beírt gömb sugara: r, térfogatuk összege a gúla térfogatával, az alaplapok területének összege a gúla felszínével egyenlő. Így: $V = \dfrac{r}{3}A$, azaz

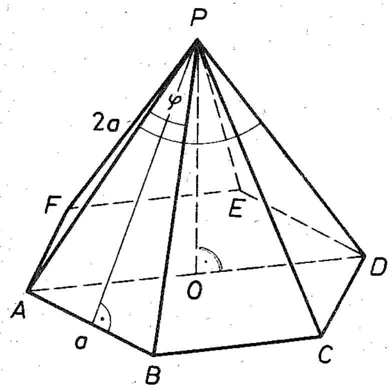
$$\frac{a^3\sqrt{6}}{6} = \frac{r}{3}\cdot a^2(1+\sqrt{7}).$$

Ebből:

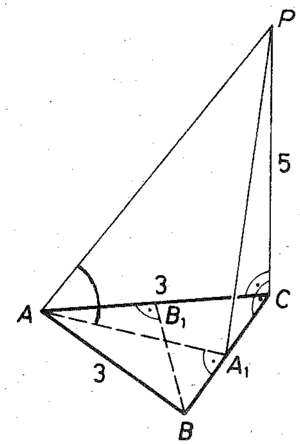
$$r = a\frac{\sqrt{6}(\sqrt{7}-1)}{12}.$$

2024. A szabályos hatszög két szemköztes csúcsának távolsága az a alapél kétszerese; ezért ADP szabályos háromszög (**2024.** ábra).
Ebből: *a)* a gúla magassága az alapéllel kifejezve: $a\sqrt{3}$
és *c)* a szemköztes oldalélek szöge 60°.
b) A szomszédos oldalélek szögét az ABP egyenlő szárú háromszögből határozzuk meg:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}. \quad \text{Ebből } \varphi = 28{,}96°.$$



2024



2025

2025. PC merőleges a háromszög síkjára, így a sík összes egyenesére is. Tehát $PC \perp AA_1$ és $PC \perp BB_1$ (**2025.** ábra).
BB_1 merőleges PC-re és AC-re, ezért merőleges az ACP síkra, tehát $PA \perp BB_1$. Ugyanígy: $PA_1 \perp AA_1$.
PA és AA_1 szögét a PAA_1 derékszögű háromszögből kapjuk meg, mert e háromszög oldalai derékszögű háromszögekből meghatározhatóak.

$$AP = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34},$$

$$AA_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3} = \sqrt{6{,}75}.$$

Így $\cos PAA_1\sphericalangle = \dfrac{\sqrt{6{,}75}}{\sqrt{34}} = 0{,}4456, \qquad PAA_1\sphericalangle = 63{,}54°.$

2026. Az a oldalú szabályos n-szög köréírt körének sugara:

$$r = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}.$$

Ha a gúla oldaléle a, akkor szükségképpen $a > r$.

Az egyenlőtlenséget megoldva $30^\circ < \frac{180^\circ}{n}$ $(< 90^\circ)$, azaz $n < 6$ adódik.

A gúla magasságát az $m^2 = a^2 - r^2$ összefüggésből kapjuk:

$n = 3$ esetén $\quad m = a\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$n = 4$ esetén $\quad m = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$n = 5$ esetén $\quad m = a\sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 36^\circ}}$.

Az **1735.** feladat megoldása alapján:

$$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \text{így}$$

$$\sin^2 36^\circ = 1 - \cos^2 36^\circ = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2.$$

Ebből $m = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

2027. Az egység átfogójú x hegyesszögű, derékszögű háromszög x-szel szemköztes befogója $\sin x$, a másik befogó $\cos x$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $\sin x + \cos x > 1$.

2028. *I. megoldás:* Az AT_1OT_2 derékszögű deltoid területe (**2028.** ábra).

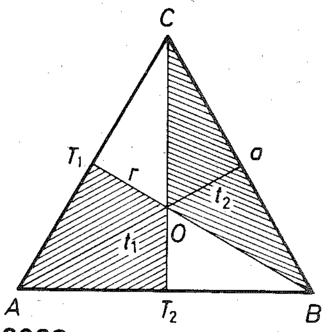
$$t_1 = AT_2 \cdot T_2O = \frac{a}{2} r,$$

ahol r a háromszög beírt körének sugara.

A BCO háromszög területe:

$t_2 = \frac{1}{2} ar$, mivel a CB oldalhoz tartozó magasság r. Tehát $t_1 = t_2$.

II. megoldás: Az OA szögfelező felezi az AT_1OT_2 négyszög és a BCO háromszög területét. Az így keletkező négy háromszög egybevágóságából $t_1 = t_2$ következik.



2028

2029. Ismert, hogy a háromszög területe $t = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

A feltételből következik, hogy $\sin \gamma = \frac{1}{2}$. Ezért $\gamma < 90^\circ$ miatt $\gamma = 30^\circ$.

2030. A derékszögű háromszög B csúcs melletti külső szöge $\alpha + 90^\circ$, az A csúcs melletti külső szög $\beta + 90^\circ$.
$a < b$, így $\alpha < \beta$, ezért a feltételekből

$$\frac{\alpha + 90^\circ}{\beta + 90^\circ} = \frac{4}{5} \text{ adódik.}$$

Az $\alpha = 90^\circ - \beta$ egyenlőséget figyelembe véve kapjuk, hogy $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$.
A háromszög területe a $2a$ oldalú szabályos háromszög területének fele, azaz $t = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

2031. Az átfogó $c = \sqrt{6^2 + 9^2} = 3\sqrt{13}$.
A háromszög területének kétszerese: $ab = mc$.
Innen $m = \frac{54}{3\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}} \approx 5{,}0$ (dm).

2032. A háromszögek kerületének aránya $\lambda = \frac{27}{5+6+7} = \frac{3}{2}$. Területük aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, azaz $9:4$.

2033. Tegyük fel, hogy $b = B \cdot a$ és $c = C \cdot a$. Ekkor a háromszög magasságai:

$$m_a = \frac{2t}{a}, \quad m_b = \frac{2t}{B \cdot a} \quad \text{és} \quad m_c = \frac{2t}{C \cdot a}.$$

Két-két magasság összege:

$$m_a+m_b = 2t\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{B\cdot a}\right) = 2t\frac{B+1}{B\cdot a},\qquad m_b+m_c = 2t\frac{B+C}{B\cdot C\cdot a},$$

és $\quad m_c+m_a = 2t\dfrac{C+1}{C\cdot a}.$

A feltételek szerint:

$$\frac{5}{7} = \frac{m_a+m_b}{m_b+m_c} = \frac{B+1}{B+C}\cdot C \qquad \text{és} \qquad \frac{8}{7} = \frac{C+1}{B+C}\cdot B.$$

Az egyenletrendszerből $B=\frac{3}{2}$ és $C=\frac{3}{5}$. Innen az oldalak aránya:

$$a:b:c = 1:\frac{3}{2}:\frac{3}{5} = 10:15:6.$$

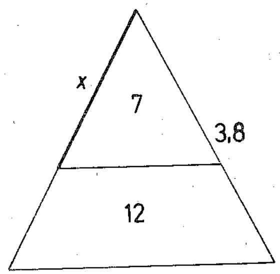
2034. $t = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = 56{,}8\ (\text{cm}^2).$

2035. $t = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ alapján $\sin\gamma = \dfrac{208}{15{,}0\cdot 20{,}5} = 0{,}6764$. Innen $\gamma_1 = 42{,}56°$, $\gamma_2 = 137{,}44°$. (Az adatok a háromszöget nem határozzák meg egyértelműen.)

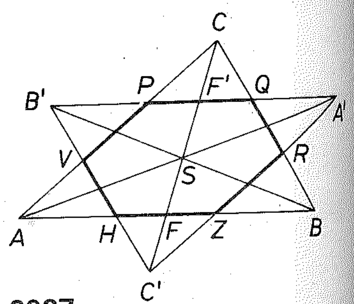
$$t = \frac{am_a}{2}\text{-ből,}\qquad m_a = \frac{208}{20{,}5} = 10{,}1\ (\text{cm}).$$

2036. A lemetszett háromszög az eredetihez hasonló, a hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{x}{3{,}8}$, területük aránya a feltételt figyelembe véve $\lambda^2 = \left(\dfrac{x}{3{,}8}\right)^2 = \dfrac{7}{19}$.

Ebből $x = 3{,}8\sqrt{\dfrac{7}{19}} = \dfrac{\sqrt{133}}{5}$ (cm) ($\approx 2{,}31$ cm) (**2036.** ábra).



2036



2037

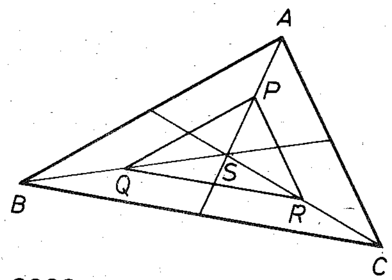
2037. $A'B'$ az AC, illetve BC oldalt P, illetve Q pontokban metszi (**2037.** ábra).

$PQC\triangle \sim ABC\triangle$.

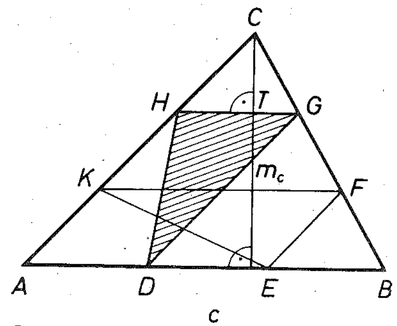
A tükrözés miatt $FS=F'S$, másrészt $FS = \frac{1}{3}FC$. Ezért F' az FC súlyvonalat harmadolja. Így a hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{F'C}{FC} = \dfrac{1}{3}$, a PQC és ABC háromszögek területének aránya $\lambda^2 = \dfrac{1}{9}$.

$PQC\triangle \cong ZBR\triangle \cong AHV\triangle$, ezért a két háromszög közös részének területe $t = T - 3\cdot\dfrac{1}{9}T = \dfrac{2}{3}T$, tehát a területek aránya $\dfrac{t}{T} = \dfrac{2}{3}$.

2038. $PQR\triangle \sim ABC\triangle$, mert PQ, QR, RP az ABS, BCS, CAS háromszögek középvonalai ($PQ\|AB$, $QR\|BC$, $RP\|CA$). A hasonlóság aránya $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{1}{2}$, a területek aránya $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ (**2038.** ábra).



2038



2039

2039. $HGC\triangle \sim ABC\triangle$ (két oldal aránya és a körbezárt szög egyenlősége miatt) (**2039.** ábra).

A megfelelő szakaszok aránya: $\dfrac{HG}{c} = \dfrac{CT}{m_c} = \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{1}{3}$.

Ezért a HGD háromszög területe:

$$t_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot c\cdot\frac{2}{3}\cdot m_c = \frac{2}{9}t,$$

ahol t az ABC háromszög területe.

Hasonlóan megmutatható, hogy az EFK háromszög területe $t_2 = \frac{2}{9}t$.

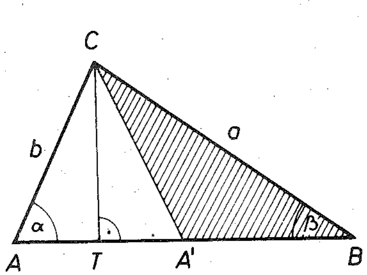
Tehát $t_1 : t_2 : t = \frac{2}{9} : \frac{2}{9} : 1$ $(= 2:2:9)$.

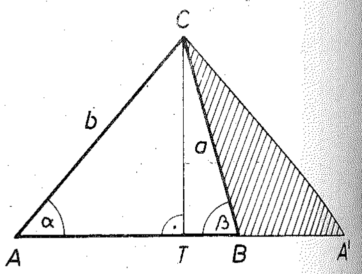
2040. $A'BC$ és ABC háromszögek C csúcsból induló magasságai azonosak, így $t' : t = A'B : AB$ (**2040.** ábra).
α és β hegyesszögek, mert ellenkező esetben az AB oldalt nem metszené a magasságvonal.

Ha $a>b$, A' az AB szakasz pontja: $AT=TA'$ és $A'B = \frac{1}{2}AB$. Így

$AA'=A'B$, $AT = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB$, azaz $AT : AB = 1:4$. Tehát a

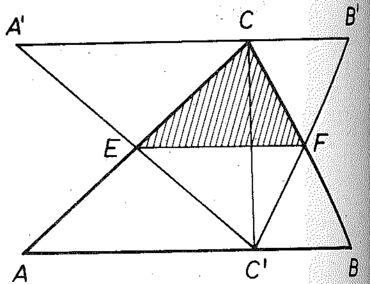
magasságvonal az AB oldalt $1:3$ arányban osztja.
Hasonlóan megmutatható $a<b$ esetén is, hogy T az AB szakasz B csúcshoz közelebb eső negyedelő pontja.
Összefoglalva: a magasságtalppont az AB oldalnak a csatlakozó rövidebb oldalhoz közelebb eső negyedelő pontja.



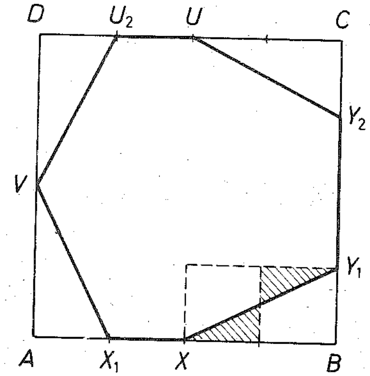


2040

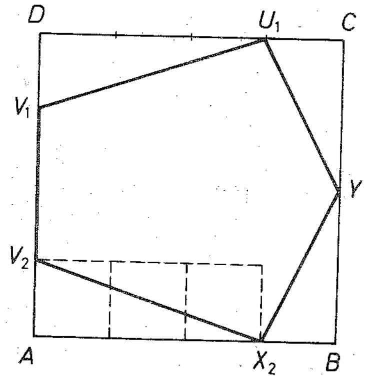
2041. $EFC\triangle \sim ABC\triangle$, a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, területük aránya $\frac{1}{4}$. $EFC\triangle \cong EFC'\triangle$, így $t(CEC'F) = 2t(EFC) = \frac{1}{2}t(ABC)$ (**2041.** ábra).



2041



2042a



2042b

2042. A hétszög területét megkapjuk, ha a négyzet T területéből kivonjuk a négy egybevágó háromszög területét (**2042.** *a)* ábra).

$t(XBY_1) = \frac{T}{16}$, így $t_7 = \frac{3}{4}T$.

Az ötszög területét megkapjuk, ha a négyzet területéből kivonjuk a 2-2 egybevágó háromszög területét (**2042.** *b)* ábra).

$2t(AX_2V_2) = \frac{3}{16}T$, $2t(X_2BY) = \frac{T}{8}$, így $t_5 = \frac{11}{16}T$.

Ebből $t_7 : t_5 = 12:11$.

2043. *I. megoldás:* A DEF háromszögben

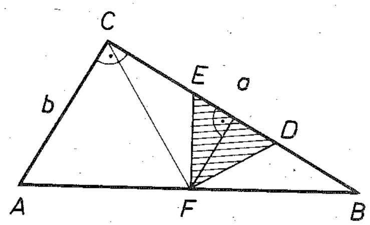
$DE = \frac{a}{3}$,

az ehhez tartozó magasság az ABC háromszög a oldalához tartozó magasság fele (mivel F felezi AB-t), itt $\frac{b}{2}$. (**2043.** ábra).

Ezért

$t(EDF) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2} = \frac{1}{6}t(ABC) = \frac{1}{6}$.

Megjegyzés: A megoldás során nem használtuk fel, hogy az adott háromszög hegyesszögei 30°, 60°-osak.



2043

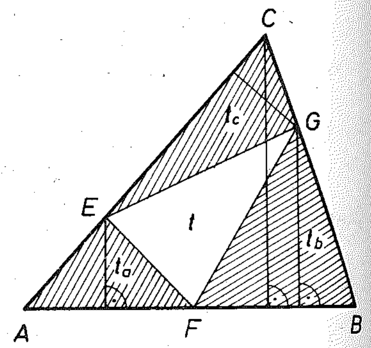
II. megoldás: F felezi AB-t, ezért $t(FBC) = \frac{1}{2} t(ABC) = \frac{1}{2}$.

FBC és DEF háromszögek magassága azonos, így

$$t(DEF) = \frac{1}{3} t(FBC) = \frac{1}{6} t(ABC).$$

Megjegyzés: Ez a megoldás tetszőleges ABC háromszögre jó.

2044. Az EFG háromszög területe $t = T-(t_a+t_b+t_c)$ (**2044.** ábra), ahol T az ABC háromszög területe. A kis háromszögek területét egy oldalból és a hozzá tartozó magasságból számoljuk ki például a következő táblázat szerint:



2044

háromszög	oldala	a hozzá tartozó magasság	területe
AFE	$\frac{c}{2}$	$\frac{m_c}{3}$	$t_a = \frac{T}{6}$
BGF	$\frac{c}{2}$	$\frac{2}{3} m_c$	$t_b = \frac{T}{3}$
CEG	$\frac{2}{3} b$	$\frac{m_b}{3}$	$t_c = \frac{2T}{9}$.

Így $t = T\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right) = \frac{5}{18} \cdot 36 = 10\ (\mathrm{cm}^2)$.

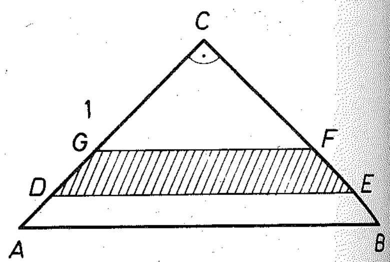
2045. ABC, DEC és GFC háromszögek hasonlóak (**2045.** ábra). Területeik arányából a hasonlóság arányára következtethetünk. Így

$t(GFC) = \frac{1}{3} T,$ ezért

$GC = \frac{1}{\sqrt{3}} AC = \frac{1}{\sqrt{3}},$ valamint

$t(DEC) = \frac{2}{3} T,$ ezért

$$DC = \sqrt{\frac{2}{3}} AC = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$



2045

Ebből a szimmetrikus trapéz szárai:

$DG = EF = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ egység.

A trapéz alapjai

$GF = \sqrt{2} GC = \sqrt{\frac{2}{3}}$ egység,

$DE = \sqrt{2} DC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ egység.

2046. Az ABC háromszöghöz hasonló PQC háromszög területe az ABC háromszög területének $\frac{1}{3}$ vagy $\frac{2}{3}$ része. A $\frac{t}{T} = \lambda^2$ összefüggés alapján a hasonlóság aránya: $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, illetve $\lambda_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Ezért

$$CP_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot CA = 3\sqrt{3}\ \text{cm, illetve } CP_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot CA = 3\sqrt{6}\ \text{cm}.$$

2047. A hasonló háromszögeket figyelembe véve:

$DE = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} c, \quad FG = \frac{2}{3} c,$

$DP = \frac{2}{3} m_c, \quad FR = \frac{1}{3} m_c.$

Így $\quad t(DEQP) = DE \cdot DP = \frac{2}{9} t,$

$t(FGSR) = FG \cdot FR = \frac{2}{9} t,$

tehát a két téglalap területe egyenlő.
A téglalapok kerülete:

$$k(DEQP) = 2DE+2DP = \frac{2}{3} c + \frac{4}{3} m_c \quad \left(= \frac{2}{3} c + \frac{2}{3} m_c + \frac{2}{3} m_c\right)$$

és

$$k(FGSR) = \frac{4}{3} c + \frac{2}{3} m_c \quad \left(= \frac{2}{3} c + \frac{2}{3} m_c + \frac{2}{3} c\right).$$

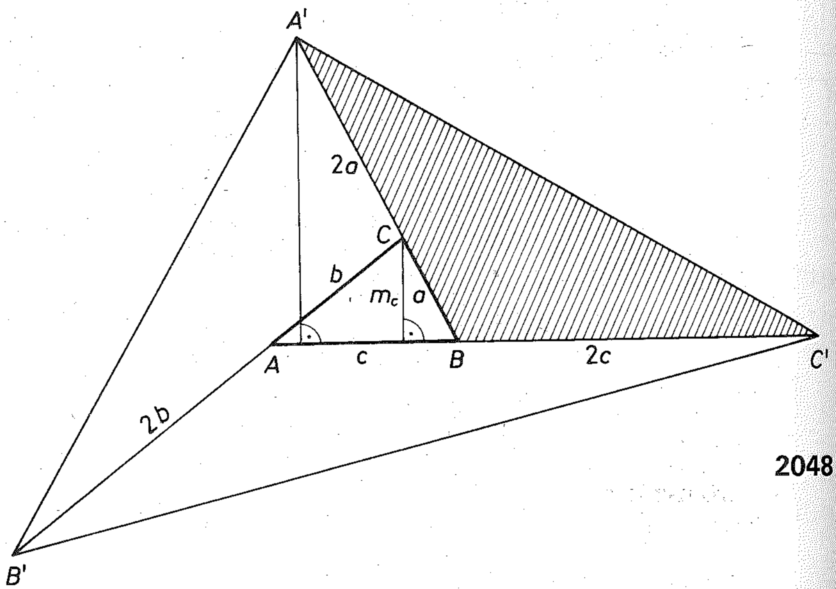
Tehát c és m_c viszonyától függ, hogy melyik téglalap kerülete a nagyobb. Például ha $m_c < c$, akkor $k(DEQP) < k(FGSR)$.
Megjegyzés: A területek egyenlősége a téglalapok átdarabolásával is megmutatható.

2048. Tekintsük a $BC'A'$ háromszöget (**2048.** ábra). Ebben $BC' = 2c$, az ehhez tartozó magasság a párhuzamos szelőszakaszok tételét (vagy a hasonló háromszögeket) figyelembe véve: $3m_c$.
Így $t(BC'A') = 6t$, ahol t az ABC háromszög területe.
Hasonlóan belátható, hogy

$t(CA'B') = t(AB'C') = 6t.$

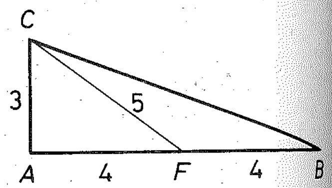
Tehát

$t(A'B'C') = t + 3 \cdot 6t = 19t$, azaz az $A'B'C'$ háromszög területe az ABC háromszög területének 19-szerese.



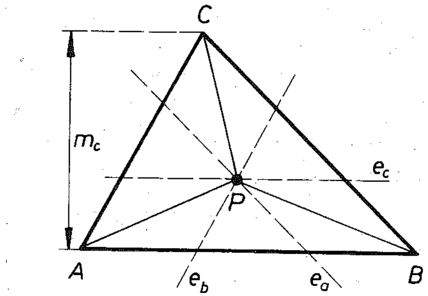
2048

2049. A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján az AFC háromszög derékszögű. Az ABC háromszög befogói 3 cm, illetve 8 cm, így a területe 12 cm² (**2049.** ábra).

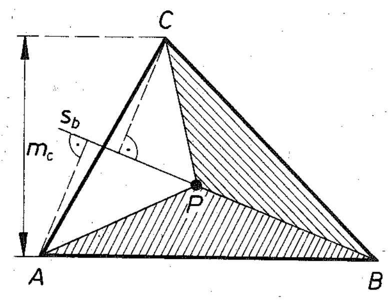


2049

2050. *I. megoldás:* A feltétel azt jelenti, hogy $T(ABP) = \frac{1}{3}T(ABC)$. Ez úgy lehetséges, hogy ABP háromszög P-ből induló magassága: $\frac{1}{3}m_c$. Így



2050/I.



2050/II.

P rajta van az m_c-nek, a C-től távolabbi harmadolópontján átmenő, AB-vel párhuzamos e_c egyenesen. Az e_c-re illeszkedik az S súlypont. Hasonlóan ez áll a többi oldalra is: S illeszkedik az $e_a \| BC$ és $e_b \| AC$ egyenesekre is. Így e_a, e_b, e_c-nek S közös pontja, de más közös pontja nem lehet. Ezért P azonos S-sel (**2050**/I. ábra).
II. megoldás: A $t(ABP) = t(BCP)$ egyenlőségből következik, hogy a két háromszög közös PB oldalához tartozó magassága egyenlő, azaz A-nak és C-nek PB egyenestől mért távolsága azonos. Ezért a PB egyenes felezi az AC oldalt, tehát P rajta van a b oldalhoz tartozó s_b súlyvonalon (**2050**/II. ábra).
Hasonlóan mutatható meg, hogy P az s_a és s_c súlyvonalakra is illeszkedik. Ezért, ha $t(ABP) = t(BCP) = t(CAP)$ fennáll, akkor P csak az ABC háromszög súlypontja lehet.
A háromszög súlypontjára a fenti egyenlőség teljesül, hiszen pl.:

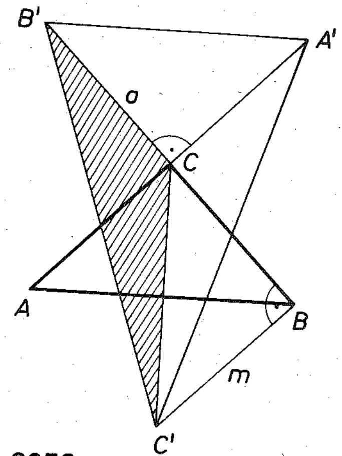
$$t(ABP) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_c AB\right) = \frac{1}{3}t(ABC).$$

2051. A megoldást lásd **2037**-nél.

2052. Az $A'B'C'$ háromszög három egyenlő területű háromszögre bontható (**2052.** ábra).

$T(A'B'C') =$
$= T(A'B'C) + T(A'C'C) + T(B'C'C).$

$A'B'C\triangle \cong ABC\triangle \qquad \left(t = \frac{a^2}{2}\right).$



2052

A másik két háromszög egyik oldala és a hozzá tartozó magassága is a, területe $\frac{a^2}{2}$. Tehát $T(A'B'C') = \frac{3a^2}{2}$.

Megjegyzés: Az $A'B'C'$ háromszög területe közvetlenül $A'B'$ oldalból és a hozzá tartozó magasságból is kiszámítható.

2053. Legyenek a háromszög oldalai: $a-d$, a, $a+d$. Pitagorasz tétele szerint: $(a+d)^2 = a^2+(a-d)^2$. Rendezés után: $a(a-4d) = 0$.
Ebből $0<a=4d$.
A háromszög oldalai d-vel kifejezve $3d$, $4d$, $5d$.
Területe: $6d^2=600$, így $d=10$, tehát a háromszög oldalai: 30 cm, 40 cm, 50 cm.

2054. A feltételek szerint $k = a+b+c = 60$,

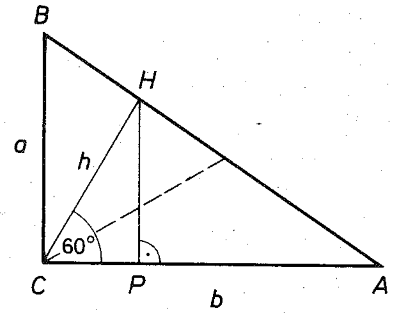
$$t = \frac{1}{2}ab = 120,$$
$$a^2+b^2 = c^2.$$

Az egyenletrendszerből: $a+b = 60-c$ és $ab=240$ egyenleteket kapjuk, ami a $c^2 = (60-c)^2-480$ egyenletre vezet. Ebből az átfogó $c=26$ m, a befogók: 10 m és 24 m.

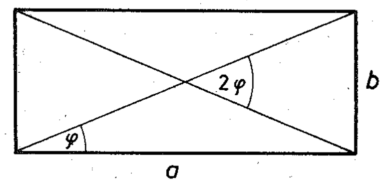
2055. A derékszögű háromszög oldalaira a szokásos jelölést alkalmazva: $a^2+b^2 = c^2$ a Pitagorasz-tétel, továbbá
$a+b+c = ab$ a feltétel szerint.
Ezekből $a^2+b^2 = (ab-a-b)^2$.
A kijelölt műveleteket elvégezve és szorzattá alakítva:
$ab(ab-2a-2b+2) = 0$.
Minthogy $ab>0$, ezért kell, hogy $ab-2a-2b+2 = 0$, azaz
$(a-2)(b-2) = 2$ legyen.
Mivel a és b pozitív egész, ezért $a-2 = 1$ és $b-2 = 2$ vagy fordítva.
Ennek alapján a háromszög oldalai 3, 4 és 5 egység.

2056. Legyen $HP \parallel BC$. Ekkor HCP derékszögű háromszögben a $HCP\sphericalangle = 60°$ miatt $CP = \frac{h}{2}$, $HP = \frac{h}{2}\sqrt{3}$ (**2056.** ábra). $AHP\triangle \sim ABC\triangle$, ezért a megfelelő oldalak aránya egyenlő: $\frac{HP}{BC} = \frac{PA}{CA}$, azaz $\frac{\frac{h}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{b-\frac{h}{2}}{b}$.
Az egyenletet $\frac{2}{h}$-val szorozva és rendezve, a bizonyítandó $\frac{1}{b} + \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{2}{h}$ összefüggést kapjuk.

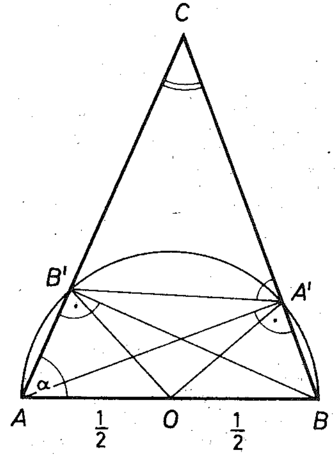
2057. Lásd az **1811**-es feladatot.



2056



2060



2058

2058. $ABA'B'$ négyszög húrnégyszög, ezért például: $CA'B'\sphericalangle = \alpha$. Az ABC és $A'B'C$ háromszögek hasonlóak, mert két-két szögük páronként egyenlő. A hasonlóság aránya $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, így a két háromszög területének aránya $\frac{1}{2}$, tehát $A'B'$ felezi az ABC háromszög területét (**2058.** ábra).

2059. ABC és $A'B'C'$ háromszögek hasonlóak. (Lásd a **2058**-as feladat megoldását!) Mivel $\frac{t'}{t} = \frac{1}{n}$, ezért a hasonlóság aránya $\frac{1}{\sqrt{n}}$, így $A'B' = \frac{c}{\sqrt{n}}$.

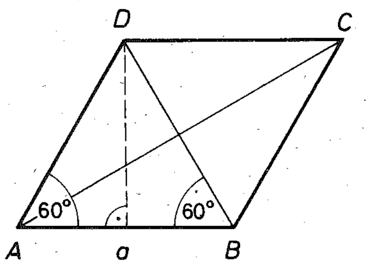
2060. A feltételekből $ab=60$, $a^2+b^2 = 169$. Az egyenletrendszer gyökei a téglalap oldalai: 12 cm, 5 cm. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{5}{12}$, $\varphi=22{,}62°$. Ezért az átlók szöge $2\varphi=45{,}24°$ (**2060.** ábra).

2061. A feltételek alapján: $2b = \sqrt{4+b^2}$.
Ebből $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ adódik.
Ha az átlók az a oldallal φ szöget zárnak be, akkor
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\varphi<90°$ miatt $\varphi=30°$.

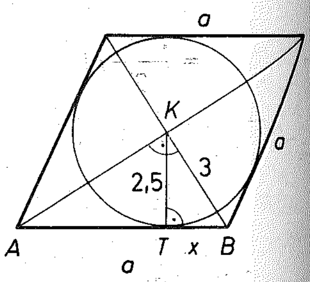
2062. A téglalap oldalainak felezőpontjai olyan rombuszt határoznak meg, amelynek oldala a téglalap átlóinak 1/2-szerese. Ezért a rombusz kerülete $2\sqrt{a^2+b^2} = 5{,}2$. A téglalap két különböző oldalának az összege: $a+b = 3{,}4$. Ezekből a téglalap oldalai: 1 dm és 2,4 dm.

2063. Az oldalfelező pontok által meghatározott rombusz területe a téglalap területének fele:
$ab = 144$. Másrészt a feltételek szerint
$a+b = 26$.
Innen a téglalap oldalai: 18 cm és 8 cm.

2064. A rombusz másik szögét a BD átló felezi. Ezért ABD szabályos háromszög. Ennek magassága $a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$, ahol a a rombusz oldala. Így a rombusz egyik átlója $a = 2\sqrt{2}$ cm, a másik átló a szabályos háromszög magasságának kétszerese: $2\sqrt{6}$ cm. A rombusz területe: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ (**2064.** ábra).



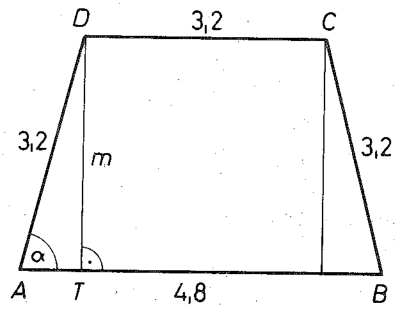
2064



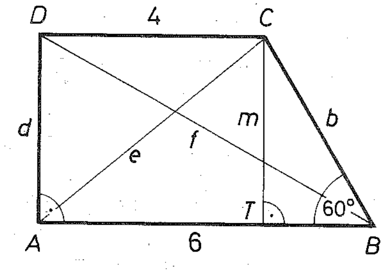
2065

2065. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást (**2065.** ábra). A KTB derékszögű háromszögből $TB = x = \sqrt{3^2-2{,}5^2} = \sqrt{2{,}75}$. Az ABK derékszögű háromszögre alkalmazzuk a befogótételt:
$ax = 3^2$,
azaz $a = \dfrac{9}{\sqrt{2{,}75}}$.

Így a rombusz területe $t = 2ra = \dfrac{45}{\sqrt{2{,}75}}\,\text{cm}^2 \approx 27{,}1\,\text{cm}^2$.



2066

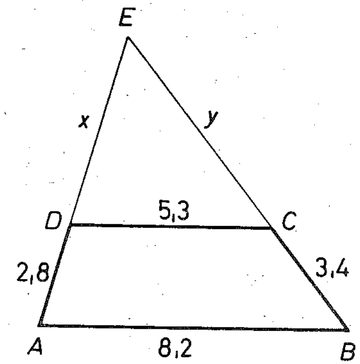


2067

2066. A szimmetrikus trapéz magassága és α hegyesszöge az ATD derékszögű háromszögből (**2066.** ábra):
$m = \sqrt{3{,}2^2-0{,}8^2} = 0{,}8\sqrt{15}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\alpha = 75{,}52°$.
A trapéz területe: $t = \dfrac{a+c}{2}m = 3{,}2\sqrt{15}\,\text{cm}^2$ ($\approx 12{,}4\,\text{cm}^2$).

2067. A trapéz szárai a CTB derékszögű háromszögből (**2067.** ábra):
$d = m = 2\sqrt{3}$ cm, $b = 4$ cm.
A trapéz területe:
$t = \dfrac{a+c}{2}m = 10\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.
Az átlókat az ATC és az ABD derékszögű háromszögből határozzuk meg:
$e = \sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$, $\quad f = \sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$.

2068. A feltételek szerint: $m = c+6$, $a = c+12$ és
$t = \dfrac{a+c}{2}m = 576$.
Behelyettesítés után:
$t = (c+6)^2 = 576$.
Ebből $m = c+6 = 24$ cm, $c = 18$ cm és $a = 30$ cm adódik.



2069

2069. $DCE\triangle \sim ABE\triangle$, és a hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{5{,}3}{8{,}2}$ (**2069.** ábra). Ezért
$\dfrac{x}{x+2{,}8} = \lambda$ és $\dfrac{y}{y+3{,}4} = \lambda$ áll fenn.
Ezekből $x = \dfrac{2{,}8\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{14{,}84}{2{,}9} \approx 5{,}12$,

illetve

$y = \dfrac{3,4\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{18,02}{2,9} \approx 6,21$ adódik. Így a kiegészítő háromszög kerülete: $k = x+y+5,3\ (\text{cm}) = \dfrac{48,23}{2,9}\ (\text{cm}) \approx 16,6\ (\text{cm})$.

A hasonló háromszögek területének aránya

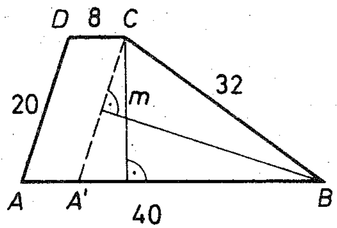
$\dfrac{t_1}{T} = \lambda^2$, ahol t_1 a DCE, T az ABE háromszög területe.

Így $t_1 = \lambda^2 T$, és a trapéz területe $t_2 = T - t_1 = (1-\lambda^2)T$.

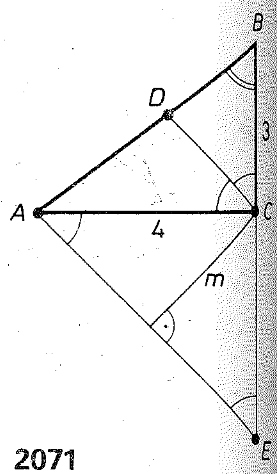
Ebből a keresett arány

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{5,3^2}{8,2^2-5,3^2} = \frac{28,09}{39,15} \approx 0,72.$$

2070. C ponton keresztül AD-vel húzott párhuzamos AB-t A'-ben metszi (**2070.** ábra). Ezért $AA' = 8$ cm, $A'B = 32$ cm, így $A'BC$ egyenlő szárú háromszög. Ennek az alaphoz tartozó magassága $\sqrt{32^2-10^2} = 2\sqrt{231}$. Az $A'BC$ háromszög kétszeres területe: $2t = 32m = 20 \cdot 2\sqrt{231}$. Tehát a trapéz magassága $m = \dfrac{5}{4}\sqrt{231}$ cm, és területe $t = \dfrac{a+c}{2}m = 30\sqrt{231}$ cm^2.



2070

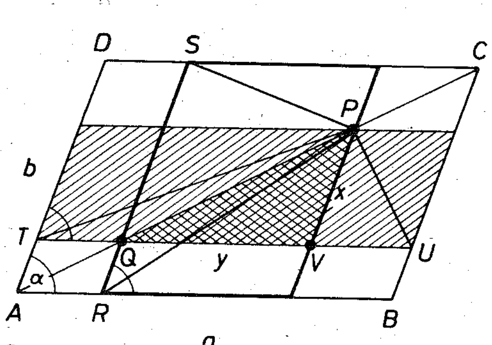


2071

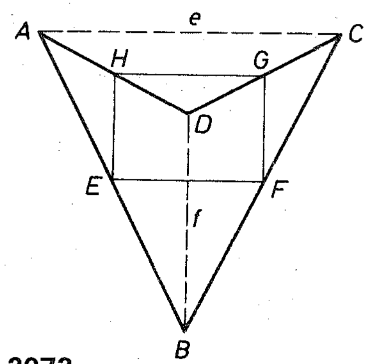
2071. A feltételek szerint $CAE\sphericalangle = ACD\sphericalangle = 45°$, így ACE egyenlő szárú derékszögű háromszög (**2071.** ábra). Ezért $CE = 4$; $AE = 4\sqrt{2}$ egység, és a trapéz magassága $m = \dfrac{4\sqrt{2}}{2}$ egység. DC oldalt a DCB és AEB háromszögek hasonlóságának figyelembevételével kapjuk: $\dfrac{DC}{AE} = \dfrac{3}{7}$, azaz $DC = \dfrac{12\sqrt{2}}{7}$. Ezekből az $AECD$ trapéz területe:

$$t = \left(\frac{12\sqrt{2}}{7} + 4\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = \frac{80}{7}\ \text{(területegység)}.$$

2072. $PQV\triangle \sim CAB\triangle$, ezért $y = QV$-re és $x = PV$-re fennáll: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{a}{b}$, azaz $yb = ax$ (*). TPU háromszög területe fele egy a és x oldalú α szögű paralelogrammának, így $t(TPU) = \dfrac{1}{2}ax \sin\alpha$ (**2072.** ábra). Hasonlóan RPS háromszög területe egy b és y oldalú α szögű paralelogramma területének a fele: $t(RPS) = \dfrac{1}{2}by \sin\alpha$. (*) miatt a két háromszög területe egyenlő.



2072



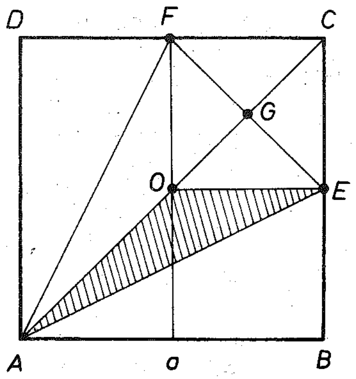
2073

2073. A deltoid területe $t = \dfrac{1}{2}ef$ (**2073.** ábra). A deltoid átlói merőlegesek egymásra, ezért az oldalfelező pontok által meghatározott négyszög téglalap. A téglalap oldalainak kétszerese a deltoid átlói (mert például: $EF = HG$ az ADC háromszög e-vel párhuzamos középvonala). Tehát a téglalap területe $t' = \dfrac{e}{2} \cdot \dfrac{f}{2} = \dfrac{t}{2}$. A keresett arány $1:2$.

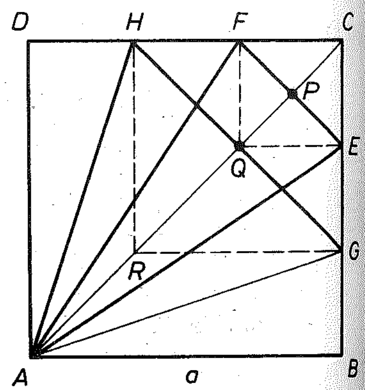
2074. *I. megoldás:* $t = \frac{1}{2} EF \cdot AG$, ahol $EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ és $AG = \frac{3}{4} a\sqrt{2}$. Ezért $t = \frac{3}{8} a^2 = 54 \text{ cm}^2$ (**2074.** ábra).

II. megoldás: Az AEO, AOF és EOF háromszögek területe egyenlő, mert egyik oldaluk, és a hozzá tartozó magasság: $\frac{a}{2}$.

Ezért $t = 3\frac{a^2}{8}$.



2074



2075

2075. *I. megoldás:* $t_1 = t(AEF) = \frac{1}{2} EF \cdot AP$, ahol $EF = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} a\sqrt{2}$, $AP = \frac{5}{6} AC = \frac{5}{6} a\sqrt{2}$ (**2075.** ábra). Ezért $t_1 = \frac{5a^2}{18}$. $t_2 = t(AGH) = \frac{1}{2} GH \cdot AQ$, ahol $GH = \frac{2}{3} BD = \frac{2}{3}\sqrt{2}a$, $AQ = \frac{2}{3} AC = \frac{2\sqrt{2}}{3} a$. Ezért $t_2 = \frac{4}{9} a^2$. A két háromszög területének aránya: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{5}{8}$.

Megjegyzés: A szakaszokat az ábrán látható hasonló háromszögekből határoztuk meg.

II. megoldás: A háromszögeket három-három háromszögre bontjuk: AEF-et AEQ, AQF, EQF-re, AGH-t AGR, ARH, GRH-ra.

Ezek területét a négyzet oldalaival párhuzamos oldal és a hozzá tartozó magasság segítségével kapjuk meg. (Például: $AEQ\triangle \cong AFQ\triangle$ és $QE = \frac{a}{3}$, az ehhez tartozó magasság $\frac{2a}{3}$.

Így $t(AEF) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{5a^2}{18}$.)

2076. A keletkező nyolcszög szabályos, hiszen oldalai és szögei is egyenlőek (**2076.** ábra).

Oldalát kétféleképpen kifejezve kapjuk: $x\sqrt{2} = a - 2x$. Ebből $x = a\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

A nyolcszög területe a négyzet és a négy egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszög területének különbsége.

$t = a^2 - 2x^2 = 2(\sqrt{2}-1)a^2 = 72(\sqrt{2}-1) \text{ cm}^2$.

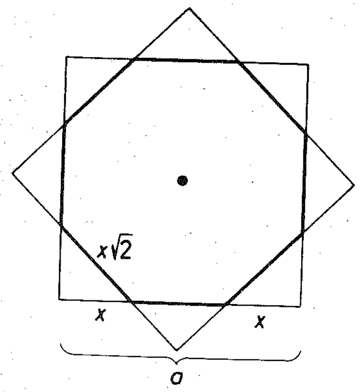
2077. Az előző feladat alapján

$t = 2a^2(\sqrt{2}-1) = 80$.

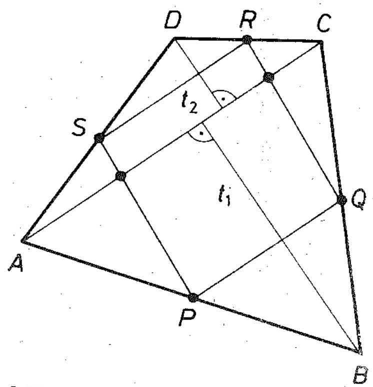
Ebből a négyzet oldala $a = 2\sqrt{10(\sqrt{2}+1)}$ cm.

2078. *I. megoldás:* A $PQRS$ négyszög PQ oldala az ABC háromszög, RS oldala a CDA háromszög AC-vel párhuzamos középvonala. Ezért $PQ = RS = \frac{1}{2} AC$ és $PQ \| AC \| RS$ (**2078**/I. ábra).

Az AC átló a paralelogrammát két paralelogrammára bontja. Ezek



2076



2078/I.

alapjai $\frac{1}{2}AC$, és az alaphoz tartozó magasságok az ACD, illetve az ACB háromszögek AC oldalához tartozó magasságainak fele. Azaz

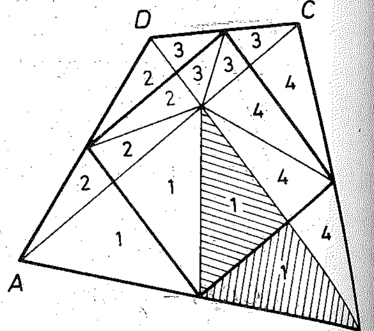
$$t_1 = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}m_B \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}m_D.$$

Ezek összege:

$$t(PQRS) = t_1 + t_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC(m_B + m_D) = \frac{1}{2}t(ABCD).$$

Tehát a keresett arány 1 : 2.

II. megoldás: Az $ABCD$ négyszöget a **2078**/II. ábra szerint egyenlő területű háromszögekre bontjuk. Az azonos számmal jelölt háromszögek területe egyenlő. Ebből leolvasható a megoldás.



2078/II.

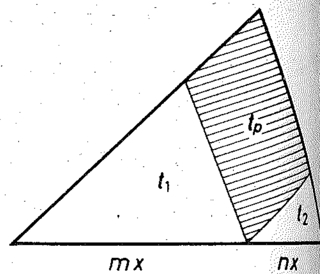
2079. A lemetszett háromszögek az adotthoz hasonlóak, a hasonlóság aránya $\frac{m}{m+n}$, illetve $\frac{n}{m+n}$ (**2079.** ábra).

Ezért

$$\frac{t_1}{t} = \left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \quad \text{és} \quad \frac{t_2}{t} = \left(\frac{n}{m+n}\right)^2.$$

A paralelogramma területe:

$$t_p = t - t_1 - t_2 = t \cdot \frac{2mn}{(m+n)^2}.$$



2079

2080. $CDP\triangle \sim BQP\triangle (*)$, ezért $\frac{BQ}{CD} = \frac{BP}{PC} = \frac{2}{1}$.

Ebből $BQ = 10$ cm.

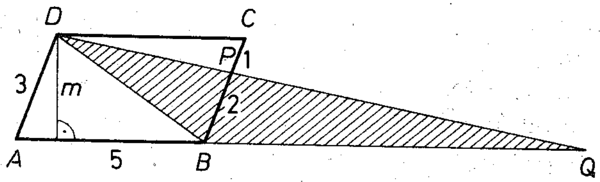
I. megoldás: Legyen a paralelogramma AB oldalához tartozó magassága: m. (Ez lesz a BQD háromszög BQ oldalához tartozó magassága is.) (**2080**/I. ábra.)

Így

$$t(ABCD) = 5m,$$

$$t(BQD) = \frac{1}{2} \cdot 10m.$$

Tehát a két alakzat területe egyenlő.



2080/I.

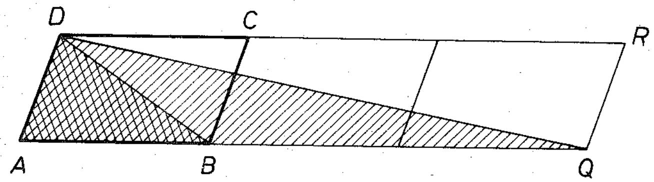
II. megoldás: A BCD háromszög területét DP harmadolja, így $t(CDP) = \frac{1}{6}t(ABCD)$ és $t(DBP) = \frac{1}{3}t(ABCD)$. Másrészt a $(*)$ hasonlóság miatt $t(BQP) = 4t(CDP)$.

Így $t(BQD) = t(DBP) + t(BQP) = t(ABCD)$.

III. megoldás: Átdarabolással (**2080**/III. ábra):

$$t(BQD) = t(AQD) - t(ABD) = \frac{1}{2} \cdot 3t(ABCD) - \frac{1}{2} \cdot t(ABCD) =$$

$$= t(ABCD).$$



2080/III.

2081. A feltételekből következik, hogy a trapéz magassága $\frac{b}{2}$, és a száraknak a hosszabbik alapra eső merőleges vetületei $\frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Ezért a trapéz területe:

$$t = \frac{a+(a+b\sqrt{3})}{2}\cdot\frac{b}{2} = \frac{(2a+b\sqrt{3})b}{4}.$$

2082. A feltételekből következik, hogy a száraknak az alapra eső merőleges vetülete $\frac{a-c}{2}$ ($a>c$ feltétel mellett), a trapéz magasságával egyenlő. Ezért a trapéz területe:

$$t = \frac{a+c}{2}\cdot\frac{a-c}{2} = \frac{a^2-c^2}{4}.$$

2083. A lemetszett háromszög az eredetihez hasonló. A hasonlóság arányának négyzete $\left(\frac{d}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Ebből $d = \frac{\sqrt{2}}{2}c$, illetve $c = \sqrt{2}d = 5\sqrt{2}$ cm.

2084. Két eset lehetséges:
a derékszögű háromszög befogója (a)) vagy az átfogója (b)) közös a szabályos háromszög oldalával (**2084.**a), b) ábra).
Mindkét esetben a derékszögű háromszög $30°-60°$-os, kisebbik befogója c, átfogója $2c$.
Ebből adódik, hogy a trapéz magassága a) esetben $\frac{c}{2}\sqrt{3}$, b) esetben $c\sqrt{3}$.
A terület:

$$a)\ t = \frac{c+2c}{2}\cdot\frac{c}{2}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2,$$

$$b)\ t = \frac{c+2c}{2}\cdot c\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2.$$

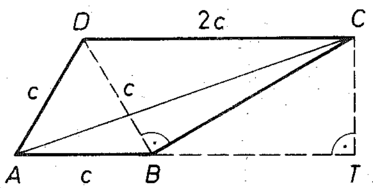
A hosszabb átló

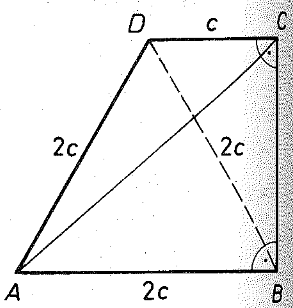
a) $AC^2 = AT^2+CT^2$, ahol $CT\perp BA$,

$$AC = \sqrt{\left(\frac{5c}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\sqrt{3}\right)^2} = c\sqrt{7}.$$

b) $AC^2 = AB^2+BC^2$,

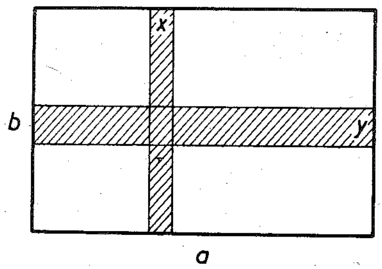
$$AC = \sqrt{(c\sqrt{3})^2+(2c)^2} = c\sqrt{7}.$$



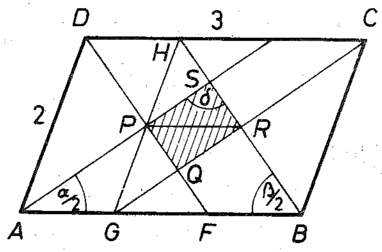


2084a,b

2085. Az utak területe (külön-külön) (**2085.** ábra)
$xb=250$,
$ya=400$.
A két egyenlet szorzata $abxy=100\,000$.
A telek területe: $ab=4000$.
Ezekből $xy=25$.
Így az utak együttes területe $xb+ya-xy = 625\ \mathrm{m}^2$.



2085



2086

2086. Előbb belátjuk, hogy $PQRS$ téglalap. A paralelogramma szomszédos szögeire: $\alpha+\beta = 180°$, ezért ASB háromszögben

$$\delta = 180° - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = 90°\ (\mathbf{2086.}\ \text{ábra}).$$

$AP\perp DF$ miatt ADF háromszög egyenlő szárú $AD=AF=2$, tehát $FB=1$, így $AG=PR=DH=1$ is teljesül.

Minthogy $PRS\triangle \sim APD\triangle$ s a hasonlóság aránya: $\frac{1}{2}$, ezért

$$t(PQRS) = \frac{1}{2}t(APD).$$

Továbbá P a GH szakasz (felező)pontja és

$$t(APD) = \frac{1}{2}t(AGHD),\ \text{valamint}\ AG:AB = 1:3\ \text{miatt}$$

$$t(APD) = \frac{1}{6}t(ABCD).$$

Így $t(PQRS) = \frac{1}{12}t(ABCD)$.

Megjegyzés: Általában

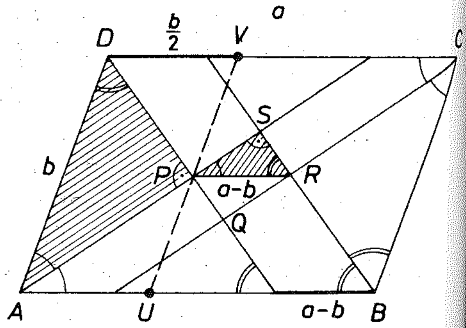
$$t(PQRS) = \frac{(a-b)^2}{2ab}\, t(ABCD),$$

mert (**2086.**/*M* ábra)

$$t(APD) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{b}{2}}{a}\cdot t(ABCD),$$

$$t(PQRS) = 2t(PRS) =$$

$$= 2\left(\frac{a-b}{b}\right)^2 \cdot t(APD).$$



2086/*M*

(A *PQRS* téglalap akkor és csak akkor jön létre, ha *ABCD* nem rombusz.)

2087. *I. megoldás:* A feltételek szerint:

$$ab = 2(a+b),$$

amiből a-t kifejezzük:

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2(b-2)+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Minthogy a és b pozitív egész, kell, hogy $b-2$ a 4 osztója legyen. Ebből a téglalap oldalaira 3 és 6 vagy 4 és 4 egységet kapunk.

II. megoldás: $t-k = ab-2a-2b = (a-2)(b-2)-4 = 0$. Így $(a-2)(b-2) = 4$, ahol a és b pozitív egész. A 4 vagy $1\cdot 4$, vagy $2\cdot 2$, vagy $(-1)(-4)$ vagy $(-2)(-2)$ lehetne. Ebből a téglalap oldalaira 3 és 6, illetve 4 és 4 egységet kapunk.

2088. Bizonyítani kell, hogy $T(ABP)+T(CDP) = T(BCP)+T(ADP)$ (**2088.** ábra).

Húzzunk a paralelogramma oldalaival párhuzamost P-n keresztül. Az így létrejött „kis" paralelogrammák területét az átlók: PA, PB, PC, PD felezik. Ebből az állítás leolvasható. (Az egyenlő területű háromszögeket azonos számmal jelöltük.)

2089. A trapéz oldalai: $2c$, $c\sqrt{2}$, c és c, területe: $\frac{3c^2}{2}$.

A szabályos háromszög a trapéz bármelyik oldalára állítható, de csak 3 különböző területű és kerületű ötszöget kapunk (**2089.** ábra).

1. eset: a szabályos háromszög oldala: c, $t_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2\sqrt{3}$, így

$$T_1 = \frac{3}{2}c^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{6+\sqrt{3}}{4}c^2,$$

$$K_1 = 5c + c\sqrt{2} = c(5+\sqrt{2}).$$

2. eset: a szabályos háromszög oldala: $c\sqrt{2}$, $t_2 = \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{3}$, így

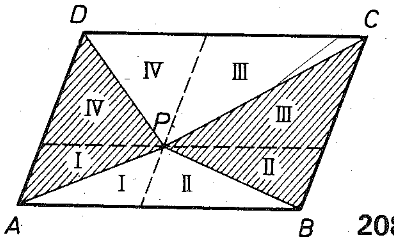
$$T_2 = \frac{3}{2}c^2 + \frac{c^2}{2}\sqrt{3} = \frac{c^2}{2}(3+\sqrt{3}),$$

$$K_2 = 4c + 2c\sqrt{2} = 2c(2+\sqrt{2}).$$

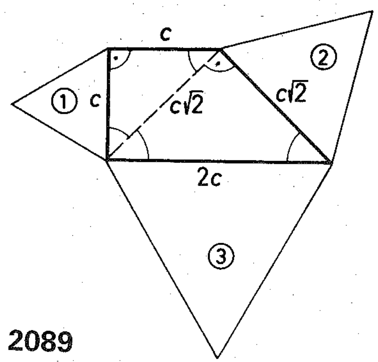
3. eset: a szabályos háromszög oldala: $2c$, $t_3 = c^2\sqrt{3}$, így

$$T_3 = \frac{3}{2}c^2 + c^2\sqrt{3} = c^2\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right),$$

$$K_3 = 6c + c\sqrt{2} = c(6+\sqrt{2}).$$



2088



2089

2090. Az r sugarú körbe írt szabályos ötszög átlója

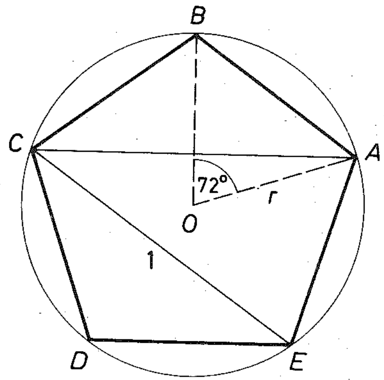
$$AC = 2r\sin 72° = 1,$$

ezért $r = \frac{1}{2\sin 72°}$ (**2090.** ábra).

A szabályos ötszög területe:

$$T = 5t(OAB) = \frac{5}{2}r^2\sin 72° =$$

$$= \frac{5}{8}\,\frac{1}{\sin 72°} \approx 0{,}6572 \text{ (területegység)}.$$



2090

Megjegyzés: T pontos értékét megkapjuk, ha felhasználjuk az **1735**-ös feladatban szereplő összefüggést: $\sin 54° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ és figyelembe veszszük, hogy

$$\sin 72° = \cos\frac{36°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 36°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin 54°}{2}}.$$

Ebből

$$\sin 72° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \quad \text{és} \quad T = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{8}.$$

2091. A körbe írt trapéz szimmetrikus, így átlói egyenlőek. Minthogy harmadolják egymást, az átlómetszetek 10 cm és 20 cm (**2091.** ábra). Ebből az ABM és CDM háromszögek átfogója és magassága kiszámítható:

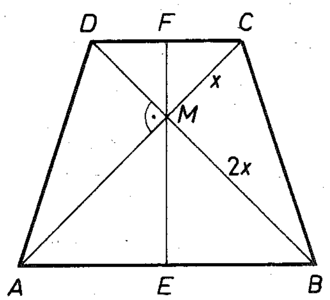
$$AB = 20\sqrt{2}, \quad CD = 10\sqrt{2}, \quad ME = 10\sqrt{2}, \quad MF = 5\sqrt{2}.$$

Így a trapéz területe: $\frac{AB+CD}{2}\cdot EF = \frac{30\sqrt{2}}{2}\cdot 15\sqrt{2} = 450\ (\text{cm}^2)$.

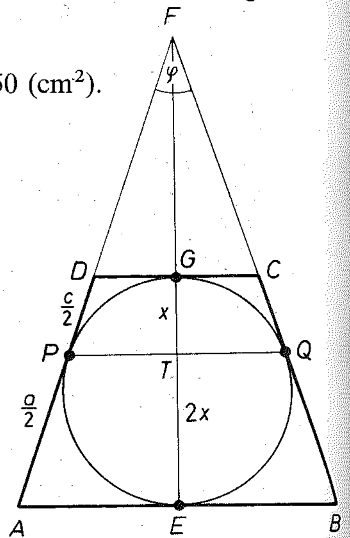
A szárak hossza Pitagorasz-tétellel: $CB = \sqrt{100+400} = 10\sqrt{5}$. A kerület: $20\sqrt{2}+10\sqrt{2}+2\cdot 10\sqrt{5} = 30\sqrt{2}+20\sqrt{5}$ (cm).

Megjegyzés: A trapéz területe meghatározható a 4 derékszögű háromszög területének összegéből:

$$T = \frac{20\cdot 20}{2} + \frac{10\cdot 10}{2} + 2\cdot\frac{10\cdot 20}{2} = 450\ (\text{cm}^2).$$



2091

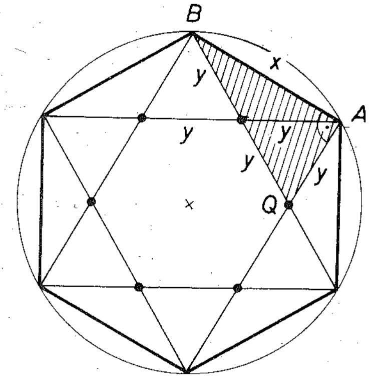


2092

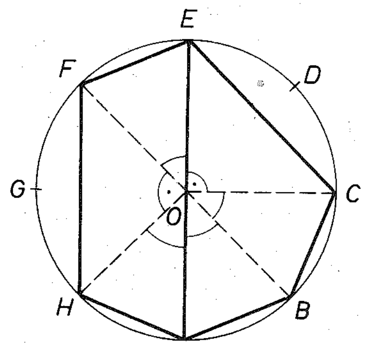
2092. Külső pontból (A-ból, illetve D-ből) a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért $PA = AE = \frac{a}{2}$ és $PD = DG = \frac{c}{2}$ (**2092.** ábra).

A feltétel szerint T harmadolja EG-t, így $TG : TE = 1:2$. Az AFE szögre alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét: $\frac{c}{2} : \frac{a}{2} = 1:2$. Ebből $c : a = 1:2$.

2093. A 2 szabályos háromszög egymás oldalait harmadolja (lásd a **2093.** ábrát). Így ha a „kis" szabályos hatszög oldala y, akkor a „nagyé" $x = y\sqrt{3}$ (az ABQ háromszögből). A két szabályos hatszög területének aránya: $\frac{t}{T} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{y}{y\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$.



2093



2094

2094. Bontsuk fel a két négyszöget a **2094.** ábra alapján háromszögekre. Az AOB, BOC, EOF, HOA háromszögek, valamint a COE és FOH háromszögek egybevágóak. Ezek felhasználásával kapjuk, hogy a két négyszög területe és kerülete is egyenlő.

2095. Az r sugarú kör területe: $r^2\pi$.

Az r sugarú körbe írt szabályos hatszög területe: $6\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$. Ezért a körbe írt szabályos hatszög területe a kör területének

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\cdot 100\%\text{-a} \quad (\approx 82{,}70\%).$$

2096. Az r sugarú körbe írt szabályos nyolcszög területe

$$t = 8 \cdot \frac{r^2 \sin 45°}{2} = 2\sqrt{2}r^2.$$

A feltételt figyelembe véve:

$2\sqrt{2}r^2 = 20.$

Ebből $r = \sqrt{5 \cdot \sqrt{2}} \approx 2{,}7$ (cm).

2097. Jelöljük a szabályos nyolcszög szemben fekvő oldalainak távolságát d-vel (**2097.** ábra).

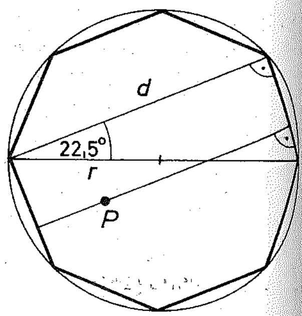
A P pontnak a nyolcszög két szemköztes oldalegyenesétől mért távolságának összege d. Ezért a P pontnak az oldalegyenesektől mért távolságösszege $4d$, független P helyzetétől.

Megjegyzés:

1. A feladat állítása minden szabályos $2n$-szögre igaz.

2. Az r sugarú körbe írt szabályos nyolcszög esetén

$$d = 2r \cos 22{,}5° = r\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$



2097

2098. A beírt kör a háromszög oldalait A_1, B_1, C_1 pontban érinti (**2098.** ábra).

a) Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, így: $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$ és $CA_1 = CB_1$. A háromszög kerülete az előbbi hat szakasz összege.

Az AC_1O derékszögű háromszögből:

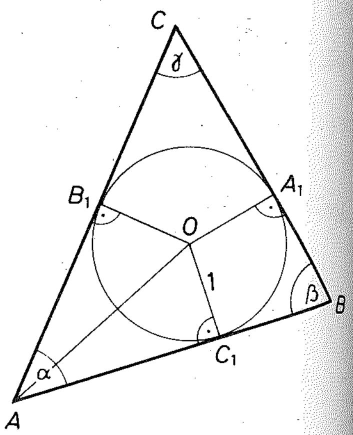
$$AC_1 = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$BC_1 = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \quad \text{és} \quad CA_1 = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Ezért a háromszög kerülete:

$$k = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right).$$



2098

b) A háromszög területe az ABO, BCO, CAO háromszögek területének összege:

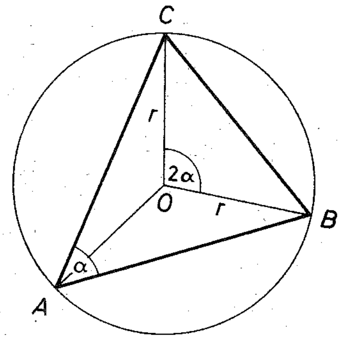
$$t = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA) = \frac{1}{2}k = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

2099. Tudjuk, hogy a hegyesszögű háromszög belsejében tartalmazza a köré írható kör középpontját (O) (**2099.** ábra). Így az ABC háromszöget olyan három háromszögre bonthatjuk (AOB, BOC, COA), amelyekre

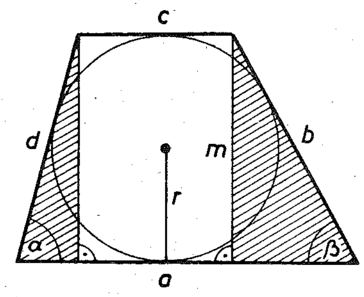
$t(AOB) + t(BOC) + t(COA) = t(ABC).$

Így $\frac{1}{2}r^2 \sin 2\gamma + \frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2}r^2 \sin 2\beta = \frac{1}{2}r^2,$

amiből $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 1$ adódik.



2099



2100

2100. A trapéz területe: $t = \frac{a+c}{2}m.$

Az érintő trapéz magassága $m = 2r$,

és szemben fekvő oldalainak összege egyenlő: $a+c = b+d$ (**2100.** ábra).

b-t és d-t a besatírozott derékszögű háromszögekből határozhatjuk meg:

$$b = \frac{2r}{\sin\beta} \quad \text{és} \quad d = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

Ezekből a trapéz területe:

$$t = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

2101. *I. megoldás:* E pont meghatározása alapján $DCB\sphericalangle = BCE\sphericalangle = \gamma$ (**2101.** ábra).
$CBD\sphericalangle$ az ABC háromszög egyik külső szöge, ezért $CBD\sphericalangle = \alpha+\gamma$.
A feladat szövege szerint:

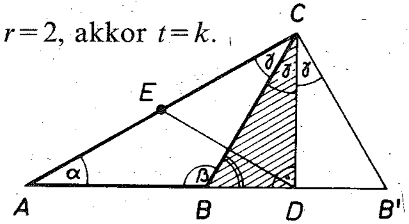
$$DC^2 = AD \cdot BD, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{DC}{BD} = \frac{AD}{DC}.$$

Így a BDC és CDA derékszögű háromszögek 2-2 befogójának aránya egyenlő, tehát a két háromszög hasonló, megfelelő szögeik egyenlőek: $\gamma = \alpha$.
Ezért az ABC háromszög szögei: 30°, 30°, 120°.
II. megoldás: Tükrözzük a B pontot a CD egyenesre. Az így adódó $AB'C$ háromszög derékszögű, a $DC^2 = AD \cdot BD = AD \cdot B'D$ egyenlőség alapján.
A tükrözések miatt $BCD\sphericalangle = \gamma$ és $B'CD\sphericalangle = \gamma$. Így $ACB'\sphericalangle = 3\gamma = 90°$, azaz $\gamma = 30°$. Ezért $\alpha = 30°$ és $\beta = 120°$.

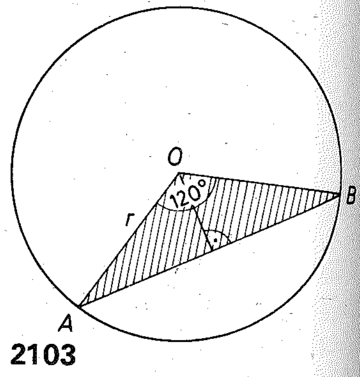
2102. A **2098**-as feladat *b)* része alapján

$$t = \frac{1}{2} rk.$$

Ha $r = 2$, akkor $t = k$.



2101



2103

2103. A két körszelet területét a megfelelő körcikk és az OAB háromszög területének összegeként, illetve különbségeként kapjuk meg (**2103.** ábra).
A kisebbik körszelet területe:

$$t_1 = \frac{1}{3} r^2\pi - \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} = \frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) = 12(4\pi - 3\sqrt{3}),$$

a nagyobbik területe:

$$t_2 = \frac{2}{3} r^2\pi + \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} = 12(8\pi + 3\sqrt{3}).$$

Felhasználtuk, hogy az AOB háromszög egy r oldalú szabályos háromszöggé darabolható át.

2104. Az r sugarú kör i hosszúságú ívével határolt körcikk területe: $t = \frac{ir}{2}$;

$$16 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}4i.$$

Ebből

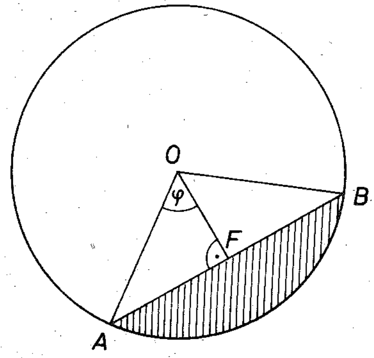
$$i = \frac{80}{21}\,\text{cm}.$$

2105. Az $\widehat{\alpha}$ középponti szögű r sugarú körcikk területe

$$t = \frac{1}{2} r^2\widehat{\alpha},$$

$$12 = \frac{1}{2} \cdot 36\widehat{\alpha}.$$

Ebből $\widehat{\alpha} = \frac{2}{3}$ rad.



2106

2106. Az AFO derékszögű háromszögből

$$\sin\varphi = \frac{3}{5},$$

$$OF = 20,$$

$$\varphi \approx 36{,}87°.$$

A körszelet területe a 2φ középponti szögű AOB körcikk és az AOB háromszög területének különbsége (**2106.** ábra):

$$t = 25^2\pi\,\frac{2\varphi}{360} - 30 \cdot 10 \approx 102{,}2\ (\text{cm}^2).$$

2107. Az AFO derékszögű háromszögben $\varphi = 60°$ (**2106.** ábra).
A két körszelet területe a 120°-os, illetve 240°-os középponti szögű körcikkek és az AOB háromszög területének különbsége, illetve összege. Ezért

$$t_1 = \frac{1}{3} r^2\pi - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3} \quad \text{és}$$

$$t_2 = \frac{2}{3} r^2\pi + \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{128}{3}\pi + 16\sqrt{3}.$$

Felhasználtuk, hogy az AOB háromszög átdarabolható egy AO oldalú szabályos háromszöggé.

2108. Az ABC háromszög három r oldalú szabályos háromszöggé darabolható (**2108.** ábra), ezért területe $t = 3\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

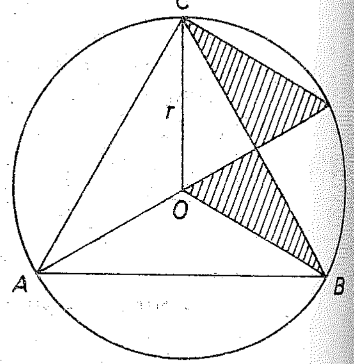
A feladat szerint $t=3$.

Így $r = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$.

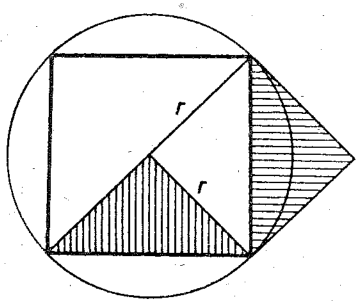
2109. A négyzet két r oldalú négyzetté darabolható át (**2109.** ábra), így

$$t = 2r^2 = 3.$$

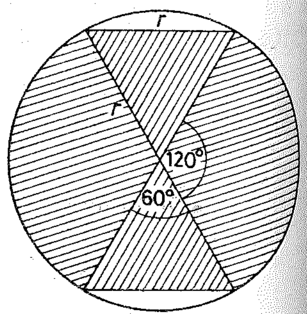
Ebből $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$.



2108



2109



2110

2110. A körnek a két párhuzamos húr közé eső része a **2110.** ábrának megfelelően, két 120°-os körcikkre és két szabályos háromszögre vágható szét. Ezért

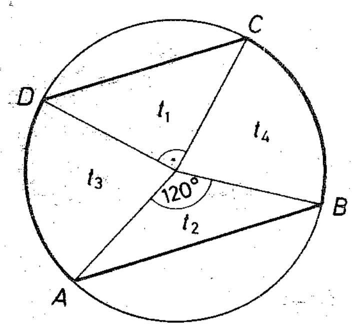
$$t = 2\cdot\frac{1}{3}r^2\pi + 2\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2}{6}(4\pi + 3\sqrt{3}).$$

2111. A feladatban szereplő alakzat területe két háromszög és két körcikk területének összege (**2111.** ábra):

$$t_1 = \frac{r^2}{2},\quad t_2 = r^2\frac{\sqrt{3}}{4},\quad t_3 + t_4 = r^2\pi\frac{150°}{360°} = \frac{5}{12}r^2\pi.$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{r^2}{12}(5\pi + 6 + 3\sqrt{3}).$$

Megjegyzés: A keresett területet megkaphatjuk úgy is, ha a kör területéből kivonjuk a 90°-os és a 120°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területét.



2111

2112. A háromszög harmadik szöge $\alpha = 44°$. Így az $a = 2r\sin\alpha$ összefüggésből

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{12{,}4}{2\sin 44°} \approx 8{,}93\ \text{(cm)}.$$

$b = 2r\sin\beta$, így az ABC háromszög területe:

$$t = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{12{,}4^2\sin 64°\sin 72°}{2\sin 44°} \approx 94{,}60\ (\text{cm}^2).$$

2113. A feltétel szerint

$$t = \varrho^2\pi = \left(\frac{r+R}{2}\right)^2\pi = 2R\pi,\ \text{ahol } r = 0{,}5.$$

Ebből, figyelembe véve, hogy $R > r$, $R = \frac{7+4\sqrt{3}}{2}$ adódik (**2113.** ábra).

A körgyűrűcikk területe a két körcikk területének különbsége:

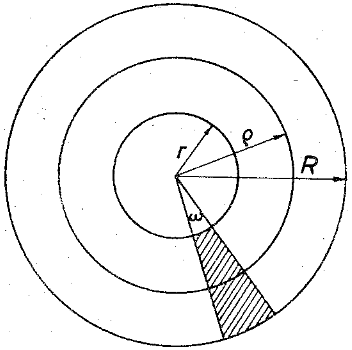
$$t = (R^2\pi - r^2\pi)\frac{\omega}{360°} =$$

$$= (R+r)(R-r)\pi\frac{\omega}{360°} =$$

$$= \frac{3{,}1}{30}(2+\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})\pi\ (\text{dm}^2) =$$

$$= \frac{3{,}1}{30}(12+7\sqrt{3})\pi\ (\text{dm}^2) \approx$$

$$\approx 7{,}8\ (\text{dm}^2).$$

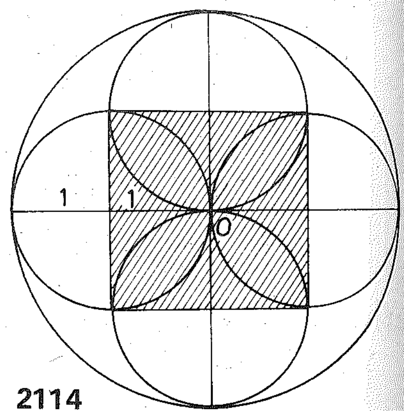


2113

2114. A négy egységsugarú kör O-tól különböző (páronkénti) metszéspontjai egy kétegység oldalú négyzetet határoznak meg (**2114.** ábra).

A négy kör által lefedett síkrész területe a kétegység oldalú négyzet és négy egységsugarú félkör területének összegeként adódik:

$$t = (2r)^2 + 4 \cdot \frac{r^2\pi}{2} = 4 + 2\pi.$$



2114

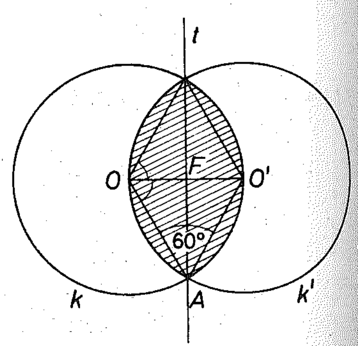
2115. *a)* $2\overrightarrow{OF}$ vektorral való eltolással, vagy t-re (t-$\bullet$-F és $t \perp OF$) vonatkozó tengelyes tükrözéssel, vagy pl.: A pont körüli 60°-os elforgatással kaphatjuk k'-t k-ból (**2115.** ábra).

(*Megjegyzés:* Az utóbbi transzformációnál figyelembe vettük, hogy $OO'A$ szabályos háromszög.)

b) A két kör közös része két 120°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területének összege.

A **2107**-es feladat megoldása alapján:

$$t = 2\left(\frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{r^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$



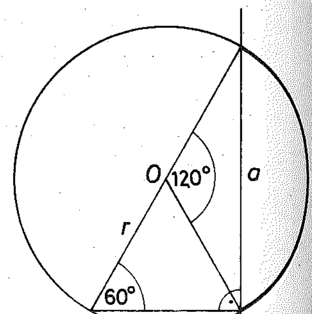
2115

2116. A **2115.** *b)* alapján

$$t = \frac{25}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

2117. Ha az a húrhoz 60°-os kerületi szög, akkor a megfelelő ívhez 120°-os középponti szög tartozik (**2117.** ábra). a egy $2r$ oldalú szabályos háromszög magassága, így

$$a = r\sqrt{3}, \quad \text{azaz} \quad r = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



2117

A **2107.** feladat megoldása alapján a két körszelet területe:

$$t_1 = \frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{2r^2\pi}{3} + \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

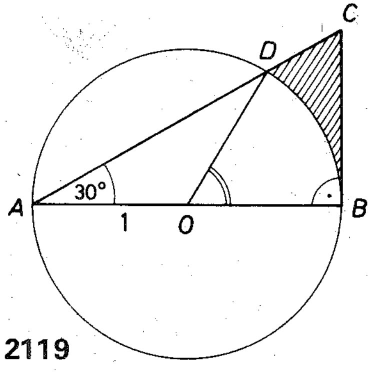
a-val kifejezve:

$$t_1 = \frac{a^2\pi}{9} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{2a^2\pi}{9} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

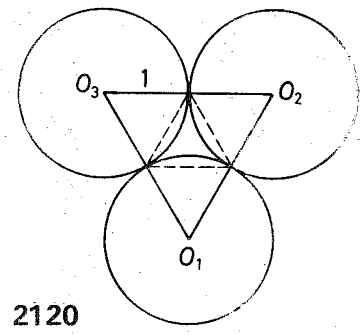
2118. Az α középponti szögű, a sugarú körcikk területe: $\frac{\alpha}{2\pi}a^2\pi = a$ a feladat szerint. Innen $\alpha = \frac{2}{a}$ rad.

2119. Az ABC derékszögű háromszög befogói $AB = 2$, $BC = \frac{2}{\sqrt{3}}$, hiszen $\alpha = 30°$ (**2119.** ábra). A BDC síkidom területét megkapjuk, ha az ABC háromszög területéből kivonjuk az AOD egyenlő szárú háromszög és a 60°-os BOD körcikk területét. Az AOD háromszög átdarabolható egy egység oldalú szabályos háromszöggé, így

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{12}.$$



2119



2120

2120. A három egybevágó kör középpontjai egy kétegység oldalú szabályos háromszöget alkotnak (**2120.** ábra). Az érintési pontok által alkotott háromszög oldalai az $O_1O_2O_3$ háromszög középvonalai, ezért hosszuk 1 egység. Így az érintési pontok által alkotott háromszög szabályos és területe: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2121. Tudjuk, hogy a d átmérőjű kör kerülete $d\pi$.
Az $n+1$ kör kerületének összege:

$$\pi(AP_1+P_1P_2+\ldots+P_{n-1}P_n+P_nB) = \pi\cdot AB,$$

tehát az állítás igaz.

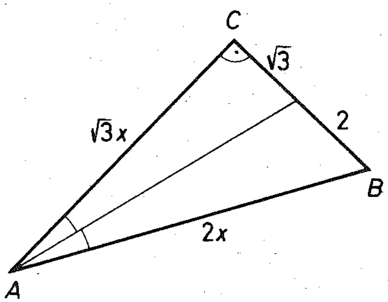
2122. A szögfelező-tétel szerint az AC befogó és AB átfogó aránya $\sqrt{3}:2$, így valamely x pozitív számra $AC=\sqrt{3}x$ és $AB=2x$ (**2122.** ábra).
Írjuk fel az ABC derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt!

$$4x^2 = 3x^2+(2+\sqrt{3})^2.$$

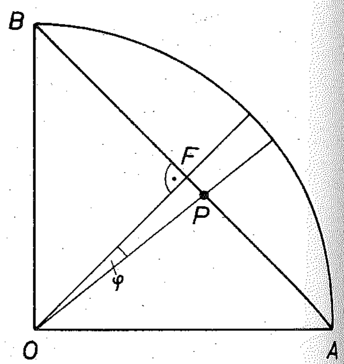
Ebből $\quad x = 2+\sqrt{3}.$

Ezért az ABC derékszögű háromszög oldalai $2+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$ és $2(2+\sqrt{3})$, az oldalak aránya $1:\sqrt{3}:2$, tehát hegyesszögei: 30°, 60°.

2123. Az egységsugarú körbe írt szabályos háromszög oldala $\sqrt{3}$, a beírt négyzet oldala $\sqrt{2}$.
A kör kerülete $k=2\pi$; 5 tizedesjegy pontossággal $k=6{,}28319$.
A számított kerület $k' = 2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; 5 tizedesjegy pontossággal $k'=6{,}29252$. A hiba $k'-k = 0{,}00933$.



2122



2124

2124. Ha OP egyenes a körcikk területét $4:5$ arányban osztja, akkor a középponti szöget is így osztja (**2124.** ábra). Ha a szerkesztési eljárás helyes lenne, $AP:PB = 4:5$ esetén $POA\sphericalangle=40°$ lenne, illetve $\varphi=FOP\sphericalangle=5°$ lenne, ahol F a húr felezőpontja.

Legyen például $OA=\sqrt{2}$, ekkor $FO=FA=1$ és $FP = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$. Az FOP

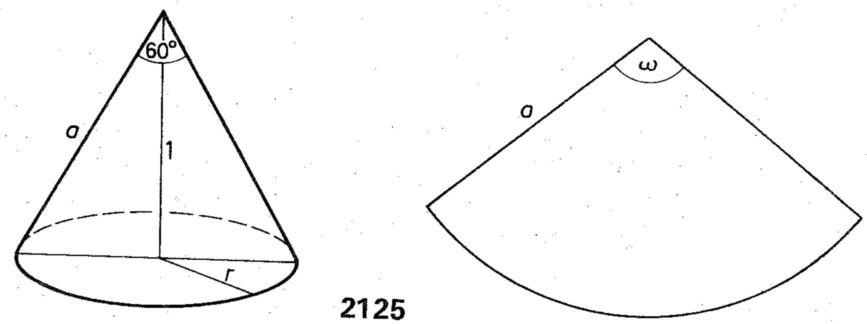
derékszögű háromszögben

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{FP}{FO} = \frac{1}{9}.$$

Ebből $\varphi=6{,}340°>5°$, tehát a szerkesztés téves.
Megjegyzés: A gondolatmenet hibás voltát mutatja az **1732**-es feladat megoldása is.

2125. A forgáskúp tengelymetszete szabályos háromszög (**2125.** ábra), ezért

$$2r = a = \frac{2}{\sqrt{3}}m = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

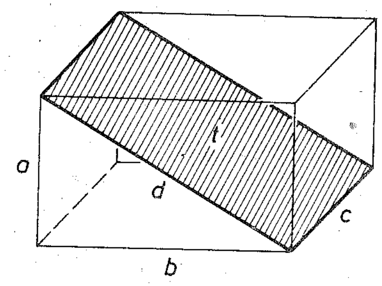


2125

A kiterített kúppalást határoló körívének hossza a kúp alapkörének kerülete. Így $2r\pi=a\omega$, ahol ω a kiterített palást középponti szöge. Ezért $\omega=\pi$, és a palást területe $\frac{a^2\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi$.

2126. A téglatest átlós síkmetszete téglalap (**2126.** ábra). Ennek oldalai: c, és $d = \sqrt{a^2+b^2}$, és területe $t = c\sqrt{a^2+b^2}$.
Ebből a keresett él:

$$c = \frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



2126

2127. Az MCB derékszögű háromszögből (**2127.** ábra):

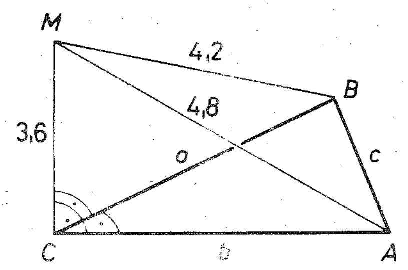
$a = \sqrt{4,2^2-3,6^2} = \sqrt{4,68}$, valamint

az MCA derékszögű háromszögből:

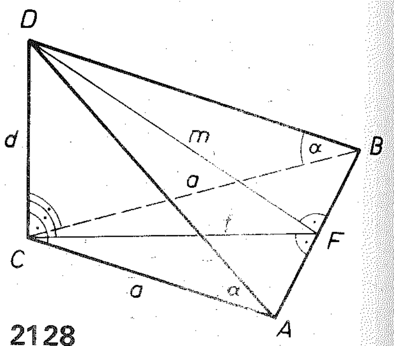
$b = \sqrt{4,8^2-3,6^2} = \sqrt{10,08}$.

Ezekből az ABC derékszögű háromszög területe:

$t = \frac{1}{2}ab = 3,434\ \text{cm}^2$.



2127



2128

2128. Ismert a síkidom területe (t) és vetületének területe (t') közötti összefüggés: $t' = t\cos\varphi$, ahol φ a két sík hajlásszöge. Itt $t = T(ABD)$ és $t' = T(ABC)$. A 4 lap közül – a oldaluk egyenlő lévén – az a legnagyobb területű, amelyben az a-hoz tartozó magasság a legnagyobb. Minthogy $DF > FC$ és $DF > DC$, ezért az ABD oldallap a legnagyobb területű (**2128.** ábra).

Az ABD egyenlő szárú háromszög, ezért $m = DF \perp AB$.

Az ABC háromszög magassága $f = CF = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Így a CDF derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel szerint

$m^2 = d^2+f^2 = a^2\left(\frac{3}{4}+\mathrm{tg}^2\,\alpha\right)$.

Ebből $t = T(ABD) = \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{3}{4}+\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3+4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}$.

2129. *I. megoldás:* Az $EFGA$ gúla térfogatát kétféleképpen felírva, ahol $t = T(EFG)$, m az ehhez tartozó (A-ból induló) magasság (**2129.** ábra):

$$V = \frac{1}{3}tm = \frac{1}{3}\frac{(a\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4}m, \quad \text{illetve} \quad V = \frac{1}{3}\frac{a^2}{2}a.$$

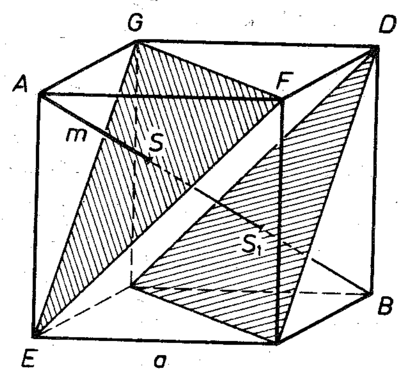
Ebből $m = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$.

II. megoldás: A harmadrendű forgásszimmetriát figyelembe véve belátható, hogy az AB testátló az EFG szabályos háromszöget az S súlypontjában metszi. A kocka élei a testátlóval egyenlő szöget zárnak be, ezért AB-re eső merőleges vetületei is egyenlők (AG vetülete AS, GD-é SS_1 és DB-é S_1B). Ezért $AS = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

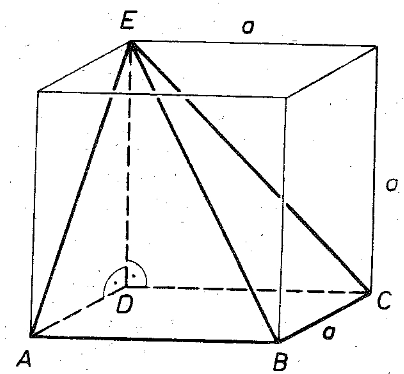
2130. Ábrát lásd a **2129**-nél.

A szabályos háromszög oldalai az a élű kocka lapátlói, tehát $a\sqrt{2}$.

Ennek a háromszögnek a területe $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



2129



2131

2131. A kapott négyzet alapú gúla szimmetriasíkja a BDE háromszög síkja. Ezért $ADE\triangle \cong CDE\triangle$ és $ABE\triangle \cong CBE\triangle$. A határoló lapok tehát: alaplap négyzet, a 4 oldallapjuk: 2-2 egybevágó háromszög. Az utóbbiak oldalai a, a, $a\sqrt{2}$, illetve a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$ (él, lapátló, testátló) (**2131.** ábra).

A test köré írható gömb, mégpedig ez a kocka köré írható gömb.

2132. Az adott ABC háromszög átfogója 1, befogói $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hosszúak (**2132.** ábra).

Az S síkra eső vetülete ABC' háromszög. A két sík hajlásszöge $\varphi = CFC' \sphericalangle = 30°$. A $t' = t\cos\varphi$ összefüggés alapján – ahol

$$t = T(ABC) = \frac{1}{4} \text{ és } t' = T(ABC') \text{ –},$$

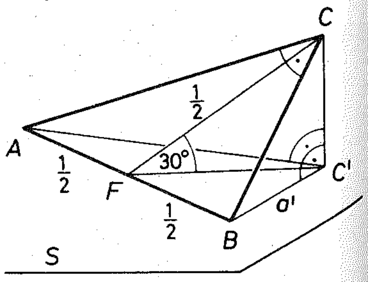
$$t' = \frac{1}{4}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Minthogy $C'C = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}FA = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, a BCC' derékszögű háromszögből

$$a' = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

A vetület kerülete: $k' = 1 + 2a' =$

$$= 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}.$$



2132

2133. A feltétel szerint $a+b = 7c$. Ezért a kerület:

$k = a+b+c = 8c.$

A háromszög-egyenlőtlenségek közül $a+b > c$ teljesülése mellett fent kell állnia:

$b+c > a$, azaz $b+c = 8c-a > a$, ebből $a < 4c$

és $a+c > b$, azaz $a+c = 8c-b > b$, ebből $b < 4c$.

A háromszög k kerülete minimális, ha c minimális és $a<4c$, $b<4c$. Az a, b, c egész számok, ezért $4c \geqq a+1$ és $4c \geqq b+1$. Összegük: $k = 8c \geqq a+b+2 = 7c+2$, azaz $c \geqq 2$. Tehát k minimális, ha $c=2$. Ekkor $a+b = 14$ és $a<8$, $b<8$.

Minthogy $b = 14-a > 14-8 = 6$ és ugyanígy $a>6$, kapjuk, hogy $6<a<8$ és $6<b<8$, vagyis $a=b=7$ lehet csak.

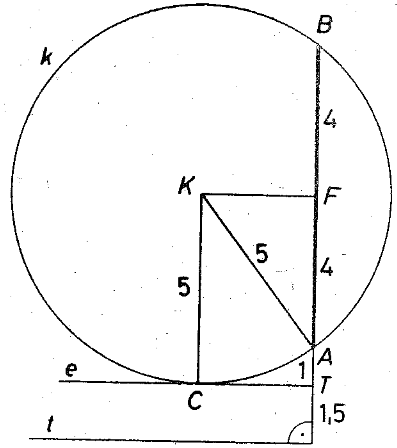
2134. Az A, B pontokon átmenő körök egyike (k) C-ben érinti az e egyenest. (e a t talajtól 1,5 m-re, vele párhuzamosan haladó egyenes.)

Ismert, hogy adott szakaszhoz tartozó α szögű látókörön kívüli pontokból a szakasz α-nál kisebb szögben látszik. Ezért az e egyenes C pontjából látszik maximális szögben az AB szakasz (**2134.** ábra).

Az ABK egyenlő szárú háromszögben AB felezőpontja F.

$FT = FA + AT = 4+1 = 5.$

A keresett távolságot $CT = KF$ miatt az AFK derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számítjuk ki. $KF = \sqrt{25-16} = 3$ (méter).



2134

2135. *I. megoldás:* $D = \cos\alpha\cos\beta$ maximumát kell meghatározni. A $\cos\beta = \sin\alpha$ összefüggést felhasználva

$$D = \sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \leqq \frac{1}{2}.$$

Tehát D maximuma $= \frac{1}{2}$.

Megjegyzés: Ekkor $\sin 2\alpha = 1$, így $2\alpha = 90°$, azaz $\alpha = \beta = 45°$.

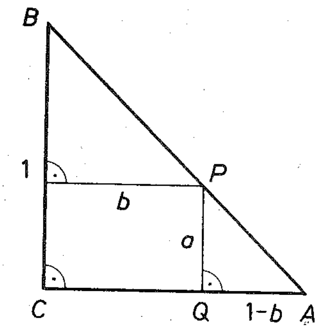
II. megoldás: Legyen a derékszögű háromszög átfogója $c=1$. Ekkor $a = \cos\beta$, $b = \cos\alpha$. Keressük ab maximumát, ami a háromszög kétszeres területének maximumát jelenti. Tudjuk, hogy itt $a^2+b^2 = 1$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget: a^2 és b^2-re:

$$\frac{1}{2} = \frac{a^2+b^2}{2} \geqq \sqrt{a^2b^2} = ab.$$

$ab = \cos\alpha\cos\beta$ maximuma tehát $\frac{1}{2}$.

Megjegyzés: A maximum $a=b$ esetén áll fenn, ekkor

$\alpha = \beta = 45°$.



2136

2136. *I. megoldás:* A $T=ab$ maximumát keressük.

Az $ABC\triangle \sim APQ\triangle$, tehát ez utóbbi ugyancsak egyenlő szárú (**2136.** ábra). Ezért $a = 1-b$, azaz $T(b) = b(1-b) = -b^2+b$ másodfokú függvény maximumát kell meghatározni.

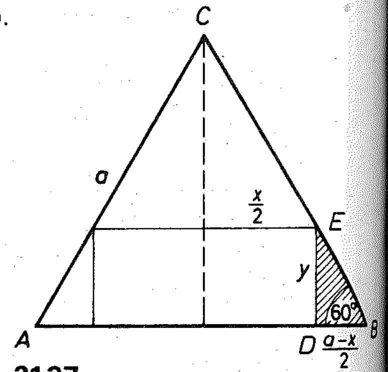
E függvény maximumhelye $b = \frac{1}{2}$, a maximum értéke $T = \frac{1}{4}$.

Megjegyzés: A kapott téglalap oldalai egyenlők, tehát négyzet.
II. megoldás: APQ háromszög egyenlő szárú derékszögű, így $AQ=a$, azaz $a+b=1$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést a-ra és b-re!

$\sqrt{t}=\sqrt{ab}\leqq\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$. t maximális, ha az egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn. Ez akkor teljesül, ha $a=b$. Ekkor $t_{max}=\frac{1}{4}$.

2137. Az EDB derékszögű háromszögből $y=\frac{a-x}{2}\sqrt{3}$. A beírt téglalap területe:

$$T(x)=xy=\frac{\sqrt{3}}{2}x(a-x) \text{ (\textbf{2137.} ábra).}$$



2137

I. megoldás: Ez x-ben másodfokú függvény, melynek maximumhelye $\frac{a}{2}$.

$$T_{max}=T\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{a}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)=$$

$=\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$. A maximális területű téglalap oldalai: $x=\frac{a}{2}$ és $y=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

II. megoldás: $T\frac{2}{\sqrt{3}}=x(a-x)$. Alkalmazzuk x-re és $(a-x)$-re a számtani és mértani közép közötti összefüggést:

$\sqrt{x(a-x)}\leqq\frac{x+a-x}{2}=\frac{a}{2}=$ konstans. T maximális, ha $x=a-x$, azaz, ha $x=\frac{a}{2}$. Ebből $y=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ adódik.

2138. A feladat megoldásához felhasználjuk a következő, a számtani és a négyzetes középre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$\frac{a+b}{2}\leqq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, ahol a, b nemnegatív számok. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b$.

Bizonyítás:
$0\leqq(a-b)^2=2a^2+2b^2-(a^2+2ab+b^2)$ minden a, b-re fennáll. Átrendezéssel az

$$\frac{(a+b)^2}{4}\leqq\frac{a^2+b^2}{2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel mindkét oldalon nemnegatív szám áll, ezért gyököt vonva az

$$\frac{a+b}{2}\leqq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $(a-b)^2=0$, azaz ha $a=b$.

A feladat megoldása:
A derékszögű háromszög oldalait a szokásos módon jelölve felírhatjuk:

$$t=\frac{ab}{2},\qquad k=a+b+c\qquad \text{és}\qquad c^2=a^2+b^2.$$

Ezekből: $c^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(k-c)^2-4t$,
azaz $4t=(k-c)^2-c^2=k(k-2c)$.
Így t akkor maximális, ha $k-2c$ a legnagyobb, azaz ha c a lehető legkisebb.
A fent bizonyított egyenlőtlenség szerint

$$\frac{a+b}{2}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Ebből $k=a+b+c\leqq c(\sqrt{2}+1)$, azaz $c\geqq k(\sqrt{2}-1)$. Tehát c minimális értéke $k(\sqrt{2}-1)$ és c akkor egyenlő ezzel, ha az egyenlőtlenségek egyenlőségekké válnak, azaz ha $a=b$. Ekkor a derékszögű háromszög egyenlő szárú és valóban $c=a\sqrt{2}=a(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=k(\sqrt{2}-1)$.

Ekkor $t_{max}=\frac{1}{4}k^2[1-2(\sqrt{2}-1)]=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}k^2$.

2139. *I. megoldás:* Ha P a derékszögű csúcstól x távolságra van, azaz $AP=x$, akkor $PB = 1-x$, és így a trapéz magassága $PT = TB = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)$, alapjai $CT = \sqrt{2}-BT = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)$ és $QP = x\sqrt{2}$ (**2139.** ábra).

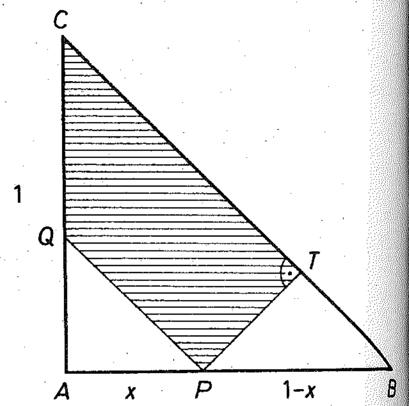
A trapéz területe:

$$t(x) = \frac{CT+QP}{2}\cdot PT =$$

$$= \frac{1}{4}(-3x^2+2x+1) =$$

$$= -\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{3}.$$

Ebből leolvasható, hogy a trapéz területe maximális, ha a $-\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ kifejezés maximális, azaz 0, tehát ha $x = \frac{1}{3}$. Ekkor a trapéz területe $\frac{1}{3}$ területegység.



2139

II. megoldás: A $PTCQ$ trapéz területe maximális, ha az APQ és PBT háromszögek területének összege minimális. A háromszögek területének összege:

$$t^*(x) = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}(3x^2-2x+1) = \frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{6} \geqq \frac{1}{6}.$$

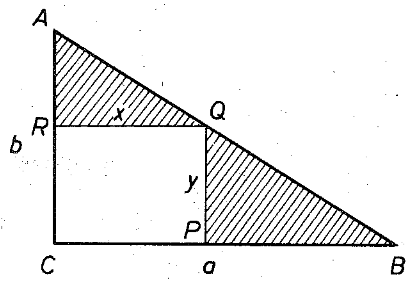
$t^*(x)$ minimális, ha $x = \frac{1}{3}$, $t^*\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$, ezért $t_{\max} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ (területegység).

2140. *I. megoldás:* Legyen $CPQR$ a feladatnak megfelelő téglalap és tegyük fel $a>b$. $ARQ\triangle \sim ACB\triangle$, ezért ARQ háromszög oldalaira $x > b-y$, azaz a téglalap kerülete: $k = 2x+2y > 2b$ (**2140**/I. ábra).
Hasonlóan a BQP háromszög befogóira $y < a-x$ igaz, így $k<2a$.
Tehát $a>b$ esetén a beírt téglalapok kerületére $2b<k<2a$ áll fenn.
Ha $a=b$, akkor a beírt téglalapok egyenlő kerületűek és $k=2a$.

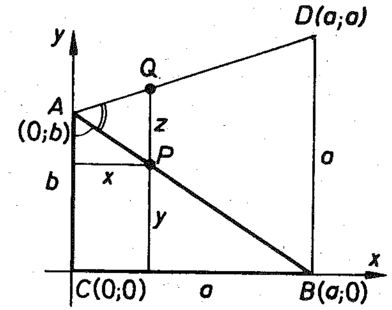
II. megoldás: Készítsük el az a, b alapú, a magasságú derékszögű $ACBD$ trapézt (**2140**/II. ábra). Az ABC háromszögbe beírt téglalap C-vel szemköztes csúcsát jelöljük P-vel. Az AC oldallal párhuzamos P-n átmenő egyenes AD-t Q-ban metszi.
Megmutatjuk, hogy $z=PQ$ x-szel egyenlő. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a CAB és BAD szögekre! Így

$$\frac{x}{a} = \frac{AP}{AB} = \frac{z}{a} \quad \text{adódik, azaz} \quad x=z.$$

Tehát az ABC háromszögbe a feladat szerint beírt téglalapok félkerületei az $ACBD$ trapéz alappal párhuzamos metszetei.
Így $2b<k<2a$, ha $b<a$ és $k=2a$, ha $a=b$.



2140/I.



2140/II.

III. megoldás: $k = 2(x+y)$ (**2140**/II. ábra).
A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján

$$\frac{x}{a} = \frac{b-y}{b}.$$

Ebből $y = b-\frac{bx}{a}$, és $\frac{k(x)}{2} = \frac{a-b}{a}x+b$.

Tehát $x\in]0, a[$ $x\mapsto k(x)$ elsőfokú függvény.
Ez $a>b$ esetén szigorúan monoton nő és
$k(0)<k(x)<k(a)$
miatt a beírt téglalapok kerületére
$2b<k<2a$
áll fenn.
Ha $a=b$, akkor $k(x)=2b$ konstans függvény.

2141. Legyen A-nak és B-nek az e-re eső merőleges vetülete C és D (**2141.** ábra). Ekkor e tetszőleges P pontjára

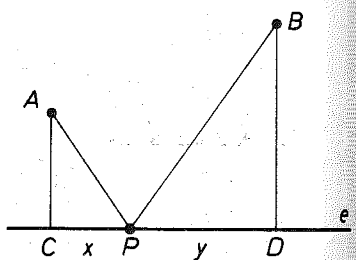
$$PA^2 = PC^2 + AC^2 \quad \text{és}$$

$$PB^2 = PD^2 + BD^2.$$

(Ez akkor is igaz, ha nincs két derékszögű háromszög, például $P=C$.) Mivel AC^2 és BD^2 konstansok, ezért PA^2+PB^2 arra a P pontra minimális, amelyre PC^2+PD^2 minimális.

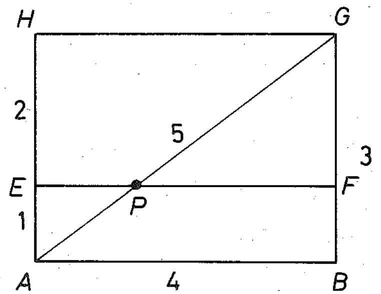
Nyilvánvaló, hogy a keresett P csak a CD szakasz pontja lehet, mert például ha $PC=x$ és $PD = x+CD$, akkor az $x^2+(x+CD)^2$ akkor minimális, ha $x=0$. Tehát legyen P a CD szakasz pontja és $PC=x$ és $PD=y$.

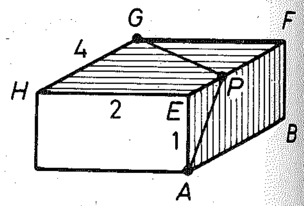
A vizsgált kifejezés $x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = CD^2-2xy$. Ezért x^2+y^2 minimális, ha xy maximális. A számtani és mértani közép közti összefüggés $\left(\sqrt{xy} \leqq \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{CD}{2}\right)$ szerint xy maximális, ha $x=y$, azaz ha P a CD szakasz felezőpontja.



2141

2142. A téglatest két lapját EF körüli forgatással egy síkba forgatjuk. A megoldás az ábrákról leolvasható (**2142.**a), b) ábra).



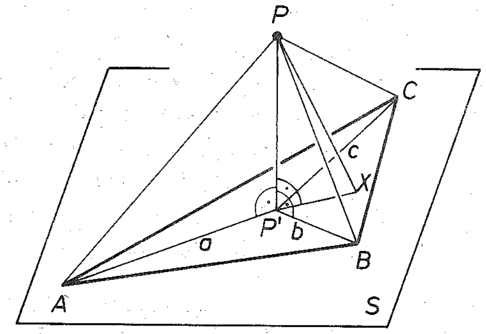


2142a,b

2143. *I. megoldás:* Legyen a P pontnak az ABC háromszög síkjára eső merőleges vetülete P'. A háromszöglemez tetszőleges X pontjára $PX^2 = P'X^2+PP'^2$. Mivel PP' állandó, elég megmutatni, hogy $P'X$ nem nagyobb, mint $P'A$, $P'B$ és $P'C$ közül a legnagyobb (**2143.** ábra). Legyen P' pontnak a csúcsoktól mért távolsága a, b, c, ahol $a \geqq b \geqq c$.

Tekintsük a P' középpontú a sugarú kört. Ez tartalmazza a háromszöget, így a háromszög egyik pontja sem fekszik távolabb P'-től, mint a.

II. megoldás: Legyen $PA \geqq PB \geqq PC$. Tekintsük a P középpontú, PA sugarú gömböt. Ez a gömb belsejében vagy határán tartalmazza a háromszög csúcspontjait, így a háromszöglemezt is.



2143

2144. A-tól és B-től egyenlő távolságra levő pontok halmaza (a síkban) az AB szakaszfelező-merőlegese: f. Az f egyenes által határolt, A-t tartalmazó félsík belső pontjai A-hoz közelebb fekszenek, mint B-hez (**2144.** ábra).

A 2 cm sugarú k körvonaltól 1 cm távolságra levő pontok a B középpontú 1 cm sugarú (j) körvonalra vagy a B középpontú 3 cm sugarú (l) körvonalra illeszkednek. A j és l körvonal által határolt körgyűrű belső pontjai k-hoz 1 cm-nél közelebb vannak, a körgyűrűn kívül fekvő pontok 1 cm-nél távolabb vannak.

Ezek alapján:

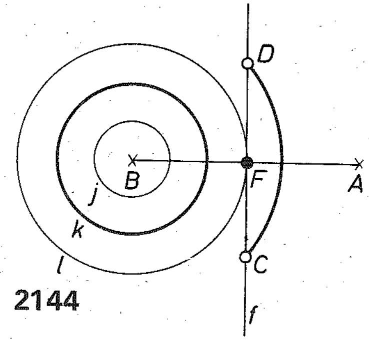
a) AB felezőpontja: F.

b) $f \setminus \{F\}$.

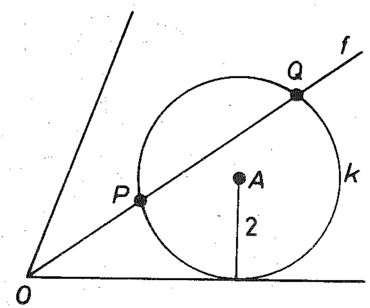
c) $\emptyset$.

d) A B középpontú 4 cm sugarú körvonal jelölt CD íve (C és D nélkül).

2145. A szögtartományban a szög száraitól egyenlő távolságra levő pontok az f szögfelező félegyenes pontjai (**2145.** ábra).



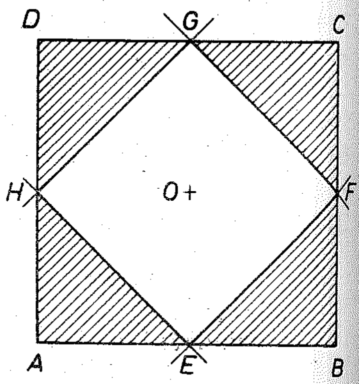
2144



2145

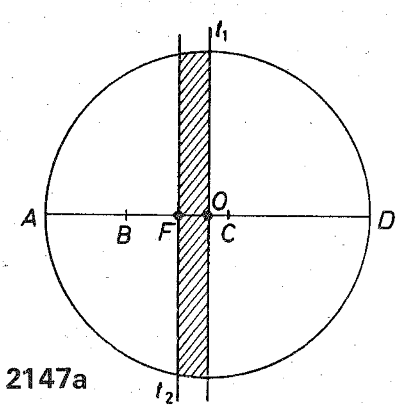
Az A ponttól 2 cm távolságra levő pontok az A középpontú 2 cm sugarú k körvonal pontjai. A körlemez pontjai legfeljebb 2 cm-re, a sík többi pontja 2 cm-nél távolabb fekszik A-tól.
A megoldások száma f és k kölcsönös helyzetétől függ.
Ha $f \cap k = \emptyset$, akkor *a)* $\emptyset$; *b)* f; *c)* $\emptyset$.
Ha f érinti k-t P-ben, akkor *a)* $\{P\}$; *b)* $f \setminus \{P\}$; *c)* $\{P\}$.
Ha f metszi k-t P-ben és Q-ban, akkor *a)* $\{P, Q\}$; *c)* PQ (zárt) szakasz; *b)* Az OP félegyenes, kivéve a PQ (zárt) szakaszt ($f \setminus PQ$).

2146. Az AO szakaszfelező-merőlegese a síkot két félsíkra bontja (**2146.** ábra). Ismert, hogy az A-t tartalmazó félsík pontjaira $PA < PO$ áll fenn. Ezek alapján a keresett ponthalmaz
a) az $ABCD$ négyzet pontjai, kivéve az $EFGH$ (zárt) négyzet pontjait,
b) a sík azon pontjai, amelyek az $EFGH$ négyzetnek nem pontjai.

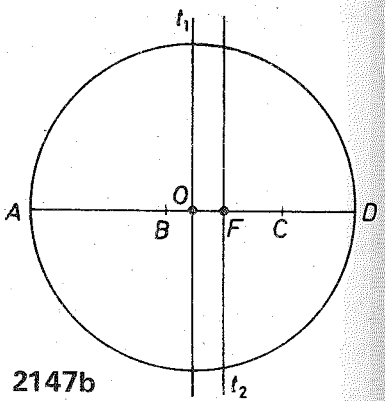


2146

2147. A Thalész-kör belsejének azon pontjai, amelyekre $PA \leq PD$ fennáll, az AD szakaszfelező-merőlegese (t_1) által határolt, A-t tartalmazó félkörlemez pontjai, a határoló körvonal nélkül. Hasonlóan a $PB \geq PC$ egyenlőtlenség BC, szakaszfelező-merőlegese (t_2) által határolt, C-t tartalmazó körszelet pontjaira teljesül a határoló körvonal nélkül.
A feladat megoldása e két ponthalmaz metszete. Ez t_1 és t_2, illetve O és F helyzetétől függően: a körlemez két párhuzamos t_2, illetve t_1-re illeszkedő húr által határolt része a körívek nélkül (**2147.** *a)* ábra); a t_1-re illeszkedő átmérő a végpontjai nélkül (ha $O = F$); vagy üres halmaz (**2147.** *b)* ábra).



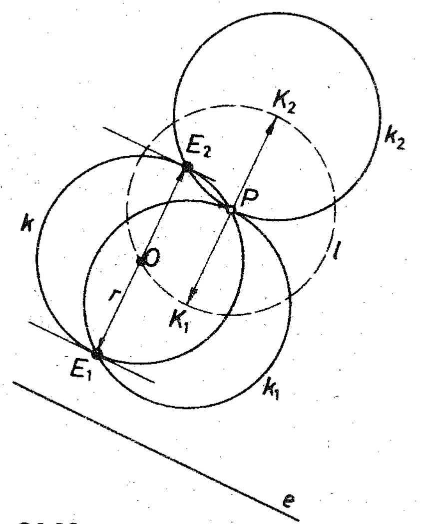
2147a



2147b

2148. Ha az AB szakasz felezőpontja F, a háromszög S súlypontja az FC szakasz F-hez közelebb fekvő harmadolópontja. Ezért az F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú középpontos hasonlóság C-t S-be viszi. Ha C befutja az AB ívet, akkor S ennek az ívnek F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlósággal nyert képére ($\widehat{A'B'}$) illeszkedik.
Megfordítva, ha S' illeszkedik erre az $\widehat{A'B'}$ nyílt ívre, akkor S'-nek az F középpontú $\lambda = 3$ hasonlósággal nyert C' képe illeszkedik az $\widehat{AB}$-re és ABC' háromszög súlypontja S'.

2149. Az adott k kör e-vel párhuzamos érintőinek érintési pontjai a kör e-re merőleges átmérőjének végpontjai (**2149.** ábra): E_1, E_2. Ezeket úgy is megkaphatjuk, hogy a kör középpontját e-re merőlegesen eltoljuk – mindkét irányba – egy r hosszúságú vektorral.
Ha k kört forgatjuk P körül, akkor k középpontja a P középpontú r sugarú l kört futja be. (Az l körvonal minden pontjához ilyen módon eljutunk.)
Az elforgatott körök e-vel párhuzamos érintőinek érintési pontjait, a fentiek szerint megkapjuk, ha l-et e-re merőlegesen r nagyságú vektorokkal eltoljuk (k_1, k_2).



2149

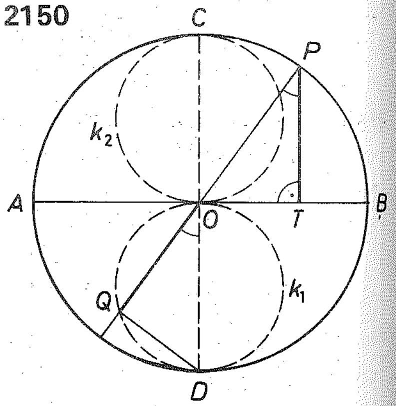
2150. Illeszkedjék P az ACB félkörre (**2150.** ábra). OTP és DQO háromszögek egybevágóak, hiszen a feladat szerint $OP = OD$, $PT = OQ$ és

$TPO\sphericalangle = DOQ\sphericalangle$. Ezért $OQD\sphericalangle = 90°$, tehát Q az OD átmérőjű k_1 körre illeszkedik.
Belátjuk, hogy k_1 minden pontja hozzátartozik a keresett ponthalmazhoz. Legyen Q a k_1 kör tetszőleges pontja, QO az adott kört P-ben metssze és P merőleges vetülete AB-re legyen T. Ekkor OTP és DQO háromszögek egybevágóak (a szögek és OP, OD oldalak egyenlősége miatt). Így $PT = OQ$, tehát Q a mértani hely pontja.
Ha P az ADB félkörre illeszkedik, akkor az ehhez rendelt Q pont az OC átmérőjű k_2 körvonal pontja.
Így a keresett ponthalmaz a k_1 és k_2 kör.

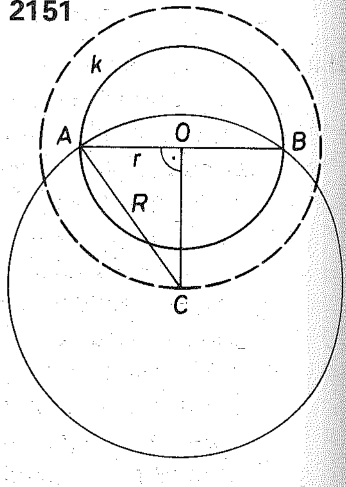
2151. Az OAC háromszögben $OC = \sqrt{R^2 - r^2}$ = állandó (**2151.** ábra). Ezért ha az AB átmérőt O körül forgatjuk, C egy O középpontú $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú körön mozog. Így a keresett ponthalmaz az O középpontú $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú körvonal.

2152. Előbb belátjuk, hogy az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapja tetszőleges pontjának a száraktól mért távolságösszege a háromszög szárhoz tartozó magassága (**2152.** ábra).
$PD \| BC$, ezért PDA is egyenlő szárú, és a szárakhoz tartozó magasságok egyenlőek, ezért $PT_1 = AE$. Másrészt $PT_2 = EF$. Így
$PT_1 + PT_2 = AE + EF = AF$.

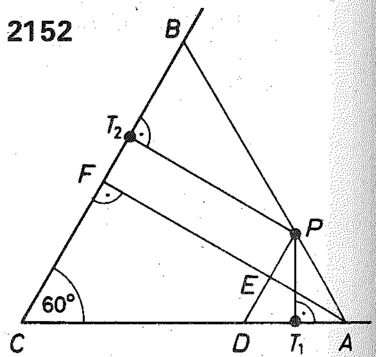
2150



2151

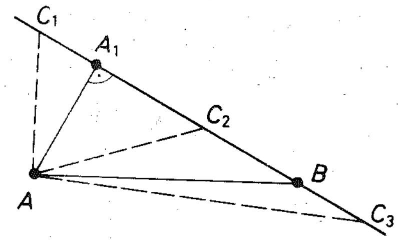


2152

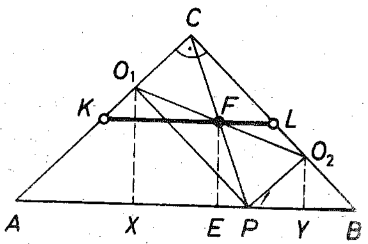


Ezért ha az adott szög száraiból egyenlő szárú (itt $\gamma = 60°$ miatt egyenlő oldalú) háromszöget metszünk le, akkor az így nyert háromszög alapjának tetszőleges pontjára a száraktól mért távolságok összege állandó. Ha a szár hosszát növeljük, illetve csökkentjük, akkor ez a háromszögre jellemző állandó (a szárhoz tartozó magasság) is nő, illetve csökken. Ezért azon pontok halmaza, amelyeknek a két szögszártól mért távolságösszege a, az a magasságú $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right.$ oldalú$\left.\right)$ szabályos háromszög AB alapja.

2153. A háromszög két csúcsa A, B, az A-ból induló magasságvonal talppontja A_1.
$A_1 \neq B$ esetén szükségképpen $AA_1B\sphericalangle = 90°$ (**2153.** ábra). (Ezért, ha a három különböző pontra ez nem teljesül, a feladatnak nincs megoldása.)
Az a oldalegyenesre illeszkedik B, C és A_1. Ezért C az A_1B egyenesre illeszkedik. A keresett ponthalmaz az A_1B egyenes, kivéve a B pontot. (Ha C az A_1B szakasz belső pontja, γ tompaszög; ha $C = A_1$, $\gamma = 90°$; ha C nem illeszkedik az A_1B szakaszra, γ hegyesszög.)
Ha $A_1 = B$, akkor a háromszögek C csúcsai a B-n átmenő, AB-re merőleges egyenes B-től különböző pontjai lehetnek.



2153



2154

2154. *I. megoldás:* O_1, illetve O_2 AB-re eső merőleges vetülete X, illetve Y. AO_1P és PO_2B egyenlő szárú derékszögű háromszögek, ezért $O_1X = \frac{1}{2}AP$ és $O_2Y = \frac{1}{2}PB$. Az O_1XYO_2 trapéz középvonala $EF = \frac{1}{2}(O_1X + O_2Y) = \frac{1}{4}AB$. Így F illeszkedik az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög KL középvonalára (**2154.** ábra).

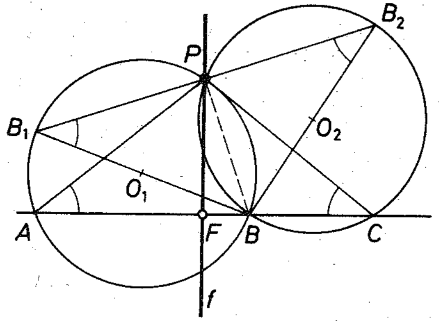
Megfordítva, ha F a KL középvonalnak belső pontja, akkor legyen CF AB-vel való metszéspontja P, és O_1, O_2 az AP és PB átfogójú derékszögű háromszögek harmadik csúcsa. Ekkor CO_1PO_2 téglalap. A téglalap átlói felezik egymást, ezért CP felezőpontja, F felezi O_1O_2-t is.
II. megoldás: A szerkesztés miatt CO_1PO_2 téglalap. A téglalap átlói felezik egymást, ezért O_1O_2 szakasz F felezőpontja felezi CP-t. Így a C középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság P-hez F-et rendeli. Ez a középpontos hasonlóság AB nyílt szakaszhoz a KL nyílt középvonalat rendeli.

2155. Jelöljük a négyzetek középpontját O_1, O_2-vel. A keresett ponthalmaz meghatározása a **2154.** feladatban található.

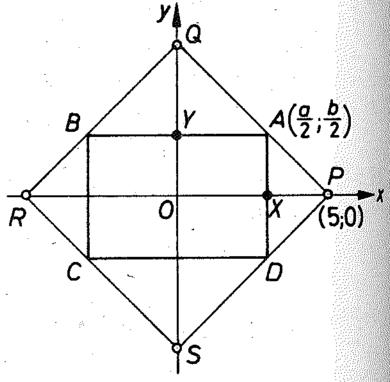
2156. A két körben az egybevágó PB ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlőek, ezért APC egyenlő szárú háromszög. Tehát P illeszkedik az AC szakasz f felezőmerőlegesére (**2156.** ábra).
F nem tartozik a keresett ponthalmazhoz.
Megfordítva: Legyen P az f egyenes F-től különböző pontja. Ekkor $PAC\sphericalangle = PCA\sphericalangle$.
Tükrözzük a B pontot az ABP és BCP háromszögek köré írt körének O_1 és O_2 középpontjaira. A tükrözés miatt

$$B_1PB\sphericalangle = B_2PB\sphericalangle = 90° \quad \text{és} \quad PB_1B\sphericalangle = PB_2B\sphericalangle.$$

Ezért B_1, P, B_2 egy egyenesre illeszkednek, és a B_1B_2B háromszög egyenlő szárú, tehát $r_1 = r_2$.
Így a keresett mértani hely $f \setminus \{F\}$.



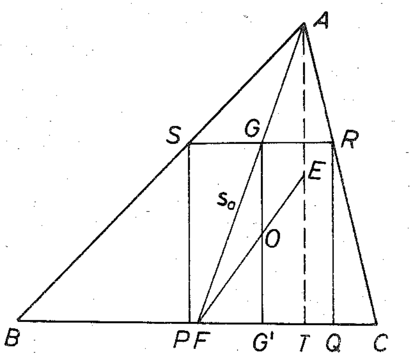
2156



2157

2157. *I. megoldás:* Metssze a téglalap AB, illetve AD oldala a két adott y, illetve x egyenest Y, illetve X pontban (**2157.** ábra). Forgassuk le az A pontot X pont körül, illetve Y pont körül 90°-kal az x, illetve az y egyenesre. Az így kapott AXP és AYQ egyenlő szárú derékszögű háromszögek. (Hasonlóan járunk el a téglalap B, C, D csúcsával is. Így adódnak az R és S pontok.)
A téglalap k kerülete: $k = 4OP = 4OQ(= 4OR = 4OS)$. Tehát minden megfelelő A csúcshoz ugyanez a P és Q pont (B-hez Q és R, C-hez R és S, D-hez R és P) tartozik.
Megfordítva: a PQO egyenlő szárú (derékszögű) háromszög PQ alapja tetszőleges A pontjának a száraktól mért távolságösszege állandó: $XA + AY = OP = 5$ cm (lásd a **2152**-es feladat megoldásának első részét).
Így a vizsgált téglalapok a $PQRS$ négyzetet fedik le, kivéve a P, Q, R és S pontokat.
II. megoldás: Vegyük fel a koordináta-rendszert úgy, hogy O legyen az a és b oldalú téglalapok közös középpontja, az x és y tengely pedig legyen párhuzamos a két adott egyenessel.
A téglalapok csúcsai $A\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, $D\left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. A feltétel szerint $a + b = 10$, $0 < a < 10$, $0 < b < 10$. Így a fenti csúcsok rendre az $y = 5 - x$, $y = x + 5$, $y = -x - 5$, $y = x - 5$ egyenletű egyenesekre illeszkednek, ahol $0 < |x| < 5$ és $0 < |y| < 5$.
Ezért a téglalapok a $PQRS$ négyzetet fedik le, a P, Q, R és S csúcspontok kivételével.

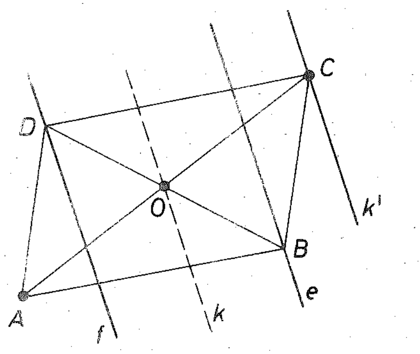
2158. Ismert, hogy a háromszög s_a súlyvonala felezi az a oldallal párhuzamos egyeneseknek a háromszögbe eső szakaszát. Ezért a háromszögbe beírt $PQRS$ téglalap RS oldalának G felezőpontja illeszkedik az AF súlyvonalra (**2158.** ábra).
$GG' \perp PQ$, így GG' az AT magasságvonallal párhuzamos. A téglalap O középpontja a GG' szakasz felezőpontja, ezért O rajta van az AFT háromszög FE súlyvonalán.



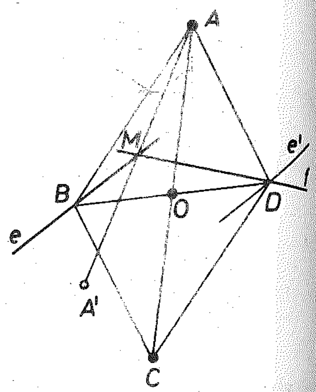
2158

Megfordítva, ha O az FE szakasz tetszőleges belső pontja, az ábra segítségével egyértelműen megszerkeszthető a megfelelő $PQRS$ téglalap.
Megjegyzés: $AB=AC$ esetben is a keresett ponthalmazt a BC oldal F felezőpontját a BC oldalhoz tartozó magasság E középpontjával összekötő szakasz belső pontjai alkotják.

2159. A paralelogramma középpontosan szimmetrikus az átlók O metszéspontjára. Az adott e és f egyenesek kölcsönös helyzetük alapján lehetnek *a)* párhuzamosak és *b)* metszők.
a) Mivel B-$\bullet$-e, O-ra vonatkozó tükörképe $B'=D$-$\bullet$-f, ezért O az e és f egyenesek k középpárhuzamosára illeszkedik (**2159.** *a)* ábra). A C pontok halmazát megkapjuk, ha az A középpontú $\lambda=2$ arányú középpontos hasonlóságot alkalmazzuk k-ra. Minden k'-re illeszkedő C pont esetén végtelen sok, a feltételeket kielégítő paralelogramma létezik. Ezek közös középpontja AC felezőpontja.



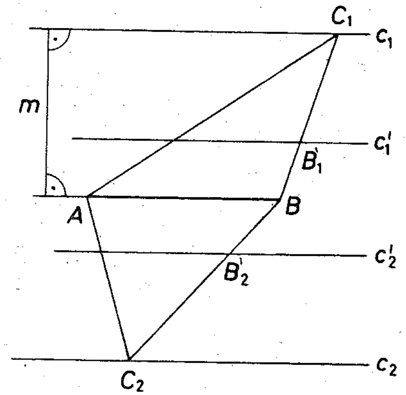
2159a



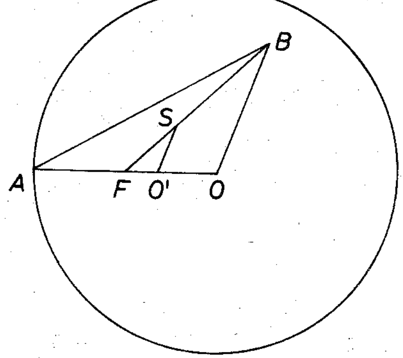
2159b

b) Jelöljük a sík egy tetszőleges pontját C-vel, AC felezőpontját O-val (**2159.** *b)* ábra). Tükrözzük az e egyenest O-ra. A kapott e' és az f egyenes metszéspontja D, ennek O-ra vonatkozó tükörképe B.
Nem kapunk paralelogrammát, ha C éppen az A-nak e és f egyenesek M metszéspontjára vonatkozó tükörképe: A'. (Ekkor $O=M$ és $e'=e$, így $B=D=M$ adódna.)
Tehát, ha C a sík tetszőleges A'-től különböző pontja, akkor mindig létezik a feltételeknek megfelelő (esetleg elfajuló) paralelogramma.

2160. *a)* A háromszög harmadik, C csúcsa az AB egyenestől m távolságra levő párhuzamos egyenesek egyikére (c_1, c_2) illeszkedik. Mivel B rögzített és $\frac{B'B}{CB}=\frac{1}{3}$, ezért B' C-nek B középpontú $\lambda=\frac{1}{3}$ arányú hasonlósággal nyert képe. Így B' illeszkedik az AB-vel párhuzamos, ettől $\frac{1}{3}$ m távolságra levő egyenesek egyikére. (A keresett ponthalmaz $c_1' \cup c_2'$.) (**2160.** ábra.)
Megjegyzés: Ugyanezekhez az egyenesekhez jutunk, ha a b oldal A-hoz közelebb eső harmadolópontját vizsgáljuk.
b) Térben a C csúcsok halmaza az AB tengelyű m sugarú hengerfelület, s a fentiek szerint a keresett ponthalmaz: az AB tengelyű $\frac{m}{3}$ sugarú hengerfelület.



2160

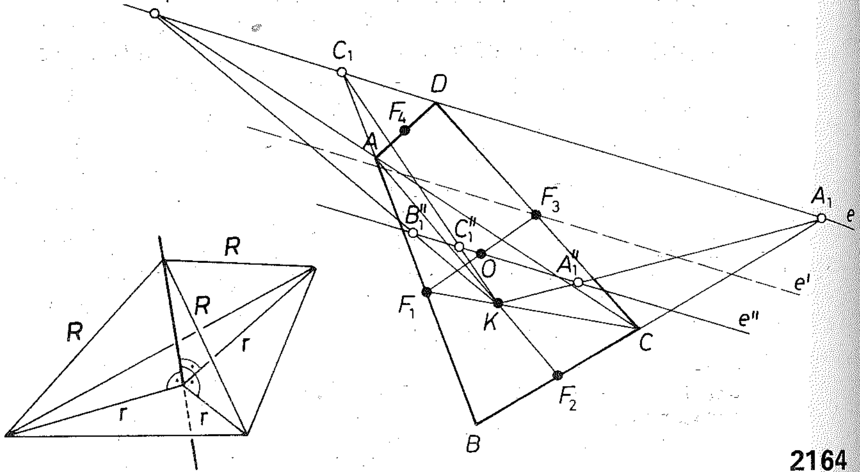


2162

2161. A P középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlósággal megkapjuk a húrok P-hez közelebb eső harmadoló pontjait. Ezek egy $\frac{r}{3}$ sugarú, felületén P-t tartalmazó gömbfelületre, illetve körvonalra illeszkednek.

2162. Az OAB háromszög S súlypontjára igaz, hogy $\frac{FS}{FB}=\frac{1}{3}$, ahol F az adott OA sugár felezőpontja. Ezért az F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság B-hez S-et, azaz az adott gömbfelülethez egy $\frac{1}{3}$ OA sugarú gömbfelületet rendel (**2162.** ábra).

2163. A gömbök középpontja a három ponttól egyenlő távol van, ezért illeszkedik a három pont által meghatározott háromszög köré írható körének középpontján átmenő, a háromszög síkjára merőleges egyenesre. Ezen egyenes minden pontja, egy a három adott ponton átmenő gömb középpontja (**2163.** ábra).



2163 2164

2164. Az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma. A paralelogramma átlói felezve metszik egymást (**2164.** ábra).

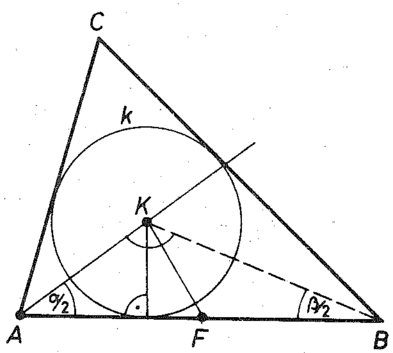
Így a C középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság D-t F_3-ba, e-t az e-vel párhuzamos e' egyenesbe viszi.

AB felezőpontja, F_1 rögzített. Az F_1 középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság F_3-at O-ba, az F_3 pontra illeszkedő e' egyenest e''-be viszi.
Tehát a vizsgált paralelogrammák középpontjai e''-re illeszkednek.
e'' nem minden pontja lesz egy $ABCD$ négyszögből szerkesztett paralelogramma középpontja. Például az AB egyenesnek e-vel való C_1 metszéspontja nem lehet a feladatban szereplő négyszög negyedik csúcsa. Hasonlóan AC és BC e-vel való B_1 és A_1 metszéspontja (ha létezik) sem csúcsa a négyszögnek. Ezért A_1'', B_1'' és C_1'' nem tartozik a keresett ponthalmazhoz.

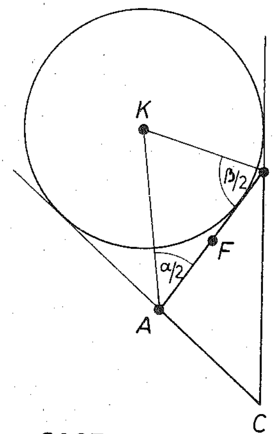
Az e'' minden pontjából (A_1'', B_1'' és C_1'' kivételével) eljuthatunk egy F_1 középpontú kétszeres nagyítás, majd egy C középpontú kétszeres nagyítás alkalmazásával a négyszögek e-re illeszkedő D csúcsához.
Megjegyzés: Megmutatható, hogy a két középpontos hasonlóság egymásutánja egy olyan középpontos hasonlósággal helyettesíthető, amelynek középpontja illeszkedik F_1C-re $\left(\text{és aránya } \frac{1}{4}\right)$.
A paralelogrammák középpontjait egy A középpontú és egy F_2 középpontú $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ arányú hasonlósággal is megkaphattuk volna.

Így a K középpontú, $\frac{1}{4}$ arányú középpontos hasonlóság e-t e''-be viszi, ahol K az AF_2 és CF_1 egyenesek metszéspontja (azaz az ABC háromszög súlypontja).

2165. A háromszög B csúcspontja az A-nak F-re vonatkozó tükörképe. A háromszögbe írható kör sugara a K-ból az AB-re állított merőleges szakasz hossza. A-ból és B-ből a körhöz húzott érintők metszéspontja C (**2165.** ábra).
A megoldás feltétele: A, F, K ne essék egy egyenesre és ($\alpha+\beta < 180°$ álljon fenn, azaz $AKB\sphericalangle > 90°$, s így) $KF < AF$ teljesüljön.
Megjegyzés:
Ha $KF = AF$ ($AKB\sphericalangle = 90°$), akkor nem kapunk C pontot.
Ha $KF > AF$ ($AKB\sphericalangle < 90°$), akkor a k kör az így szerkesztett ABC háromszög hozzáírt köre (**2165**/M).



2165

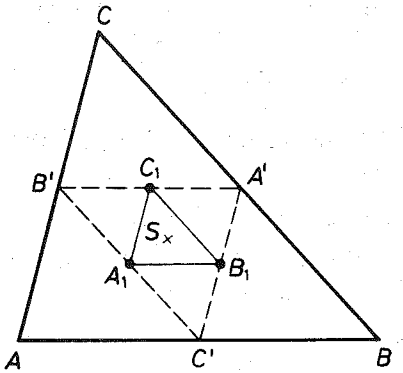


2165/M

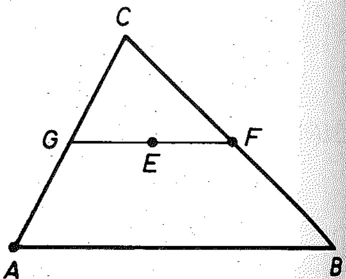
2166. *I. megoldás:* Az A_1-en át B_1C_1-gyel, a B_1-en át A_1C_1-gyel, a C_1-en át A_1B_1-gyel húzott párhuzamosokra esnek a keresett ABC háromszög középvonalai. Az eljárást az $A'B'C'$ háromszögre ismételve kapjuk az ABC háromszöget (**2166.** ábra).

II. megoldás: Az S (súlypont) középpontú, $\lambda = -2$, arányú hasonlóság A_1-et A'-be viszi át, A'-t A-ba viszi át, ezért S középpontú $\lambda = 4$ arányú hasonlóság A_1-et A-ba viszi át stb.

A megoldás feltétele: A_1, B_1, C_1 ne essék egy egyenesre.



2166



2167

2167. A hiányzó csúcspontokat pontra vonatkozó tükrözéssel kapjuk (**2167.** ábra):

F tükörképe E-re G,

A tükörképe G-re C,

C tükörképe F-re B.

ABC háromszög akkor és csak akkor létezik, ha A, E, F pontok nem illeszkednek egy egyenesre.

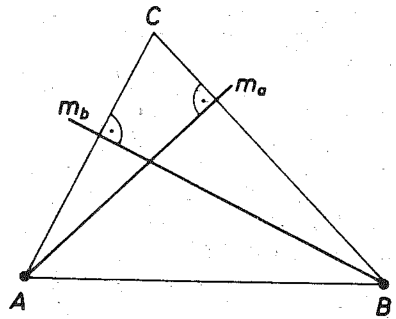
2168. A magasságok merőlegesek a megfelelő oldalakra. Ezért A-ból m_b-re és B-ből m_a-ra állított merőlegesek metszéspontja a keresett C csúcs (**2168.** ábra).

Nincs megoldás, ha m_a és m_b egyállásúak.

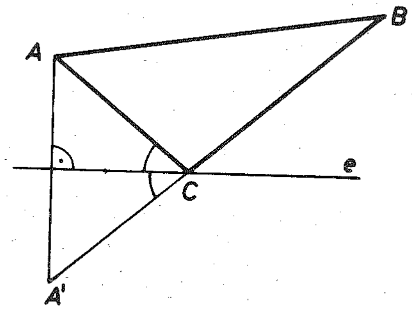
2169. Ha e felezi az ABC háromszög C-nél lévő külső szögét, akkor A-nak e-re vonatkozó tükörképe, A' illeszkedik BC egyenesre (**2169.** ábra).

Az e és $A'B$ C-ben metszik egymást.

Nincs megoldás, ha AB merőleges e-re.



2168



2169

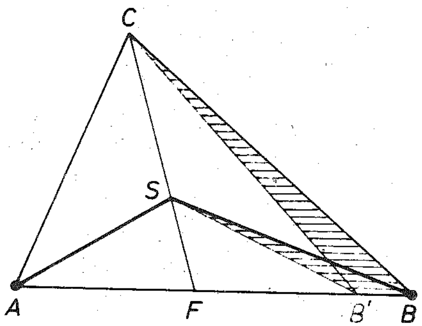
2170. S középpontú, $\lambda = -2$ arányú hasonlóság az AB oldal F felezőpontját C-be viszi át (**2170.** ábra).

A megoldás feltétele, hogy az ABS háromszög létezzen, azaz az $|AS - BS| < AB < AS + BS$ egyenlőtlenség-rendszer fennálljon. Ekkor adott SA és SB esetén két S és ennek megfelelően két, AB egyenesre tükrös háromszög jön létre.

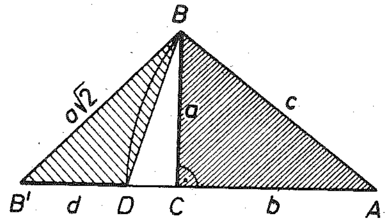
2171. Az a befogójú, BCB' egyenlő szárú derékszögű háromszög $B'C$ oldalán D megszerkeszthető $B'D = d$ (**2171.** ábra).

Az ABD egyenlő szárú háromszög, ezért a $B'C$ egyenes és a BD felező-merőlegesének metszéspontja: A.

Minthogy $b < c$-nek teljesülnie kell, megoldás csak akkor lehet, ha $d = a + b - c = B'D < BC = a$.



2170



2171

2172. A feltételben szereplő egyenlő szögeket δ-val jelöljük (**2172.** ábra). Ekkor $ABP\sphericalangle = \beta-\delta$, s ezért

$APB\sphericalangle = 180° - (\delta+\beta-\delta) = 180° - \beta.$ Ugyanígy

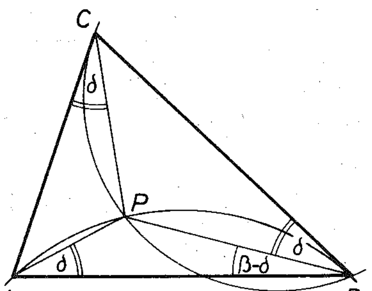
$BPC\sphericalangle = 180° - \gamma$ és

$CPA\sphericalangle = 180° - \alpha$.

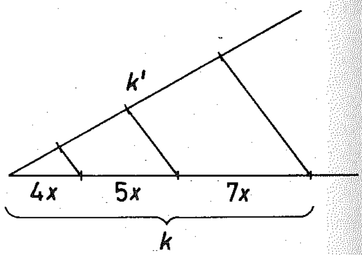
E szögek összege 360°, tehát P létezik és az ABC háromszög belsejében van. P az AB szakaszhoz tartozó $180°-\beta$, BC-hez tartozó $180°-\gamma$ és CA-hoz tartozó $180°-\alpha$ látókörök közös pontja. (P szerkesztéséhez két látókör szükséges.)

2173. Az adott k kerületet 4 : 5 : 7 arányú részekre bontjuk (**2173.** ábra). A $4x$, $5x$, $7x$ oldalakra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ezért e szakaszokból szerkeszthető háromszög.

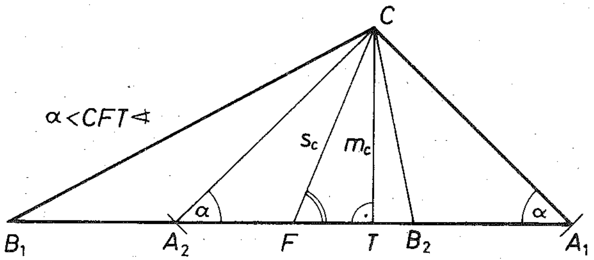
2174. Szerkesztési lépések lehetnek (**2174.** *a)* ábra).
1. FTC derékszögű háromszög szerkesztése (s_c, m_c, 90°).
2. FC-hez tartozó α látókör és FT egyenesének metszéspontja: A.



2172



2173



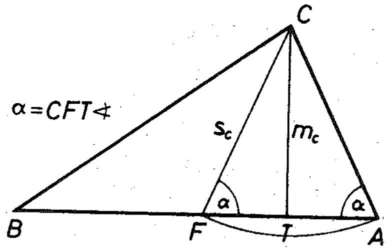
2174a

3. A-nak F-re vonatkozó tükörképe: B.

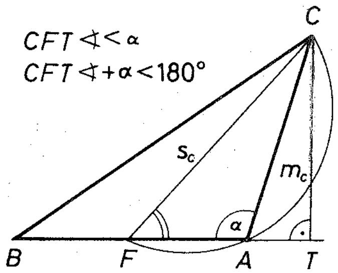
Ha $s_c > m_c$, akkor $\alpha < CFT\sphericalangle$ esetén 2 megoldás (**2174.** *a)* ábra),
$\alpha = CFT\sphericalangle$ esetén 1 megoldás (**2174.** *b)* ábra),
$\alpha > CFT\sphericalangle$ és $CFT\sphericalangle + \alpha < 180°$ esetén 1 megoldás van (**2174.** *c)* ábra).

Ha $s_c = m_c$, akkor $\alpha < 90°$ esetén 1 megoldás van (**2174.** *d)* ábra).

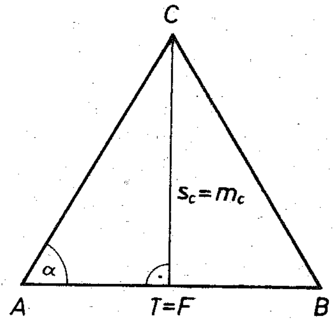
Nincs megoldás, ha 1. $s_c < m_c$,
2. $s_c = m_c$ és $\alpha \geqq 90°$,
3. $s_c > m_c$ és $CFT\sphericalangle + \alpha \geqq 180°$ áll fenn.



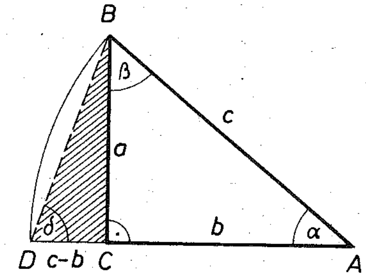
2174b



2174c



2174d



2175

2175. Az ABD háromszög egyenlő szárú (**2175.** ábra).

a) $\delta = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Az $\alpha+\beta = 90°$ figyelembevételével,

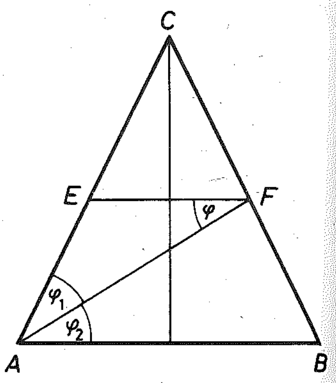
b) $\delta = 45° + \dfrac{\beta}{2}$.

Ezek szerint δ megszerkeszthető.

A BDC derékszögű háromszög ($c-b$, δ és 90°-ból), majd BDA egyenlő szárú háromszög (BD oldal, δ és szimmetria) megszerkeszthető.

Az α, illetve β a szerkesztendő derékszögű háromszög hegyesszögei, ezért csak $\alpha < 90°$, illetve $\beta < 90°$ esetén van megoldás és az egyértelmű.

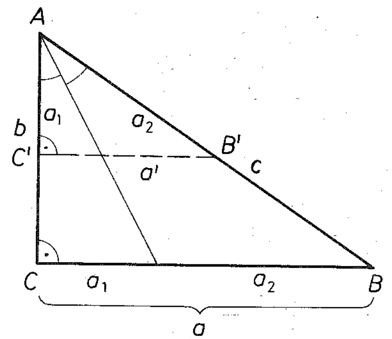
2176. Egyrészt a feltétel szerint AEF háromszög egyenlő szárú, ezért $\varphi = \varphi_1$ (**2176.** ábra).
Másrészt $EF \| AB$, ezért $\varphi = \varphi_2$,
tehát $\varphi_1 = \varphi_2$,
ami azt jelenti, hogy BC-ből az F pontot a $CAB\sphericalangle$ felezője metszi ki.
Mindig van (egy) megoldás.



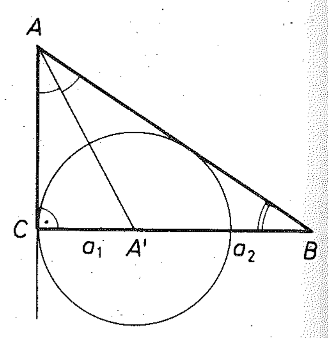
2176

2177. Az m_a magasság az α szöget α_1-re és α_2-re bontja. Legyen $\alpha_1 - \alpha_2 = \varepsilon$. Így $\alpha_1 = \dfrac{\alpha+\varepsilon}{2}$ és $\alpha_2 = \dfrac{\alpha-\varepsilon}{2}$. Az $AA_1 = m_a$-ra A-ból ellentétes irányban felmérjük α_1-et és α_2-t. Az A_1-ben m_a-ra állított merőleges egyenes az α szög száraiból kimetszi B-t és C-t.
Megjegyzés: Ha β vagy γ tompaszög, akkor m_a nem osztja α-t.

2178. *I. megoldás:* A szögfelező-tétel szerint $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b}{c}$. Ezért a szerkesztendőhöz hasonló $b' = a_1$ befogójú $c' = a_2$ átfogójú derékszögű háromszög megszerkeszthető (**2178**/I. ábra). Ebből $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{a_1 + a_2}{a'}$ arányú hasonlósággal kapjuk a keresett háromszöget.
II. megoldás: Ha $CA' = a_1$ és $A'B = a_2$, akkor az A' középpontú a_1 sugarú kör B és C pontbeli érintőjének metszéspontja A (**2178**/II. ábra).

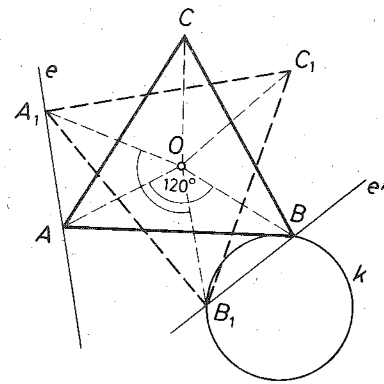


2178/I.

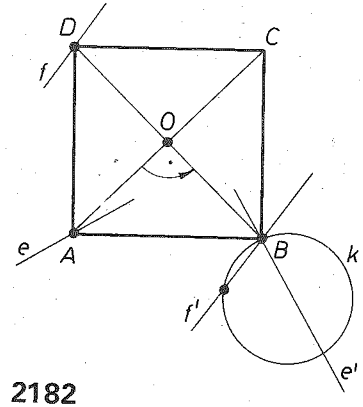


2178/II.

2179. $AOB\sphericalangle = 120°$. Ezért az A pont O körüli 120°-os elforgatottja $A' = B$. Így e-nek O körüli 120°-os elforgatottja, e' átmegy B-n (**2179.** ábra).
A háromszög B csúcsa k és e' közös pontja. O és B ismeretében A és C megszerkeszthető.
Adott irányú elforgatás esetén a megoldások száma e' és k közös pontjainak a számával azonos: 2, 1 vagy 0.
A két irányú forgatást figyelembe véve: 4, 3, 2, 1 vagy 0 a megoldások száma.



2179



2182

2180. Az előző feladat gondolatmenete alapján e egyenes $O = S$ körüli 120°-os elforgatottja átmegy az f félegyenesre illeszkedő B ponton. S és B egyértelműen meghatározzák a háromszöget.
A megoldások számát e' és f, valamint e'' és f közös pontjai adják: 2, 1, 0 vagy végtelen sok (e' és e'' e-nek S körüli két különböző irányú 120°-os elforgatottja).

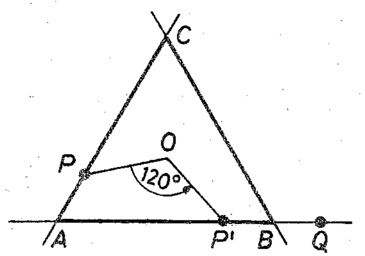
2181. Lásd a **2179**-es feladat megoldását ($O = M$).
A megoldások számát k_1' és k_2, illetve k_1'' és k_2 közös pontjai határozzák meg (ahol k_1' és k_1'' k_1-nek M körüli két különböző irányú 120°-os elforgatottja). Így a megoldások száma 4, 3, 2, 1, 0 vagy végtelen sok lehet.

2182. *a)* $AOB\sphericalangle = 90°$ (**2182.** ábra). A **2179**-es feladat gondolatmenete alapján e egyenes O pont körüli 90°-os elforgatottjára illeszkedik $A' = B$. Így e' és k közös pontja a négyzet B csúcsa. Adott O és B pontokból az $ABCD$ négyzet egyértelműen megszerkeszthető. A megoldások száma, a két irányú forgatást figyelembe véve 4, 3, 2, 1 vagy 0 lehet.

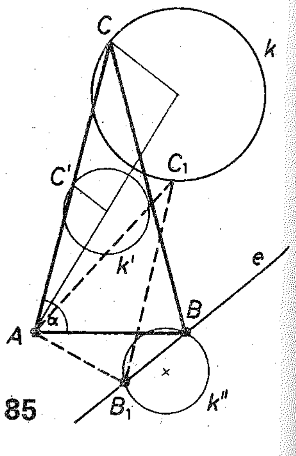
b) D-nek O-ra vonatkozó tükörképe B. Ezért a D-re illeszkedő f egyenes O-ra vonatkozó tükörképe, f' átmegy B-n. Így B, s a négyzet is megszerkeszthető.
A megoldások száma f' és k közös pontjainak a számával azonos: 2, 1 vagy 0.

2183. A megoldás gondolatmenete a **2180**-as feladatban megtalálható, figyelembe véve, hogy itt $AOB\sphericalangle = 60°$. Az AOB szabályos háromszögből a szabályos hatszög egyértelműen megszerkeszthető.

2184. Az ABC szabályos háromszöget a O középpont körüli 120°-os elforgatás önmagába viszi át (**2184.** ábra). AC egyenes képe (az ábra szerinti forgatás esetén) AB egyenes. Ezért, ha az adott P pontot 120°-kal elforgatjuk O körül, $P' \in AB$. Így $P'Q$ egyenese megadja a háromszög egyik oldalegyenesét. Ebből (pl. az egyenes visszaforgatásával az A csúcs és így) a szabályos háromszög egyértelműen megszerkeszthető.
Ha $P' = Q$, akkor AB egyenes nincs egyértelműen meghatározva. Ekkor végtelen sok megfelelő szabályos háromszög van.
Ha $O \in P'Q$, akkor nincs megoldás.
P ellentétes irányú forgatása a feltételeknek megfelelő másik szabályos háromszöget eredményezhet.
A fentiek szerint a feladatnak 1, 2 vagy végtelen sok megoldása van.



2184



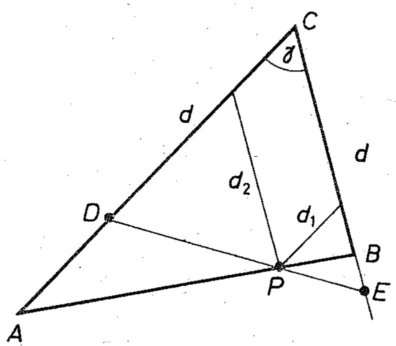
2185

2185. Az oldalak arányának ismeretében a keresetthez hasonló háromszög megszerkeszthető. Ebből α meghatározható (**2185.** ábra).
C' felezi AC-t. Így ha $C \in k$, akkor az A középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság C-t C'-be, k-t k'-be viszi, ahol $C' \in k'$.

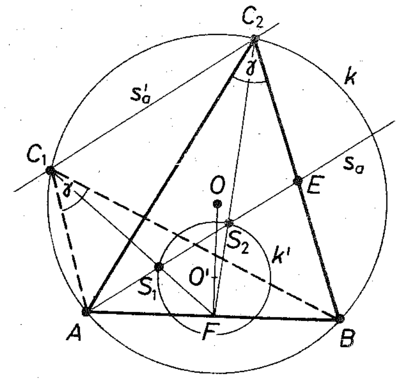
C'-nek A középpontú α szögű elforgatottja B, ezért B illeszkedik a k' kör A középpontú α szögű elforgatottjára, k''-re.
Tehát e és k'' közös pontja(i) az alap másik végpontja(i) lesz(nek). Ebből a háromszög egyértelműen megszerkeszthető.
A megoldások száma k'' és e közös pontjainak számától függ, figyelembe véve, hogy az α szögű forgatás két irányba történhet.
Megjegyzés: ABC úgy is megszerkeszthető, ha e-re egy A középpontú 2 arányú hasonlóság és egy α szögű elforgatás egymásutánját alkalmazzuk.

2186. CDE d szárú γ csúcsszögű egyenlő szárú háromszög (**2186.** ábra). A DE alap tetszőleges pontján keresztül a szárakkal párhuzamos egyenesek háromszögbe eső szakaszainak összege $d_1 + d_2 = d$.
Így a keresett P pont DE és AB egyenesek metszéspontja. $b > a$ esetén akkor van ilyen pont az AB oldalon, ha $a \leqq d \leqq b$. Ha $b = a$, akkor a fentiek szerint csak $d = a = b$ esetén van ilyen pont, mégpedig az AB oldal minden pontja jó.

2187. *I. megoldás:* A háromszög köré írható köre – AB γ szögű látóköre – megszerkeszthető. (A két látókörív közül azzal dolgozunk, amely metszi s_a-t.) (**2187.** ábra.)



2186



2187

Az F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság C-t az S súlypontba, a C-t tartalmazó k-t k'-be viszi át. Így $S \in k'$ és $S \in s_a$. Ezért k' és s_a metszéspontja: S. Ebből ABC egyértelműen megkapható.
A megoldások száma k' és s_a közös pontjainak a száma (0, 1, 2).

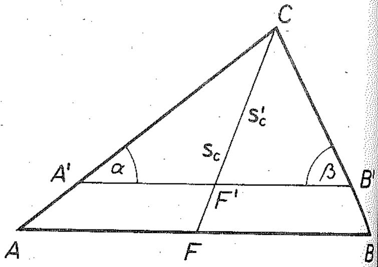
II. megoldás: Egyrészt C illeszkedik az AB szakasz γ szögű k látókörére. Másrészt s_a illeszkedik a BC szakasz E felezőpontjára. Ezért a B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóság E-t C-be, s_a-t a vele párhuzamos s_a'-be viszi.

Így a keresett C csúcs s_a' és k közös pontja.

A megoldások száma 2, 1 vagy 0.

2188. Az adott szögekkel a keresetthez hasonló háromszög szerkeszthető.

A hasonlóság aránya $\frac{s_c'}{s_c}$, és pl. $A'F' = \frac{c'}{2}$ ismeretében AF, majd ABC egyértelműen megszerkeszthető (**2188.** ábra).

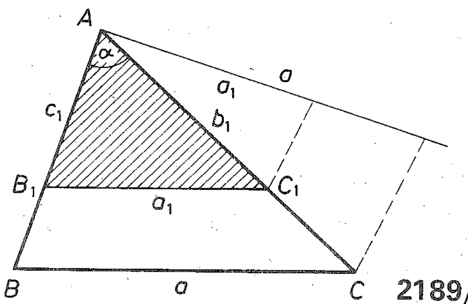


2188

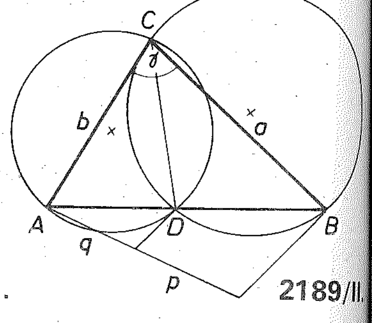
2189. *I. megoldás:* A keresett háromszöghöz hasonló AC_1B_1 háromszöget szerkesztünk: b_1, c_1 oldalakkal és az α közbezárt szöggel, ahol $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b}{c}$ (**2189**/I. ábra).

Az A középpontú $\lambda = \frac{a}{a_1}$ arányú középpontos hasonlóság alkalmazásával a keresett háromszög megszerkeszthető.

II. megoldás: Az adott $q : p = b : a$ arányban felosztott AB-n D a γ szögfelezőjének pontja (a szögfelező-tétel szerint). Tehát C az AD, illetve DB szakaszokhoz tartozó $\frac{\gamma}{2}$ szögű látókörök D-től különböző metszéspontja. $\left(\text{Ez létezik, mivel } \gamma < 180° \text{ miatt } \frac{\gamma}{2} < 90°.\right)$ (**2189**/II. ábra.)



2189/I.



2189/II.

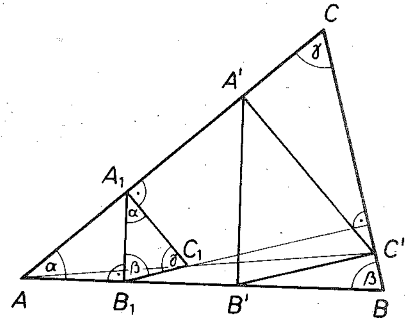
2190. Vegyünk fel a hegyesszögű háromszög AB oldalán olyan B_1 pontot, hogy B_1-ben az AB-re emelt merőleges metssze az AC oldalt egy A_1 pontban. Állítsunk merőlegest B_1-ben BC-re és A_1-ben AC-re. A két egyenes metszéspontja C_1. Az ábráról leolvasható, hogy $B_1A_1C_1 \sphericalangle = \alpha$ és $A_1B_1C_1 \sphericalangle = \beta$. Így $B_1C_1A_1 \sphericalangle = \gamma$, tehát $A_1B_1C_1$ a megszerkesztendő $A'B'C'$ háromszöghöz hasonló helyzetű.

A keresett $A'B'C'$ háromszöget $A_1B_1C_1$-ből A középpontú középpontos hasonlósággal állítjuk elő. AC_1 félegyenes BC oldalt C'-ben metszi. E pontból C_1A_1-gyel és C_1B_1-gyel párhuzamosokat húzva megkapjuk a keresett $A'B'C'$ háromszöget (**2190.** *a)* ábra).

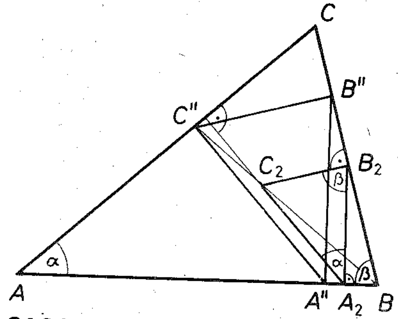
A fentiekhez hasonló eljárással egy másik megfelelő ($A''B''C''$) háromszöget kapunk, ha A_2 AB-nek olyan pontja, hogy az A_2-ben emelt merőleges a BC oldalt metszi (**2190.** *b)* ábra).

Ha ABC háromszög derékszögű, akkor $A'B'C'$ és $A''B''C''$ háromszögek átfogója az eredeti háromszög átfogóhoz tartozó magassága (**2190.** *c)* ábra).

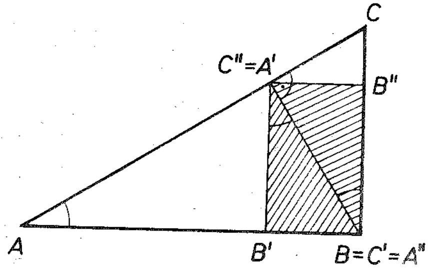
Ha ABC tompaszögű háromszög, *nincs* a feladatnak megfelelő *beírt* háromszög. (A fenti eljárással kapott $A'B'C'$ és $A''B''C''$ háromszögek csúcsai az ABC háromszög oldalegyeneseire illeszkednek.)



2190a

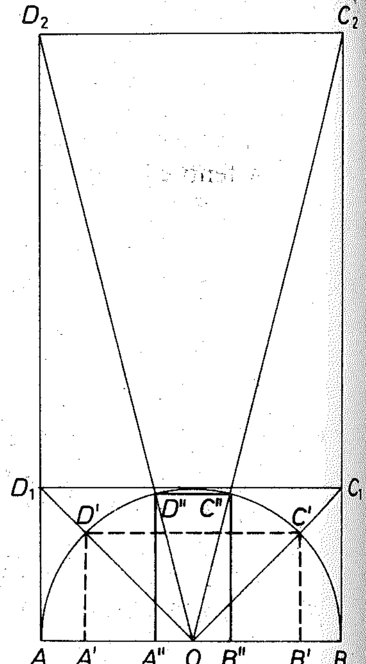


2190b



2190c

2191. Két téglalap felel meg a követelményeknek: $A'B'C'D'$ és $A''B''C''D''$ (**2191.** ábra).
Legyen az ezekhez hasonló téglalap egyik oldala a félkör AB átmérője. A téglalap másik oldala a feltétel szerint $2AB$ vagy $\frac{1}{2}AB$.
A keresett téglalapokat O középpontú hasonlósággal állítjuk elő.
A megoldások száma: 2.

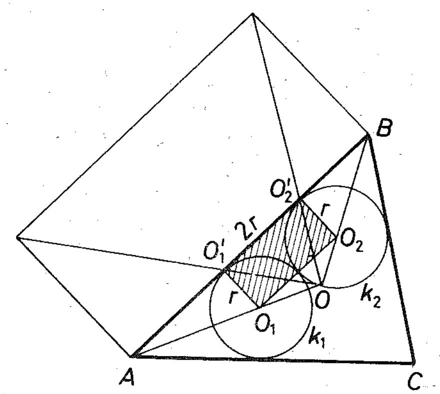


2191

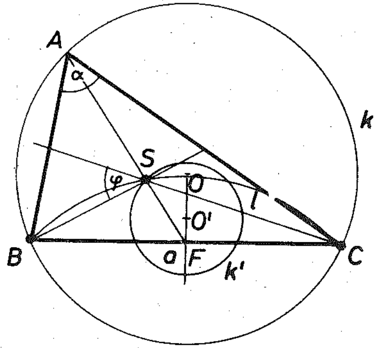
2192. Érintse pl. k_1 kör a b és c, k_2 kör az a és c oldalt (**2192.** ábra). Ekkor O_1 és O_2 középpontoknak a c oldalra eső merőleges vetületei O_1', O_2'. $O_1O_2O_2'O_1'$ téglalap, oldalai $2r$, r.
O_1, illetve O_2 rajta van a háromszög AO, illetve BO belső szögfelezőjén. Így $O_1O_2O_2'O_1'$ az AOB háromszögbe írt olyan téglalap, amelynek egyik oldala illeszkedik AB-re, és ez a téglalap másik oldalának kétszerese.
Az AOB háromszög egyértelműen meghatározható. A beírt téglalapot (illetve O_1, O_2 pontot) egy AB oldalhoz írt c, $\frac{1}{2}c$ oldalú téglalapból O középpontú középpontos hasonlósággal kapjuk meg.
Mivel a két kör együttesen az ABC háromszög a, b vagy c oldalait érintheti, így a megoldások száma: 3. (A háromszor két kör közül az egyenlő szárú háromszögeknél a szárakat érintő körök egybevágóak, és kettő egybeesik, szabályos háromszög esetén a hat helyett csak három egybevágó kör jön létre.)

2193. A háromszögbe írt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja, sugara, ennek a pontnak az oldalaktól mért távolsága.
Szerkesszük meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög beírt körének az átfogóval párhuzamos érintőjét. Ez az egyenes a befogókból egy újabb egyenlő szárú derékszögű háromszöget metsz le.
A fenti eljárással megszerkeszthető az így kapott háromszögbe írható kör. Ez az eredeti háromszög beírt körét is érinti. (A két kör középpontja, s ezért az érintési pont is illeszkedik a derékszög szögfelezőjére.)

2194. Az a oldalhoz tartozó α látószög segítségével a háromszög köré írható köre megrajzolható (**2194.** ábra).
Az F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság az A csúcsot S-be, így a háromszög köré írt körét egy S ponton átmenő k' körbe viszi.
S tehát illeszkedik az a szakasz adott BSC szögű l látókörére és a k' körre. Ebből S megszerkeszthető. FS félegyenes a köré írt körből kimetszi a háromszög A csúcsát.
Nincs megoldás, ha 1) $\alpha \geqq BSC\sphericalangle$, mert S a háromszög belső pontja, vagy ha 2) l és k' köríveknek nincs közös pontjuk.
Megjegyzés: Az s_c és s_b súlyvonalak hajlásszöge $BSC\sphericalangle$, vagy ha $BSC\sphericalangle > 90°$, akkor $180° - BSC\sphericalangle$.
Keletkezhet 2 vagy 4 háromszög is, de ezek tükrösek, tehát egybevágóak. Így a megoldások száma: 1.



2192

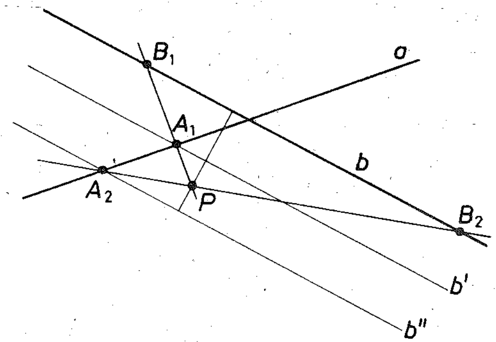


2194

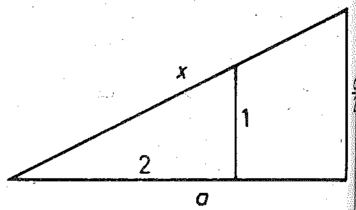
2195. Ha egy egyenes három pontjára $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$ áll fenn, akkor két eset lehetsé
ges (**2195.** ábra):

1. P A-t és B-t nem választja el. Ekkor a P középpontú $\frac{1}{3}$ arány
hasonlóság B-t A-ba viszi. Így a B-n átmenő b egyenes képe, b' illeszke
dik A-ra. $b' \| b$, ezért b' metszi a-t A_1-ben. A_1P egyenes b-t B_1-be
metszi. Az eljárásból következik; hogy a $\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{1}{3}$ egyenlőség teljesü

2. Ha P az AB szakasz pontja, akkor a P középpontú $-\frac{1}{3}$ arány
hasonlóság B-t A-ba viszi. Ezt a hasonlóságot b egyenesre alkalmazv
az előzőhöz hasonlóan adódó A_2B_2 egyenes a feltételeket kielégíti.



2195



219

2196. Az adott x szakasz egy a, $\frac{a}{2}$ befogójú derékszögű háromszög átfogój
ahol a a négyzet oldala. Ez a háromszög hasonló az 1, 2 befogójú (√
átfogójú) derékszögű háromszöghöz. Ez utóbbi megszerkeszthető é
ebből $\left(\frac{x}{\sqrt{5}} \text{ arányú}\right)$ hasonlósággal megkapjuk a négyzet oldalát (**219**
ábra).

2197. Az adott A csúcsnak az AB oldal F felezőpontjára vonatkozó tükörk
pe B. Mivel a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, ezért
feladatnak csak akkor van megoldása, ha AOB derékszögű háromszö

ahol O az AC szakasz felezőpontja. Ha ez teljesül, a rombusz D csúcsa a B pont O-ra vonatkozó tükörképe.
F lehet a C csúcs mellett fekvő egyik oldal felezőpontja is. Így legyen C-nek F-re vonatkozó tükörképe C'. Ha $COC' \sphericalangle$ derékszög, akkor létezik és a fentiek szerint megszerkeszthető a rombusz.

2198. Az a oldalú rombusz e, f $(e \leqq f)$ átlói merőlegesen felezik egymást. A Pitagorasz-tétel szerint:

$$\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 = a^2.$$

Minthogy $f > a$, a szóba jöhető derékszögű háromszög átfogója csak f lehet.

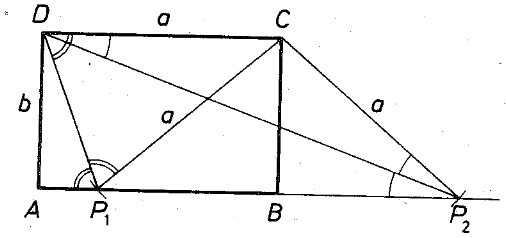
$$f^2 = e^2 + a^2,$$

$$f^2 = e^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2,$$

$$3f^2 = 5e^2, \quad \text{azaz} \quad \frac{e}{f} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

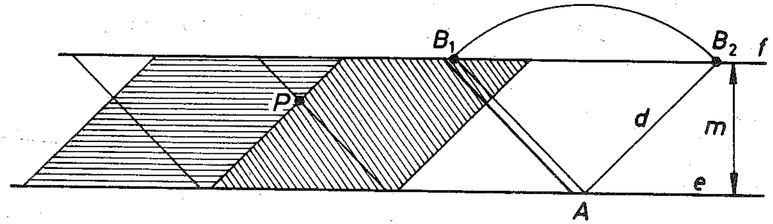
Akkor és csak akkor alkot f, e, a derékszögű háromszöget, ha $e = \sqrt{\frac{3}{5}} f$ teljesül. Ekkor $a = f\sqrt{\frac{2}{5}}$, azaz $e : a : f = \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{5}$.

2199. A feltétel szerint $DPA \sphericalangle = DPC \sphericalangle$. $AP \| DC$ miatt $DPA \sphericalangle = PDC \sphericalangle$, mert váltószögek. Így $DPC \sphericalangle = PDC \sphericalangle$, azaz DCP egyenlő szárú háromszög (**2199.** ábra).
Ezért a C középpontú $CD = a$ sugarú kör és az AB egyenes közös pontja a keresett P pont. $a > b$ esetén 2, $a = b$ esetén 1 megfelelő pont létezik. $a < b$ esetén nincs az AB egyenesnek olyan pontja, amelyből AD és DC egyenlő szögben látszana.



2199

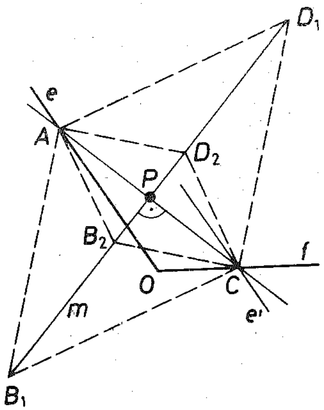
2200. Jelöljük e és f távolságát m-mel (**2200.** ábra)!
Ha $m>d$, akkor nincs megfelelő rombusz.
Ha $m=d$, akkor P-ből e-re állított merőlegesnek a párhuzamosok köz eső szakasza megadja a speciális rombusz (négyzet) egyik oldalá Ebből két megfelelő négyzet szerkeszthető.
Ha $m<d$, az e egyenes egy tetszőleges A pontja mint középpont köré rajzolt d sugarú kör kimetszi f egyenesből a d oldalú rombusz A mellet B csúcsát. (Két rombuszt kapunk!) Ha P-n keresztül AB-vel párhuz most húzunk, megkapjuk a keresett rombusz egyik oldalát. Ezt d-ve (mindkét irányba) eltolva 2-2, a feltételeket kielégítő rombuszt kapunk



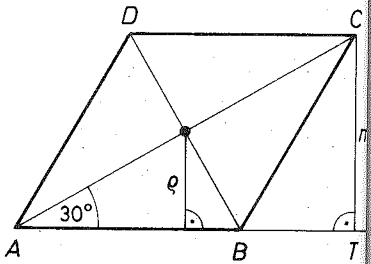
220

2201. A rombusz átlói felezik egymást, ezért A-nak P-re vonatkozó tükörké pe C. Ha $A \in e$, akkor $A'=C \in e'$ és $C \in f$. A konvex szögtartomán miatt e' és f metszik egymást. C P-re vonatkozó tükörképe A (**220** ábra).
BD az AC-re szimmetrikus. Az adott arány felhasználásával két megf lelő rombusz szerkeszthető.

2202. Az előző feladat útmutatása és ábrája szerint AC megszerkeszthető. A rombusz másik két csúcsa AC szakaszfelező-merőlegesére (m-re illeszkedik. A feladatnak akkor van megoldása, ha m metszi e- (A megoldások száma 0 vagy 1.)



2201



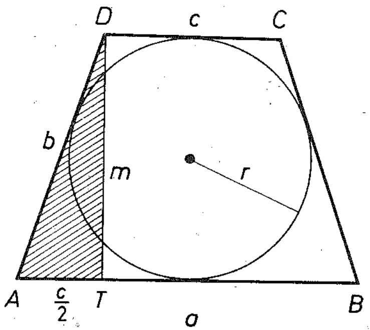
220

2203. ATC háromszögben $TC=m=2\varrho$, $AC=2m$ $(=4\varrho)$, így $CAT\sphericalangle=30°$. Ennek alapján ATC háromszög megszerkeszthető (**2203.** ábra). AC szakaszfelező-merőlegesének AT-vel való metszéspontja B. Ebből a rombusz egyértelműen megszerkeszthető.

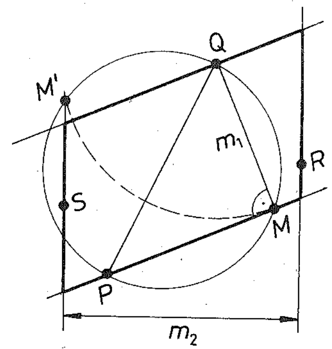
2204. *a)* A feltételek szerint $a=2c$, $m=2r$, valamint $b=\frac{a+c}{2}=\frac{3}{2}c$. Az ATD derékszögű háromszögben $\left(\frac{3}{2}c\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2=(2r)^2$. Ebből $c=\sqrt{2}r$, $a=2\sqrt{2}r$ és $b=\frac{3\sqrt{2}}{2}r$ adódik (**2204.** ábra).
b) A beírt körhöz húzott párhuzamos érintőkre, az érintési pontokból két irányba $\frac{c}{2}$, illetve c szakaszok felmérésével a C, D, illetve A, B csúcsokhoz jutunk.

2205. A párhuzamos oldalakra illeszkedő pontokat jelöljük P, Q-val, illetve R, S-sel (**2205.** ábra).
PQ szakasz Thalész-köre és a Q középpontú m_1 sugarú kör közös pontja M. A paralelogramma két oldalegyenese PM, és a vele párhuzamos Q-n átmenő egyenes.
Csak akkor van megoldás, ha $m_1 \leqq PQ$. ($m_1<PQ$ esetén két, $m_1=PQ$ esetén egy párhuzamos oldalegyenespárt kapunk.)
A másik két párhuzamos oldalegyenest (RS és m_2 segítségével) ugyanígy kapjuk.

2206. Jelöljük a négyzet oldalát a-val, a téglalapét b, c-vel ($b<c$). A négyzetből levágandó téglalap rövidebb oldala x. A hasonlóság alapján $x:a=b:c$. Ebből x-et pl. a párhuzamos szelők tételének segítségével szerkeszthetjük meg.

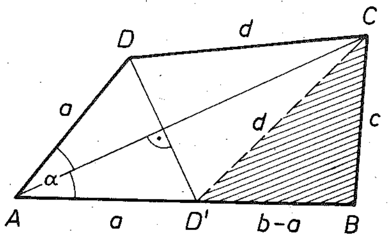


2204

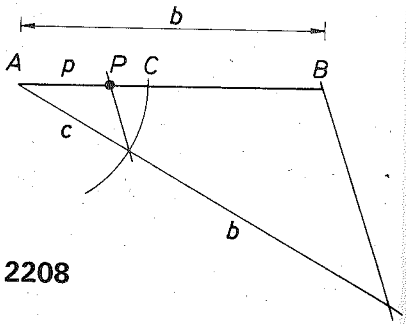


2205

2207. Ha $b>a$; tükrözzük a D csúcsot az α szög AC felezőjére (**2207.** ábra). A kapott $AD'CD$ négyszög deltoid. A $D'BC$ háromszög (c, d, $b-a$ oldalakból) megszerkeszthető. B-ből a BD' félegyenesre b-t felmérve megkapjuk az A csúcsot, majd a D' pontot AC-re tükrözve D-t.
A szerkesztés feltétele: $b-a$, c és d szakaszokra teljesüljön a háromszög-egyenlőtlenség.



2207



2208

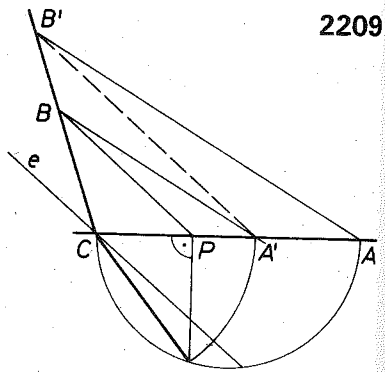
(Ha $b<a$, akkor a fentihez hasonlóan először az $a-b$, c, d oldalú $B'CD$ háromszöget szerkesztjük meg.)
Ha $a=b$, akkor AC átló csak akkor lehet szögfelező is, ha egyúttal $c=d$ is teljesül. (Ha $c \neq d$, akkor nincs megfelelő négyszög.) Az $ABCD$ deltoid az oldalaival nem egyértelműen meghatározott, így végtelen sok megoldás van.

2208. Legyen $AC=c$, $AB=b$ és $AP=p$. A feltétel szerint $p^2 = (c-p)(b-p)$. Ebből $p = \dfrac{bc}{b+c}$ adódik. p-t és így a keresett P pontot negyedik arányos szerkesztéssel határozhatjuk meg (**2208.** ábra).

2209. Az e-vel párhuzamos B-n átmenő egyenes CA félegyenest P-ben metszi (**2209.** ábra). Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az ACB szögre!

$A'B \| AB'$ miatt $\dfrac{CA'}{CA} = \dfrac{CB}{CB'}$ és

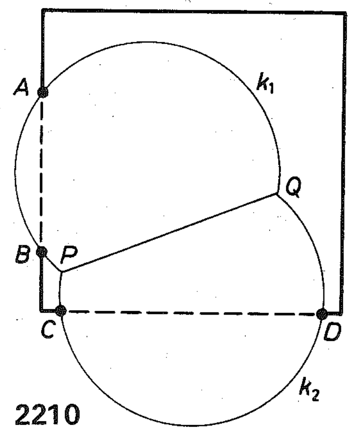
$A'B' \| e \| PB$ miatt $\dfrac{CB}{CB'} = \dfrac{CP}{CA'}$.



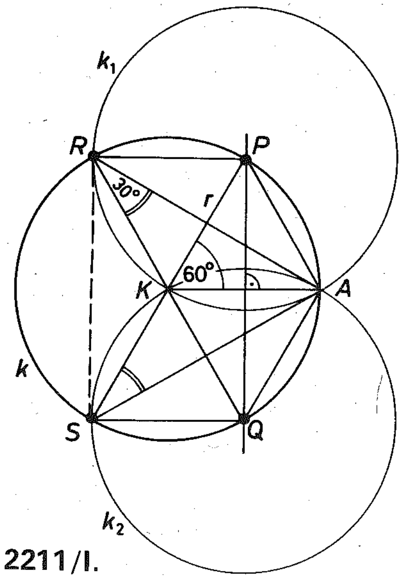
2209

Ezekből $(CA')^2 = CA \cdot CP$. Így CA' megszerkeszthető: például egy olyan derékszögű háromszög befogója, amelynek átfogója CA és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete CP.

2210. *a)* A PQ szakasz 60°-os látóköreinek (k_1, k_2) a négyzet oldalaival való közös pontjai (itt: A, B, C, D) (**2210.** ábra).
b) A négyzet oldalainak azon pontjai, amelyek a k_1 és k_2 ívek által határolt körszeletek belső pontjai (itt: AB és CD szakaszok belső pontjai).
c) A négyzet oldalainak a fenti körszeleteken kívül fekvő pontjai. (Az ábrán a négyzet oldalainak az AB és CD szakaszokhoz nem tartozó pontjai.)
Az adatokat figyelembe véve egy látókörív legfeljebb két szomszédos oldalt metszhet és a két körív közül legalább az egyiknek két metszéspontja van az egyik oldallal.



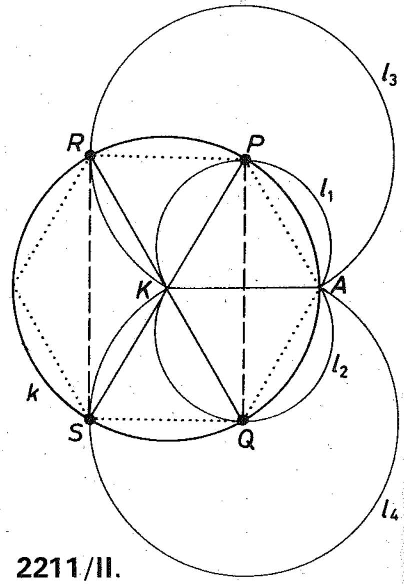
2210



2211/I.

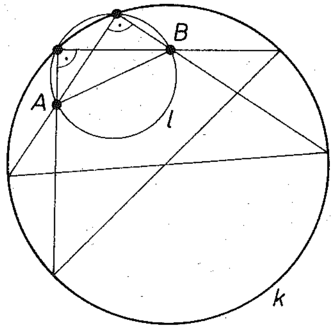
2211. *I. megoldás* (**2211**/I. ábra):
a) Ha $PKA\sphericalangle = 60°$, akkor APK háromszög szabályos. P (illetve Q) az AK szakaszfelező-merőlegese és a k kör közös pontja.
b) A P (illetve Q) középpontú, r sugarú k_1 (illetve k_2) kör k-ból R-et (illetve S-et) metszi ki. Ezekből a középponti és kerületi szögek összefüggése alapján $ARK\sphericalangle (= ASK\sphericalangle) = 30°$.
Minthogy $RP \| AK \| SQ \perp PQ$, a $PQSR$ négyszög téglalap, oldalai r és $r\sqrt{3}$.

II. megoldás (**2211**/II. ábra):
A keresett pontokat a k körből az AK szakaszhoz tartozó *a)* 60°-os l_1, l_2, illetve *b)* 30°-os l_3, l_4 látókörök metszik ki. PR és SQ a K középpontú r sugarú körbe írt szabályos hatszög 2 szemközti oldala, ebből adódóan e négy pont téglalapot határoz meg.

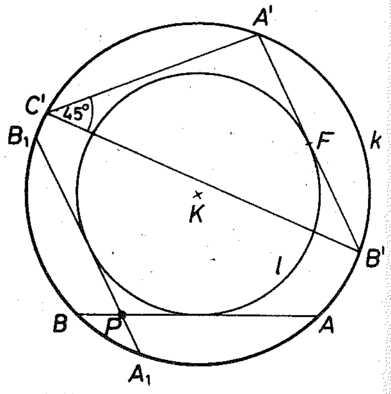


2211/II.

2212. A háromszög derékszögű csúcspontja a k kör és az AB átmérőjű l Thalész-kör közös pontja (**2212.** ábra).
A megoldások száma 2, 1 vagy 0.
Megjegyzés: A és B a k kör belső pontja, tehát l és k kör nem lehet azonos.



2212

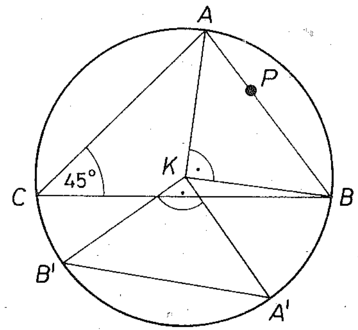


2213/I.

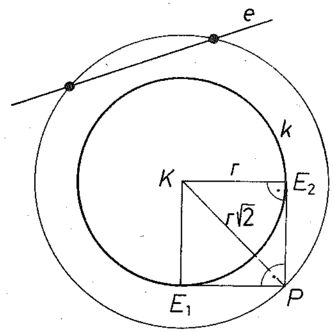
2213. *I. megoldás* (**2213**/I. ábra):
A kör tetszőleges C' pontjából húzott két húr – melyek hajlásszöge 45° – A'-ben és B'-ben metszi a k kört. Egy körben egyenlő kerületi szögekhez egyenlő húrok tartoznak. Ezért a keresett, P-re illeszkedő húrt megkapjuk, ha $A'B'$-t megfelelően elforgatjuk. $A'B'$ szakasz felezőpontja F. A K közepű, KF sugarú l körhöz P-ből húzott érintőből a keresett húrt a k kör metszi ki.

Ha P illeszkedik l-re: 1 megoldás van ($KP=KF$).
Ha P l-en kívül van, 2 megoldás van ($KP>KF$).
Ha P l-en belül van, nincs megoldás ($KP<KF$).
II. megoldás (**2213**/II. ábra):
Legyen AB egy, a feltételeknek megfelelő, P-re illeszkedő húr. A kerületi és középponti szögek összefüggése szerint: $AKB\sphericalangle=90°$. Az AKB háromszöggel egybevágó, egyenlő szárú derékszögű $A'KB'$ háromszög megszerkeszthető. Az $A'B'$-t K körül a fentiek szerint elforgatva kapjuk a keresett AB szakaszt.

2214. A P pontból a K középpontú, r sugarú körhöz húzott érintők merőlegesek, ezért KE_1PE_2 négyzet és $PK = r\sqrt{2}$ (**2214.** ábra). Így azon P pontok halmaza, amelyből a k körhöz húzott érintők merőlegesek egymásra, a K középpontú, $r\sqrt{2}$ sugarú l kör. A keresett pont az e egyenes és l kör közös pontja.
A megoldások száma lehet 2, 1 vagy 0, attól függően, hogy K-nak az e egyenestől mért távolsága kisebb, egyenlő vagy nagyobb, mint $r\sqrt{2}$.

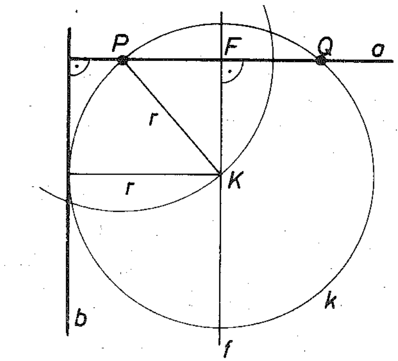


2213/II.



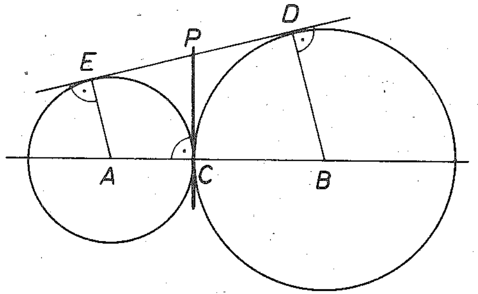
2214

2215. A keresett k kör K középpontja illeszkedik PQ f felezőmerőlegesére (**2215.** ábra). A kör sugara K-nak b-től mért távolsága r. Így PQ szakasz felezőmerőlegese és a P közepű, r sugarú kör metszéspontja K.
(Mindig van megoldás, mivel $PF<r$.)

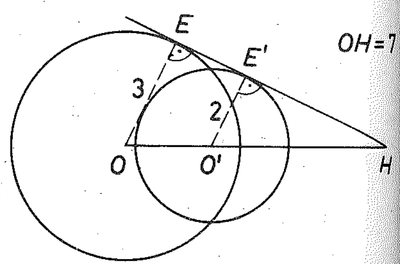


2215

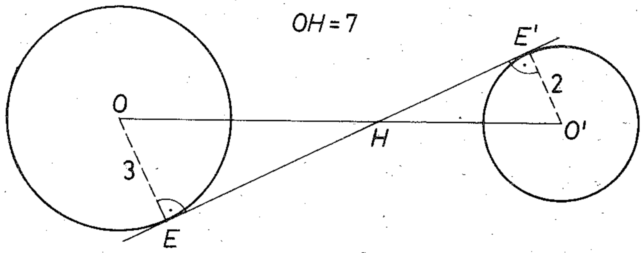
2216. A feltételek szerint a két kör kívülről érinti egymást (mert csak így szerepelhet két különböző érintési pont) (**2216.** ábra). $ABDE$ derékszögű trapéz: az érintési pontokhoz tartozó sugár AE, illetve BD merőleges ED-re, a közös érintőre. $AEPC$ és $BDPC$ akkor és csak akkor húrnégyszög, ha C-nél levő szöge derékszög. A megoldás a két kör C-beli közös (belső) érintője.



2216



2217a



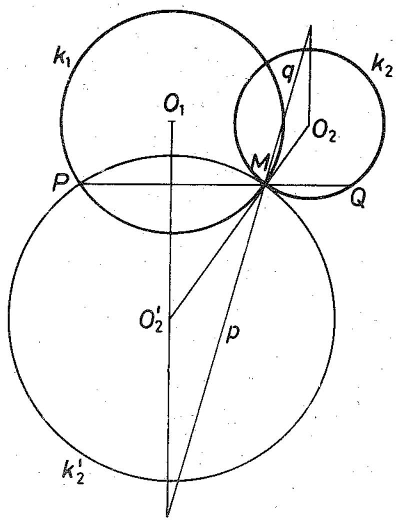
2217b

2217. Két eset lehetséges: H a két kör *a)* külső vagy *b)* belső hasonlósági pontja (**2217.** *a), b)* ábra).
Ezért $HEO\triangle \sim HE'O'\triangle$, ahol $EO=3$ cm, $E'O'=2$ cm és $HO=7$ cm.
Így $\frac{HO'}{HO}=\frac{2}{3}$, amiből $HO'=\frac{14}{3}$.
Ennek alapján az OO' szakasz hossza kiszámítható:
Az *a)* esetben $OO'=7-\frac{14}{3}=\frac{7}{3}$ (cm);
b) esetben $OO'=7+\frac{14}{3}=\frac{35}{3}$ (cm).

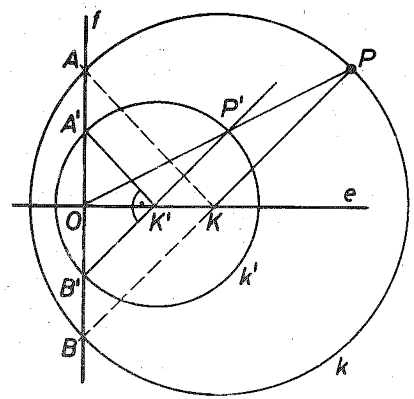
2218. Ismert, hogy két érintkező kör M érintési pontja egyben a két kör hasonlósági pontja. Ezért az M-re illeszkedő szelőkből a két kör által kimetszett húrok aránya egyenlő a hasonlóság λ arányával (**2218.** ábra).

Tegyük fel, hogy PQ a keresett szelő. Erre $\frac{PM}{QM}=\frac{p}{q}$ (ahol p, q a két adott szakasz hossza). Az M középpontú $\lambda=-\frac{p}{q}$ arányú hasonlóság Q-t P-be, a Q-ra illeszkedő k_2 kört a $Q'=P$-n átmenő k_2' körbe viszi. Így k_2' és k_1 metszéspontjai M és P.
(k_2' és k_1 mindig metszők, ezért kiválasztott M esetén P egyértelműen meghatározott.)

2219. Az egyik feltétel szerint $AKB\sphericalangle=90°$ és K-●-e, ezért $AKO\sphericalangle=BKO\sphericalangle=45°$ (**2219.** ábra).
Szerkesszünk ezen feltételeket kielégítő, K' középpontú k' kört. (K'-●-e, valamint $K'B'=K'A'$, azaz $r'=\sqrt{2}K'O$.) Ezt a O középpontú $\lambda=\frac{OP}{OP'}$ arányú hasonlóság a keresett k körbe viszi.

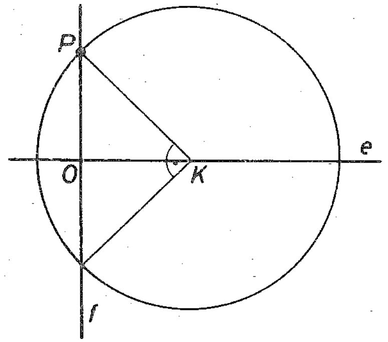


2218

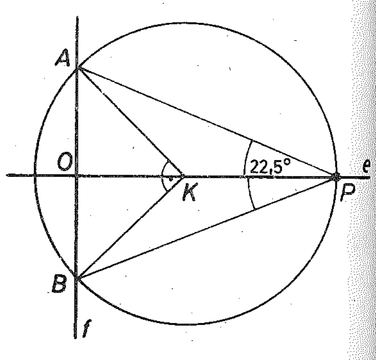


2219

A következő két speciális esetben a szerkesztés egyszerűbb:
a) Ha P-●-f, akkor $PO = OK$ alapján kapjuk meg K-t (**2219.***a)* ábra).
b) Ha P-●-e, akkor a kerületi és középponti szögek összefüggése alapján $OPA\sphericalangle = OPB\sphericalangle = 22{,}5°$. Ennek alapján szerkeszthető meg A-●-f és B-●-f pont.
Az AB átmérőjű Thalész-kör és e metszéspontja: K (**2219.***b)* ábra).



2219a



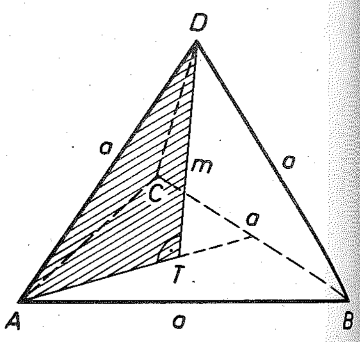
2219b

2220. A szabályos tetraéder magasságának talppontja az alapháromszög súlypontja (**2220.** ábra).
I. megoldás: Az a élű tetraéder m magassága a DTA derékszögű háromszögből meghatározható $TA = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ figyelembevételével:

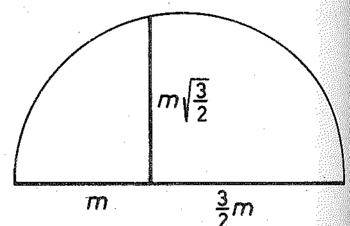
$$m^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}a^2.$$

Innen $a = m\sqrt{\frac{3}{2}}$ adódik.

A tetreaéder keresett a éle megszerkeszthető pl. a magasságtétellel (**2220**/I. ábra).

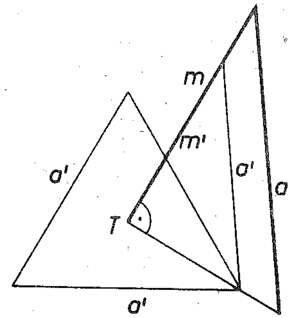


2220

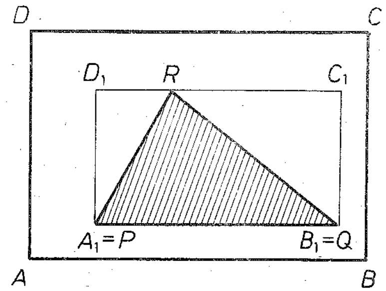


2220/I.

II. megoldás: A keresett a élű m magasságú tetraéderhez hasonló a' élű tetraéder magassága m'. A hasonlóság miatt $a : a' = m : m'$. Ezért tetszőlegesen választott a'-ből megszerkesztjük a keresett tetraéderben feltüntetett ATD derékszögű háromszöghöz hasonlót, majd $\lambda = \frac{m}{m'}$ arányú hasonlóság alkalmazásával megkaphatjuk a-t.



2220/II.



2221a

Megjegyzés: A **2220**/II. ábrában a testmagasságot tartalmazó ATD derékszögű háromszöget a gúla alaplapjának síkjába forgattuk az alaplap súlyvonala körül.

2221. Húzzunk a háromszög P, Q, R csúcsain keresztül az $ABCD$ téglalap valamelyik vagy mindkét oldalával párhuzamos egyenest, ha ez a háromszöget nem metszi. Egy olyan $A_1B_1C_1D_1$ téglalapot kapunk, amelynek beírt háromszöge PQR. Ezt a téglalapot az eredeti téglalap tartalmazza, ezért

$t(ABCD) \geqq t(A_1B_1C_1D_1)$.

a) Ha PQR háromszög két csúcspontja egybeesik az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap két szomszédos csúcspontjával, itt $P = A_1$, $Q = B_1$, akkor a háromszög harmadik csúcspontjából, R-ből induló magassága egyenlő A_1D_1-gyel (**2221.***a)* ábra). Ezért

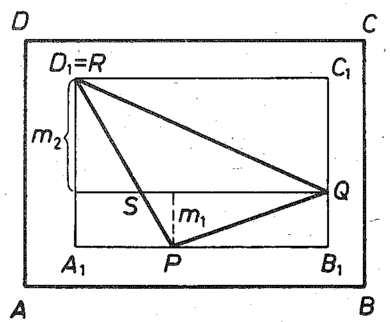
$$t(PQR) = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot A_1D_1 = \frac{1}{2} \cdot t(A_1B_1C_1D_1).$$

b) Ha a PQR háromszög egyik csúcspontja egybeesik az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap egyik csúcspontjával (itt $R = D_1$), másik két csúcspontja a

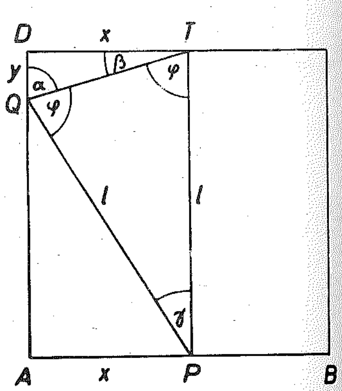
D_1-gyel szemközti egy-egy oldal belső pontja, akkor e két utóbbi csúcspont egyikén át (itt Q-n át) a téglalap megfelelő (A_1B_1) oldalával párhuzamosan húzott egyenes S-ben metszi a háromszög szemköztes oldalát (**2221.**b) ábra).

Legyen m a paralelogramma A_1B_1 oldalához, m_1 a PQS, m_2 a QRS háromszög QS oldalához tartozó magassága. Ekkor $m_1+m_2 = m$ és a PQR háromszög területe

$$\frac{1}{2}QS\cdot m_1+\frac{1}{2}QS\cdot m_2=\frac{1}{2}QS\cdot m\leqq\frac{1}{2}A_1B_1\cdot m=\frac{1}{2}t(A_1B_1C_1D_1).$$



2221b



2222

2222. A létra hossza l, lecsúszása y, kicsúszása x. A csúszás egyik pillanatában a létra alja P, teteje Q pontba kerül (**2222.** ábra).

I. megoldás: Az APQ háromszögben, a háromszög-egyenlőtlenség szerint: $QA+AP > QP$, azaz $l-y+x > l$. Tehát a szélső helyzeteket ($x=0$, $x=l$) leszámítva $x>y$. A szélső helyzetekben nincs háromszög és $x=y=0$, illetve $x=y=l$.

II. megoldás: Legyen $PT\|AD$. Ekkor $DT=x$. A QDT derékszögű háromszög befogói y, x, a velük szemköztes szögek β és α. QTP egyenlő szárú háromszög (szára l), alapon fekvő szöge φ, szárszöge γ. $\beta = 90°-\varphi$, $\alpha = 180°-\varphi-\gamma = (90°-\varphi)+(90°-\gamma) = \beta+(90°-\gamma)$. A létra mozgása során $0°<\gamma<90°$, ezért ekkor $\alpha>\beta$ s így $x>y$.

2223. A háromszög szögei α, β, γ, ezért $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. A feltételt kielégítő háromszögeknél léteznek olyan a, b, c pozitív egész számok, amelyekre $a\alpha=b\beta=c\gamma=180°$. A két összefüggésből az

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$ diofantoszi egyenlet adódik.

Feltételezhetjük: $a\leqq b\leqq c$. Így $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq 3\cdot\frac{1}{a}$, azaz $a\leqq 3$.

$a=1$ nem lehet.

$a=2$ esetben $\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq\frac{2}{b}$, így $b\leqq 4$.

Mivel $b=2$ nem lehet, $b=3$ vagy $b=4$. Ekkor $c=6$, illetve $c=4$.

$a=3$ esetben $\frac{2}{3}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq\frac{2}{b}$, így $b\leqq 3$.

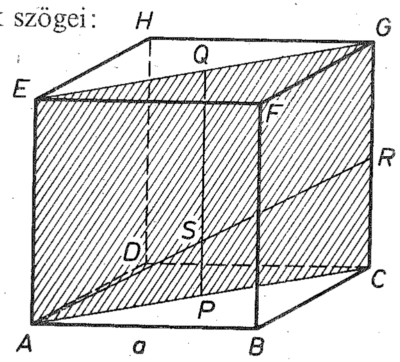
$b\geqq a=3$ miatt $b=3$ lehet csak. Ekkor $c=3$.

Ezek alapján a keresett háromszögek szögei:

$a)$ 90°, 60°, 30°;

$b)$ 90°, 45°, 45°;

$c)$ 60°, 60°, 60°.



2224

2224. AR és PQ az $ACGE$ sík nem párhuzamos egyenesei, ezért metszik egymást. $QP\|RC$ és P az AC-t felezi, ezért PS a CAR háromszög középvonala (**2224.** ábra).

Így $PS=\frac{1}{2}\cdot CR=\frac{a}{4}$, $SQ=\frac{3}{4}a$.

Az ACR derékszögű háromszögből $AR^2 = AC^2+CR^2 = 2a^2+\frac{1}{4}a^2 = \frac{9}{4}a^2$, azaz $AR=\frac{3}{2}a$. S (a fentiek szerint) AR felezőpontja, ezért

$SA=SR=\frac{3}{4}a$.

Tehát $SA=SQ=SR$.

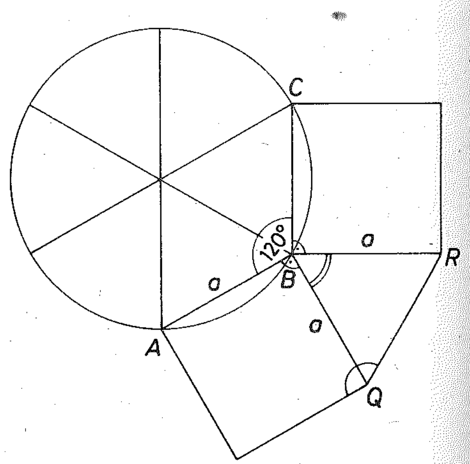
2225. A téglalap oldalai a, b.

$$\frac{k^2}{16}=\frac{4(a+b)^2}{16}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqq ab=T,$$ a két pozitív szám számtani és mértani közepe közti összefüggés alapján.

2226. Ismert, hogy a (konvex) sokszögek külső szögeinek összege 360°. (Lásd az **1702**-es feladat megoldását.)

Konvex sokszögnek legfeljebb 3 hegyesszöge lehet, mert ha lenne 4 hegyesszöge, akkor a külső szögek között lenne 4 tompaszög, s ezek összege 360°-nál nagyobb lenne.

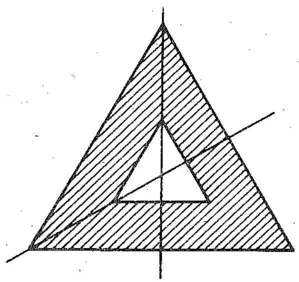
2227. A tizenkétszög oldalai a szabályos hatszög oldalaival egyenlőek, mert pl. $ABQP$ négyzet és BQR szabályos háromszög, hiszen $QBR\sphericalangle = 60°$ (**2227.** ábra). A tizenkétszög minden szöge $90° + 60° = 150°$.
Tehát a kapott sokszög szabályos.

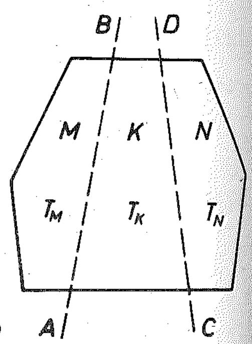


2227

2228. Általános értelemben vett sokszögre az állítás nem igaz. Ha a sokszög nem egyszeresen összefüggő, akkor szimmetriatengelyei nem feltétlenül a sokszög belsejében metszik egymást. (Lásd az **2228.***a)* ábrát.)
Az állítás egyszerű sokszögekre igaz. (Ha egy $A_0A_1 \ldots A_nA_0$ zárt töröttvonal szakaszainak az előírt csatlakozási pontokon kívül nincsenek közös pontjai, akkor a sík A_0A_1, A_1A_2, ..., A_nA_0 szakaszai által határolt korlátos részét egyszerű sokszögnek nevezzük.) (**2228.***b)* ábra.)
A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy AB és CD a sokszög két olyan szimmetriatengelye, amelyek a sokszög belsejében nem metszik egymást. Az egymással szimmetrikus részek területei egyenlőek. Ezért $T_N = T_M + T_K$ és $T_M = T_N + T_K$. Ebből $T_N > T_M$ és $T_M > T_N$ következik, ami egyidejűleg nem lehet igaz.

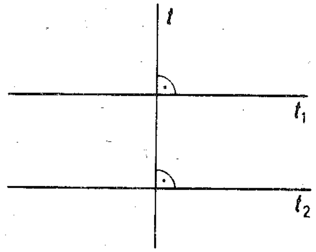
2229. Tengelyesen szimmetrikus síkidom szimmetriatengelyre vonatkozó tükörképe önmaga.


2228a

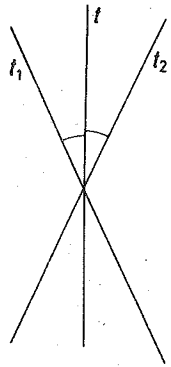


2228b

Legyen a síkidom egyik, tetszőlegesen választott szimmetriatengelye t, a másik kettő t_1 és t_2. Tükrözzük a síkidomot t-re! Ekkor t_1 képe t_1' és t_2 képe t_2' a síkidom képének, tehát az eredeti síkidomnak, szimmetriatengelyei.
Mivel a síkidomnak pontosan három szimmetriatengelye van, ezért vagy $t_1' = t_1$ és $t_2' = t_2$ *a)* **2229.***a)* ábra, vagy $t_1' = t_2$ és $t_2' = t_1$ *b)* **2229.***b)* ábra.
a) Ebben az esetben $t_1 \perp t$ és $t_2 \perp t$, tehát $t_1 \| t_2$ állna fenn, ami nem lehetséges, hiszen pl. t_1-re vonatkozó tükrözés esetén t_2 tükörképe t_1-től és t-től különböző szimmetriatengelye lenne a síkidomnak.
b) Ebben az esetben a három tengely egy ponton megy át, mivel *a)* szerint párhuzamosak nem lehetnek.
Mivel t, t_1 és t_2 szerepe felcserélhető, ezért ezek szöge egyenlő.
Tehát, ha egy síkidomnak pontosan három szimmetriatengelye van, akkor ezek egy ponton mennek át és egymással páronként 60°-os szöget zárnak be.



2229a



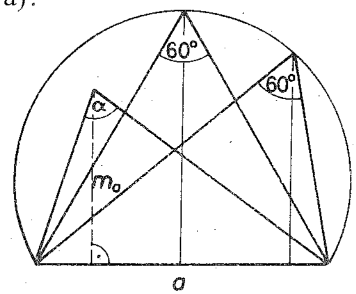
2229b

2230. Tegyük fel, hogy a háromszög legnagyobb oldala a. Az ezzel szemköztes szög a háromszög legnagyobb szöge, nem lehet kisebb 60°-nál. Ezért az a oldalhoz tartozó magasság nem lehet nagyobb az a oldalú szabályos háromszög magasságánál (**2230.** ábra):

$$m_a \leqq a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből $a \geqq \frac{2}{\sqrt{3}} m_a$, s a háromszög területe $1 = t = \frac{am_a}{2} \geqq \frac{m_a^2}{\sqrt{3}}$. Tehát

$$m_a \leqq \sqrt[4]{3}.$$

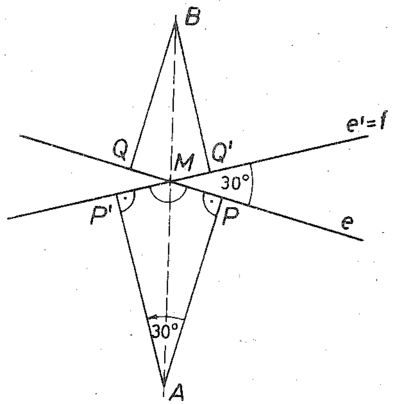


2230

2231. A feladat a **2050**-es feladattal azonos, más megfogalmazásban.

2232. Legyen A a sík olyan pontja, amely körül e-t 30°-kal elforgatva $e' = f$ (**2232.** ábra). Az A pontból e-re állított merőleges talppontja P. A forgatás P-t P'-be viszi. Így $AP = AP'$, tehát A rajta van e és f egyik szögfelezőjén. Az e és f metszéspontját M-mel jelölve $APMP'$ négyszög deltoid, $PMP' \sphericalangle = 150°$; $APM \sphericalangle = AP'M \sphericalangle = 90°$, $PAP' \sphericalangle = 30°$. E deltoid szimmetriatengelye AM. Ezért A rajta van e és f 150°-os szögét felező egyenesen.

Ezen egyenes tetszőleges B pontja egyenlő távol van e-től és f-től. $BQ = BQ'$ és $QBQ' \sphericalangle = 30°$, így B körüli, megfelelő irányú 30°-os forgatás e-t f-be viszi.



2232