

II. FEJEZET

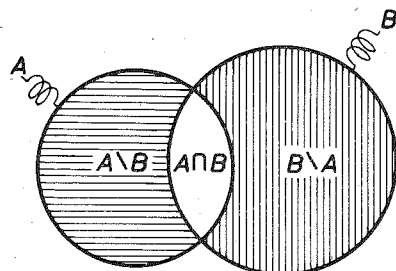
Halmazok

162. $|A \times A| = 3 \cdot 3 = 9$, $|A \times B| = 3 \cdot 4 = 12$, $|B \times B| = 4 \cdot 4 = 16$.
163. $A = \{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$,
 $B = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99\}$.
 $|A \cup B| = 39$, $|A \cap B| = 4$.
164. Az n elemű H halmaznak 2^n részhalmaza van.
 $2^n > n + 1000$, ha $n \geq 10$, H -nak tehát legalább 10 eleme van.
165. A 10 elemű halmaznak $\binom{10}{3}$ 3 elemű és $\binom{10}{2}$ 2 elemű részhalmaza van. Az előbbi $\frac{8}{3}$ -szor nagyobb, mint az utóbbi.
166. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ miatt ugyanannyi 9 elemű, mint 6 elemű részhalmaza van a 15 eleműnek.
167. Az $A \setminus B$ -nek minden olyan A -beli elem eleme, amely B -nek nem. A $B \setminus A$ -nak minden olyan B -beli elem eleme, amely A -nak nem. Így csak $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$, azaz $A = B$ lehet.
168. Az egy elemű részhalmazok között 1, a két eleműek között 4, a három eleműek között $\binom{4}{2} = 6$, a négy eleműek között $\binom{4}{3} = 4$ és az öt eleműek között 1 ilyen van. Összesen: 16. (Ahány részhalmaza van egy négy elemű halmaznak, hiszen minden ilyenhez hozzávehető a c elem.)
169. Az A halmaznak $2^5 = 32$ részhalmaza közül $2^3 = 8$ olyan van, amelyek a b és a c egyikét sem tartalmazzák. 24 részhalmaz tehát legalább egyiküket tartalmazza.

170. A sok lehetőség közül egy:
 $B := \{40; 50\}$, $C := \{20\}$, $D := \{10; 20; 30; \text{elefánt kalappal}\}$.

171. Az n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van. Ezért az üres halmaznak 1, az 1 eleműnek 2, a 2 eleműnek 4, a 3 eleműnek 8 részhalmaza van. Az N halmazon értelmezett $2^n - n$ kifejezésnek értékkészletében nincs a 3 és a 4, mert $n > 3$ -ra $2^n - n > 5$, amit a 2^n és az n grafikonjának egy koordináta-rendszerbeni ábrájáról rögtön láthatunk.

172. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = \{b; d\}$ és
 $B \setminus A = (A \cup B) \setminus A = \emptyset$ (172. ábra).



173. Az üres halmaznak nincs valódi részhalmaza, ezért $A = B$ -re a reláció nem teljesül. Ha azonban A és B különböző halmazok, úgy a reláció fennáll (lásd 172. ábra).

174. A H összes részhalmazából legalább egynek eleme H bármely eleme (például az ebből az egy elemből álló egy elemű részhalmaznak), továbbá egy halmaz nem változik azzal, hogy elemei közül némelyiket többször is felsorolunk, így az uniónak 999 eleme van, hiszen azonos H -val.

175. $B = A \cup B \subseteq A$ miatt B az A bármelyik részhalmaza lehet. Ilyen $2^4 = 16$ van.

176. a) $A \cup B = A$ miatt $B \subseteq A$, hiszen B -nek nincs eleme, ami A -nak ne lenne eleme. $A \setminus B = \emptyset$ miatt A -nak nincs eleme, ami B -nek ne lenne eleme, tehát $A = B$.

b) $A \cap B = A$ miatt $A \subseteq B$, mert a metszet mindkét halmaznak részhalmaza, tehát A -nak minden eleme B -nek is eleme.

c) $A \setminus B = \emptyset$ miatt A -nak bármely eleme eleme B -nek is, $B \setminus A = \emptyset$ miatt B -nek minden eleme eleme A -nak is, a két halmaz tehát azonos.

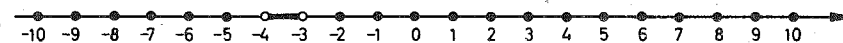
177. Mivel $A \subset B$, ezért $(A \times A) \subset (B \times B)$ és így $(A \times A) \cap (B \times B) = (A \times A)$.
 $A \times A = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}$.

178. 9 darab egyjegyű pozitív egész van. Ha belőlük elhagyjuk a 4-et és az 5-öt, akkor 2^7 olyan részhalmazhoz jutunk, amelynek sem a 4, sem az 5 nem eleme. A d -re tehát 2^7 a válasz. Ezek mindegyikéhez elemként hozzávéve a 4-et, 2^7 olyan részhalmazt nyerünk, amelyeknek 4 az eleme, de az 5 nem. Ugyanezt a d -beli 2^7 halmazzal és az 5-tel is

megtéve a c -nek eleget tevő részhalmazokat kaptuk. Végül, ha a d -beli halmazok mindegyikét a 4 és az 5 elemekkel bővítjük, úgy ismét 2^7 olyan részhalmazt nyertünk, amely az a -nak tesz eleget.

179. A sok közül egy-egy példa: Legyen $H := \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ és
 $K := \{-2; -1; 0; 1; 2\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$. $H \cap \mathbb{Z} = K \cap \mathbb{Z} = M$.

180. Ilyen halmaz végtelen sok van, de ezek bármelyikének a $] -4; -3[$ részhalmaza, de nem minden ilyen tulajdonságú halmaz jó. Jók még azok a halmazok, amelyek a $] -4; -3[$ halmaznak részhalmazai.



180

181. Mivel $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ és egy 53 elemű halmaznak $\binom{53}{16}$ 16 elemű

részhalmaza van, ezért $\binom{53}{37} = \binom{53}{53-37} = \binom{53}{16}$.

(Vagy: Bármelyik 16 elemű részhalmazhoz rendeljük a komplementét. Ez a hozzárendelés bijekció.)

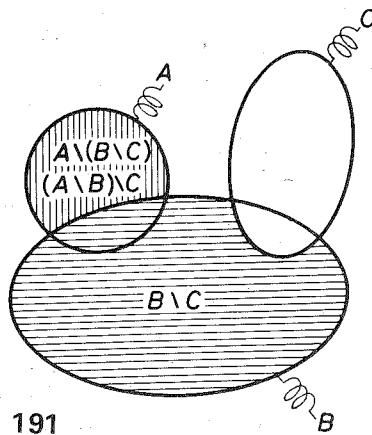
182. A $H \cap T$ elemei a szimmetrikus trapézok, melyek az alapok középvonalára szimmetrikusak. A deltoidoknak van átlója, amely szimmetriatengely. A $H \cap T \cap D$ elemeinek tehát mindkét átlója és mindkét középvonala tengely, vagyis $H \cap T \cap D$ a négyzetek halmaza.

183. A C elemei a paralelogrammák. T elemei a szimmetrikus trapézok és a deltoidok, így $C \cap T$ rombuszokból és téglalapokból áll.

184. Ha a páronkénti közös pontok nem mind különbözők, akkor a két azonos pont mindhárom zárt intervallumhoz hozzátartozik. Ha különbözők, úgy van közöttük két szélső, amelyeket a harmadik elválaszt. A két szélső ugyanabból a zárt intervallumból való, hiszen mindkettő legalább két intervallum közös részének eleme. E két szélső pont tehát olyan zárt intervallumot ad, amely a három adott intervallum egyikében van, és a harmadik pontot is tartalmazza, és ez a másik 2 zárt intervallum közös részéhez is hozzátartozik.

185. A három zárt intervallum határa az egyenesen legfeljebb 6 pontot határoz meg. Az egyenest 6 pontja legfeljebb 7 közös belső pont nélküli (2 félegyenesre és 5 szakaszra) darabolja.

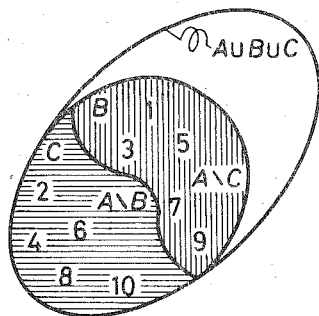
186. Például: $\{1\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{1; 6\}$.
187. Például: $A := \{2^n \cdot 3^m \mid n, m \in \mathbb{N}^+\}, B := \{2^p \cdot 5^s \mid p, s \in \mathbb{N}^+\},$
 $C := \{3^u \cdot 5^v \mid u, v \in \mathbb{N}^+\}.$
188. Az 1, 2, 3 számokból 3^{10} 10-jegyű szám készíthető. Ezek között 3 olyan van, amely csupa azonos jegyből áll, és $3 \cdot 2^{10}$ azok száma, amelyekben legfeljebb 2 jegy szerepel. Így $3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3$ olyan tízjegyű szám van, melyben az 1; 2 és 3 mindegyike szerepel legalább egyszer.
189. Az n elemű halmaz k elemű részalmazainak száma $\binom{n}{k}$. Mivel $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$, mert a binomiális tétel szerint $0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n.$
190. A nyolcelemű M halmaznak 2^8 részalmazja van. Ha bármely részalmazához az $M \setminus H$ (komplementer) részalmazt rendeljük, akkor ez M részalmazainak önmagára való bijektív leképezése. Ezért $2^7 + 1$ részalmaz között van két olyan, hogy egyikük a másiknak komplementere, tehát közös részük az üres halmaz. Az M -nek 2^7 olyan részalmazja van, amely az 1 elemet tartalmazza, tehát ezek bármely kettőjének van közös eleme.
191. Venn-diagrammal (191. ábra):
192. Nem. Legyen $A = B = \mathbb{R}$. Az a) állítás szerint bármely valós számnál van nagyobb. A b) szerint van legnagyobb valós szám, ami nem igaz.
193. $A \cap B$ a 6-tal vagy a 4-gyel oszthatók halmaza. Ennek bármely eleme páros, tehát eleme A -nak és 3-mal vagy 4-gyel is osztható, tehát benne van B -ben.



191

194. $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, tehát H 16 elemű,
 $H = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}.$
 $H_1 = \{6, 10, 14, 15, 21, 35\}.$
195. Legyen $a \in A$. Mivel $A \subseteq A \cup C = B \cup C$, ezért $a \in B \cup C$, tehát $a \in B$ vagy $a \in C$. Az utóbbi esetben $a \in A$ és $a \in C$ miatt $a \in A \cap C = B \cap C$, azaz $a \in B$ is. Ezzel $A \subseteq B$. Az A és B szerepe felcserélhető, tehát $B \subseteq A$ is, ennél fogva $A = B$.
196. Legyen $a \in A$. Ha $a \in C$, úgy $a \in A \cap C = B \cap C$ miatt $a \in B$ is. Ha $a \notin C$, akkor $a \in A \setminus C = B \setminus C$ miatt $a \in B$ is. Ezek szerint $A \subseteq B$. Az A és B szerepének felcserélésével $B \subseteq A$ is adódik, tehát $A = B$.
197. Nem. Például: $C :=$ négyszögek $A \cup C = B \cup C = C,$
 $A :=$ paralelogrammák $A \setminus C = B \setminus C = \emptyset,$
 $B :=$ deltoidok $A \neq B.$
198. Legyen $a \in A$. Ekkor $A \subseteq A \cup C = B \cup C$ miatt, ha $a \notin B$, úgy $a \in C$ kell legyen. Erre viszont $a \in C \setminus B$ és $a \notin C \setminus A$, ami ellentmondás. Ezek szerint $A \subseteq B$. Hasonlóan $B \subseteq A$, azaz $A = B$.
199. M bármely x eleme $\frac{2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1}$ alakú, $n \in \mathbb{Z}$, tehát $0 < x - 1 =$
 $= |x - 1|$. Így $|x - 1| < \frac{1}{10}$ pontosan akkor, ha $\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{10}$, vagyis
 $11 < 2n$. Az M -nek 501-eleme közül a $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}$ nem tesz eleget a feltételnek, a többi 496 pedig igen.
200. Legyen $X := A \cup \{\text{páros pozitív egészek}\}, Y := A \cup \{\text{páratlan pozitív egészek}\}.$ Így $X \cap Y = A, X \cup Y = \mathbb{N}$ és bármely $x \in X \setminus A$ pároshoz, ami legalább a 6, van olyan $y \in Y \setminus A$ páratlan, ami 1-gyel kisebb, mint x .
201. Ha a $B \cap C$ egy eleme páros lenne, akkor $A \setminus B$ elemei között, ha páratlan lenne, akkor $A \setminus C$ elemei között nem szerepelhetne, márpedig $A \cup B \cup C$ bármely eleme az előbb felsoroltak egyikében benne van, tehát $B \cap C = \emptyset$. Az $A \setminus B$ -ből és $A \setminus C$ -ből adódik, hogy B -nek csakis páratlan, míg C -nek csakis páros elemei lehetnek. Ha az $A \cup B \cup C$ -nek volna olyan páratlan eleme, amely nem eleme a B -nek, akkor ez az elem

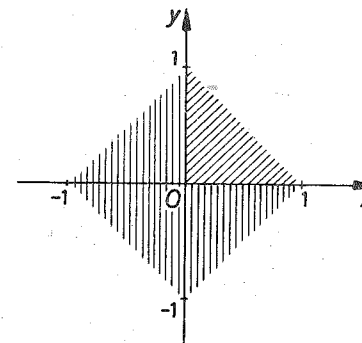
az $A \setminus B$ -ben benne kell legyen, hiszen $A \cup B \cup C$ elemeihez C csak páros számokat hoz. Így $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Hasonlóan nyerjük $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ és ezekkel $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \cup B \cup C = B \cup C$ miatt $B \cup C = A$ (lásd 201. ábra).



201

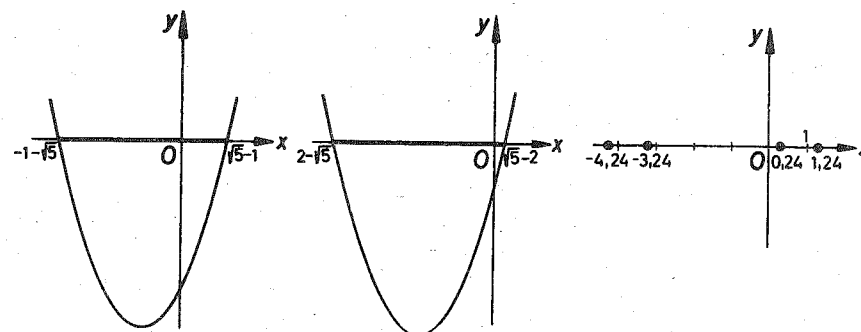
202. A metszet tulajdonságából következik, hogy $\{5; 6\} \subset C$, a $C \setminus B$ definíciójából pedig, hogy $1 \in C$, és $A \setminus C$ -ből, hogy $\{2, 3, 4\} \cap C = \emptyset$, vagyis $C = \{1; 5; 6\}$. Az $(A \setminus C) \subseteq A$ és mivel $5 \notin B$ a $(C \setminus B)$ miatt, viszont $5 \in A \cup B$ az $(A \cup B) \cap C$ miatt, ezért $5 \in A$. Így $A = \{2, 3, 4, 5\}$, hiszen ha $6 \in A$ lenne, akkor $C \setminus B$ és $6 \in C$ miatt $6 \in B$ is teljesülne, ezt pedig $A \cap B$ kizárja. Az $1 \in A$ esetén, mivel $1 \notin B$ $C \setminus B$ miatt, $(A \cup B) \cap C$ tartalmazná az 1-et, hiszen minden tényezőjének eleme! Az $A \cap B$ és $(A \cup B) \cap C$ -ből $3, 4, 5 \notin B$, $\{2; 6\} \subseteq B$. $C \setminus B$ miatt $1 \notin B$, tehát $B = \{2; 6\}$.
203. Ha M mindkét halmaz részhalmaza, akkor közös részüknek, a $\{3; 4\}$ -nek is részhalmaza.
204. A két részhalmaz mindegyike M -nek részhalmaza, így egyesítésük az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \subset M$ is.
205. $(A \cap B) \subseteq A$ és $(A \setminus B) \subseteq A$ miatt $\{1; 3; 5\} \subseteq A$. A -nak más eleme nincs, különben $\{2; 4\} \subseteq B$ miatt a 2 vagy a 4 eleme lenne $A \cap B$ -nek is. Így $A = \{1; 3; 5\}$ és $B = \{2; 3; 4; 5\}$.
206. $A \cap B$ elemei között az 1 vagy a 2 ott kell legyen, különben a közös rész részhalmaza lenne a $\{3; 4; 5\}$ -nek. Az $1 \in A \cap B$ nem lehet $A \setminus B$ miatt. Így $2 \in A \cap B$. Ebből és $(A \setminus B) \subseteq A$ miatt $\{1; 2; 4\} \subseteq A$. $|A \setminus B| = 2$ miatt $|B| \leq 3$, ám $3 \leq |A| = |B|$ miatt $|A| = |B| = 3$, tehát $A = \{1; 2; 4\}$ és $B = \{2; 3; 5\}$.
207. Két halmaz akkor egyenlő, ha azonosak az elemeik. Az $a = b$ esetén $a^2 + a = b^2 + b$ nyilván teljesül, tehát a két halmaz valóban azonos. Ha $a^2 + a = b$ és $b^2 + b = a$, akkor a két egyenlet összegéből $a^2 + b^2 + a + b = a + b$, azaz $a^2 + b^2 = 0$, vagyis $a = b = 0$ következik, hiszen nem-negatívok összege pontosan akkor 0, ha minden tag 0.

208. Nem. Legyen $A = \{2; 3\}$ és $B = \{1; 5\}$. Világos, hogy $\{2 \cdot 3; 2 + 3\} = \{1 + 5; 1 \cdot 5\}$, de $A \neq B$!
209. Ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, akkor $|x| = x$ és $|y| = y$, tehát $|x| + |y| = x + y$. Az $x + y < 1$ feltételt kielégítő pontokat az $x + y = 1$ egyenletű egyenes határolta, origót tartalmazó nyílt félsík és az első síknegyed közös része adja. Mivel $|x| = |-x|$ és $|y| = |-y|$, ezért az előbbi tartománynak a tengelyekre és az origóra vonatkozó tükröképeinek egyesítése (az $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$ csúcsú négyzet belseje) adja a keresett halmazt (209. ábra).



209

210. $x^2 + 2x - 4 = (x + 1)^2 - 5 = (x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5}) \leq 0$,
 ha $-1 - \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} - 1$.
 $x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 5 = (x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5}) \leq 0$, ha
 $-2 - \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} - 2$.
 $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 - \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} - 2\}$ és
 $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 - \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} - 1\}$ (210. ábra).

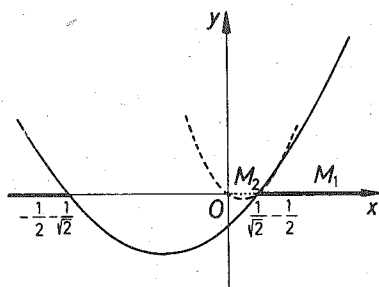


210

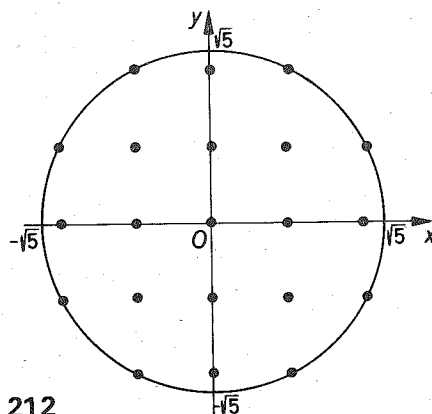
211. $x^2 + x - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0$.

Az $x\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \leq 0$, ha $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$.

$M_1 \cap M_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right\}$ (211. ábra).



211

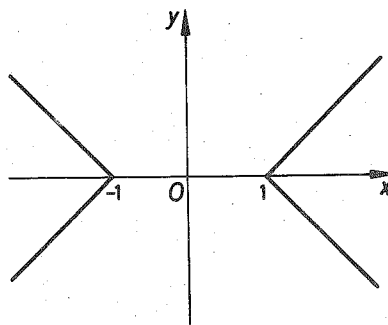


212

212. Az $x^2 + y^2 \leq 5$ az origó közepű $r = \sqrt{5}$ sugarú körlap (pontjainak) egyenlete. Ezen a körlapon 21 rácspont van, tehát $M \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ 21 elemű (212. ábra).

213. Feltéhető $m(A) \leq m(B)$. Erre $m(A) = m(A \cup B)$ és $m(B) \leq m(A \cap B)$, hiszen $A \cap B \subseteq B$, tehát ennél fogva $m(A \cap B) < m(B)$ nem lehet, következésképpen $m(A) + m(B) \leq m(A \cup B) + m(A \cap B)$.

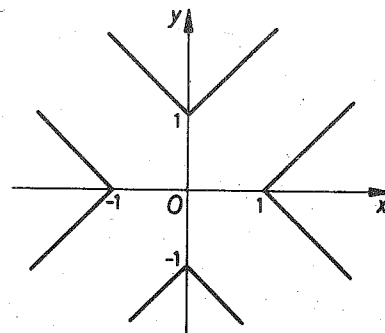
214. A halmaz szimmetrikus a tengelyekre és az origóra is, mivel $|x| = |-x|$ és $|y| = |-y|$. Elég tehát $x \geq 0, y \geq 0$ -ban ábrázolni (214. ábra). Itt $|x| - |y| = x - y = 1$, ami a síknegyedben egy félegyenes egyenlete.



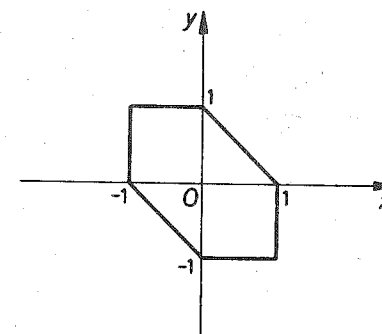
214

215. Lásd 209. feladat.

216. Az $|x| - |y| = 1$, illetve az $|y| - |x| = 1$ egyenleteknek eléget tevő $P(x; y)$ pontok halmazának egyesítése adja a keresettet. Az elsőre lásd a 214. feladatot. A halmaznak az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe (a tükrözés a tengelyek szerepét felcseréli) a második egyenletet kielégítő pontok halmazát adja (216. ábra).



216

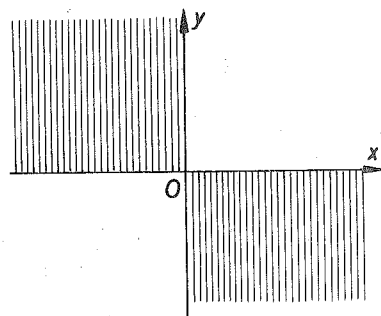


217

217. Ha $x \geq 0, y \geq 0$, akkor $x + y \geq 0$, tehát egyenletünk $x + y + x + y = 2$, azaz $x + y = 1$. Ha $x \leq 0, y \leq 0$, úgy $x + y \leq 0$, tehát $|x| = -x, |y| = -y$ és $|x + y| = -x - y$. Erre egyenletünk $-x - y - x - y = 2$, azaz $-x - y = 1$. Ha $x \leq 0, y \geq 0$ és $x + y \geq 0$, úgy $|x| = -x, |y| = y$ és $|x + y| = x + y$, és egyenletünk $-x + y + x + y = 2$, tehát $y = 1$, ha pedig $x \leq 0, y \geq 0$ és $|x + y| \leq 0$, akkor az egyenlet $-x + y - x - y = 2$, azaz $x = -1$. Végül $x \geq 0, y \leq 0$ és $x + y \geq 0$ mellett $x - y + x + y = 2$, tehát $x = 1$ és $x + y \leq 0$ esetén egyenletünk $x - y - x - y = 2$, azaz $y = -1$ (217. ábra).

218. $x > 0$ és $y > 0$ -ra $\frac{x}{|x|} = 1$ és $\frac{y}{|y|} = 1, \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 2$. $y < 0, x < 0$ -ra $|x| = -x, |y| = -y$, tehát $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = -2$. Ezekben az esetekben tehát nincs oly $P(x; y)$ pont, amelynek koordinátái egyenletünket kielégítene. Ha $x > 0$ és $y < 0$, úgy $\frac{x}{|x|} = 1, \frac{y}{|y|} = -1$, és az ilyen számpárok

egyenletünket kielégítik. A 2. és a 4. síknegyed belseje adja a keresett halmazt (218. ábra).



218

219. A $Q \subset A$ és $Q \subset B$, hiszen $b=0$ választásra minden $a \in Q$ eleme A -nak is, B -nek is. Ezért $Q \subseteq A \cap B$. Ha $b \neq 0$, $a+b\sqrt{2} \notin Q$ (illetve $a+b\sqrt{3} \notin Q$), különben lenne $c \in Q \setminus \{0\}$, melyre $a+b\sqrt{2} = c$ (illetve $a+b\sqrt{3} = c$),

azaz $\sqrt{2} = \frac{c-a}{b} \in Q$ ($\sqrt{3} = \frac{c-a}{b} \in Q$), ami $\sqrt{2}(\sqrt{3})$ irracionalitása miatt ellentmondás! Ha a, b, c és $d \neq 0$ racionális számokra $a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{3}$ lenne, akkor $\frac{a-c}{d} + \frac{b}{d}\sqrt{2} = \sqrt{3}$, azaz

$$\left(\frac{a-c}{d}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a-c}{d} \cdot \frac{b}{d}\sqrt{2} + 2 \frac{b^2}{d^2} = 3, \text{ vagyis } a \neq c \text{ és } b \neq 0 \text{ mellett}$$

$$\sqrt{2} = \frac{3d^2 - 2b^2 - (a-c)^2}{-2b(a-c)} \in Q \text{ lenne, ami lehetetlen. Az } a=c, \text{ illetve } b=0$$

mellett $\frac{\sqrt{3}}{2} \in Q$ vagy $\sqrt{3} \in Q$ lenne, és ez is ellentmondás. Ezekből $A \cap B = Q$.

220. $2x \leq 4x - 6$ pontosan akkor, ha $3 \leq x$ és $4x - 11 \leq 2x + 11$ akkor és csak akkor, ha $x \leq 11$. $A \cap B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.
221. A pontosan egy nyelvet tanulók száma $32 - 9 = 23$, ami páratlan. Így a csak orosz, illetve csak az angolt tanulók száma különböző paritású, mely számokhoz a 9-et adva ugyanilyen számpárt kapunk.
222. Ha A az angolul, O az oroszul, F a franciául tanulók halmazát jelöli, akkor
- $$|A \cup O \cup F| = |A| + |O| + |F| - (|A \cap O| + |A \cap F| + |O \cap F|) + |A \cap O \cap F|,$$
- azaz
- $$30 = 14 + 15 + 5 - (6 + 3x) + x = 28 - 2x,$$
- ahol
- $$x = |A \cap O \cap F|. \text{ Ebből } x < 0, \text{ tehát nincs megoldás.}$$

223. Ha E az első feladatot, M a második feladatot megoldók halmaza, akkor $|E \cup M| = |E| + |M| - |E \cap M|$, azaz $x = \frac{7}{10}x + \frac{6}{10}x - 9$, és ebből $x = 30$, tehát ennyi induló volt.
224. Legalább egy tárgyból $8 + 6 - 4 = 10$ tanuló felvételizett, 18 tehát egyik tárgyból sem.
225. Az $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$ miatt az $(x-1)^2(x-5) = 0$, illetve $(x-1)(x-5)^2 = 0$ adja az összes ilyen harmadfokú egyenletet.

Racionális kifejezések azonos átalakításai

$$226. \quad \frac{3}{2^8 \cdot 5^6} = \frac{3 \cdot 5}{2^8 \cdot 5^7} = \frac{15}{2^8 \cdot 5^7}; \quad \frac{8}{2^7 \cdot 5^7} = \frac{8 \cdot 2}{2^8 \cdot 5^7} = \frac{16}{2^8 \cdot 5^7};$$

$$\frac{15}{2^8 \cdot 5^7} < \frac{16}{2^8 \cdot 5^7}, \text{ tehát } \frac{3}{2^8 \cdot 5^6} < \frac{8}{2^7 \cdot 5^7}.$$

$$227. \quad \frac{2}{3^{18}} + \frac{4}{3^{19}} - \frac{4}{3^{20}} = \frac{2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 4}{3^{20}} = \frac{26}{3^{20}}; \quad \frac{1}{3^{17}} = \frac{3^3}{3^{20}} = \frac{27}{3^{20}};$$

$$\frac{26}{3^{20}} < \frac{27}{3^{20}}, \text{ tehát } \frac{2}{3^{18}} + \frac{4}{3^{19}} - \frac{4}{3^{20}} < \frac{1}{3^{17}}.$$

$$228. \quad \frac{10}{3^6 \cdot 7^5} - \frac{4}{3^8 \cdot 7^4} = \frac{10 \cdot 3^2 - 4 \cdot 7}{3^8 \cdot 7^5} = \frac{62}{3^8 \cdot 7^5}; \quad \frac{1}{3^6 \cdot 7^4} = \frac{3^2 \cdot 7}{3^8 \cdot 7^5} = \frac{63}{3^8 \cdot 7^5};$$

$$\frac{62}{3^8 \cdot 7^5} < \frac{63}{3^8 \cdot 7^5}, \text{ tehát } \frac{10}{3^6 \cdot 7^5} - \frac{4}{3^8 \cdot 7^4} < \frac{1}{3^6 \cdot 7^4}.$$

$$229. \quad \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} = \frac{2^4 + 1}{2^{12}} = \frac{17}{2^{12}}; \quad \frac{1}{2^9} = \frac{2^3}{2^{12}} = \frac{8}{2^{12}};$$

$$\frac{8}{2^{12}} < \frac{17}{2^{12}}, \text{ tehát } \frac{1}{2^9} < \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}}.$$

$$230. \quad \frac{3}{3^{10} \cdot 5^8} = \frac{1}{3^9 \cdot 5^8}; \quad \frac{1}{3^9 \cdot 5^6} = \frac{5^2}{3^9 \cdot 5^8} = \frac{25}{3^9 \cdot 5^8};$$

$$\frac{1}{3^9 \cdot 5^8} < \frac{25}{3^9 \cdot 5^8}, \text{ tehát } \frac{3}{3^{10} \cdot 5^8} < \frac{1}{3^9 \cdot 5^6}.$$

$$231. \quad 10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}; \quad 48 \cdot 50^5 = 3 \cdot 2^4 \cdot (5^2 \cdot 2)^5 =$$

$$= (3 \cdot 2^4 \cdot 5^{10} \cdot 2^5) = 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}; \quad 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} < 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10},$$

$$\text{tehát } 10^{10} < 48 \cdot 50^5.$$

$$232. \quad 8^5 = (2^3)^5 = 2^{15} = 2 \cdot 2^{14}; \quad 3 \cdot 4^7 = 3 \cdot (2^2)^7 = 3 \cdot 2^{14};$$

$$2 \cdot 2^{14} < 3 \cdot 2^{14}, \text{ tehát } 8^5 < 3 \cdot 4^7.$$

$$233. \quad \frac{72^3 \cdot 54^2}{108^4} = \frac{(2^3 \cdot 3^2)^3 \cdot (3^3 \cdot 2)^2}{(2^2 \cdot 3^3)^4} = \frac{2^9 \cdot 3^6 \cdot 3^6 \cdot 2^2}{2^8 \cdot 3^{12}} = \frac{2^{11}}{2^8} = 2^3 = 8.$$

$$234. \quad \frac{45^3 \cdot 20^4 \cdot 18^2}{180^5} = \frac{(3^2 \cdot 5)^3 \cdot (2^2 \cdot 5)^4 \cdot (2 \cdot 3^2)^2}{(5 \cdot 2^2 \cdot 3^2)^5} = \frac{3^6 \cdot 5^3 \cdot 2^8 \cdot 5^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4}{5^5 \cdot 2^{10} \cdot 3^{10}} =$$

$$= \frac{3^{10} \cdot 5^7 \cdot 2^{10}}{3^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^5} = 5^2 = 25.$$

$$235. \quad \frac{21^2 \cdot 14 \cdot 125}{35^3 \cdot 6} = \frac{(3 \cdot 7)^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5^3}{(5 \cdot 7)^3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5^3}{5^3 \cdot 7^3 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{3^2 \cdot 7^3 \cdot 2 \cdot 5^3}{3 \cdot 7^3 \cdot 2 \cdot 5^3} = 3.$$

$$236. \quad \frac{4002}{1000 \cdot 1002 - 999 \cdot 1001}. \text{ Vezessük be az } x = 1000 \text{ jelölést, így a kifejezés:}$$

$$\frac{4x+2}{x(x+2) - (x-1)(x+1)} = \frac{4x+2}{x^2+2x-x^2+1} =$$

$$= \frac{2(2x+1)}{2x+1} = 2; \quad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right). \text{ (A kifejezés nem függ } x\text{-től.)}$$

$$237. \quad \frac{10\,000 \cdot 10\,004 - 10\,002 \cdot 9998}{10\,000 \cdot 10\,001 - 10\,001 \cdot 9999}.$$

Vezessük be az $x = 10\,000$ jelölést, így a kifejezés

$$\frac{x(x+4) - (x+2)(x-2)}{x(x+1) - (x+1)(x-1)} = \frac{x^2+4x-x^2+4}{x^2+x-x^2+1} = \frac{4(x+1)}{x+1} = 4; \quad (x \neq -1).$$

(A kifejezés értéke nem függ x -től.)

$$238. \quad \frac{1\,234\,321\,234\,321 \cdot 2\,468\,642\,468\,641 - 1\,234\,321\,234\,320}{1\,234\,321\,234\,320 \cdot 2\,468\,642\,468\,641 + 1\,234\,321\,234\,321};$$

legyen $x = 1\,234\,321\,234\,320$, így a kifejezés:

$$\frac{(x+1)(2x+1) - x}{x(2x+1) + x+1} = \frac{2x^2+3x+1-x}{2x^2+x+x+1} = \frac{2x^2+2x+1}{2x^2+2x+1} = 1;$$

($2x^2+2x+1 \neq 0$ a valós számok körében). (A kifejezés értéke nem függ x -től.)

$$239. \quad \frac{(a^2)^3 \cdot a^4 \cdot (a^5)^2}{a^7 \cdot (a^2)^4} = \frac{a^6 \cdot a^4 \cdot a^{10}}{a^7 \cdot a^8} = \frac{a^{20}}{a^{15}} = a^5; \quad (a \neq 0).$$

240.
$$\frac{(ab)^2 \cdot (b^2)^3 \cdot a^4 \cdot b^7}{(a^2b)^3 \cdot (ab^3)^2} = \frac{a^2b^2 \cdot b^6 \cdot a^4 \cdot b^7}{a^6 \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot b^6} = \frac{a^6 \cdot b^{15}}{a^8 \cdot b^9} = \frac{b^6}{a^2}; \begin{pmatrix} a \neq 0; \\ b \neq 0 \end{pmatrix}.$$

241.
$$(3x-5)(3x+5) - (3x+2)^2 + 6(2x+5) = 9x^2 - 25 - 9x^2 - 4 - 12x + 12x + 30 = 1.$$

242.
$$(2x+1)(x-2)^2 - 2x(x+2)^2 + 15x^2 = (2x+1)(x^2-4x+4) - 2x(x^2+4x+4) + 15x^2 = 2x^3 - 8x^2 + 8x + x^2 - 4x + 4 - 2x^3 - 8x^2 - 8x + 15x^2 = -4x + 4, \text{ ha } x = -10, \text{ a kifejezés értéke: } 44.$$

243.
$$\frac{(3a-1)(2a+1)^2 - 3a(2a+3)^2 + 1}{-28a} = \frac{(3a-1)(4a^2+4a+1) - 3a(4a^2+12a+9) + 1}{-28a} = \frac{12a^3 + 12a^2 + 3a - 4a^2 - 4a - 1 - 12a^3 - 27a - 36a^2 + 1}{-28a} = \frac{-28a^2 - 28a}{-28a} = \frac{-28a(a+1)}{-28a} = a+1; (a \neq 0), \text{ ha } a = 100, \text{ a kifejezés értéke: } 101.$$

244.
$$\frac{(4a+b)(4a-b) - (3a+2b)^2 + 5b^2}{7a-12b} = \frac{16a^2 - b^2 - 9a^2 - 4b^2 - 12ab + 5b^2}{7a-12b} = \frac{7a^2 - 12ab}{7a-12b} = \frac{a(7a-12b)}{7a-12b} = a; a \neq \frac{12}{7}b. \text{ Ha } a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{4}, \text{ a kifejezés értéke } \frac{1}{2} \text{ (nem függ } b\text{-től).}$$

245.
$$\frac{(2x+1)^2 - (3x-1)(3x+1) + 5x^2}{2x+1} = \frac{4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 1 + 5x^2}{2x+1} = \frac{4x+2}{2x+1} = 2; \left(x \neq -\frac{1}{2}\right).$$

246.
$$\frac{(x-1)^2 - (2x+1)(2x-1) + 3x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 4x^2 + 1 + 3x^2}{x-1} = \frac{-2x+2}{x-1} = -2; (x \neq 1).$$

247.
$$\frac{(a-b)^3 - 3ab(a+b) + b^3}{a-6b} = \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3}{a-6b} = \frac{a^3 - 6a^2b}{a-6b} = \frac{a^2(a-6b)}{a-6b} = a^2; (a \neq 6b). \text{ Ha } a = 5; b = -999, \text{ akkor a kifejezés értéke } 25.$$

248.
$$\frac{(9x^2y^3)^4 \cdot (3xy^2)^6}{(5x^3y^4)^3 \cdot (5xy^5)^3} = \frac{3^8 x^8 y^{12} \cdot 5^3 x^3 y^{15}}{5^3 x^9 y^{12} \cdot 3^6 x^6 y^{12}} = \frac{3^2 y^3}{x^4} = \frac{9y^3}{x^4}; (x \neq 0; y \neq 0).$$

249.
$$\frac{(7a^2b^6)^2 \cdot 49a^3b^4}{(2a^3b^4)^3 \cdot (4a^4b^2)^2} = \frac{7^2 a^4 b^{12} \cdot 4^2 a^8 b^4}{2^3 a^9 b^{12} \cdot 4^2 a^8 b^4} = \frac{2^4}{2^3} = 2; (a \neq 0; b \neq 0).$$

250.
$$\frac{a+3}{a-1} + \frac{5-a}{a} = \frac{a^2 + 3a + 5a - 5 - a^2 + a}{a(a-1)} = \frac{9a-5}{a(a-1)}; (a \neq 1; a \neq 0).$$

251.
$$\frac{2x+y}{x+y} + \frac{3x-y}{x-y} = \frac{(2x+y)(x-y) + (3x-y)(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{2x^2 - xy - y^2 + 3x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} = \frac{5x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - y^2}; (|x| \neq |y|).$$

252.
$$\frac{3a}{a-b} - \frac{4b}{a+b} = \frac{3a(a+b) - 4b(a-b)}{a^2 - b^2} = \frac{3a^2 + 3ab - 4ab + 4b^2}{a^2 - b^2} = \frac{3a^2 - ab + 4b^2}{a^2 - b^2}; (|a| \neq |b|).$$

253.
$$\frac{2a+1}{a+1} + \frac{a-2}{a-1} - \frac{3a^2-1}{a^2-1} = \frac{(2a+1)(a-1) + (a-2)(a+1) - 3a^2 + 1}{(a+1)(a-1)} = \frac{2a^2 - a - 1 + a^2 - a - 2 - 3a^2 + 1}{(a+1)(a-1)} = \frac{-2}{(a+1)(a-1)} = \frac{-2}{a^2-1} = \frac{2}{1-a}; (|a| \neq 1).$$

254.
$$\frac{3b+2}{2b+1} + \frac{1-4b}{2b-1} + \frac{2b^2-b}{4b^2-1} = \frac{(3b+2)(2b-1) + (1-4b)(2b+1) + 2b^2-b}{4b^2-1} =$$

$$= \frac{6b^2 + b - 2 - 2b + 1 - 8b^2 + 2b^2 - b}{4b^2 - 1} = \frac{-2b - 1}{(2b + 1)(2b - 1)}$$

$$= \frac{-(2b + 1)}{(2b + 1)(2b - 1)} = \frac{-1}{2b - 1} = \frac{1}{1 - 2b}; \left(|b| \neq \frac{1}{2} \right).$$

255.
$$\frac{3x+1}{x} + \frac{2x-3}{x+1} - \frac{5x-2}{x-1} =$$

$$= \frac{(3x+1)(x^2-1) + (2x-3)x(x-1) - (5x-2)x(x+1)}{x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{3x^3 + x^2 - 3x - 1 + 2x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 3x - 5x^3 - 5x^2 + 2x^2 + 2x}{x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{-7x^2 + 2x - 1}{x(x^2 - 1)}; (|x| \neq 1), (x \neq 0).$$

256.
$$\frac{2x+y}{3x-y} + \frac{x-y}{3x+y} - \frac{3x^2-xy+2y^2}{9x^2-y^2} =$$

$$= \frac{(2x+y)(3x+y) + (x-y)(3x-y) - 3x^2 + xy - 2y^2}{(3x-y)(3x+y)} =$$

$$= \frac{6x^2 + 5xy + y^2 + 3x^2 - 4xy + y^2 - 3x^2 + xy - 2y^2}{9x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{6x^2 + 2xy}{(3x+y)(3x-y)} = \frac{2x}{3x-y}; \left(|x| \neq \left| \frac{y}{3} \right| \right).$$

257.
$$\frac{x+3}{x+1} - \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x-1) - (2x-1)(x+1) - x+3}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3 - 2x^2 - x + 1 - x + 3}{x^2 - 1} = \frac{-x^2 + 1}{x^2 - 1} = -1; (|x| \neq 1).$$

258.
$$\frac{b+5}{b^2-16} \cdot \left(1 - \frac{9}{b+5} \right) = \frac{b+5}{(b+4)(b-4)} \cdot \frac{b+5-9}{b+5} = \frac{1}{b+4}; (|b| \neq 4),$$

$$(b \neq -5).$$

259.
$$\left(3 + \frac{1}{a-1} \right) \cdot \left(\frac{1-2a}{3a-2} + 1 \right) = \frac{3a-3+1}{a-1} \cdot \frac{1-2a+3a-2}{3a-2} =$$

$$= \frac{3a-2}{a-1} \cdot \frac{a-1}{3a-2} = 1; \left(a \neq 1; a \neq \frac{2}{3} \right).$$

260.
$$\left(2 + \frac{x-1}{3x-1} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{7x-3} + 1 \right) = \frac{6x-2+x-1}{3x-1} \cdot \frac{1-x+7x-3}{7x-3} =$$

$$= \frac{7x-3}{3x-1} \cdot \frac{6x-2}{7x-3} = 2; \left(x \neq \frac{1}{3}; x \neq \frac{3}{7} \right).$$

261.
$$\left(\frac{2x+1}{3x-1} + \frac{5-2x}{3x+1} \right) \cdot \frac{9x^2-1}{11x-2} =$$

$$= \frac{(2x+1)(3x+1) + (5-2x)(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)} \cdot \frac{9x^2-1}{11x-2} =$$

$$= \frac{6x^2 + 5x + 1 + 17x - 6x^2 - 5}{9x^2 - 1} \cdot \frac{9x^2 - 1}{11x - 2} =$$

$$= \frac{22x - 4}{11x - 2} = 2; \left(|x| \neq \frac{1}{3}; x \neq \frac{2}{11} \right).$$

262.
$$\frac{a^2-9}{a+2} : \left(1 - \frac{5}{a+2} \right) = \frac{(a+3)(a-3)}{a+2} : \frac{a+2-5}{a+2} =$$

$$= \frac{(a+3)(a-3)}{a+2} \cdot \frac{a+2}{a-3} = a+3; (a \neq -2; a \neq 3).$$

263.
$$\frac{x^2-4}{x+3} : \frac{x-2}{x+3} - 2 = \frac{(x+2)(x-2)}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-2} - 2 =$$

$$= x+2-2 = x; \left(\begin{array}{l} x \neq -3 \\ x \neq 2 \end{array} \right).$$

264.
$$\left(\frac{2}{1-x^2} + \frac{x+2}{x-1} \right) : \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-2+(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x^2-1}{x+3} =$$

$$= \frac{-2+x^2+3x+2}{x+3} = \frac{x^2+3x}{x+3} = \frac{x(x+3)}{x+3} = x; (|x| \neq 1; x \neq -3).$$

265.
$$\left(\frac{1-6b}{2b+3} + 3 \right) : \frac{5}{2b+3} = \frac{1-6b+6b+9}{2b+3} \cdot \frac{2b+3}{5} = 2; \left(b \neq -\frac{3}{2} \right).$$

266.
$$\left(\frac{4c}{2c-5} - 2 \right) : \frac{5}{4c^2-25} = \frac{4c-4c+10}{2c-5} \cdot \frac{(2c-5)(2c+5)}{5} =$$

$$= 2(2c+5) = 4c+10; \left(|c| \neq \frac{5}{2} \right).$$

$$267. \frac{b^2-4}{10b+2} : \left(\frac{11b}{10b+2} - 1 \right) = \frac{(b+2)(b-2)}{10b+2} : \frac{11b-10b-2}{10b+2} =$$

$$= \frac{(b+2)(b-2)}{10b+2} \cdot \frac{10b+2}{b-2} = b+2; \left(b \neq -\frac{1}{5}; b \neq 2 \right).$$

$$268. \left(\frac{2x-1}{3x-6} - \frac{x+1}{2x-4} \right) : \frac{x-5}{6} = \frac{4x-2-3x-3}{6(x-2)} \cdot \frac{6}{x-5} =$$

$$= \frac{x-5}{6(x-2)} \cdot \frac{6}{x-5} = \frac{1}{x-2}; (x \neq 2; x \neq 5).$$

$$269. \frac{3a^2-6ab}{a^2+4b^2} \cdot \frac{a^4-16b^4}{15(a-2b)^2} = \frac{3a(a-2b)}{a^2+4b^2} \cdot \frac{(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)}{15(a-2b)^2} =$$

$$= \frac{a(a+2b)(a-2b)}{5(a-2b)} = \frac{a(a+2b)}{5} = \frac{a^2+2ab}{5}; (a \neq 2b).$$

$$270. \frac{x^2-25}{x^2-2x} : \frac{x^2+5x}{x^4-4x^2} = \frac{(x+5)(x-5)}{x(x-2)} \cdot \frac{x^2(x+2)(x-2)}{x(x+5)} =$$

$$= (x-5)(x+2) = x^2-3x-10; (x \neq 0; x \neq 2; x \neq -5).$$

$$271. \left(\frac{3-4x}{2x+1} + 2 \right) : \frac{x}{2x+1} = \frac{3-4x+4x+2}{2x+1} \cdot \frac{2x+1}{x} = \frac{5}{x};$$

$$\left(x \neq -\frac{1}{2}; x \neq 0 \right). \text{ Ha } x=5, \text{ akkor a kifejezés \u00e9rt\u00e9ke } 1.$$

$$272. \frac{9a-3b}{9a^2-b^2} \cdot \frac{15a+5b}{3} = \frac{3(3a-b)}{(3a+b)(3a-b)} \cdot \frac{5(3a+b)}{3} = 5; (|3a| \neq |b|).$$

$$273. \frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1} \cdot \frac{2x+2}{x-2} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2} \cdot \frac{2(x+1)}{x-2} = 2; (x \neq -1; x \neq 2).$$

$$274. \frac{2ab-a^2}{4b^2-a^2} \cdot \frac{6b+3a}{a} = \frac{a(2b-a)}{(2b+a)(2b-a)} \cdot \frac{3(2b+a)}{a} = 3; (|a| \neq |2b|; a \neq 0).$$

$$275. \frac{5x^2-20y^2}{3x+6y} : \frac{5x-10y}{9x} = \frac{5(x+2y)(x-2y)}{3(x+2y)} \cdot \frac{9x}{5(x-2y)} = 3x;$$

$$\left(|x| \neq |2y|; x \neq 0 \right). \text{ Ha } x=2; y = -\frac{1}{2}, \text{ akkor a kifejezés \u00e9rt\u00e9ke } 6.$$

$$276. \frac{a^2-4ab+4b^2}{a^2+ab-6b^2} \cdot \frac{3a+9b}{a-2b} = \frac{(a-2b)^2}{(a+3b)(a-2b)} \cdot \frac{3(a+3b)}{a-2b} = 3; \left(\begin{matrix} a \neq 2b; \\ a \neq -3b \end{matrix} \right).$$

$$277. \frac{a^2-10a+25}{a^2-3a-10} : \frac{a-5}{4a+8} = \frac{(a-5)^2}{(a+2)(a-5)} \cdot \frac{4(a+2)}{a-5} = 4; \left(\begin{matrix} a \neq 5; \\ a \neq -2 \end{matrix} \right).$$

$$278. \left(\frac{a^3-b^3}{a-b} + ab \right) : \frac{a+b}{2} = \left[\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b} + ab \right] \cdot \frac{2}{a+b} =$$

$$= \frac{(a+b)^2 \cdot 2}{a+b} = 2(a+b); (|a| \neq |b|).$$

$$279. \left(\frac{2}{a} - \frac{3}{b} \right) : \frac{4b^2-9a^2}{ab} = \frac{2b-3a}{ab} \cdot \frac{ab}{(2b-3a)(2b+3a)} =$$

$$= \frac{1}{2b+3a}; (a \neq 0; b \neq 0; |2b| \neq |3a|).$$

$$280. 2 - \frac{a}{3a+1} = \frac{6a+2-a}{3a+1} = \frac{5a+2}{3a+1} \cdot \frac{(3a+1)(3a-1)}{5a+2} = 3a-1;$$

$$\left(|a| \neq \frac{1}{3}; a \neq -\frac{2}{5} \right).$$

$$281. 1 - \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2-1-x^2}{x^2-1} = \frac{-1}{x^2-1} \cdot \frac{-(x-1)}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}; (|x| \neq 1).$$

$$2 + \frac{3x-1}{1-x} = \frac{2-2x+3x-1}{-(x-1)} = \frac{x+1}{-(x-1)}$$

$$282. \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] : \frac{a^3+b^3}{a^2b^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \cdot \frac{b+a}{ab} \right) \frac{a^2b^2}{a^3+b^3} =$$

$$= \frac{b^2+a^2+2ab}{a^2b^2} \cdot \frac{a^2b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} = \frac{a+b}{a^2-ab+b^2};$$

$$(a \neq 0; b \neq 0; a \neq -b).$$

$$283. \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a} \right) : \left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{a^3+b^3}{ab^2} : \frac{a^2-ab+b^2}{ab^2} =$$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab^2} \cdot \frac{ab^2}{a^2-ab+b^2} = a+b, (a \neq 0; b \neq 0).$$

$$284. \left(\frac{p}{q^2-pq} + \frac{q}{p^2-pq} \right) \cdot \frac{q^2p+p^2q}{q^2-p^2} = \frac{p^2-q^2}{pq(q-p)} \cdot \frac{qp(q+p)}{q^2-p^2} =$$

$$= -\frac{q+p}{q-p} = \frac{p+q}{p-q}, (|p| \neq |q|; p \neq 0; q \neq 0).$$

$$285. \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} + \frac{1}{(y-x)(y-z)} =$$

$$= \frac{y-z+x-y-(x-z)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = 0, (x \neq y; y \neq z; z \neq x).$$

$$286. \frac{a^4-b^4}{a^2-b^2} - \left(\frac{a^4+ab^3}{a^2+ab} - ab \right) = \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{a^2-b^2} -$$

$$- \left[\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a+b} - ab \right] = a^2+b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 2ab,$$

$$(a \neq 0; |a| \neq |b|).$$

$$287. \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{a(a-b)} + \frac{1}{b(b-a)} = \frac{b+a}{ab(a+b)} + \frac{b-a}{ab(a-b)} =$$

$$= \frac{1}{ab} - \frac{1}{ab} = 0 (|a| \neq |b|; a \neq 0; b \neq 0).$$

$$288. \left(\frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a^2-2ab+b^2} \right) : \frac{b^2+4ab-a^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)(a-b)} - \frac{1}{(a-b)^2} \right) \frac{a^2-b^2}{b^2+4ab-a^2} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2+a^2-b^2-a^2-2ab-b^2}{(a+b)^2(a-b)^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{b^2+4ab-a^2} =$$

$$= \frac{a^2-4ab-b^2}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{1}{b^2+4ab-a^2} = -\frac{1}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}, (|a| \neq |b|; b^2+4ab-a^2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq a(-2 \pm \sqrt{5})).$$

$$289. \left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \frac{1}{x^2+2xy+y^2} + \frac{2}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right] : \frac{x-y}{x^3y^3} =$$

$$= \left[\frac{y^2+x^2}{x^2y^2} \cdot \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^3} \cdot \frac{y+x}{xy} \right] \cdot \frac{x^3y^3}{x-y} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+2xy}{x^2y^2(x+y)^2} \cdot \frac{x^3y^3}{x-y} = \frac{xy}{x-y}, (x \neq 0; y \neq 0; |x| \neq |y|).$$

$$290. \left(\frac{2a^2+a}{a^3-1} - \frac{a+1}{a^2+a+1} \right) \left(1 + \frac{a+1}{a} - \frac{a^2+5a}{a^2+a} \right) =$$

$$= \frac{2a^2+a-a^2+1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{a^2+a+a^2+2a+1-a^2-5a}{a(a+1)} =$$

$$= \frac{a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{a^2-2a+1}{a(a+1)} = \frac{a-1}{a(a+1)}, (a \neq 0; |a| \neq 1).$$

$$291. \left(\frac{(x+y)^2+2y^2}{x^3-y^3} - \frac{1}{x-y} + \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} \right) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \frac{x^2+2xy+3y^2-x^2-xy-y^2+x^2-y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} \cdot \frac{x-y}{xy} =$$

$$= \frac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} \cdot \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{xy}, (x \neq y; x \neq 0; y \neq 0).$$

$$292. \frac{(x^2-y^2-z^2-2yz)(x+y-z)}{(x+y+z)(x^2+z^2-2xz-y^2)} = \frac{[x^2-(y+z)^2](x+y-z)}{(x+y+z)[(x-z)^2-y^2]} =$$

$$= \frac{(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)}{(x+y+z)(x+z+y)(x-z-y)} = 1, (x+y+z \neq 0; x-z+y \neq 0; x-z-y \neq 0).$$

$$293. \frac{1+2x}{4+2x} - \frac{x}{3x-6} + \frac{\frac{2}{3}x^2}{4-x^2} =$$

$$\frac{6+13x}{24-12x}$$

$$= \frac{3(x-2)(1+2x) - 2x(x+2) - 6 \cdot \frac{2}{3}x^2}{6(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{6+13x}{24-12x}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-9x-6+6x^2-2x^2-4x-4x^2}{6(x+2)(x-2)} = \frac{-13x-6}{6(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{13x+6}{12(2-x)} = \frac{13x+6}{12(2-x)} = \\ &= -\frac{12(2-x)}{6(x+2)(x-2)} = \frac{2}{x+2}, \quad (|x| \neq 2; x \neq \frac{-6}{13}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 294. \quad & \left(\frac{3x+2}{3x^2+1} - \frac{18x^3-x-9}{9x^4-1} + \frac{3x-2}{3x^2-1} \right) : \frac{x^2+10x+25}{9x^4-1} = \\ &= \frac{(3x+2)(3x^2-1) - 18x^3+x+9 + (3x-2)(3x^2+1)}{(3x^2+1)(3x^2-1)} \cdot \frac{9x^4-1}{(x+5)^2} = \\ &= \frac{9x^3+6x^2-3x-2-18x^3+x+9+9x^3-6x^2+3x-2}{(x+5)^2} = \\ &= \frac{x+5}{(x+5)^2} = \frac{1}{x+5}, \quad (|x| \neq \frac{1}{3}; x \neq -5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 295. \quad & \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2} \right] : \left[\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right] = \\ &= \frac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{(x+y)^2(x-y)^2} : \frac{x-y+x+y}{(x+y)(x-y)} = \\ &= \frac{-4xy}{(x+y)^2(x-y)^2} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{2x} = \frac{-2y}{(x+y)(x-y)} = \frac{2y}{y^2-x^2}, \\ & \quad (x \neq 0; |x| \neq |y|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 296. \quad & \left(\frac{2c}{c+2} + \frac{2c}{6-3c} + \frac{8c}{c^2-4} \right) : \frac{c-4}{c-2} = \frac{6c(c-2) - 2c(c+2) + 24c}{3(c+2)(c-2)} \cdot \frac{c-2}{c-4} = \\ &= \frac{6c^2-12c-2c^2-4c+24c}{3(c+2)} \cdot \frac{1}{c-4} = \frac{4c^2+8c}{3(c+2)(c-4)} = \\ &= \frac{4c(c+2)}{3(c+2)(c-4)} = \frac{4c}{3(c-4)}, \quad (c \neq 4; |c| \neq 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 297. \quad & \left[\frac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+1}{1-x} = \\ &= \frac{x^2-2x+1-1+3x-x^2-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{1-x}{x^2+1} = \\ &= \frac{-x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{-(x-1)}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+x+1}, \quad (x \neq 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 298. \quad & \left(\frac{1}{p^2-pq} - \frac{3q^2}{p^4-pq^3} - \frac{q}{p^3+p^2q+pq^2} \right) \left(q + \frac{p^2}{p+q} \right) = \\ &= \frac{p^2+pq+q^2-3q^2-pq+q^2}{p^2+pq+q^2} \cdot \frac{pq+q^2+p^2}{pq+q^2+p^2} = \\ &= \frac{p(p-q)(p^2+pq+q^2)}{p^2-q^2} \cdot \frac{p+q}{p+q} = \\ &= \frac{p(p-q)(p^2+pq+q^2)}{p^2-q^2} \cdot \frac{p+q}{p+q} = \frac{1}{p}, \quad (p \neq 0; |p| \neq |q|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 299. \quad & \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^2(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)} = \\ &= \frac{b^2c^2(b-c) - a^2c^2(a-c) + a^2b^2(a-b)}{b^2c^2(b-c) - a^2c^2(a-c) + a^2b^2(a-b)} = \\ &= \frac{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)}{b^3c^2 - b^2c^3 - a^3c^2 + a^2c^3 + a^3b^2 - a^2b^3} = \\ &= \frac{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)}{c^3(a^2-b^2) - c^2(a^3-b^3) + a^2b^2(a-b)} = \\ &= \frac{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(c^3a + c^3b - c^2a^2 - c^2b^2 - c^2ab + a^2b^2)} = \\ &= \frac{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)[c^2a(c-a) + c^2b(c-a) - b^2(c^2-a^2)]} = \\ &= \frac{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)}{(c-a)(c^2a + c^2b - b^2c - b^2a) - [bc(c-b) + a(c^2-b^2)]} = \\ &= \frac{a^2b^2c^2(a-c)(b-c)}{-(c-b)(bc+ac+ab)} = \frac{ab+ac+bc}{a^2b^2c^2(b-c)}, \\ & \quad (a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0; a \neq b; b \neq c; a \neq c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 300. \quad & c - \left[\frac{(16-c)c}{c^2-4} + \frac{3+2c}{2-c} - \frac{2-3c}{c+2} \right] : \frac{c-1}{c^3+4c^2+4c} = \\ &= c - \frac{16c-c^2-2c^2-7c-6-2c+4+3c^2-6c}{(c+2)(c-2)} \cdot \frac{c-1}{c(c^2+4c+4)} = \\ &= c - \frac{c-2}{(c+2)(c-2)} \cdot \frac{c(c+2)^2}{c-1} = c - \frac{c(c+2)}{c-1} = \frac{c^2-c-c^2-2c}{c-1} = \\ &= \frac{-3c}{c-1} = \frac{3c}{1-c}, \quad (c \neq 0; c \neq 1; |c| \neq 2). \end{aligned}$$

$$301. \quad \frac{a}{a^2-2a+1} - \frac{1-a(1-a)}{1-a} \cdot \frac{a}{1+a^3} - \frac{2a-2a^2-2}{(1-a^2)(a-1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{(a-1)^2} + \frac{1-a+a^2}{a-1} \cdot \frac{a}{1+a^3} - \frac{2a-2a^2-2}{(1-a^2)(a-1)} = \\
&= \frac{a}{(a-1)^2} + \frac{(1-a+a^2)a}{(a-1)(a+1)(a^2-a+1)} + \frac{2a-2a^2-2}{(a-1)^2(a+1)} = \\
&= \frac{a}{(a-1)^2} + \frac{a}{a^2-1} + \frac{2a-2a^2-2}{(a-1)^2(a+1)} = \frac{a^2+a+a^2-a+2a-2a^2-2}{(a-1)^2(a+1)} = \\
&= \frac{2(a-1)}{(a-1)^2(a+1)} = \frac{2}{a^2-1}, \quad (|a| \neq 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
302. \quad & \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{x}{ab}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{x}{ab}\right)(a+b-x)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{x^2}{a^2b^2}} = \\
&= \frac{\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2b^2}\right](a+b-x)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2b^2}} = a+b-x, \\
& (x \neq \pm(a+b); a \neq 0; b \neq 0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
303. \quad & \frac{x+3}{2x-4} - \frac{x-2}{3x+9} - \frac{3x^2+53x+32}{12x^2+12x-72} = \\
&= \frac{6(x+3)^2 - 4(x-2)^2 - 3x^2 - 53x - 32}{12(x-2)(x+3)} = \\
&= \frac{6x^2+36x+54-4x^2+16x-16-3x^2-53x-32}{12(x-2)(x+3)} = \frac{-x^2-x+6}{12(x-2)(x+3)} = \\
&= \frac{-(x-2)(x+3)}{12(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{12}; \quad (x \neq 2; x \neq -3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
304. \quad & \frac{x^2y-xy^2}{x^2-y^2} + \frac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2} - \frac{x^2-2xy}{x+y} = \\
&= \frac{xy(x^2-y^2)+x^2(x^2-y^2)}{(x+y)^2(x-y)} - \frac{x+y}{(x^2-y^2)x(y+x)-x(x-2y)(x^2-y^2)} = \\
&= \frac{(x+y)^2(x-y)}{(x+y)^2(x-y)} = \frac{(x^2-y^2)x(x+y-x+2y)}{(x+y)^2(x-y)} = \\
&= \frac{x(x^2-y^2)3y}{(x+y)^2(x-y)} = \frac{3xy}{x+y}, \quad (|x| \neq |y|).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
305. \quad & \left(\frac{a+1}{1-a} - \frac{1-a}{1+a} - \frac{4a^2}{a^2-1}\right) : \left[-2\left(\frac{1}{a^3+a^2} - \frac{1-a}{a^2} - 1\right)\right] = \\
&= \frac{1+a^2+2a-1-a^2+2a+4a^2}{(1-a)(1+a)} : \frac{-2(1+a^2-1-a^3-a^2)}{a^2(a+1)} = \\
&= \frac{4a+4a^2}{1-a^2} \cdot \frac{a^2(a+1)}{-2(-a^3)} = \frac{4a(1+a)}{(1-a)(1+a)} \cdot \frac{a^2(a+1)}{2a^3} = \frac{2(a+1)}{1-a} = \frac{2(1+a)}{1-a}, \\
& |a| \neq 1; a \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
306. \quad & \left(\frac{a+2b}{a-2b} - \frac{a-2b}{a+2b}\right) : \left(\frac{a-2b}{a+2b} + 1\right) = \\
&= \frac{a^2+4ab+4b^2-a^2-4b^2+4ab}{(a+2b)(a-2b)} : \frac{a-2b+a+2b}{a+2b} = \\
&= \frac{8ab}{8ab} \cdot \frac{a+2b}{2a} = \frac{4b}{a-2b}, \quad (a \neq 0; |a| \neq |2b|).
\end{aligned}$$

Ha $a=3,5$; $b=-1,5$; a kifejezés értéke:

$$\frac{4(-1,5)}{3,5-2(-1,5)} = \frac{-6}{3,5+3} = -\frac{6}{6,5} = -\frac{12}{13}.$$

$$\begin{aligned}
307. \quad & \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy} = \frac{x^2+y^2+2xy-x^2-y^2+2xy}{4xy} = \frac{4xy}{4xy} = 1, \\
& (x \neq 0; y \neq 0).
\end{aligned}$$

Ha $x=1$; $y=\frac{3}{4}$, a kifejezés értéke: 1 (független x -től és y -től).

$$\begin{aligned}
308. \quad & \frac{4-a^2-2ab-b^2}{2+a+b} = \frac{2^2-(a+b)^2}{2+a+b} = \frac{(2+a+b)(2-a-b)}{2+a+b} = 2-a-b, \\
& (a+b \neq -2).
\end{aligned}$$

Ha $a=0,01$; $b=0,99$, a kifejezés értéke: $2-0,01-0,99=1$.

$$\begin{aligned}
309. \quad & \frac{(a+1)(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)} = \frac{(a+1)(a^8+2a^4-a^4+1)}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)} = \\
&= \frac{(a+1)[(a^4+1)^2-a^4]}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)} = \frac{(a+1)(a^4+1+a^2)(a^4+1-a^2)}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)} = \\
&= \frac{(a+1)[(a^2+1)^2-a^2]}{a^2+a+1} = \frac{(a+1)(a^2+1+a)(a^2+1-a)}{a^2+a+1} =
\end{aligned}$$

$= (a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$; ha $a=10$, a kifejezés értéke: 1001.

$$310. \left(\frac{8+b^3}{x^2-y^2} : \frac{4-2b+b^2}{x-y} \right) \cdot \left(x + \frac{xy+y^2}{x+y} \right) =$$

$$= \frac{(2+b)(b^2-2b+4)}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{x^2+xy+xy+y^2}{4-2b+b^2} \cdot \frac{x+y}{x+y} =$$

$$= \frac{2+b}{x+y} \cdot \frac{(x+y)^2}{x+y} = 2+b, \quad (|x| \neq |y|).$$

Ha $b=8$; $x=997,5$; $y=-\frac{3}{4}$, a kifejezés értéke: 10. (Nem függ x -től és y -től.)

$$311. \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac} = \frac{(a+b)^2-c^2}{(a+c)^2-b^2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+c+b)(a+c-b)} = \frac{a+b-c}{a+c-b},$$

($|a+c| \neq |b|$).

Ha $a=2,5$; $b=3,5$; $c=-4$, a kifejezés értéke:

$$\frac{2,5+3,5+4}{2,5-4-3,5} = \frac{10}{-5} = -2.$$

$$312. \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z}} \cdot \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x+z}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x+z}} = \frac{\frac{y+z-x}{x(y+z)} \cdot \frac{y(x+z)}{y(x+z)}}{\frac{y+z+x}{x(y+z)} \cdot \frac{x+z-y}{y(x+z)}} =$$

$$= \frac{y+z-x}{y+z+x} \cdot \frac{y+z+x}{x+z-y} = \frac{y+z-x}{x+z-y},$$

$\left(\begin{array}{l} x \neq 0; \quad y \neq 0; \\ x+z \neq 0; \quad y+z \neq 0; \\ x+y+z \neq 0; \quad x-y+z \neq 0 \end{array} \right)$

Ha $x=-2,75$; $y=-\frac{1}{4}$; $z=\frac{3}{2}$, a kifejezés értéke:

$$\frac{-0,25+1,5+2,75}{-2,75+1,5+0,25} = \frac{4}{-1} = -4.$$

$$313. \left(\frac{a^2-3ab}{a+b} + b \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2} \right) =$$

$$= \frac{a^2-3ab+ab+b^2}{a+b} : \frac{a(a-b)+b(a+b)-2ab}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{(a-b)^2}{a+b} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} = a-b, \quad (|a| \neq |b|).$$

Ha $a=999$; $b=-1$, a kifejezés értéke: $999 - (-1) = 1000$.

$$314. \left(\frac{3a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{-\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}} \right)^{-1} - \left(\frac{1-2a}{3a-2} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{3}{a-2} - \frac{1}{a-1} \right)^{-1} - \frac{3a-2}{1-2a} = \left(\frac{3a-3-a+2}{(a-2)(a-1)} \right)^{-1} + \frac{3a-2}{2a-1} =$$

$$= \left(\frac{2a-1}{(a-2)(a-1)} \right)^{-1} + \frac{3a-2}{2a-1} = \frac{a^2-3a+2+3a-2}{2a-1} = \frac{a^2}{2a-1},$$

($a > 0$, $a \neq \frac{2}{3}$; $a \neq 2$; $a \neq \frac{1}{2}$; $a \neq 1$).

$$315. \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}} + (xy)^{\frac{1}{2}} \right] \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x-y} \right]^2 =$$

$$= \left[\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}} \right) \left(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y \right)}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \right] \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}} \right) \left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}} \right)} \right]^2 =$$

$$= \left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}} \right)^2} = 1, \quad (x > 0; y > 0; x \neq y)$$

$$316. \left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} (x^{-1}+y^{-1}) + \frac{2}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}} \right)^3} \left(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y} \right)^2} \cdot \frac{y+x}{xy} + \frac{2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y} \right)^3} \cdot \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y} \right)^2 xy} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y} \right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y} \right)^2 xy} = \frac{1}{xy}, \quad (x > 0; y > 0; x \neq y).$$

$$317. \left[\frac{cd^{-1}+dc^{-1}-2}{c^2d^{-2}-2cd^{-1}+1} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{\frac{c}{d} + \frac{d}{c} - 2}{\frac{c^2}{d^2} - 2 \cdot \frac{c}{d} + 1} \right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{c^2 + d^2 - 2cd}{cd} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{(c-d)^2}{cd} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{(c-d)^2}{d^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{d}{c} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{c}{d}}, \quad (cd > 0; c \neq d).$$

Ha $c=9$; $d=4$, a kifejezés értéke: $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

318. Legyen a két szám a és b .

Tudjuk, hogy $a-b=2 \Rightarrow a=b+2$.

A köbök különbsége: $a^3-b^3=(b+2)^3-b^3=$

$$= b^3+6b^2+12b+8-b^3=6b^2+12b+8=$$

$= b^2+4b+4+4b^2+8b+4+b^2=(b+2)^2+(2b+2)^2+b^2$, ez valóban három négyzetszám összege.

319. $a^2+2(a+d)^2+3(a+2d)^2+4(a+3d)^2=$

$$= a^2+2a^2+4ad+2d^2+3a^2+12ad+12d^2+4a^2+24ad+36d^2=$$

$= 10a^2+40ad+50d^2=(a+5d)^2+(3a+5d)^2$. Ez két négyzetszám összege.

320. $a^3+b^3+3(a^3b+ab^3)+6(a^3b^2+a^2b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)+$

$$+3ab(a^2+b^2)+6a^2b^2(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)+$$

$$+3ab[(a+b)^2-2ab]+6a^2b^2(a+b)=$$

$$=(a+b)[a^2-ab+b^2+6a^2b^2+3ab(a+b)]-6a^2b^2=$$

$$=1 \cdot (a^2-ab+b^2+6a^2b^2+3ab \cdot 1)-6a^2b^2=$$

$$= a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=1^2=1. \text{ (A feltétel szerint } a+b=1.)$$

321. $a+b+c=0; a=-b-c; b=-a-c; c=-a-b.$

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) =$$

$$= 1 + \frac{a-b}{c} \cdot \frac{a}{b-c} + \frac{a-b}{c} \cdot \frac{b}{c-a} + \frac{b-c}{a} \cdot \frac{c}{a-b} + 1 +$$

$$+ \frac{b-c}{a} \cdot \frac{b}{c-a} + \frac{c-a}{b} \cdot \frac{c}{a-b} + \frac{c-a}{b} \cdot \frac{a}{b-c} + 1 =$$

$$= 1 + \frac{ab(a-b)+ac(c-a)}{bc(b-c)} + \frac{ab(a-b)+bc(b-c)}{ac(c-a)} + 1 + 1 +$$

$$+ \frac{bc(b-c)+ac(c-a)}{ab(a-b)} = 1 + \frac{a^2(b-c)-a(b^2-c^2)}{bc(b-c)} +$$

$$+ \frac{b^2(c-a)-b(c^2-a^2)}{ac(c-a)} + 1 + 1 + \frac{c^2(a-b)-c(a^2-b^2)}{ab(a-b)} =$$

$$= \frac{bc+a^2-ab-ac}{bc} + \frac{ac+b^2-bc-ba}{ac} + \frac{ab+c^2-ca-cb}{ab} =$$

$$= \frac{(a-c)(a-b)}{bc} + \frac{(b-c)(b-a)}{ac} + \frac{(c-a)(c-b)}{ab} =$$

$$= \frac{a^3-a^2c-a^2b+abc+b^3-b^2c-ab^2+abc}{abc} +$$

$$+ \frac{c^3-ac^2-bc^2+abc}{abc} =$$

$$= \frac{3abc}{abc} + \frac{a^2(a-c-b)+b^2(b-c-a)+c^2(c-a-b)}{abc} =$$

$$= 3 + \frac{a^22a+b^22b+c^22c}{abc} = 3 + \frac{2(a+b)(a^2-ab+b^2)+2c^3}{abc} =$$

$$= 3 + \frac{2(-c)[(a+b)^2-3ab]}{abc} + \frac{2c^3}{abc} =$$

$$= 3 + \frac{2(-c)[(-c)^2-3ab]+2c^3}{abc} = 3 + \frac{-2c^3+6abc+2c^3}{abc} =$$

$$= 3+6=9.$$

322. $2x^2+x+k=(x+3)(2x+c)=2x^2+6x+cx+3c$. A polinomok egyenlőségéből következik, hogy $6+c=1; c=-5; k=3c=-15$. Tehát $k=-15$ esetén $2x^2+x-15=(x+3)(2x-5)$.

323. $4x^2-6x+m=(x-3)(4x+c)=4x^2-12x+cx-3c$. A polinomok egyenlőségéből következik, hogy $-12+c=-6; c=6; -3c=-18$. Tehát $m=-18$ esetén $4x^2-6x-18=(x-3)(4x+6)$.

324. $a+b+c=0.$
 $a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3=a^2(a+c)+b^2(c+b)-abc=$
 $= a^2(-b)+b^2(-a)-abc=-ab(a+b+c)=0.$

Irracionális kifejezések azonos átalakításai

325. $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$;
 a) $|x-1| = x-1$, ha $x \geq 1$;
 b) $|x-1| = 1-x$, ha $x \leq 1$;
 c) $|x-1| = |x-1|$ minden x -re $x \in \mathbf{R}$.
326. $\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} = |a-2b|$;
 a) $|a-2b| = a-2b$, ha $a \geq 2b$;
 b) $|a-2b| = 2b-a$, ha $a \leq 2b$;
 c) $|a-2b| = |a-2b|$ minden valós a, b -re.
327. $\sqrt{a(a^2 - 2ab + b^2)} = \sqrt{a(a-b)^2} = \sqrt{a}|a-b|$, $a \geq 0$;
 a) $\sqrt{a}|a-b| = \sqrt{a}(a-b)$, ha $a \geq 0$ és $a \geq b$, $a, b \in \mathbf{R}$;
 b) $\sqrt{a}|a-b| = -\sqrt{a}(a-b)$, ha $a \geq 0$ és $a \leq b$.
328. $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + x - 1 = |x+1| + x - 1$;
 a) $|x+1| + x - 1 = 2x$, ha $x \geq -1$;
 b) $|x+1| + x - 1 = -2$, ha $x \leq -1$.
329. $\sqrt{a^2 + a + \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}} - b = |a| + a + |a-b| - b$;
 a) $|a| + a + |a-b| - b = 3a - 2b$, ha $|a| = a$ és $|a-b| = a-b$, tehát $a \geq 0$ és $a \geq b$;
 b) $|a| + a + |a-b| - b = a$, ha $|a| = a$ és $|a-b| = b-a$, tehát $a \geq 0$ és $a \leq b$;
 c) $|a| + a + |a-b| - b = a - 2b$, ha $|a| = -a$ és $|a-b| = a-b$, tehát $a \leq 0$ és $a \geq b$;
 d) $|a| + a + |a-b| - b = -a$, ha $|a| = -a$ és $|a-b| = b-a$, tehát $a \leq 0$ és $a \leq b$.
330. $x > y > 0 \Rightarrow |x-y| = x-y$ és $|y| = y$.
 $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} + x + \sqrt{y^2} = |x-y| + x + |y|$.
 a) $|x-y| + x + |y| = 2x$, az állítás igaz;
 b) $|x-y| + x + |y| = 2y$, az állítás hamis a fenti feltételek mellett.

331. $2y < x < 0$.
 $\sqrt{(x-2y)^2} + \sqrt{x^2} = |x-2y| + |x| = x-2y-x = -2y$.
 a) $|x-2y| + |x| = 2(x-y)$, az állítás hamis;
 b) $|x-2y| + |x| = -2y$, az állítás igaz;
 c) $|x-2y| + |x| = 2(y-x)$, az állítás hamis a fenti feltételek mellett.
332. a, b egész számok és $b \leq 1$.
 $\sqrt{(a-3b)^2} + \sqrt{a^2} = |a-3b| + |a| = 3b$, ha $|a-3b| = 3b-a$, és $|a| = a$,
 tehát $a \leq 3b$ és $a \geq 0$.
 A $0 \leq a \leq 3b$ és $b \leq 1$ feltételekből következik, hogy $0 \leq a \leq 3$; $0 \leq b \leq 1$;
 a lehetséges értékek: $b=0; 1; a=0; 1; 2; 3$. Figyelembe véve, hogy $a \leq 3b$, a megfelelő $(a; b)$ párok a következők: $(0; 0), (0; 1), (1; 1), (2; 1)$
 és $(3; 1)$, ezek kielégítik az egyenlőséget.
333. x egész szám.
 $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = 3$;
 $|x-2| + |x+1| = 3$.
 a) ha $x < -1$; $-x+2-x-1 = 3$; $-2x=2$; $x=-1$ nincs az intervallumban,
 b) ha $-1 \leq x < 2$; $-x+2+x+1 = 3$; $3=3$, ebben az intervallumban azonosság,
 c) ha $x \geq 2$; $x-2+x+1 = 3$; $2x=4$; $x=2$, a megoldás $-1 \leq x \leq 2$,
 x egész szám, tehát $x = -1; 0; 1; 2$.
334. x egész szám.
 $\sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{9+x^2-6x} = x+2$.
 $|2x-1| + |3-x| = x+2$.
 a) ha $x < \frac{1}{2}$, $-2x+1+3-x = x+2$; $2=4x$; $x = \frac{1}{2}$, nincs az intervallumban;
 b) ha $\frac{1}{2} \leq x < 3$, $2x-1+3-x = x+2$; $x+2 = x+2$, ebben az intervallumban azonosság,
 c) ha $x \geq 3$, $2x-1+x-3 = x+2$, $2x=6$, $x=3$, a megoldás $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$
 és x egész szám, tehát $x = 1; 2; 3$, ezek kielégítik az egyenlőséget.
335. $\sqrt{(x+4)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = 3$, x egész szám.
 $|x+4| + |x+1| = 3$.
 a) ha $x < -4$, $-x-4-x-1 = 3$; $-2x=8$, $x=-4$, nincs az intervallumban;

b) ha $-4 \leq x < -1$, $x+4-x-1 = 3$, $3=3$, ebben az intervallumban azonososság;

c) ha $x \geq -1$, $x+4+x+1 = 3$, $2x = -2$, $x = -1$, a megoldás $-4 \leq x \leq -1$, x egész szám, tehát $x = -4; -3; -2; -1$, ezek kielégítik az egyenlőséget.

336. $\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{25-10x+x^2} = |2x-3| + |5-x|.$

a) $|2x-3| + |5-x| = 8-3x$, ha $|2x-3| = 3-2x$ és $|5-x| = 5-x$,
tehát $2x \leq 3$; $x \leq \frac{3}{2}$ és $x \leq 5$, vagyis $x \leq \frac{3}{2}$;

b) $|2x-3| + |5-x| = x+2$, ha $|2x-3| = 2x-3$ és $|5-x| = 5-x$,
tehát $2x \geq 3$, $x \geq \frac{3}{2}$ és $x \leq 5$, vagyis $\frac{3}{2} \leq x \leq 5$;

c) $|2x-3| + |5-x| = 3x-8$, ha $|2x-3| = 2x-3$ és $|5-x| = x-5$,
tehát $x \geq \frac{3}{2}$ és $x \geq 5$, vagyis $x \geq 5$.

337. $\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{25-10x+x^2} = x+2$, x egész szám.

Az előző feladat szerint az egyenlőség a $\frac{3}{2} \leq x \leq 5$ intervallumban áll fenn, tehát $x = 2; 3; 4; 5$; ezek kielégítik az egyenlőséget.

338. $\sqrt{(a-5b)^2} + \sqrt{b^2-2b+1} + \sqrt{(10-2a)^2} = 6b-3a+9.$

$|a-5b| + |b-1| + |10-2a| = 6b-3a+9.$
Az egyenlőség akkor igaz, ha $|a-5b| = 5b-a$, $|b-1| = b-1$,
 $|10-2a| = 10-2a$, tehát $a \leq 5b$; $b \geq 1$ és $2a \leq 10$, $a \leq 5$. A fentieknek a $b \geq 1$ és $a \leq 5$ feltételeknek eleget tevő egész számok felelnek meg.

339. $\sqrt{x^3-3x^2+3x-1} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(2-x)^2} = x+1.$

$x-1+|x|+|2-x| = x+1$, ha $|x|=x$, tehát $x \geq 0$ és $|2-x| = 2-x$,
tehát $x \leq 2$;

a) $0 \leq x \leq 2$, $x \in \mathbf{R}$; b) $0 \leq x \leq 2$, $x \in \mathbf{Q}$; c) $x = 0; 1; 2$.

340. a) $\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$, $x > 1$, $x \in \mathbf{R}$.

341. a) $\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$, $\frac{x+2}{x-3} \geq 0$, ha 1. $x+2 \geq 0$ és $x-3 > 0$, tehát $x > 3$, vagy

2. $x+2 \leq 0$ és $x-3 < 0$, tehát $x \leq -2$;

b) $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$, $\frac{x-3}{x+2} \geq 0$, tehát $x \geq 3$ vagy $x < -2$.

342. a) $\sqrt{|x-2|}$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $|\sqrt{x-2}|$, $x \geq 2$, $x \in \mathbf{R}$.

343. a) $\sqrt{x^2-1}$, $x \geq 1$ vagy $x \leq -1$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$, $x \in \mathbf{R}$.

344. a) $\sqrt{2^x-4}$, $2^x \geq 4$, $x \geq 2$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $\sqrt{\frac{1}{2^x-4}}$, $2^x > 4$, $x > 2$, $x \in \mathbf{R}$.

345. a) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} = \sqrt{\frac{7}{63}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$;

b) $\sqrt{8 \cdot 72} = \sqrt{8 \cdot 8 \cdot 9} = 8 \cdot 3 = 24$;

c) $\sqrt{32 \cdot 98} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 49} = 4 \cdot 2 \cdot 7 = 56$.

346. a) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{147} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 0$;

b) $\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{63} = 2\sqrt{7} + \sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 0$.

347. $\sqrt{41+4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{41-4\sqrt{2}} = \sqrt{41-16 \cdot 2} = \sqrt{41-32} = \sqrt{9} = 3$.

348. $\sqrt{5\sqrt{3}+\sqrt{59}} \cdot \sqrt{75-\sqrt{59}} = \sqrt{75-59} = \sqrt{16} = 4$.

349. $(\sqrt{6+\sqrt{11}} + \sqrt{6-\sqrt{11}})^2 = 6 + \sqrt{11} + 6 - \sqrt{11} + 2\sqrt{(6+\sqrt{11})(6-\sqrt{11})} =$
 $= 12 + 2\sqrt{36-11} = 12 + 2\sqrt{25} = 12 + 2 \cdot 5 = 22$.

350. $(\sqrt{12+\sqrt{23}} + \sqrt{12-\sqrt{23}})^2 = 12 + \sqrt{23} + 12 - \sqrt{23} + 2\sqrt{12+\sqrt{23}} \cdot \sqrt{12-\sqrt{23}} =$
 $= 24 + 2\sqrt{144-23} = 24 + 2\sqrt{121} = 24 + 2 \cdot 11 = 46$.

351. $(\sqrt{15+10\sqrt{2}} - \sqrt{15-10\sqrt{2}})^2 =$
 $= 15 + 10\sqrt{2} + 15 - 10\sqrt{2} - 2\sqrt{15+10\sqrt{2}} \cdot \sqrt{15-10\sqrt{2}} =$
 $= 30 - 2\sqrt{225-200} = 30 - 2\sqrt{25} = 30 - 2 \cdot 5 = 20$.

352. a) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{6}-1)^2} =$
 $= |\sqrt{6}+1| - |\sqrt{6}-1| = \sqrt{6}+1 - (\sqrt{6}-1) = 2$;

$$b) \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} =$$

$$= |2-\sqrt{3}| + |2+\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4.$$

$$353. (2\sqrt{72}-\sqrt{125}+3\sqrt{20}) \cdot (6\sqrt{18}-\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{72}) =$$

$$= (12\sqrt{2}-5\sqrt{5}+6\sqrt{5}) \cdot (18\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-6\sqrt{2}) =$$

$$= (12\sqrt{2}+\sqrt{5})(12\sqrt{2}-\sqrt{5}) = 144 \cdot 2 - 5 = 283.$$

$$354. (\sqrt{84}-3\sqrt{\frac{7}{3}}-\sqrt{8}) \left(\sqrt{21}+4\sqrt{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \left(2\sqrt{21}-\sqrt{\frac{9 \cdot 7}{3}}-2\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{21}+\sqrt{\frac{16}{2}}\right) =$$

$$= (2\sqrt{21}-\sqrt{21}-2\sqrt{2})(\sqrt{21}+2\sqrt{2}) =$$

$$= (\sqrt{21}-2\sqrt{2})(\sqrt{21}+2\sqrt{2}) = 21-8 = 13.$$

$$355. (2\sqrt{12}-4\sqrt{27}+3\sqrt{75}+7\sqrt{8}-3\sqrt{18})(4\sqrt{48}-3\sqrt{27}-5\sqrt{18}+2\sqrt{50}) =$$

$$= (4\sqrt{3}-12\sqrt{3}+15\sqrt{3}+14\sqrt{2}-9\sqrt{2})(16\sqrt{3}-9\sqrt{3}-15\sqrt{2}+10\sqrt{2}) =$$

$$= (7\sqrt{3}+5\sqrt{2})(7\sqrt{3}-5\sqrt{2}) = 49 \cdot 3 - 25 \cdot 2 = 147 - 50 = 97.$$

$$356. (5\sqrt{20}+\sqrt{45}-7\sqrt{5}-4\sqrt{28}+3\sqrt{7})(2\sqrt{80}-2\sqrt{5}+2\sqrt{63}+\sqrt{28}-3\sqrt{7}) =$$

$$= (10\sqrt{5}+3\sqrt{5}-7\sqrt{5}-8\sqrt{7}+3\sqrt{7})(8\sqrt{5}-2\sqrt{5}+6\sqrt{7}+2\sqrt{7}-3\sqrt{7}) =$$

$$= (6\sqrt{5}-5\sqrt{7})(6\sqrt{5}+5\sqrt{7}) = 36 \cdot 5 - 25 \cdot 7 = 180 - 175 = 5.$$

$$357. \left(\frac{8}{\sqrt{5}+3} - \frac{20}{\sqrt{5}-3} - \frac{4}{\sqrt{5}-2}\right)(13+\sqrt{5}) =$$

$$= \left(\frac{8(\sqrt{5}-3)}{-4} - \frac{20(\sqrt{5}+3)}{-4} - \frac{4(\sqrt{5}+2)}{1}\right)(13+\sqrt{5}) =$$

$$= (-2\sqrt{5}+6+5\sqrt{5}+15-4\sqrt{5}-8)(13+\sqrt{5}) = (13-\sqrt{5})(13+\sqrt{5}) =$$

$$= 169-5 = 164.$$

$$358. (3\sqrt{32}-\sqrt{8}+2\sqrt{48}+\sqrt{12}-5\sqrt{3})(\sqrt{242}+2\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{27}-\sqrt{12}) =$$

$$= (12\sqrt{2}-2\sqrt{2}+8\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3})(11\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}) =$$

$$= (10\sqrt{2}+5\sqrt{3})(10\sqrt{2}-5\sqrt{3}) = 100 \cdot 2 - 25 \cdot 3 = 200 - 75 = 125.$$

$$359. \sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} = \sqrt[3]{(a+b)^3} = a+b.$$

$$360. a) \left(\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192}\right)\sqrt[3]{3} = \left(2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}\right)\sqrt[3]{3} =$$

$$= \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9}.$$

$$b) \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{16\frac{7}{8}} - \sqrt[3]{214\frac{3}{8}} = 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{\frac{135}{8}} - \sqrt[3]{\frac{1715}{8}} =$$

$$= 2\sqrt[3]{5} + \frac{3\sqrt[3]{5}}{2} - \frac{7\sqrt[3]{5}}{2} = 2\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5} = 0.$$

$$361. a) \left(\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192}\right)\left(\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{192}\right) =$$

$$= \left(2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}\right)\left(5\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}\right) = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9}.$$

$$b) \left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right) = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 5-2 = 3;$$

az $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ azonosság alapján.

$$362. a) \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} =$$

$$= 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4.$$

$$b) \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3} =$$

$$= 1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3} = 2.$$

$$363. a) \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} =$$

$$= \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1 = 2.$$

$$b) \sqrt[4]{28+16\sqrt{3}} - \sqrt[4]{28-16\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(4+2\sqrt{3})^2} - \sqrt[4]{(4-2\sqrt{3})^2} =$$

$$= \sqrt[4]{(\sqrt{3}+1)^4} - \sqrt[4]{(\sqrt{3}-1)^4} = |\sqrt{3}+1| - |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}+1 - (\sqrt{3}-1) = 2.$$

$$364. \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{a}{2\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{2b}; \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}.$$

$$365. \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(9-2\sqrt{14})}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2(9-2\sqrt{14})}{7-2} = \frac{(9+2\sqrt{14})(9-2\sqrt{14})}{5} =$$

$$= \frac{81-4 \cdot 14}{5} = \frac{81-56}{5} = \frac{25}{5} = 5.$$

$$366. \frac{(\sqrt{11}-\sqrt{7})(9+\sqrt{77})}{\sqrt{11}+\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{11}-\sqrt{7})^2(9+\sqrt{77})}{11-7} = \frac{(18-2\sqrt{77})(9+\sqrt{77})}{4} =$$

$$= \frac{2(9-\sqrt{77})(9+\sqrt{77})}{4} = \frac{81-77}{2} = 2.$$

$$367. \frac{(11-\sqrt{85})(\sqrt{17}+\sqrt{5})}{\sqrt{17}-\sqrt{5}} = \frac{(11-\sqrt{85})(\sqrt{17}+\sqrt{5})^2}{17-5} =$$

$$= \frac{(11-\sqrt{85})(22+2\sqrt{85})}{12} = \frac{2(11-\sqrt{85})(11+\sqrt{85})}{12} =$$

$$= \frac{121-85}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

$$368. \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})^2 + (3+\sqrt{5})^2}{9-5} = \frac{14-6\sqrt{5}+14+6\sqrt{5}}{4} = 7.$$

$$369. \left(\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \right) (5\sqrt{7}-\sqrt{3}) = \left[\frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4} + \frac{12(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} \right] (5\sqrt{7}-\sqrt{3}) =$$

$$= (2\sqrt{7}-2\sqrt{3}+3\sqrt{7}+3\sqrt{3})(5\sqrt{7}-\sqrt{3}) =$$

$$= (5\sqrt{7}+\sqrt{3})(5\sqrt{7}-\sqrt{3}) = 25 \cdot 7 - 3 = 172.$$

$$370. \left(\frac{6}{4+\sqrt{10}} + \frac{24}{8-\sqrt{40}} \right) (12-\sqrt{10}) =$$

$$= \left[\frac{6(4-\sqrt{10})}{6} + \frac{24(8+\sqrt{40})}{24} \right] (12-\sqrt{10}) =$$

$$= (4-\sqrt{10}+8+2\sqrt{10})(12-\sqrt{10}) = (12+\sqrt{10})(12-\sqrt{10}) =$$

$$= 144-10 = 134.$$

$$371. a) \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a-b} \quad (a \neq b); \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

azonosság alapján;

$$b) \frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5};$$

$$c) \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{-1} = -5-2\sqrt{6}.$$

$$372. a) \frac{b}{\sqrt{c}-2} = \frac{b(\sqrt{c}+2)}{c-4}, \quad c \geq 0, c \neq 4;$$

$$b) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b})}{a^3-b} = \frac{a^2-\sqrt{ab}}{a^3-b}, \quad a \geq 0, b \geq 0, ab \neq 0;$$

$$c) \frac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}} = \frac{2(\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{5^2})}{3-5} = -(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{25}).$$

$$73. a) \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{3})}{12+2\sqrt{35}-3} = \frac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{3})}{9+2\sqrt{35}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{3})(9-2\sqrt{35})}{81-4 \cdot 35} =$$

$$= \frac{(\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{6}+3\sqrt{5}+3\sqrt{7}+3\sqrt{3})(9-2\sqrt{35})}{-59} =$$

elvégezve a beszorzásokat és a lehetséges kiemeléseket, a következő eredményt kapjuk:

$$= \frac{5\sqrt{10}+\sqrt{14}-9\sqrt{6}+15\sqrt{5}+3\sqrt{7}-27\sqrt{3}+2\sqrt{210}+6\sqrt{105}}{59};$$

$$b) \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1-\sqrt{2})}{6-2\sqrt{5}-2} = \frac{5-1-\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{4-\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{5})} = \frac{(4-\sqrt{10}-\sqrt{2})(2+\sqrt{5})}{2(4-5)} =$$

elvégezve a beszorzást és a lehetséges kiemeléseket, az eredmény:

$$= \frac{3\sqrt{10}+7\sqrt{2}-8-4\sqrt{5}}{2}.$$

$$374. a) \frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{15+2\sqrt{50}-2} = \frac{2(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{13+10\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(2\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2})(13-10\sqrt{2})}{169-200} =$$

elvégezve a beszorzást, az eredmény:

$$= \frac{2(20+7\sqrt{5}-3\sqrt{10}-13\sqrt{2})}{31};$$

$$b) \frac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{a+\sqrt{b}-\sqrt{c}}} = \frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}})}{a+b+2\sqrt{ab}-c} = \frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab},$$

$(a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0; \sqrt{a+\sqrt{b}} \neq \sqrt{c}).$

$$375. a) \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{5}} = \frac{7-4}{\sqrt{5}(\sqrt{7}-2)} = \frac{3}{\sqrt{35}-2\sqrt{5}};$$

$$b) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{a-b}{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b \geq 0, a \neq b.$$

$$376. (\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{135} - 2\sqrt[3]{40}) (10\sqrt[3]{72} + 5\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{15} - 4\sqrt[3]{120} + 2\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{200}) = (2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5}) (20\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{15} - 8\sqrt[3]{15} + 2\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[3]{25}) = (5\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{5}) (25\sqrt[3]{9} - 10\sqrt[3]{15} + 4\sqrt[3]{25}) = 5^3 \cdot 3 + 2^3 \cdot 5 = 375 + 40 = 415$$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ alapján.

$$377. 20\sqrt[3]{0,005} + \sqrt[3]{5} + 6\sqrt[3]{0,625} - 5\sqrt[3]{0,04} + \sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{0,625} = \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{5}.$$

$$378. a) (\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{243}) (\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}) = (2\sqrt[4]{3} + 3\sqrt[4]{3}) (2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3}) = 5\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{3} = 5\sqrt[4]{9} = 5\sqrt{3}.$$

$$b) (\sqrt[5]{729} - \sqrt[5]{96}) (\sqrt[5]{96} - \sqrt[5]{3}) = (3\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{3}) (2\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{3}) = \sqrt[5]{3}\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{9}.$$

$$379. (\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80} - \sqrt[4]{512} + \sqrt[4]{162}) (\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}) (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = (3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - 4\sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2}) (\sqrt[4]{5} + 3\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{2}) (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = (\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{2}) (\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2}) (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3.$$

$$380. a) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{\sqrt{10}+2}{3};$$

$$b) \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{b-a}, \quad a \geq 0, b \geq 0, a^2+b^2 \neq 0, a \neq b;$$

$$c) \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}{7-2} = \frac{9-2\sqrt{14}}{5}.$$

$$381. a) \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{4}; \quad b) \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{2};$$

$$c) \frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{3}$$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ azonosság alapján.

$$382. 2\sqrt{7} = \sqrt{7} + \sqrt{7}; \quad \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7} + \sqrt{6}.$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{7} > \sqrt{7} + \sqrt{6}, \text{ tehát } 2\sqrt{7} > \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}.$$

$$383. \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4^5} = \sqrt[4]{1024}; \quad \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{5^4} = \sqrt[5]{625}; \quad \text{tehát } \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}.$$

$$384. \frac{5}{\sqrt{12}-\sqrt{7}} = \frac{5(\sqrt{12}+\sqrt{7})}{12-7} = \sqrt{12} + \sqrt{7} = 2\sqrt{3} + \sqrt{7}; \quad 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}.$$

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{12} > 2\sqrt{3} + \sqrt{7}, \quad \text{tehát } 4\sqrt{3} > \frac{5}{\sqrt{12}-\sqrt{7}}.$$

$$385. \frac{7}{5-3\sqrt{2}} = \frac{7(5+3\sqrt{2})}{25-18} = 5+3\sqrt{2};$$

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{18} + 3\sqrt{2}.$$

$$5+3\sqrt{2} = \sqrt{25} + 3\sqrt{2} > \sqrt{18} + 3\sqrt{2}, \quad \text{tehát } \frac{7}{5-3\sqrt{2}} > \sqrt{72}.$$

$$386. \quad \sqrt{3} = \sqrt[6]{27}; \quad \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}; \quad \sqrt[6]{27} > \sqrt[6]{25}, \quad \text{tehát} \quad \sqrt{3} > \sqrt[3]{5}.$$

$$387. \quad \sqrt[6]{16} \sqrt[3]{3} = 4 \sqrt[6]{3}; \quad \sqrt[3]{64} \sqrt[6]{2} = 4 \sqrt[6]{2}, \quad \text{tehát} \quad \sqrt[6]{16} \sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{64} \sqrt[6]{2}.$$

$$388. \quad 2\sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}; \quad 2\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

$$389. \quad \sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[6]{64}; \quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[6]{81}; \\ \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[6]{64}; \quad \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}.$$

$$390. \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^3 = (\sqrt{5}+2)^3 - (\sqrt{5}-2)^3 = 5\sqrt{5} + 8 + 30 + 12\sqrt{5} - \\ - (5\sqrt{5} - 8 - 30 + 12\sqrt{5}) = 76.$$

$$391. \quad \sqrt[5]{2} \sqrt[4]{3} \sqrt[3]{2} \sqrt{2} = \sqrt[20]{2^4 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}} = \sqrt[20]{2^9 \cdot 3^5} = \sqrt[20]{1536}.$$

$$392. \quad \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \sqrt[5]{\frac{3}{3}} \sqrt[9]{\frac{9}{2}} = \sqrt[6]{\frac{2^2 \cdot 5^3 \cdot 9^2}{5^2 \cdot 3^3 \cdot 2^2}} = \sqrt[6]{5 \cdot 3} = \sqrt[6]{15}.$$

$$393. \quad \frac{\sqrt[4]{a} \sqrt[5]{a^2} \sqrt[3]{b}}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 a^{-1} b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} a^{-1} b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{13}{20}} b^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \\ = a^{\frac{3}{20}} b^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[20]{a^3} \sqrt[3]{\frac{1}{b}} = \sqrt[60]{\frac{a^9}{b^20}}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$394. \quad \sqrt[3]{a \sqrt[4]{a} \sqrt[5]{a}} = \left[a \left(a a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^{\frac{1}{3}} = \left[a \left(a^{\frac{5}{4}} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^{\frac{1}{3}} = \\ = \left(a a^{\frac{3}{10}} \right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{30}} = \sqrt[30]{a^{13}}, \quad a \geq 0.$$

$$395. \quad \sqrt[3]{a^2 \sqrt[4]{b} \sqrt[4]{\frac{b}{a^4}}} = \left\{ \left[\left(\frac{b}{a^4} \right)^{\frac{1}{2}} b \right]^{\frac{1}{3}} a^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^2} \right)^{\frac{1}{3}} a^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}} a^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(b^{\frac{1}{2}} a^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{4}} a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[12]{b^3 a^8}, \quad a > 0, \quad b \geq 0.$$

$$396. \quad \sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}} = \sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt[6]{b^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^6 b^5}{b^6 a^4}} = \sqrt[5]{\frac{a^2}{b}} = \sqrt[30]{\frac{a^6 b^5}{b^6 a^4}} = \sqrt[30]{\frac{a^2}{b}}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$397. \quad \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{3}{4}} \left(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}} \right)^2}{\left(a^{\frac{1}{12}} \right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{-\frac{3}{8}} b^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{24}}} = \\ = \frac{a^{\frac{7}{24}}}{a^{-\frac{1}{24}}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a > 0, \quad b \geq 0.$$

$$398. \quad a) \quad \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x^2} \sqrt{x}} = \sqrt[12]{x^{12}} = \sqrt[24]{x^{24}} = \sqrt[8]{x^7}, \quad x \geq 0;$$

$$b) \quad \frac{\sqrt{x^3} \sqrt[4]{x} \sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[12]{x^{18} x^3 x^{10}}}{\sqrt[12]{x^8}} = \sqrt[12]{x^{23}} = x \sqrt[12]{x^{11}}, \quad x > 0.$$

$$399. \quad a) \quad \frac{\left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}, \quad x > 0;$$

$$b) \quad \frac{\left(a^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{a^3} a^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{6}} \right)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}} a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{24}}}{a^{\frac{13}{12}}} = a^{-\frac{25}{24}} = \\ = \sqrt[24]{\frac{1}{a^{25}}} = \frac{1}{a} \sqrt[24]{\frac{1}{a}}, \quad a > 0.$$

$$400. \quad 2x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-3\right)-3x^{\frac{3}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}\right)=2x-6x^{\frac{1}{2}}-3x+3x^{\frac{1}{2}}=$$

$$= -x-3\sqrt{x}, \quad (x>0).$$

$$401. \quad 10a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-1\right)-\left(5a^{\frac{2}{3}}-2\right)\left(2a^{\frac{1}{3}}+3\right)=10a-10a^{\frac{2}{3}}-10a+$$

$$+4a^{\frac{1}{3}}-15a^{\frac{2}{3}}+6=-25\sqrt[3]{a^2}+4\sqrt[3]{a}+6, \quad (a\geq 0).$$

$$402. \quad \left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)-\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)=x+2x^{\frac{1}{2}}-3-x+3x^{\frac{1}{2}}+4=$$

$$= 5\sqrt{x}+1, \quad (x\geq 0).$$

$$403. \quad \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=$$

$$= |\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=$$

$$= \begin{cases} \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}, & \text{ha } x\geq 2, \\ \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2, & \text{ha } 1\leq x\leq 2. \end{cases}$$

$$404. \quad \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}-\frac{3x-1}{x-1}=$$

$$= \frac{(2\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})+(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1})-3x+1}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}=$$

$$= \frac{2x-\sqrt{x-1}+x-\sqrt{x-2}-3x+1}{x-1}=\frac{-2\sqrt{x-2}}{x-1}=\frac{-2(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}=$$

$$= \frac{2}{1-\sqrt{x}}, \quad (x\geq 0, \quad x\neq 1).$$

$$405. \quad \frac{3\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+1}-\frac{2\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-1}-\frac{a+1}{a-1}=$$

$$= \frac{(3\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)-(2\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+1)-a-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=$$

$$= \frac{3a-5\sqrt{a}+2-2a+2\sqrt{a}+4-a-1}{a-1}=\frac{-3\sqrt{a}+5}{a-1}, \quad (a\geq 0, \quad a\neq 1)$$

$$406. \quad \frac{\sqrt{b}+3}{\sqrt{b}+1}-\frac{2\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}-1}-\frac{\sqrt{b}-3}{b-1}=$$

$$= \frac{(\sqrt{b}+3)(\sqrt{b}-1)-(2\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)-\sqrt{b}+3}{(\sqrt{b}+1)(\sqrt{b}-1)}=$$

$$= \frac{b+2\sqrt{b}-3-2b-\sqrt{b}+1-\sqrt{b}+3}{b-1}=\frac{-b+1}{b-1}=-1, \quad (b\geq 0, \quad b\neq 1).$$

$$407. \quad \frac{\sqrt{x}+3}{x-16}\left(2+\frac{2}{\sqrt{x}+3}\right)=\frac{\sqrt{x}+3}{x-16}\cdot\frac{2\sqrt{x}+6+2}{\sqrt{x}+3}=\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+4)2}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+3)}=$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}-4}, \quad (x\geq 0, \quad x\neq 16).$$

$$408. \quad \frac{\sqrt{b}+2}{b-9}\left(1-\frac{5}{\sqrt{b}+2}\right)=\frac{\sqrt{b}+2}{b-9}\cdot\frac{\sqrt{b}+2-5}{\sqrt{b}+2}=\frac{\sqrt{b}-3}{(\sqrt{b}+3)(\sqrt{b}-3)}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}+3}, \quad (b\geq 0, \quad b\neq 9).$$

$$409. \quad \frac{6\sqrt{y}+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{4y-x}{2\sqrt{xy}-x}=\frac{3(2\sqrt{y}+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(2\sqrt{y}+\sqrt{x})(2\sqrt{y}-\sqrt{x})}=3,$$

$$(x>0, \quad y\geq 0, \quad x\neq 4y).$$

$$410. \quad \frac{3}{15\sqrt{c}+5\sqrt{d}}\cdot\frac{9\sqrt{c}-3\sqrt{d}}{9c-d}=\frac{3}{5(3\sqrt{c}+\sqrt{d})}\cdot\frac{(3\sqrt{c}+\sqrt{d})(3\sqrt{c}-\sqrt{d})}{3(3\sqrt{c}-\sqrt{d})}=\frac{1}{5},$$

$$(c\geq 0, \quad d\neq 9c, \quad d\geq 0).$$

$$411. \quad \frac{x-9y}{2\sqrt{x}+5\sqrt{y}}\cdot\frac{x-3\sqrt{xy}}{2x+5\sqrt{xy}}=\frac{(\sqrt{x}-3\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})}{2\sqrt{x}+5\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+5\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3\sqrt{y})}=$$

$$= \sqrt{x}+3\sqrt{y}, \quad (x>0, \quad y\geq 0, \quad x\neq 9y).$$

$$412. \quad \left(\frac{\sqrt{y}+2}{\sqrt{y}-1}-\frac{2}{y-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{y}+3}{y-1}=\frac{(\sqrt{y}+2)(\sqrt{y}+1)-2}{y-1}\cdot\frac{y-1}{\sqrt{y}+3}=$$

$$= \frac{y+3\sqrt{y}+2-2}{y-1}\cdot\frac{y-1}{\sqrt{y}+3}=\frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}+3)}{\sqrt{y}+3}=\sqrt{y}, \quad (y\geq 0, \quad y\neq 1).$$

$$\begin{aligned}
 413. \quad & \left(\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} - \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \right) \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{4} = \\
 & = \frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2}{(a+b)-(a-b)} \cdot \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{4} = \\
 & = \frac{a+b+a-b-2\sqrt{a^2-b^2} - (a+b+a-b+2\sqrt{a^2-b^2})}{2b} \cdot \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{4} = \\
 & = \frac{-4\sqrt{a^2-b^2}}{2b} \cdot \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{4} = \frac{-(a^2-b^2)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2},
 \end{aligned}$$

$(a > 0, b \neq 0, |a| \geq |b|)$.

$$\begin{aligned}
 414. \quad & \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{x+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}} \left(\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}} \right) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \\
 & + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{xy}}{2x\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \\
 & = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (x \neq y, x > 0, y > 0, xy \neq 0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 415. \quad & \left(\frac{2a+3\sqrt{a}}{4a+12\sqrt{a}+9} - \frac{3\sqrt{a}+2}{2\sqrt{a}+3} + \frac{4\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}+3} \right) \frac{2\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-3} = \\
 & = \left(\frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a}+3)}{(2\sqrt{a}+3)^2} - \frac{3\sqrt{a}+2}{2\sqrt{a}+3} + \frac{4\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}+3} \right) \frac{2\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-3} = \\
 & = \frac{\sqrt{a}-3\sqrt{a}-2+4\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}+3} \cdot \frac{2\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-3} = \frac{2\sqrt{a}-3}{2\sqrt{a}+3} \cdot \frac{2\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-3} = 1, \\
 & \left(a \geq 0, a \neq \frac{9}{4} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 416. \quad & \frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}+x+\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-(x^2-y^2)} = \frac{2x}{y^2}, \\
 & (y \neq 0, x^2 \geq y^2).
 \end{aligned}$$

$$417. \quad \left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right) \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
 & = \left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^2 = \\
 & = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = 1, \quad (a \geq 0, b \geq 0, a \neq b).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 418. \quad & \left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}} \right) : \frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} = \\
 & = \frac{a^2+a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2} - (a^2+a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2})}{a^2-a^2+b^2} \cdot \frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} = \\
 & = \frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} \cdot \frac{b^2}{4a\sqrt{a^2-b^2}} = 1, \quad (a^2 > b^2, b \neq 0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 419. \quad & \left(\frac{5}{2\sqrt{a}-1} + \frac{8}{2\sqrt{a}+1} + \frac{7+16\sqrt{a}}{1-4a} \right) \frac{2\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1} = \\
 & = \frac{10\sqrt{a}+5+16\sqrt{a}-8-7-16\sqrt{a}}{4a-1} \cdot \frac{2\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1} = \\
 & = \frac{10\sqrt{a}-10}{(2\sqrt{a}+1)(2\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{2\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1} = \frac{10(\sqrt{a}-1)(2\sqrt{a}-1)}{(2\sqrt{a}+1)(2\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1)} = \\
 & = \frac{10}{2\sqrt{a}+1}, \quad \left(a \geq 0, a \neq 1, a \neq \frac{1}{4} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 420. \quad & \left(\frac{2\sqrt{xy}}{4x-9y} + \frac{\sqrt{y}}{3\sqrt{y}-2\sqrt{x}} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}} \right) = \\
 & = \frac{2\sqrt{xy}-\sqrt{y}(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})}{(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}-2\sqrt{x}+3\sqrt{y}} = \\
 & = \frac{-3y}{(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})6\sqrt{y}} = \frac{-\sqrt{y}}{2(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{y}}{6\sqrt{y}-4\sqrt{x}}, \\
 & (x \geq 0, y > 0, 4x \neq 9y).
 \end{aligned}$$

$$421. \quad \frac{a}{a-2b} \sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{a^3}} = \frac{a}{a-2b} \sqrt{\frac{ab(a^2-4ab+4b^2)}{a^3}} =$$

$$= \frac{a}{a-2b} \sqrt{\frac{b(a-2b)^2}{a^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{a-2b} \cdot \frac{|a-2b|}{|a|} = \frac{a\sqrt{b}(a-2b)}{(a-2b)a} = \sqrt{b};$$

$a > 2b, a > 0, b \geq 0.$

$$422. \frac{\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2} - \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2-b^2+a^2+b^2+2\sqrt{a^4-b^4}}{a^2-b^2-(a^2+b^2)} = \frac{2a^2+2\sqrt{a^4-b^4}}{-2b^2} =$$

$$= \frac{a^2+\sqrt{a^4-b^4}}{-b^2}, \quad (a^2 \geq b^2, b \neq 0).$$

Ha $a = \sqrt{5}; b = \sqrt{3}$, a kifejezés értéke: $\frac{5+\sqrt{25-9}}{-3} = -3.$

$$423. (\sqrt{5\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \sqrt{5\sqrt{x}-\sqrt{y}})^2 = 5\sqrt{x}+\sqrt{y}+5\sqrt{x}-\sqrt{y}+2\sqrt{25x-y} =$$

$$= 10\sqrt{x}+2\sqrt{25x-y}, \quad (25x \geq y, y \geq 0).$$

Ha $x=1; y=3$, a kifejezés értéke: $10 \cdot 1 + 2\sqrt{25-9} = 18.$

$$424. \frac{2\sqrt{xy}+4\sqrt{y}-3\sqrt{x}-6}{2-2y} : \left(\frac{4y+19-2\sqrt{y}}{2+2\sqrt{y}} - 5 \right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{y}(\sqrt{x}+2)-3(\sqrt{x}+2)}{2(1-y)} : \frac{4y+19-2\sqrt{y}-10-10\sqrt{y}}{2+2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{y}-3)}{2(1-y)} \cdot \frac{2(1+\sqrt{y})}{(2\sqrt{y}-3)^2} = \frac{(\sqrt{x}+2)2(1+\sqrt{y})}{2(1+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})(2\sqrt{y}-3)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2}{(1-\sqrt{y})(2\sqrt{y}-3)} = \frac{\sqrt{x}+2}{5\sqrt{y}-2y-3}, \quad (y \neq 1, y \geq 0, x \geq 0).$$

Ha $x=16; y=9$, a kifejezés értéke: $\frac{6}{15-18-3} = -1.$

$$425. \left(\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^3+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+\sqrt{b^3}}} + \frac{\sqrt{b}}{a+b} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-b\sqrt{b}} \right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})+b(\sqrt{a}+\sqrt{b})} + \frac{\sqrt{b}}{a+b} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}}{a+b} + \frac{\sqrt{b}}{a+b} \right) : \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b} \cdot \frac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \quad (a \geq 0, b \geq 0, a \neq b).$$

Ha $a=25; b=16$, a kifejezés értéke: $\frac{\sqrt{25}+\sqrt{16}}{\sqrt{25}-\sqrt{16}} = \frac{9}{1} = 9.$

$$26. \sqrt{2+\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2(3\sqrt{3}-5)}}{2}} = \sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^3 \frac{2(3\sqrt{3}-5)^2}{4}} =$$

$$= \sqrt[6]{(26+15\sqrt{3}) \frac{52-30\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[6]{(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})} =$$

$$= \sqrt[6]{676-675} = 1.$$

A logaritmus fogalma, alkalmazásai

$$427. \log_a \frac{(a^2)^3 (a^{-4})^5 a^{16}}{a^2} = \log_a \frac{a^6 a^{-20} a^{16}}{a^2} = \log_a \frac{a^2}{a^2} = \log_a 1 = 0, \\ a > 0; a \neq 1.$$

$$428. \log_a \frac{\sqrt{a^3} a^{\frac{1}{2}} (a^2)^3}{a^{-1}} = \log_a \frac{a^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} a^6}{a^{-1}} = \log_a a^9 = 9, \quad a > 0, a \neq 1.$$

$$429. \log_c \sqrt[3]{\frac{c}{d} \sqrt[3]{\frac{d^4}{c} \sqrt[4]{\frac{d^8}{c^5}}}} = \log_c \sqrt[3]{\frac{c^{12} d^{12}}{d^{12} c^9}} = \log_c \sqrt[24]{\frac{c^{12} d^{12}}{d^{12} c^9}} = \\ = \log_c \sqrt[24]{c^3} = \log_c c^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}, \quad d \neq 0, c > 0, c \neq 1.$$

$$430. \log_a \sqrt[3]{a^2 \sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^{-1} b^{-1}}}}} = \log_a \sqrt[3]{a^2 \sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}}}} = \\ = \log_a \sqrt[3]{a^2 \sqrt{a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}}} = \log_a \sqrt[3]{\sqrt{a^{\frac{9}{2}} b^{-\frac{1}{2}}}} = \log_a \sqrt[6]{a^{\frac{9}{2}} b^{-\frac{1}{2}}} = \\ = \log_a a^{\frac{3}{4}} + \log_a b^{-\frac{1}{12}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} \log_a b, \quad a \neq 1, a > 0, b > 0.$$

$$431. \log_b \left(\sqrt{b} \sqrt[3]{b} \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2} \sqrt[5]{b} \right) = \log_b \left(\sqrt[4]{b} \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[5]{b^5} \right) = \\ = \log_b \left(\sqrt[8]{b^7} \cdot \sqrt[5]{b^5} \right) = \log_b \left(b^{\frac{7}{8}} b^{\frac{5}{5}} \right) = \log_b b^{\frac{41}{24}} = \frac{41}{24}, \quad b > 0, b \neq 1.$$

$$2. \sqrt{a^{4+\log_a 36}} = \sqrt{a^4 a^{\log_a 36}} = a^2 \sqrt{36} = 6a^2, \quad a > 0, a \neq 1.$$

$$3. \sqrt[3]{b^{6-\log_b 8}} = \sqrt[3]{\frac{b^6}{b^{\log_b 8}}} = \frac{b^2}{2}, \quad b > 0, b \neq 1.$$

$$4. 5^2 \cdot 5^{\log_{25} 36 - 1} = 25 \cdot 5^{\log_{25} 36 - 1} = 5 \cdot (25^{\log_{25} 36})^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 6 = 30.$$

$$5. a^{2-\log_a 327} = \frac{a^2}{((a^3)^{\log_a 327})^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^2}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^2}{3}, \quad a > 0, a \neq 1.$$

Ha $a=9$, a kifejezés értéke: $\frac{81}{3} = 27$.

$$6. 5^{1+\log_{25} a} = 5 \cdot (25^{\log_{25} a})^{\frac{1}{2}} = 5 \sqrt{a}, \quad a > 0.$$

Ha $a=9$, a kifejezés értéke: $5 \sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$.

$$7. 4^{3-\log_2 b} = \frac{4^3}{4^{\log_2 b}} = \frac{64}{(2^{\log_2 b})^2} = \frac{64}{b^2}, \quad b > 0.$$

Ha $b=3$, a kifejezés értéke: $\frac{64}{9}$.

$$8. a) \sqrt{10^{4+\lg 25}} = \sqrt{10^4 \cdot 10^{\lg 25}} = 10^2 \sqrt{25} = 500.$$

$$b) \sqrt[3]{10^{3+\lg 27}} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 10^{\lg 27}} = 10 \sqrt[3]{27} = 30.$$

$$9. \sqrt{7} (23^{\log_{529} 7} + 2^{1+\log_4 7}) = \sqrt{7} \left[(529^{\log_{529} 7})^{\frac{1}{2}} + 2(4^{\log_4 7})^{\frac{1}{2}} \right] = \\ = \sqrt{7} (\sqrt{7} + 2\sqrt{7}) = 3\sqrt{7}\sqrt{7} = 21.$$

$$10. a^{2-\log_a 2 b} = \frac{a^2}{(a^{2 \log_a 2 b})^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2}{\sqrt{b}}, \quad a > 0, b > 0, a \neq 1.$$

Ha $a=2$; $b=16$, a kifejezés értéke: $\frac{4}{\sqrt{16}} = \frac{4}{4} = 1$.

$$11. 3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4} = 3^2 (9^{\log_9 25})^{\frac{1}{2}} + \frac{25}{(5^{\log_5 2})^2} + \frac{1}{10^{\lg 4}} = \\ = 9 \sqrt{25} + \frac{25}{2^2} + \frac{1}{4} = 45 + \frac{26}{4} = 45 + 6,5 = 51,5.$$

$$12. 17^{1+\frac{1}{2} \log_{17} 25} = 17 (17^{\log_{17} 25})^{\frac{1}{2}} = 17 \sqrt{25} = 17 \cdot 5 = 85.$$

$$443. \quad a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = (10^{\lg a})^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = 10^{\lg a \cdot \frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = 10^{\lg(\lg a)} = \lg a, \quad a > 1.$$

$$444. \quad \begin{cases} \lg 75 = p; & \lg 45 = q; & \lg 15 = \lg 3 + \lg 5, \\ p = \lg 3 \cdot 5^2 = \lg 3 + 2 \lg 5 \Rightarrow 2p = 2 \lg 3 + 4 \lg 5 \\ q = \lg 3^2 \cdot 5 = 2 \lg 3 + \lg 5 \Rightarrow q = 2 \lg 3 + \lg 5 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} 2p - q = 3 \lg 5 \\ q = 2 \lg 3 + \lg 5 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 2p - q = 3 \lg 5 \\ q = 2 \lg 3 + \frac{2p - q}{3}, \end{array}$$

$$3q = 6 \lg 3 + 2p - q, \quad \lg 3 = \frac{4q - 2p}{6} = \frac{2q - p}{3}$$

$$\lg 15 = \lg 3 + \lg 5 = \frac{2q - p}{3} + \frac{2p - q}{3} = \frac{p + q}{3}$$

$$445. \quad \lg 48 = a; \quad \lg 72 = b; \quad \lg 6 = \lg 3 + \lg 2.$$

$$\begin{cases} a = \lg 3 \cdot 2^4 = \lg 3 + 4 \lg 2 \Rightarrow 2a = 2 \lg 3 + 8 \lg 2 \\ b = \lg 3^2 \cdot 2^3 = 2 \lg 3 + 3 \lg 2 \Rightarrow b = 2 \lg 3 + 3 \lg 2 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} 2a - b = 5 \lg 2 \\ b = 2 \lg 3 + 3 \lg 2 \end{array} \right\} \quad \lg 2 = \frac{2a - b}{5}$$

$$a = \lg 3 + \frac{4(2a - b)}{5}, \quad \lg 3 = \frac{4b - 3a}{5}$$

$$\lg 6 = \frac{4b - 3a}{5} + \frac{2a - b}{5} = \frac{3b - a}{5}$$

$$446. \quad \lg 20 = b; \quad \lg 40 = \lg 2^3 \cdot 5 = 3 \lg 2 + \lg 5 = 3 \lg 2 + \lg \frac{10}{2} = 3 \lg 2 + 1 - \lg 2 = 2 \lg 2 + 1.$$

$$b = \lg 20 = \lg 2^2 \cdot 5 = 2 \lg 2 + \lg 5 = 2 \lg 2 + \lg \frac{10}{2} = 2 \lg 2 + 1 - \lg 2 = \lg 2 + 1 \Rightarrow \lg 2 = b - 1.$$

$$\lg 40 = 2(b - 1) + 1 = 2b - 1.$$

$$447. \quad \lg 8 = \lg 2^3 = 3 \lg 2 = 3 \lg \frac{10}{5} = 3(\lg 10 - \lg 5) = 3(1 - \lg 5) = 3 - 3 \lg 5 = 3 - 3 \cdot 0,699 = 3 - 2,097 = 0,903.$$

$$48. \quad \lg 3 = 0,4771; \quad \lg 5 = 0,699.$$

$$\begin{aligned} \lg 540 &= \lg (2^2 \cdot 5 \cdot 3^3) = 2 \lg 2 + \lg 5 + 3 \lg 3 = \\ &= 2 \lg \frac{10}{5} + \lg 5 + 3 \lg 3 = 2 - 2 \lg 5 + \lg 5 + 3 \lg 3 = \\ &= 2 + 3 \lg 3 - \lg 5 = 2 + 3 \cdot 0,4771 - 0,699 = 2 + 1,4313 - 0,699 = \\ &= 2,7323. \end{aligned}$$

$$49. \quad \log_6 27 = \log_6 3^3 = 3 \log_6 3 = 3 \log_6 \frac{6}{2} = 3(\log_6 6 - \log_6 2) = 3(1 - \log_6 2) = 3 - 3 \log_6 2 = 3 - 3a.$$

$$50. \quad \log_6 \sqrt{150} = \log_6 \sqrt{25 \cdot 6} = \log_6 (5 \cdot 6^{\frac{1}{2}}) = \log_6 5 + \frac{1}{2} = p + \frac{1}{2}.$$

$$51. \quad \log_6 54 = \log_6 \frac{324}{6} = \log_6 324 - \log_6 6 = \log_6 18^2 - 1 = 2 \log_6 18 - 1 = 2k - 1.$$

$$52. \quad \log_3 \sqrt[3]{24} = \log_3 \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} + \log_3 2 = \frac{1}{3} + b.$$

$$53. \quad \log_{\frac{a}{b}} \frac{a^5}{\sqrt{b}} = \frac{\log_a \frac{a^5}{\sqrt{b}}}{\log_a \frac{a}{b}} = \frac{5 - \frac{1}{2} \log_a b}{1 - \log_a b}.$$

$$k = \log_{\frac{a}{b}} a = \frac{\log_a a}{\log_a \frac{a}{b}} = \frac{1}{1 - \log_a b} \Rightarrow k - k \log_a b = 1, \quad \log_a b = \frac{k - 1}{k}$$

A kapott eredményt behelyettesítve a fenti kifejezésbe:

$$\log_{\frac{a}{b}} \frac{a^5}{\sqrt{b}} = \frac{5 - \frac{1}{2} \log_a b}{1 - \log_a b} = \frac{5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{k - 1}{k}}{1 - \frac{k - 1}{k}} = \frac{\frac{10k - k + 1}{2k}}{\frac{k - k + 1}{k}} = \frac{9k + 1}{2k} \cdot \frac{k}{1} =$$

$$= \frac{9k + 1}{2}, \quad a > 0; b > 0, a \neq b.$$

$$454. \log_{xy} x = k; \quad \log_{xy} x = \frac{\log_x x}{\log_x xy} = \frac{1}{1 + \log_x y} = k,$$

$$\log_x y = \frac{1-k}{k},$$

$$\log_{xy} \sqrt[5]{x} \sqrt[3]{y} = \frac{\log_x x^{\frac{1}{5}} y^{\frac{1}{3}}}{\log_x xy} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \log_x y}{1 + \log_x y} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1-k}{k}}{1 + \frac{1-k}{k}} =$$

$$= \frac{\frac{3k+5-5k}{15k}}{\frac{k+1-k}{k}} = \frac{5-2k}{15k} \cdot k = \frac{5-2k}{15}.$$

$$455. \log_2 \left(\frac{2a-1}{a-1} - \frac{2a+3}{a+1} \right) = \log_2 \frac{(2a-1)(a+1) - (2a+3)(a-1)}{a^2-1} =$$

$$= \log_2 \frac{2a^2+a-1-2a^2-a+3}{a^2-1} = \log_2 \frac{2}{a^2-1}, \quad |a| \neq 1.$$

Ha $a=3$, a kifejezés értéke: $\log_2 \frac{2}{8} = \log_2 \frac{1}{4} = -2$.

$$456. \log_4 \left(2 - \frac{2x-1}{x-1} \right) = \log_4 \frac{2x-2-2x+1}{x-1} = \log_4 \frac{1}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

Ha $x=-3$, a kifejezés értéke: $\log_4 \frac{1}{4} = -1$.

$$457. \log_2 \left(\frac{a+3}{a-1} + \frac{5-a}{a} \right) = \log_2 \frac{a^2+3a+5a-5-a^2+a}{a(a-1)} = \log_2 \frac{9a-5}{a(a-1)}$$

Ha $a = \frac{1}{2}$, a kifejezés értéke: $\log_2 \frac{\frac{9}{2}-5}{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)} = \log_2 \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}} = \log_2 2 = 1$

$$458. \log_a \left[\left(3 - \frac{3a-2}{a+1} \right) \frac{a^2+a}{5} \right] = \log_a \left(\frac{3a+3-3a+2}{a+1} \cdot \frac{a(a+1)}{5} \right) =$$

$$= \log_a a = 1. \quad a \neq 1, a > 0.$$

$$49. \lg \left[\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right) : \frac{2a}{a^2-b^2} \right] = \lg \left(\frac{a-b+a+b}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{2a} \right) = \lg 1 = 0.$$

Ha $a=5$; $b=2$, a kifejezés szintén 0. $|a| \neq |b|$, $a > 0$.

$$50. \log_a \left[\left(\frac{a+2}{a-1} + \frac{a-2}{a+1} \right) : \frac{2(a^2+2)}{a(a^2-1)} \right] =$$

$$= \log_a \left[\frac{a^2+3a+2+a^2-3a+2}{a^2-1} \cdot \frac{a(a^2-1)}{2(a^2+2)} \right] =$$

$$= \log_a \left(\frac{2(a^2+2)}{a^2-1} \cdot \frac{a(a^2-1)}{2(a^2+2)} \right) = \log_a a = 1, \quad a > 0, a \neq 1.$$

$$51. \lg 4 + \lg \sin 30^\circ + \lg \operatorname{tg} 30^\circ + \lg \sin 60^\circ =$$

$$= \lg (4 \sin 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \sin 60^\circ) = \lg \left(4 \sin 30^\circ \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cos 30^\circ \right) =$$

$$= \lg (4 \sin^2 30^\circ) = \lg \left(4 \cdot \frac{1}{4} \right) = \lg 1 = 0.$$

$$52. \lg \sin 30^\circ \lg \sin 60^\circ \lg \operatorname{tg} 45^\circ = 0, \text{ mert } \lg \operatorname{tg} 45^\circ = \lg 1 = 0.$$

$$53. \lg 2 + \lg \sin 30^\circ + \lg \cos 30^\circ - \lg \sin 60^\circ = \lg \frac{2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ} =$$

$$= \lg \frac{\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \lg 1 = 0. \quad (2 \sin x \cos x = \sin 2x.)$$

$$54. \lg [(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ)^2 - \sin 60^\circ] =$$

$$= \lg (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ) =$$

$$= \lg (1 + \sin 60^\circ - \sin 60^\circ) = \lg 1 = 0.$$

$$55. 3 \lg 15 + 2 \lg 2 + \lg 14 - \lg 21 - \lg 9 = \lg \frac{15^3 \cdot 2^2 \cdot 14}{21 \cdot 9} =$$

$$= \lg \frac{3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 3^2} = \lg (5^3 \cdot 2^3) = \lg 10^3 = 3.$$

$$56. \log_5 15 + \log_5 35 - \log_5 21 = \log_5 \frac{15 \cdot 35}{21} = \log_5 \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7} =$$

$$= \log_5 5^2 = 2.$$

$$467. \quad 3 \log_3 6 + \log_3 35 - \log_3 20 - \log_3 42 = \log_3 \frac{6^3 \cdot 35}{20 \cdot 42} =$$

$$= \log_3 \frac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 7}{2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = \log_3 \frac{3^3}{3} = \log_3 3^2 = 2.$$

$$468. \quad \lg 33 - \frac{1}{2} \lg 44 - \lg 15 - \lg \sqrt{1100} = \lg \frac{33}{\sqrt{44 \cdot 15 \cdot \sqrt{1100}}} =$$

$$= \lg \frac{3 \cdot 11}{3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \sqrt{11} \cdot 2 \cdot \sqrt{11}} = \lg \frac{1}{10^2} = -2.$$

$$469. \quad \lg \sqrt{52} + 3 \lg 2 + \lg 125 + \lg \sqrt{325} - \lg 13 = \lg \frac{\sqrt{52} \cdot 2^3 \cdot 125 \cdot \sqrt{325}}{13} =$$

$$= \lg \frac{2 \sqrt{13} \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot \sqrt{13} \cdot 5}{13} = \lg (2^4 \cdot 5^4) = \lg 10^4 = 4.$$

$$470. \quad \frac{1}{2} \lg_3 45 + \log_3 \sqrt{20} - \log_3 30 + \log_3 6 - \log_3 2 =$$

$$= \log_3 \frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{20} \cdot 6}{30 \cdot 2} = \log_3 \frac{6 \cdot \sqrt{900}}{2 \cdot 30} = \log_3 \frac{6 \cdot 30}{2 \cdot 30} = \log_3 3 = 1.$$

$$471. \quad 1 + \frac{1}{2} \log_5 175 + \log_5 15 + \log_5 \sqrt{28} - \log_5 42 =$$

$$= \log_5 \frac{5 \sqrt{175} \cdot 15 \sqrt{28}}{42} = \log_5 \frac{5 \cdot 5 \sqrt{7} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \sqrt{7}}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \log_5 5^3 = 3.$$

$$472. \quad \lg x = 3 \lg 72 + 2 \lg 54 - 4 \lg 108.$$

$$\lg x = \lg \frac{72^3 \cdot 54^2}{108^4}, \quad x = \frac{72^3 \cdot 54^2}{108^4} = \frac{(2^3 \cdot 3^2)^3 \cdot (3^3 \cdot 2)^2}{(2^2 \cdot 3^3)^4} =$$

$$= \frac{2^9 \cdot 3^6 \cdot 3^6 \cdot 2^2}{2^8 \cdot 3^{12}} = \frac{2^{11}}{2^8} = 2^3 = 8.$$

$$473. \quad \lg x = 3 \lg 45 + 3 \lg 2 - \lg 5 - 3 \lg 18.$$

$$\lg x = \lg \frac{45^3 \cdot 2^3}{5 \cdot 18^3} = \lg \frac{(5 \cdot 3^2)^3 \cdot 2^3}{5 \cdot (3^2 \cdot 2)^3} = \lg \frac{5^3 \cdot 3^6 \cdot 2^3}{5 \cdot 3^6 \cdot 2^3} = \lg 5^2,$$

$$x = 5^2 = 25.$$

$$474. \quad \log_a x = \frac{\log_a c}{4} - \frac{5 \log_a b}{4} + \frac{\log_a d}{2}, \quad a > 0; a \neq 1; b > 0; c > 0; d > 0$$

$$\log_a x = \log_a \sqrt[4]{c} \sqrt[4]{d} - \frac{5}{4} \log_a b = \log_a \frac{\sqrt[4]{cd^2}}{\sqrt[4]{b^5}} = \log_a \sqrt[4]{\frac{cd^2}{b^5}},$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{cd^2}{b^5}}.$$

$$475. \quad \log_b y = 3 (\log_b c - \log_{b^2} d), \quad b > 0; b \neq 1; c > 0; d > 0.$$

$$\log_b y = \log_b c^3 - \frac{\log_b d^3}{\log_b b^2} = \log_b \frac{c^3}{d^{\frac{3}{2}}} = \log_b \frac{c^3}{\sqrt{d^3}}, \quad y = \left(\frac{c}{\sqrt{d}} \right)^3.$$

$$476. \quad \log_a x = \frac{2}{3} \log_a b + \frac{4}{3} \log_a c - \frac{1}{3} \log_a d, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, d > 0.$$

$$\log_a x = \log_a b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{4}{3}} d^{-\frac{1}{3}} = \log_a \sqrt[3]{\frac{b^2 c^4}{d}}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{b^2 c^4}{d}}.$$

$$477. \quad a) \log_a x = \frac{1}{2} \log_a (b^2 - c^2) - \frac{1}{2} \log_a (b + c) = \frac{1}{2} \log_a \frac{b^2 - c^2}{b + c} =$$

$$= \log_a \left[\frac{(b + c)(b - c)}{b + c} \right]^{\frac{1}{2}} = \log_a \sqrt{b - c}, \quad x = \sqrt{b - c}.$$

$$b) \log_a x = 2 + \frac{1}{2} \log_a b - \frac{3}{4} \log_a c = \log_a a^2 \sqrt{bc}^{-\frac{3}{4}},$$

$$x = \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt[4]{c^3}}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, b > c.$$

$$478. \quad x = \frac{\sqrt[3]{35,7} + \sqrt[4]{2,783}}{\sqrt[3]{542,1}};$$

$$a = \sqrt[3]{35,7}; \quad \lg a = \frac{1}{3} \lg 35,7 = \frac{1}{3} \cdot 1,5527 = 0,5176;$$

$$a = 10^{0,5176} = 3,294.$$

$$b = \sqrt[4]{2,783}; \quad \lg b = \frac{1}{4} \lg 2,783 = \frac{1}{4} \cdot 0,4445 = 0,1111;$$

$$b = 10^{0,1111} = 1,291.$$

$$x = \frac{3,294 + 1,291}{\sqrt[6]{542,1}} = \frac{4,585}{\sqrt[6]{542,1}}; \quad \lg x = \lg 4,585 - \frac{1}{6} \lg 542,1 =$$

$$= 0,6614 - \frac{1}{6} \cdot 2,7341 = 0,6614 - 0,4557 = 0,2057, \quad x = 1,606.$$

$$479. \quad x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{250} \sqrt[4]{0,01}}{32^2}}; \quad \lg x = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \lg 250 + \frac{1}{4} \lg 0,01 - 2 \lg 32 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \cdot 2,3979 + \frac{1}{4} (0,0000 - 2) - 2 \cdot 1,5051 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} (1,1989 - 0,5000 - 3,0102) = \frac{1}{3} (1,1989 - 3,5102) =$$

$$= \frac{1}{3} (4,1989 - 3,5102 - 3) = \frac{1}{3} (0,6887 - 3) = 0,2296 - 1$$

$$x = 10^{0,2296-1} = 1,696 \cdot 10^{-1} = 0,1696.$$

$$480. \quad x = \frac{\sqrt{54,3} + \sqrt[3]{0,2}}{\sqrt{5,6^3} \sqrt[3]{0,5}}; \quad a = \sqrt{54,3}; \quad \lg a = \frac{1}{2} \lg 54,3 = \frac{1}{2} \cdot 1,7348 = 0,8674$$

$$a = 7,369; \quad b = \sqrt[3]{0,2}; \quad \lg b = \frac{1}{3} \lg 0,2 = \frac{1}{3} (0,3010 - 1) =$$

$$= \frac{1}{3} (2,3010 - 3) = 0,7670 - 1; \quad b = 5,848 \cdot 10^{-1} = 0,5848.$$

$$x = \frac{7,369 + 0,5848}{\sqrt{5,6^3} \sqrt[3]{0,5}} = \frac{7,9538}{\sqrt{5,6^3} \sqrt[3]{0,5}},$$

$$\lg x = \lg 7,954 - \frac{1}{2} \left(3 \lg 5,6 + \frac{1}{2} \lg 0,5 \right) =$$

$$= 0,9006 - \frac{1}{2} \left(3 \cdot 0,7482 + \frac{1}{2} (0,6990 - 1) \right) =$$

$$= 0,9006 - \frac{1}{2} (2,2446 + 0,3495 - 0,5000) = 0,9006 - \frac{1}{2} \cdot 2,0941 =$$

$$= 0,8536 - 1,$$

$$x = 10^{0,8536-1} = 7,139 \cdot 10^{-1} = 0,7139.$$

$$481. \quad x = \frac{\sqrt[5]{0,6} - \sqrt[3]{48,3}}{5,8^3 - 4,6^4}; \quad a = \sqrt[5]{0,6}; \quad \lg a = \frac{1}{5} \lg 0,6 = \frac{1}{5} (0,7782 - 1) =$$

$$= \frac{1}{5} (4,7782 - 5) = 0,9556 - 1; \quad a = 0,9028.$$

$$b = \sqrt[3]{48,3}; \quad \lg b = \frac{1}{3} \lg 48,3 = \frac{1}{3} \cdot 1,6839 = 0,5613; \quad b = 3,642.$$

$$c = 5,8^3; \quad \lg c = 3 \lg 5,8 = 3 \cdot 0,7634 = 2,2902; \quad c = 195,1.$$

$$d = 4,6^4; \quad \lg d = 4 \lg 4,6 = 4 \cdot 0,6628 = 2,6512; \quad d = 447,9.$$

$$x = \frac{0,9028 - 3,642}{195,1 - 447,9} = \frac{-2,7392}{-252,8} = \frac{2,7392}{252,8}; \quad \lg x = \lg 2,739 - \lg 252,8 =$$

$$= 0,4376 - 2,4028 = 0,0348 - 2; \quad x = 1,083 \cdot 10^{-2} = 0,01083.$$

$$482. \quad x = \frac{\sqrt[5]{2 + \sqrt{3}}}{3,8^2 - 5,7 \cdot 4,8} = \frac{\sqrt[5]{2 + 1,732}}{3,8^2 - 5,7 \cdot 4,8}; \quad a = 3,8^2; \quad \lg a = 2 \lg 3,8 =$$

$$= 2 \cdot 0,5798 = 1,1596; \quad a = 14,44.$$

$$b = 5,7 \cdot 4,8; \quad \lg b = \lg 5,7 + \lg 4,8 = 0,7559 + 0,6812 = 1,4371,$$

$$b = 27,36; \quad x = \frac{\sqrt[5]{3,732}}{14,44 - 27,36} = \frac{\sqrt[5]{3,732}}{-12,92}.$$

$$\lg |x| = \frac{1}{5} \lg 3,732 - \lg 12,92 = \frac{1}{5} \cdot 0,5719 - 1,1113 =$$

$$= 0,1144 - 1,1113 = 0,0031 - 1; \quad |x| = 1,007 \cdot 10^{-1}.$$

$$x = -0,1007$$

$$483. \quad x = \sqrt{\frac{3 - \sqrt[3]{4}}{5,2^2 + 3}}; \quad a = \sqrt[3]{4}; \quad \lg a = \frac{1}{3} \lg 4 = \frac{1}{3} \cdot 0,6021 = 0,2007;$$

$$a = 1,588.$$

$$b = 5,2^2; \quad \lg b = 2 \lg 5,2 = 2 \cdot 0,7160 = 1,4320; \quad b = 27,04.$$

$$x = \sqrt{\frac{3-1,588}{27,04+3}} = \sqrt{\frac{1,412}{30,04}}; \quad \lg x = \frac{1}{2}(\lg 1,412 - \lg 30,04) =$$

$$= \frac{1}{2}(0,1498 - 1,4777) = \frac{1}{2}(2,1498 - 1,4777 - 2) = \frac{1}{2} \cdot 0,6721 - 1 =$$

$$= 0,3360 - 1; \quad x = 2,168 \cdot 10^{-1} = 0,2168.$$

484. $x = \sqrt[5]{\frac{2,43^2 \sqrt{0,75}}{\sqrt[3]{0,1}}}; \quad \lg x = \frac{1}{5} \left[2 \lg 2,43 + \frac{1}{2} \lg 0,75 - \frac{1}{3} \lg 0,1 \right] =$

$$= \frac{1}{5} \left[2 \cdot 0,3856 + \frac{1}{2} (0,8751 - 1) - \frac{1}{3} (0,0000 - 1) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} (0,7712 + 0,4375 - 0,5000 + 0,3333) = \frac{1}{5} \cdot 1,0420 = 0,2084;$$

$$x = 1,615.$$

485. $x = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{582 \sqrt{0,02}}}{\sqrt[5]{32,4^2}}}; \quad \lg x = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \lg 582 + \frac{1}{2} \lg 0,02 - \frac{2}{5} \lg 32,4 \right] =$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \cdot 2,7649 + \frac{1}{2} (0,3010 - 2) - \frac{2}{5} \cdot 1,5105 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (0,9216 + 0,1505 - 1 - 0,6042) = \frac{1}{2} (1,0721 - 1,6042) =$$

$$= \frac{1}{2} (3,0721 - 1,6042 - 2) = \frac{1}{2} \cdot 1,4679 - 1 = 0,7339 - 1,$$

$$x = 5,419 \cdot 10^{-1} = 0,5419.$$

486. $\log^2 x - 3 \lg x + 2 = 0, \quad x > 0.$

Az egyenlet két gyöke x_1 és x_2 , szorzatuk $x_1 x_2$; $\lg(x_1 x_2) = \lg x_1$

$+ \lg x_2 = 3$ (a másodfokú egyenlet gyökeinek összege: $-\frac{b}{a}$).

$\lg(x_1 x_2) = 3$, akkor $x_1 x_2 = 10^3 = 1000$.

Ellenőrzés: oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

$$\lg x = y, \quad y^2 - 3y + 2 = 0, \quad (y-2)(y-1) = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 1,$$

$\lg x_1 = 2; \quad x_1 = 100; \quad \lg x_2 = 1; \quad x_2 = 10$; a gyökök szorzata valóban 1000.

VI. FEJEZET

Elsőfokú egyenletek és egyenletrendszerek

487. Nincs megoldás a negatív számok halmazán ($x = 5$).
488. Nincs megoldás a negatív számok halmazán ($x = 3$).
489. Nincs megoldás az egész számok halmazán ($x = -0,6$).
490. $x = -3$.
491. $x = 20$.
492. $x = 3$.
493. $x = \frac{31}{30}$.
494. $x = 30$.
495. $x = 4$.
496. $x = 2,5$.
497. $x = -6$.
498. $x = 33$.
499. $x = 1$.
500. Minden valós x értékre teljesül.
501. Minden valós x értékre teljesül.
502. Az egyenletnek nincs megoldása a racionális számok halmazán (a valós számok halmazán sem), mert rendezés után a bal oldal ellentmond a jobb oldalnak.
503. $x = 9$.
504. $x = -2$.

505. $x=6$.
506. Nincs, $x=0$.
507. Van, $x = \frac{2}{7}$.
508. Van, $x = -2$.
509. A zárójel felbontása után $4x-12+17-10+2x+x+x = 3x-7x$
 $+2x+10-3$. Ebből $10x=12$, vagyis $x = \frac{6}{5}$.
510. $x=2$.
511. $x = \frac{5}{13}$.
512. $x = \frac{360}{13}$.
513. $x=32$.
514. $x = \frac{12}{5}$.
515. $x=3$.
516. $x = -\frac{7}{20}$.
517. $x=5$.
518. Az egyenlet mind a két oldalán közös nevezőre hozva $\frac{13x}{60} = \frac{4x-20}{30}$
és ebből $x = -8$.
519. $x=76$.
520. $x=5$.
521. $x = -3$.
522. $x = \frac{15}{4}$.
523. $x = \frac{31}{3}$.
24. $x = \frac{54}{37}$.
25. $x = \frac{11}{8}$.
26. $x=51$.
27. $x=2,5$.
28. Az egyenletnek nincs megoldása sem a racionális, sem a valós számok halmazán, mert a bal oldala ellentmond a jobb oldalának.
29. A nevezők legkisebb közös többszörösével, $24(x-8)$ -cal megszorozva az egyenlet mind a két oldalát, $12(6x-37)-16(5x-39) = 21(x-8)$, és ebből $x=12$.
30. $x=1$.
31. $x=7$.
32. Nincs.
33. A két egyenletnek ugyanakkora gyöke van: $x=6$.
34. A két egyenletnek ugyanakkora valós gyöke van: $x=4$.
35. A két egyenletnek ugyanakkora gyöke van: $x=1,5$.
36. $x=0$.
37. Az egyenletnek nincs megoldása a pozitív számok halmazán ($x = -30$).
38. Az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok halmazán ($x=2,22$).
39. Az egyenletnek nincs megoldása, mert két oldala minden x értékre ellentmond egymásnak.
40. $x=5$.
41. $x=2$.
42. Az egyenlet minden racionális számra teljesül.
43. Az egyenlet nem oldható meg a természetes számok halmazán
 $\left(x = -\frac{2}{3}\right)$.

544. $x = -\frac{60}{23}$.
545. $x = \frac{24}{7}$.
546. $z = 3$.
547. Az egyenletnek a negatív számok halmazán nincs megoldása ($x = 10$).
548. $z = -3$.
549. $x = 13$.
550. $x = \frac{11}{3}$.
551. Az egyenletnek nincs megoldása a negatív számok halmazán ($x = 2$).
552. $x = 5$.
553. Az egyenlet nem oldható meg a valós számok halmazán.
554. Az egyenlet bal oldalán azonos átalakításokat végezve $\frac{53}{14}$ -et kapunk. Ez ellentmond az egyenlet jobb oldalának, ezért az egyenlet nem oldható meg.
555. $x = 6$.
556. A $-2 \leq x \leq 0$ intervallumban nincs gyöke az egyenletnek ($x = \frac{31}{25}$).
557. Az egyenletnek a $0 \leq x \leq 3$ intervallumban nincs megoldása ($x = -0,5625$).
558. $x = 0,48$.
559. $x = 2,5$.
560. $y = -\frac{1}{3}$.
561. $y = 1,2$.
562. $x = 4$.
563. $x = 1$.
564. $y = 3$.
565. Rendezés után $3x^2 + 4x + 20 = 0$, és ennek az egyenletnek nincs valós (és így egész) gyöke.
566. $x = -2$.
567. \emptyset (üres halmaz), mert $x = \frac{1}{2}$, de erre az értékre nincs értelmezve az eredeti egyenlet.
568. $x = 4$.
569. Az egyenletnek nincs megoldása, mert a bal oldala ellentmond a jobb oldalának.
570. $x = 5$.
571. $x = 2$.
572. Az egyenlet minden negatív x értékre teljesül.
573. Az egyenlet $x = -2$ kivételével minden racionális számra teljesül.
574. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.
575. Az egyenletnek nincs gyöke.
576. Az egyenletnek nincs gyöke (így a természetes számok halmazán sincs).
577. Az egyenletnek nincs gyöke.
578. $x = 0$.
579. $x = 24$.
580. $x = 5$.
581. $x = 4$.
582. Az egyenletnek nincs megoldása.
583. $x = 0,5$.
584. Az egyenletnek nincs valós megoldása.
585. $x = 0,48$.
586. Az egyenletnek nincs pozitív gyöke ($y = -\frac{5}{13}$).

587. $x=8$. 588. $x=0,5$.

589. $x = \frac{5}{b-2}, b \neq 2$.

590. $x = \frac{18}{a-1};$

a	0	-1	-2	-5	-8	-17	19	10	7	4	3	2
x	-18	-9	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	9	18

$x \in \{-18; -9; -6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6; 9; 18\}$.

591. $x = \frac{7}{a-7};$

a	8	14	0	6
x	7	1	-1	-7

; $x \in \{-7; -1; 1; 7\}$.

592. Ha $a=0$, akkor a megoldás minden racionális szám, a 0 kivételével. Ha $a \neq 0$, akkor $x = a+1$.

593. $a=b=0$ nem lehet, mert akkor nincs értelme az egyenletnek. Ha $a=b \neq 0$, akkor az egyenlet minden $x \in \mathbf{Z}$ értékre teljesül. Ha $a \neq b$ és $ab \neq 0$, akkor $x = b-a$.

594. $x = a-1$, ahol a egész, de $a \neq 0, a \neq 1$.

595. $x \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

596. Ha $a = \pm 1$, akkor az egyenletnek nincs értelme. Minden más lehetséges esetben $x=1$ (a paramétertől függetlenül).

597. Ha $a \neq 45$, akkor $x = \frac{5a-4}{45-a}$. Az egyenletnek nincs értelme, ha $a=45$.

$a = \frac{4}{x} = \frac{4(45-a)}{5a-4}$, vagy ha $a = 9x = \frac{9(5a-4)}{45-a}$. Mind a két feltétel teljesül, ha $a^2 = 36$, vagyis $a = \pm 6$. Racionális megoldása tehát akkor van az egyenletnek, ha a paraméter az $a = -6, a = 6, a = 45$ értékektől különböző értékeket vesz fel.

598. Ha $m \neq -n$ és $mn \neq 0$, akkor $x = \frac{2mn}{3(m+n)}$. Ha $m=n=0$, akkor x bármely racionális szám lehet, kivéve a 0.

599. Rendezés után az egyenlet $x^2 + 4ax + 3a^2 - 4 = 0$ alakú, és ebből a két gyök $x_{1,2} = -2a \pm \sqrt{a^2 + 4}$. Ezek akkor és csak akkor racionálisak, ha $a=0$. Ekkor $x_1 = 2, x_2 = -2$.

600. Ha $a \neq 0, a \neq 1$, akkor $x = 2a+1$ minden egész a érték esetén.

601. $x = a$.

602. Ha $a = \frac{1}{3}$, akkor az egyenlet minden $x \in \mathbf{Q} \setminus \left\{ \frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right\}$ értékre teljesül. Minden más esetben az egyenletnek nincs megoldása.

603. Ha $a=0$, akkor $x=0$ kivételével minden x megoldása az egyenletnek. Ha $a \neq 0$, akkor az egyenletnek nincsen megoldása.

604. Ha $a = \frac{1}{3}$, akkor minden $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right\}$ érték kielégíti az egyenletet. A paraméter minden más értékére nincs megoldása az egyenletnek.

605. A feladat szövege sajtóhibás, így nem oldható meg.

Helyesen:
$$\frac{x}{2a+x} - \frac{2a+x}{x-2a} = \frac{16a^2}{4a^2-x^2}$$

Ha $a=0$, akkor minden $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ megoldása az egyenletnek. Más megoldása nincs az egyenletnek.

606. Nincs értelme az egyenletnek, ha $a = -1, a = 0, a = 1$. Minden más racionális a értékre $x = \frac{3a^2-4a+1}{(a-1)^2} = \frac{(3a-1)(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{3a-1}{a-1}$.

607. Ha $a \neq 0$, akkor $x = -4a$.

608. $x = 2a, a \neq 0$. 609. $x = 9a, a \neq 0$.

610. $y = 5a, a \neq 0$.

611. Ha $a = -2$, nincs megoldás. Ha $a \neq -2$, akkor $x = \frac{1-a}{2+a} = \frac{3}{a+2} - 1$.

Ez akkor egész, ha $a+2 = -3; -1; 1; 3$. Ekkor x egész értékei: $-2; -4; 2; 0$.

612. Az egyenlet $x = \frac{2a-2}{2a+1}$ gyöke pozitív, ha $a > 1$ vagy $a < -\frac{1}{2}$.

613. $x > 0$, ha $t > 6$; $x < 0$, ha $t < 6$.

614. $x \geq 0$, ha $a \geq 5$.

615. $x > 0$, ha $a > 6$ vagy $a < -\frac{3}{2}$.

616. $x = 3 - p$. $x > 0$, ha $p < 3$ és $p \neq 0$. Ha $p = 3$, akkor minden pozitív megoldás.

617. $x = \frac{p-6}{p-4}$. $x < 0$, ha $4 < p < 6$.

618. $x \neq \pm m$. $x = \frac{6m^2}{4-m}$, $m \neq 4$. $x < m$, ha $0 < m < \frac{4}{7}$ vagy $m > 4$. Ha $x =$
akkor $m = \frac{2}{3}$. Az $m = -\frac{4}{5}$ az eredeti kikötés miatt rossz!

619. $x = -4$, $y = -8$. 620. $x = -3$, $y = 5$.

621. $x = 2$, $y = 1$.

622. $x = \frac{29}{14}$, $y = -\frac{2}{7}$.

623. $x = \frac{4}{143}$, $y = \frac{70}{143}$.

624. $x = 0$, $y = -1$.

625. $x = \frac{5}{3}$, $y = -2$.

626. $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{1}{8}$.

627. $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{5}{7}$.

628. $x = -1$, $y = -6$.

629. $x = \frac{13}{12}$, $y = \frac{1}{16}$.

630. $x = -\frac{1}{39}$, $y = -\frac{2}{13}$.

31. $x = -\frac{1}{69}$, $y = -\frac{8}{69}$.

32. $x = -2$, $y = 4$.

33. Az egyenletrendszernek a természetes számok halmazán nincs megoldása. ($x = 5$; $y = -3$).

34. $x = 3$, $y = 2$.

35. $x = 2$, $y = -3$.

36. Az egyenletrendszer egymásnak ellentmondó egyenletekből áll, megoldása nincs.

37. Nincs, mert az egyenletrendszer egymásnak ellentmondó egyenletekből áll.

38. Rendezés után az egyenletrendszer $14x - 81y = 30$, $7x + 27y = 60$ alakú. Ennek megoldása $x = 6$, $y = \frac{2}{3}$.

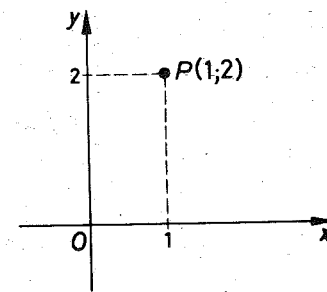
39. Azonos átalakítások után az egyenletrendszer $38x - 21y = 15$, $32x - 21y = 6$ alakú, és ennek megoldása $x = \frac{3}{2}$, $y = 2$.

340. $x = -2$, $y = 3$.

341. $x = 11$, $y = 6$.

342. Azonos átalakítások után az egyenletrendszer $3x - y + 8 = 0$, $13x + 2y + 22 = 0$ alakú. Ennek megoldása $x = -2$, $y = 2$.

343. $x = 1$, $y = 2$ (643. ábra).



643

344. Ha $a = 1$, akkor x tetszőleges valós szám és $y = 1 - x$. Ha $a \neq 1$, akkor $x = a + 1$, $y = -1$.

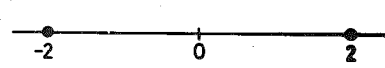
345. Ha $a = -1$, akkor $b = 2$ és az egyenletrendszert minden x, y valós számpár kielégíti, amelyre teljesül $x + y = 2$. Ha $a \neq -1$, akkor $x = \frac{b-2}{a+1}$, $y = \frac{ab+2}{a+1}$.

646. Ha $a = -1$, akkor nincs megoldás, mert az egyenletrendszer ellentmondó. Ha $a = 1$, akkor minden valós x, y számpár, amelyre $x + y = 53$, megoldás. Ha $a \neq \pm 1$, akkor $x = y = \frac{1}{a+1}$.
647. Ha $a = 0$ és $b = 0$, akkor minden x, y valós számpár megoldás. Ha $a \neq 0$ és $b = 0$, akkor x tetszőleges valós szám és $y = 0$. Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor $x = 0$ és y tetszőleges valós szám. Ha $a = -1$, akkor $b = 0$ és az előző megoldásokat kapjuk. Ha $a \neq -1, a \neq 0$, akkor $x = \frac{b}{a+1}, y = -\frac{a}{a+1}$.
648. Ha $a = 0$ vagy $a = -1$, akkor az egyenletrendszer ellentmondó. Minden más esetben $x = \frac{a^2 + a + 1}{a(a+1)}, y = \frac{-1}{a+1}$.
649. Ha $a = b = 0$, akkor bármely x és bármely y megoldása az egyenletrendszernek. Ha $a = b \neq 0$, akkor az egyenletrendszer $2ax = 2a^2, 2ay = 2ab$ alakú, és ebből $x = a, y = 0$. Ha a és b egyik sem 0 és $a \neq b$, akkor $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$. Ha $a = 0, b \neq 0$, akkor $x \in \mathbf{R}$ és $y = x - b$. Ha $a \neq 0, b = 0$, akkor $x \in \mathbf{R}$ és $y = a - x$.
650. $x = 8 - \frac{8(6+n)(n-4)}{(4-n)^2 + 100}, y = \frac{16(6+n)}{(4-n)^2 + 100}$.
651. Egyenlő együtthatók módszerével például $y = \frac{12(m-7)}{(m-1)^2 - 36} = \frac{12}{m+5}$, majd például helyettesítéssel $x = 4 - \frac{4(m-1)(m-7)}{(m-1)^2 - 36} = \frac{12}{m+5}$, ahol $m \neq 7$ és $m \neq -5$. Ha $m = 7$, akkor a második egyenlet az első következménye és az egyik ismeretlen szabadon választható meg. Ha ez pl. akkor $y = 2 - \frac{x}{2}$. Ha $m = -5$, akkor az egyenletrendszer ellentmondásra vezet.
652. $x = \frac{15}{a+1}, y = \frac{15}{2(a+1)}$, ahol $a \neq -1$ és $a \neq 5$. Ha $a = -1$, akkor nincs megoldás, mert az egyenletrendszer ellentmondó. Ha $a = 5$, akkor a két egyenlet azonos, és ezért végtelen sok megoldás van. Ebben az esetben az egyik ismeretlen szabadon választható meg. Ha ez x , akkor $y = \frac{5-x}{2}$.
- $x = -\frac{a}{2a+1}, y = \frac{2a+1}{a+1}$, ahol $a \neq -1, a \neq -\frac{1}{2}$ és $a \neq 1$. Az a paraméter előbbi két értékére az egyenletrendszer ellentmondó.
- Ha $a \neq -1, a \neq -\frac{1}{2}$ és $a = 1$, akkor $x \in \mathbf{R}$, de $x \neq -1, y = 3 - \frac{1}{x+1}$.
- Ha $a = -1$ vagy $a = -\frac{1}{2}$, akkor nincs megoldás.
- $x = a+b, y = a-b$, ahol $|a| \neq |b|$.
- $b = 2$ kivételével minden valós b értékre. $\left(x = \frac{1}{3}, y = 0\right)$.
- $c \in \mathbf{R} \setminus \{-10\}$. (-10 kivételével minden valós szám.)
- $(0; 1); \left(1; \frac{1}{2}\right); \left(-1; \frac{3}{2}\right); (1992; -995)$.
- Az egyenletrendszerből $x = \frac{16-9m^2}{8-2m^2}, y = \frac{1}{8-2m^2}$, ahol $m \neq \pm 2$. $x = \frac{16-9m^2}{8-2m^2} < 0$ akkor teljesül, ha $\frac{4}{3} < |m| < 2$; $y = \frac{1}{8-2m^2} > 0$ akkor teljesül, ha $|m| < 2$. Mind a két feltétel akkor teljesül, ha $\frac{4}{3} < |m| < 2$.
- $a > 2,25$.
- $m > 8$.
- Ha $m < -15$ vagy $m > 7$.
- Ha $a < -8$ vagy $a > 22$.
- Ha $-4 < a < -3$.
- Ha $a < \frac{1}{2}$ vagy $a > 2$.
- Ha $a < -1$ vagy $a > 1$.
- Az egyenletrendszerből $x = 3m - 2n, y = 3n - 4m$. $x = y$, ha $n = \frac{7}{5}m$. A feltételnek egy számpár felel meg: $m = 20, n = 28$.

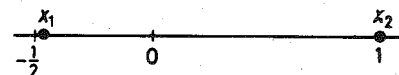
Másodfokú egyenletek és egyenletrendszerek

667. Mind a két oldalon gyököt vonva $3x-6 = \pm 12$. Ebből $x_1 = x_2 = -2$.
668. 0; -5.
669. 0; 5.
670. Nem oldható meg az egész számok halmazán.
671. Van, $x_1 = 0$ és $x_2 = 6$.
672. a) -b). Az egész és a racionális számok halmazán nem oldható meg egyenlet.
c) $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$.
673. Van, $x = 2$.
674. $\frac{10}{3}$; $-\frac{10}{3}$.
675. 2,4; 3,6.
676. $\frac{1}{2}$; 3.
677. 1; 4.
678. 1; -6.
679. -100; 1.
680. 7; 7.
681. $\frac{5+\sqrt{13}}{6}$; $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$, közelítőleg 1,43; 0,23.
82. 3. A másik gyök $\left(\frac{1}{5}\right)$ nem egész.
83. $\frac{3}{2}$. A másik gyök (-1) nem pozitív.
84. $x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{384}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{4}$; $x_1 = 1,362$, $x_2 = 0,138$.
85. Az egyenletnek két (egyenlő) pozitív gyöke van ($x = 1$).
86. $\frac{-24 + \sqrt{5832}}{36} = 1,45$; $\frac{-24 - \sqrt{5832}}{36} = -2,79$.
87. $-\frac{21}{2}$; $-\frac{4}{15}$.
88. $\frac{12}{5}$, mert a másik gyök $\left(-\frac{8}{5}\right)$ nem pozitív.
89. Az egyenletnek nincs megoldása a negatív számok halmazán (sőt a valós számok halmazán sem), mert az egyenlet diszkriminánsa negatív (-7416).
90. $-\frac{37}{17}$, mert a másik gyök (3) pozitív.
91. 2,5; 1,75.
92. $\frac{2\sqrt{2}-1+\sqrt{13+4\sqrt{2}}}{2} = 3,07$; $\frac{2\sqrt{2}-1-\sqrt{13+4\sqrt{2}}}{2} = -1,25$.
93. Az első egyenlet két gyöke 1 és $\frac{2}{3}$, a második egyenleté 1 és -2,8, ezért a két egyenletnek van közös gyöke és ez az 1.
94. $-\frac{3}{4} < -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} < \frac{7}{8}$.
95. $-\frac{3}{4} < -\frac{2}{3} < \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$.
96. $1 < 2 < 3 < 4$.

697. Az $x = -1$, mert a másik gyök ($x = 3$) nincs a $-2 \leq x \leq 2$ intervallumban.
698. Az $x = \frac{3}{7} = 0,43$.
699. Nincs, mert az $x_1 = 8$ és $x_2 = -4$ egyike sincs a $]-2; 3[$ intervallumban.
700. Egy sem, mert $x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{108}}{2}$, vagyis a gyökök egyike sem racionális.
701. A -3 balra, a $-\frac{1}{2}$ jobbra helyezkedik el a -1 értékhez képest számegyenesen.
702. Mind a kettő, mert $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.
703. Mivel $x_1 = -1$, $x_2 = 3,5$, ezért az egyenlet mind a két gyöke a $[-2; 2]$ intervallumban van.
704. $(2 - 3x)(x - 1)$.
705. $(x - 3)(2x + 1)$.
706. $(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})$.
707. Az egyenlet minden valós x értékre teljesül (azonosság).
708. 5, mert -5 nem természetes szám.
709. 0; 0,4.
710. -8 ; 8.
711. 4; 6.
712. 1; $\frac{11}{9}$.
713. Rendezés után az $x^2 + 11x - 26 = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből $x_1 = 2$, $x_2 = -13$.
714. Rendezés után az $x^2 - 9x + 18 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $x_1 = 6$, $x_2 = 3$. Az $x_2 = 3$ nem jöhet szóba, mert ekkor a törtnek nincs értelme. Így a megoldás $x = 6$.
15. Az egyenletnek a pozitív számok halmazán nincs megoldása, mert az $x_1 = 1$ pozitív gyök esetében a tört nevezője zérus, a másik gyök pedig negatív ($x_2 = -\frac{3}{14}$).
16. Az egyenletnek a negatív számok halmazán nincs megoldása, mert mind a két gyök ($\frac{3}{4}$; $\frac{1}{3}$) pozitív.
17. $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ (717. ábra).
18. $x_1 = -\frac{34}{71} = -0,48$; $x_2 = 1$ (718. ábra).



717



718

19. 3.
20. $6; \frac{12}{23}$.
21. Rendezés után a $2x^2 - 3x + 1 = 0$ egyenletet kapjuk, ebből $x_1 = 1$; $x_2 = 0,5$.
22. $-\frac{5}{13}$.
23. $x = \pm 5$.
24. $x^2 = -45$, ezért nincs ilyen valós x .
25. $t = -3$.
26. $x = \frac{1}{2}$, mert az $x = -3$ értékre az egyenletnek nincs értelme.
27. 2.
28. Nincs megoldás a pozitív számok halmazán, mert $x_1 = 1$ értékre nem értelmezhető az egyenlet, a másik gyök pedig negatív: $x_2 = -\frac{1}{2}$.

729. Nincs megoldás a valós számok halmazán.
730. Az egyenletnek nincs pozitív gyöke ($x_1 = 0, x_2 = -0,2$).
731. Nincs megoldás a természetes számok halmazán, mert az $x^2 = 4$ egyenletből $x_{1,2} = \pm 2$, de ezekre az értékekre az egyenlet nem értelmezhető.
732. Rendezés után $2x^2 - x - 3 = 0$, ebből $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -1$. A keresett megoldás: -1 .
733. Rendezés után $2x^2 + x = 0$. Ebből $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{2}$. A $-\frac{1}{2}$ értékre nem értelmezhető az egyenlet, $x = 0$ valóban gyök.
734. $-0,5$.
735. $x = -\frac{15}{11}$.
736. $x_1 = 4; x_2 = 5$.
737. -3 .
738. $1; -\frac{7}{5}$.
739. Nincs megoldás a negatív számok halmazán, mert $y_1 = 2$ és $y_2 = -1$, de ez utóbbi értékre nem értelmezhető az egyenlet jobb oldalán álló tört.
740. 8 .
741. Nincs megoldás a pozitív számok halmazán.
742. $x = -3,2$, mert $x = 3$ nem megoldás.
743. Nincs megoldás az egész számok halmazán, sőt a valós számok halmazán sem, mert a megoldás során kapott két értékre ($x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$) az egyenlet nem értelmezhető. Az a feltétel, hogy a gyökök közül választuk ki az egészeket, csak akkor vetődhet fel, ha már tudjuk, hogy egyáltalán vannak gyökök.
744. $8; 12$.

745. $-\frac{1}{3}$.

746. $-\frac{11}{7}$.

747. 3 .

748. 1 .

749. $-1; \frac{62}{39}$ (749. ábra).

750. Rendezés után a $187y = -34$ elsőfokú egyenletet kapjuk. Ebből $y = -\frac{2}{11}$.

751. $1; -1; 0,25; -0,25$.

752. $x_1^2 = 1$, ebből $x_{1,2} = \pm 1$, de $x > 0$ miatt $x = 1$. Az $x^2 = -\frac{1}{2}$ egyenlet nem ad újabb valós gyököt.

753. $-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\sqrt{2}$.

754. $-1; 1$.

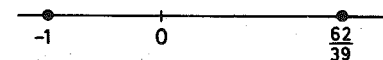
755. $2; -2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$.

756. $-5; -1; 1; 5$.

757. $-3; 3$.

758. Az egyenletből $x_1^3 = 8, x_2^3 = -1$. Két gyök van: $x_1 = 2, x_2 = -1$.

759. Az egyenlet rendezés után $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ alakú. Ebből $x_1^2 = 3, x_2^2 = 1$. Az első egyenletből $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ és ezek megoldásai az eredeti egyenletnek is, a második esetben nem kapunk gyököt, mert ekkor az egyenlet nem értelmezhető.



749

760. Azokra az a értékekre, amelyekre az egyenlet diszkriminán
- $$D = 156a^2 - 8a - 4 = 0. \text{ Ebből } a_1 = \frac{2}{11}, a_2 = -\frac{2}{15}. \text{ A két gyö}$$
- $$x_1 = -6, x_2 = -\frac{4}{5}.$$
- Ha $a_3 = \frac{1}{5}$, akkor az egyenlet elsőfokú, ekkor $x_3 = -\frac{17}{5}$.
761. Azokra, amelyekre $D = 12m + 8 > 0$. Ebből $m > \frac{2}{3}$, de $m \neq 1$.
762. A megoldandó egyenlet $x^2 + (p-1)x - 2(p+1) = 0$. Ebből vagy $x =$
de ez nem megoldás, vagy $x = -(p+1)$. Nincs valós megoldás,
 $p = -3, p = -1, p = 1$, mert ekkor az adott egyenlet nem értelmezhe
763. $x = \frac{2}{3} - b$. Nincs valós gyöke az egyenletnek, ha $b = -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}$.
764. Két különböző gyöke van az egyenletnek, ha $m < \frac{13}{6}$. Mind a két gy
pozitív, ha $m < -2$ vagy $2 < m < \frac{13}{6}$.
765. Az egyenletnek akkor van legfeljebb egy valós gyöke, ha $p \leq \frac{1}{2}$, va
 $p = 1$.
766. a) Ha $p < 0$. b) Ha $p = 0$.
767. A jobb oldalon a műveleteket elvégezve, majd rendezve
 $x^3 - (a+b+c)x^2 + (a+b+ab)x - abc$ áll. A bal és jobb oldal azon
fokszámú hatványainak együtthatóit összehasonlítva a
 $-a = -(a+b+c); b = a+b+ab; -c = -abc$ egyenleteket kapju
Ezekből: $a = -1; b = -1; c = 1$.
Ha $a = b = c = 0$, akkor $x^3 \equiv x^3$, ha $a \in \mathbf{R}$ és $b = c = 0$, akk
 $x^3 - ax^2 \equiv x^3 - ax^2$.
768. $a = \frac{1}{6}; b = -1; c = \frac{11}{6}$. Az $\frac{x^2}{6} - x + \frac{11}{6} = \frac{1}{x}$, vagyis
 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ harmadfokú egyenletnek három gyökét mega
tuk. Mivel több gyöke nem lehet, ezért nincs olyan további x , amely
 $p(x) = \frac{1}{x}$.
769. $x = 0,5; a = 2$.

70. $x_1 = 1; x_2 = -1$.
71. Az $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 6p + 10 = (p-3)^2 + 1$ akkor minimális, ha $p = 3$.
72. Ha $p = -4$.
73. Az első egyenlet gyökei $x_1 = 1, x_2 = 3$. A második egyenletnek akkor
gyöke az 1, ha $1 - (a^2 + 1) + 3a = 0$. Ebből $a = 0, a = 3$. A második
egyenletnek akkor gyöke a 3, ha $9 - 3(a^2 + 1) + 3a = 0$. Ebből $a = 2,$
 $a = -1$. A két egyenletnek akkor van közös gyöke, ha $a = -1, a = 0,$
 $a = 2, a = 3$.
74. Ha $k = \frac{2}{3}$, akkor $x_1 = -3, x_2 = -6$.
75. Az első egyenlet gyökei $x_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{4-a}$, a másodiké
 $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+56a}}{2}$. Csak két azonos előjelű gyök hasonlítható ösz-
sze. Az $x_1 = 3x_3$ feltételből $4 + 2\sqrt{4-a} = \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{1+56a})$. Ebből
rendezés után $4225a^2 - 2739a = 0$, és így $a = 0$ vagy $a = \frac{2739}{4225}$. Ha
 $a = 0$, akkor $x_1 = 8, x_3 = 0$ és ez nem felel meg, ha $a = \frac{2739}{4225}$, akkor
 $x_1 = \frac{498}{65} > 0, x_3 = \frac{166}{65} > 0$, és $x_1 = 3x_3$ valóban fennáll, tehát ez
megoldás. Az $x_2 = 3x_4$ feltételből $4 - 2\sqrt{4-a} = \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{1+56a})$.
Ebből rendezés után ugyanarra az egyenletre és ugyanazokhoz a gyö-
kökhöz jutunk, mint az előbb. Ha $a = 0$, akkor $x_2 = 0, x_4 = -3$ és ez
nem felel meg, ha $a = \frac{2739}{4225}$, akkor $x_2 = \frac{22}{65} > 0, x_4 = -\frac{231}{65} < 0$ és
ez nem ad megoldást. *Megjegyzés:* Ha nincs megszabva, hogy az első
egyenlet valamely gyöke háromszorosa a második egyenlet valamely
gyökének, hanem pl. a (fordított) $3x_1 = x_3$ esetet is megengedtük
volna, akkor ebből (sokkal kevesebb számolással) az $a^2 - 3a = 0$
egyenlethez jutottunk volna. Ebből $a = 0$ és $a = 3$. Ha $a = 0$, akkor
 $x_1 = 0, x_3 = 0$, ha $a = 3$, akkor $x_1 = 2, x_3 = 6$, és mind a kettő megoldás.

776. $k=5$.
777. Mivel $x_1+x_2 = a^2+b^2 = 5$ és $x_1x_2=ab=2$, ezért $a=1, b=2$ vagy $a=2, b=1$, vagy $a=-2, b=-1$, vagy $a=-1, b=-2$.
778. $x^2 + \frac{7}{10}x + \frac{3}{25} = 0$ vagy egész együtthatókkal $50x^2 + 35x + 6 = 0$.
779. $7x^2 - 39x + 20 = 0$.
780. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{-8} = -\frac{1}{24}$.
781. 29.
782. $25x^2 - 60x + 34 = 0$.
783. $x_1=1, x_2=-5$. $x_1+x_2 = -4, x_1-x_2 = 6$ vagy $x_1+x_2 = -4, x_2-x_1 = -6$. Így két egyenlet írható fel: $x^2-2x-24 = 0$ és $x^2+10x+24 = 0$.
784. Az adott egyenlet gyökei: $x_1=-4, x_2=-2$. Az új egyenlet gyökei: $x_1=-1, x_2=1$. Az új egyenlet: $x^2-1 = 0$.
785. $x^2+8x+16 = 0$.
786. a) Az adott egyenlet gyökeire $x_1+x_2 = 4$ és $x_1x_2=7$. Az új egyenlet gyökeire $5(x_1+x_2) = 20$ és $(5x_1)(5x_2) = 25(x_1x_2) = 175$. Így az új egyenlet $x^2-20x+175 = 0$ alakú.
b) Az új egyenlet gyökeire $(x_1+5)+(x_2+5) = 14, (x_1+5)(x_2+5) = x_1x_2+5(x_1+x_2)+25 = 7+5 \cdot 4+25 = 52$. Ezért az új egyenlet $x^2-14x+52 = 0$.
787. a) $x^2-0,2x-0,8 = 0$, b) $x^2-0,25x-1,25 = 0$.
788. Mivel $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, ezért a feltétel szerint $\left[\frac{3(t-1)}{2}\right]^2 - 2 \cdot \frac{1-t^2}{2} = \frac{5}{4}$. Ebből $13t^2-18t = 0$, vagyis $t_1=0$ vagy $t_2 = \frac{18}{13}$. Ezen tén teljesül a feltétel.

9. $p=-4; p=4$.
10. $x_1^2x_2+x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1+x_2) = \frac{3}{2}$.
1. a) $p = \pm 4$; b) $p = \pm 5$.
2. a) $q=3$; b) $q=4$; c) $q=1$.
3. Annak érdekében, hogy a keresett egyenlet együtthatói racionális számok legyenek, legyen az adott $x_1 = 2-\sqrt{5}$ mellett a másik gyök $x_2 = 2+\sqrt{5}$. Ekkor $x_1+x_2 = 4, x_1x_2 = -1$, az egyenlet pedig $x^2-4x-1 = 0$.
4. $x^2-8x+1 = 0$.
5. Ahhoz, hogy az $f(x) = ax^2+bx+c$ másodfokú függvénynek minimuma lehessen, szükséges, hogy $a>0$ legyen. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $a=1$. Mivel a zérushelyek összege 2, ezért $b=-2$, és így $f(x) = x^2-2x+c = (x-1)^2+c-1$. Ennek akkor van minimuma, ha $x=1$. Mivel a minimum -3 , ezért $-3 = c-1$, és ebből $c=-2$. Így $f(x) = x^2-2x-2$ és $f(1) = -3$ (ez éppen a minimum). Ellenőrzésképpen: a két zérushely $x_1 = 1+\sqrt{3}, x_2 = 1-\sqrt{3}$ és $x_1+x_2 = 2$ valóban igaz.
 $f_{\max} = f(2) = 0$.
- Mivel az ismeretlenek összege (7) és szorzata (-18) adott, az ismeretlenek a $z^2-7z-18 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek tekinthetők. Ezek $z_1=9$ és $z_2=-2$. Ezért az egyenletrendszer megoldása $x=9, y=-2$ vagy $x=-2, y=9$. Ugyanerre az egyenletre jutunk, ha az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezzük és azt a másik egyenletbe helyettesítjük.
18. $x=5, y=-3$ vagy $x=3, y=-5$.
19. $x=4, y=1$.
20. Az első egyenletből $x = \frac{3y+15}{2}$. Ezt a másodikba helyettesítve az $y^2+5y-6 = 0$ egyenletet kapjuk. Gyökei $y_1=1, y_2=-6$. A hozzájuk tartozó x értékek $x_1=-9, x_2 = \frac{3}{2}$. A feladat feltételeinek csak az $x=-9, y=1$ számpár felel meg.

801. $x = -2, y = -3; x = -4, y = -\frac{3}{2}$.

802. $x = 2, y = 7; x = -7, y = -2$.

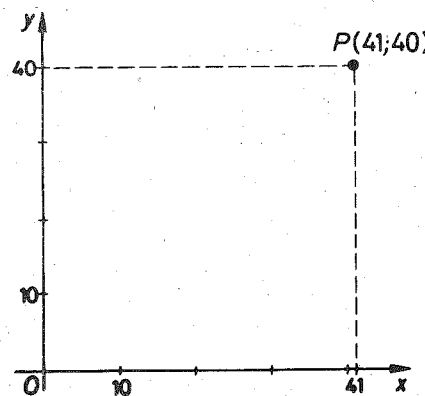
803. $x = 1, y = -1; x = -1, y = 1$.

804. Nincs valós megoldás.

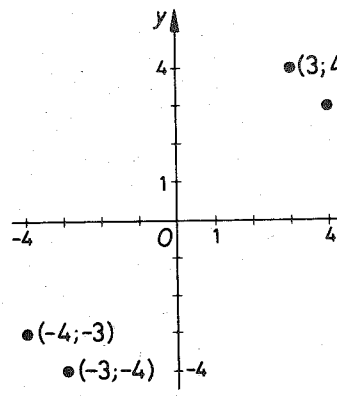
805. $x = 2, y = 1$, mert $x = -1, y = -2$ nem felel meg a feltételnek.

806. $x = 4, y = 2; x = 0, y = -2$.

807. $x = 41, y = 40$ (807. ábra).



807



808

808. Ha a második egyenlet oldalainak kétszeresét kivonjuk az első egyenlet megfelelő oldalából, akkor $(x-y)^2 = 1$. Ebből $x-y = \pm 1$.
 $x = 1+y$, és ezt a második egyenletbe helyettesítjük, akkor $y^2 + y - 12 = 0$, és ebből $y_1 = 3, y_2 = -4$, a megfelelő x értékek $x_1 = 4, x_2 = -3$. Ha $x = -1+y$, akkor $y^2 - y - 12 = 0$, és ebből $y_3 = 4, y_4 = -3$, illetve $x_3 = -4, x_4 = 3$. Négy számpár tesz eleget az egyenletrendszernek: $x = 3, y = 4; x = -3, y = -4; x = 4, y = 3; x = -4, y = -3$ (808. ábra).

809. $x = 1, y = 2$.

810. $x = -4, y = 0; x = 0, y = -4$.

811. $x = 0, y = 1$.

2. $x = 5, y = 0; x = 0, y = 5$ (812. ábra).

3. $(5; 3), (-3; -5)$.

4. $x = 6, y = 4$ (814. ábra).

5. A megoldandó egyenlet $x^4 - 40x^2 - 441 = 0$. Ebből $x_1^2 = 49, x_2^2 = -9$, de ez utóbbi nem felel meg. Így $x = 7, y = 3; x = -7, y = -3$.

6. $x = 4, y = 2; x = 2, y = 4$.

7. $x = -8, y = -4; x = -4, y = -8$.

8. $x = 0, y = 3; x = 1, y = 4$.

9. A második egyenletből $y = 10 - x$. Ezt az elsőbe helyettesítve rendezés után $x^2 - 10x + 16 = 0$; ebből $x_1 = 8, x_2 = 2$. A megoldás: $x = 8, y = 2; x = 2, y = 8$.

10. $x = 1, y = 3; x = 3, y = 1$.

11. A második egyenletből $y = 15 - x$, ezt az elsőbe helyettesítve rendezés után az $x^2 - 15x + 36 = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből $x_1 = 12, x_2 = 3$. A megfelelő y értékek $y_1 = 3, y_2 = 12$. A megoldás $x = 12, y = 3$ és $x = 3, y = 12$.

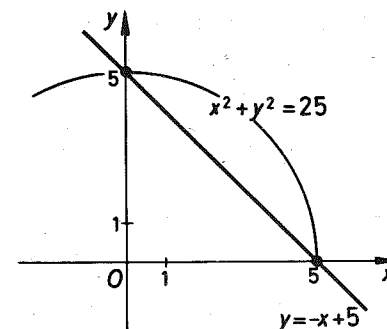
12. Az első egyenletből $\frac{x+y}{xy} = 1$. Mivel $x+y = 4$, ezért $xy = 4$. Megoldandó tehát a $z^2 - 4z + 4 = 0$, vagyis a $(z-2)^2 = 0$ egyenlet. Az egyetlen $z = 2$ gyökből $x = 2, y = 2$.

13. $x = 3, y = 2$.

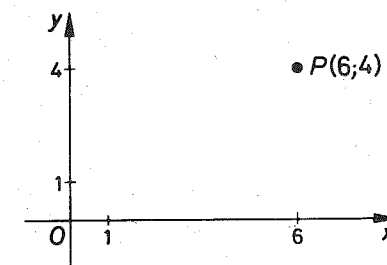
14. Az egyszerűség kedvéért legyen $\frac{1}{x} = a$ és $\frac{1}{y} = b$. Akkor az első egyenletből

$$a = -\frac{3b}{2}, \text{ ezt a második egyenletbe helyettesítve } -\frac{9b}{2} - 4b = -\frac{17}{6}.$$

Ebből $b = \frac{1}{3}$ és így $a = -\frac{1}{2}$. Az egyenletrendszer megoldása $x = -2, y = 3$.



812



814

825. $x=2, y=3$ (825. ábra).

826. Célszerű az $\frac{1}{x+y} = a, \frac{1}{x-y} = b$ helyettesítés. $x=1, y=0$.

827. $x=20, y=1; x=1, y=20$.

828. $x=1, y=2; x=-1, y=-2$.

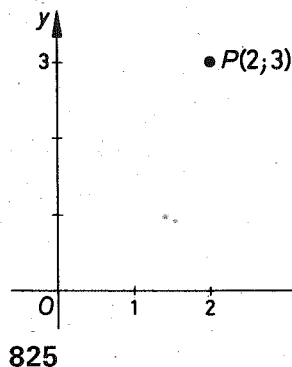
829. Átrendezéssel és kiemeléssel az egyenletek az $xy+(x-y)=1; xy(x-y)=-6$ alakra hozhatók. Az xy és $x-y$ a $z^2-z-6=0$ egyenlet gyökeinek tekinthető. Az utóbbi egyenletből $z_1=3, z_2=-2$. $xy=3; x-y=-2$ egyenletrendszerből $x_1=1, y_1=3$ és $x_2=-2, y_2=-1$. Az $xy=-2; x-y=3$ egyenletrendszerből $x_3=1, y_3=-2$ és $x_4=2, y_4=-1$. Négy számpár felel meg a feladat feltételeinek: $(1; 3), (-3; -1); (1; -2), (2; -1)$.

830. Az xy és $x+y$ a $z^2-49z+468=0$ egyenlet gyökeinek tekinthető. $z_1=z_2=13$. Az $x+y=13; xy=36$ egyenletrendszerből $x_1=9, y_1=4$ és $x_2=4, y_2=9$. Az $x+y=36; xy=13$ egyenletrendszerből $x^2-36x+13=0$. Ebből $x_{3,4}=18 \pm \sqrt{311}$ és így $y_{3,4}=18 \mp \sqrt{311}$. Négy valós számpár elégíti ki az egyenletrendszert: $x=9, y=4; x=4, y=9; x=18+\sqrt{311}, y=18-\sqrt{311}; x=18-\sqrt{311}, y=18+\sqrt{311}$.

831. $(5; 9), (9; 5)$.

832. A második egyenletből $x=y+4$. Ezt az elsőbe helyettesítve rendezés után az $y^2+4y-21=0$ egyenletet kapjuk. Ebből $y_1=3, y_2=-7$; a megfelelő x értékek $x_1=7, x_2=-3$. A keresett számpárok: $(7; 3), (-3; -7)$.

833. Az első egyenletet átalakítva $(3x-2y)^2-6(3x-2y)+9=0$. Ebből $3x-2y=3$. Így $x=\frac{3+2y}{3}$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve az $2y^2+3y=0$ egyenlethez jutunk. A megoldás: $x_1=1, y_1=0; x_2=0, y_2=-\frac{3}{2}$.



834. A második egyenletből $x=\frac{6-5y}{2}$; ezt az első egyenletbe helyettesítve és rendezve a $79y^2-178y+40=0$ egyenlethez jutunk. Ebből $y_1=2, y_2=\frac{20}{79}$. A megfelelő x értékek: $x_1=-2, x_2=\frac{187}{79}$. A megoldások

$x=-2, y=2$ és $x=\frac{187}{79}, y=\frac{20}{79}$.

835. $x_1=-\frac{72}{11}, y_1=-\frac{37}{11}; x_2=9, y_2=7$.

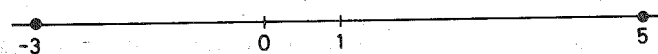
836. Alkalmazva az $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ azonosságot, az $x^2-xy+y^2=31, x+y=11$ egyenletrendszerhez jutunk. Ebből $x=5, y=6; x=6, y=5$.

Abszolútértékes kifejezéseket tartalmazó egyenletek

837. $x_1=6, x_2=-6$. A feladat feltételének csak a 6 felel meg.
838. $-2; 7$.
839. 4 .
840. Ha $x \geq \frac{3}{2}$, akkor azonosságról van szó (minden $x \geq \frac{3}{2}$ értékre teljesül az egyenlet), ha $x < \frac{3}{2}$, akkor az egyenlet bal oldala ellentmond a jobb oldalnak. Megoldás $x \geq \frac{3}{2}$.
841. $x < -1$ vagy $x \geq 0$.
842. 3 .
843. Ha $x \geq 5$, akkor az egyenlet $x+x-5=7$ alakú és ebből $x=6$. Ha $0 \leq x < 5$, akkor az egyenlet $x-x+5=7$ alakú, de ebből nem kapunk megoldást. Ha $x < 0$, akkor az egyenlet $-x-x+5=7$ alakú, és ebből $x=-1$, de ez nem felel meg a feladat feltételének. A megoldás: 6 .
844. -1 .
845. $\{-1; 3\}$.
846. $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}$.
847. Ha $x \leq 2$, akkor az adott egyenlet $-x+2-2x+7=3$ alakú és ebből $x=2$, és ez megfelel az előbbi feltételnek. Ha $2 < x \leq \frac{7}{2}$, akkor az adott egyenlet $x-2-2x+7=3$ alakú, és ebből $x=2$. Ez nem felel meg az előbbi feltételnek. Ha $x \geq \frac{7}{2}$, akkor az adott egyenlet $x-2+2x-7=$

és ebből $x=4$. Ez megfelel az előbbi feltételnek. Az egyenletnek két megoldása van: $x=2$ és $x=4$.

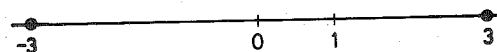
8. $-3; 5$ (848. ábra).



848

9. Nincs megoldás a valós számok halmazán.

10. $-3; 3$ (850. ábra).



850

11. Ha $x < -3$, akkor $-x-3-x+5=20$, ebből $x=-9$. Ha $-3 \leq x < 5$, akkor $x+3-x+5=20$, de ez nem ad megoldást. Ha $x \geq 5$, akkor $x+3+x-5=20$, ebből pedig $x=11$. Két megoldás van: -9 és 11 .

12. Nincs megoldás az egész számok halmazán.

13. 7 .

14. $\frac{1}{7}$.

15. Négy esetet kell megkülönböztetnünk az abszolútértékek előjelváltásától függően. Ha $x < -2$, akkor $-x-2(-x-1)+3(-x-2)=0$, és ebből $x=-2$, de ez a feltételnek nem felel meg. Ha $-2 \leq x < -1$, akkor az egyenletből $4x=-8$, $x=-2$, és ez a feltételnek is megfelel, tehát gyök. Ha $-1 \leq x < 0$, akkor az egyenlet bal oldala ellentmond a jobb oldalnak, gyök nincs. Végül ha $x \geq 0$, akkor az egyenletből $x=-2$, de ez nem felel meg az előbbi feltételnek. A megoldás $x=-2$.

16. $x=0, x=4$.

17. $-1; 0; 1$.

18. $-2; 0; 2$.

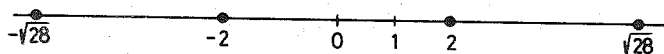
Ha $x \geq 1$, akkor az egyenlet $2x^2-x+1=0$ alakú, de ennek diszkriminánsa negatív, tehát valós gyöke nincs. Ha $x < 1$, akkor az egyenlet $2x^2+x-1=0$ alakú és ebből $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-1$. Mind a két gyök megfelel az $x < 1$ feltételnek, tehát az eredeti egyenlet megoldása: $-1;$

$\frac{1}{2}$.

860. Ha $x \geq 2$, akkor az egyenlet $x^2 - 4x + 3 = 0$, gyökei 3 és 1, de a feltételnek csak az $x = 3$ felel meg. Ha $x < 2$, akkor az egyenlet $x^2 - x - 3 = 0$ gyökei $x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} > 2$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 2$. A feltételnek az utó megfelel ugyan, de a feladat eredeti feltételének nem, mert nem egész szám. A megoldás: $x = 3$.

861. $\sqrt{2}; \sqrt{6}$.

862. $\pm 2; \pm \sqrt{28}$ (862. ábra).



862

863. Ha $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, vagyis $x \leq 1$ és $x \geq 4$, akkor az adott egyenlet $x^2 - 5x + 3 = 0$ alakú. Ennek gyökei $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} > 4$, $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} < 1$, tehát megoldások. Ha $x^2 - 5x + 4 < 0$, vagyis $1 < x < 4$, akkor az adott egyenlet $x^2 - 5x + 5 = 0$ alakú. Ennek gyökei $x_3 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} (= 3,61)$, $x_4 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} (= 1,38)$. Mind a kettő megfelel a feltételnek, ezért végül négy megoldás van:

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{2}; \frac{5 - \sqrt{5}}{2}; \frac{5 + \sqrt{5}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

864. Az egyenlet bal oldala nemnegatív. A jobb oldal csak úgy lehet nemnegatív, ha $x \leq 0$. Ha $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, vagyis ha $x \geq 1$ vagy $x \leq -3$ (de az előbbi az $x \leq 0$ feltétel miatt már nem lehet), akkor az adott egyenlet $x^2 + 6x - 3 = 0$ alakú és ebből $x_1 = -3 + 2\sqrt{3} > 0$, és ez sem az $x \leq 0$ sem az $x \leq -3$ feltételnek nem felel meg, $x_2 = -3 - 2\sqrt{3} < -3$, ez az előbbi feltételnek megfelelne, de nem természetes szám, ezért a feladat feltételének nem felel meg. Ha $x^2 + 2x - 3 < 0$, vagyis ha $-3 < x < 1$ de az $x \leq 0$ feltétel miatt $-3 < x \leq 0$, akkor az adott egyenlet $x^2 - 2x - 3 = 0$ alakú és ebből $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Az első gyök $-3 < x \leq 0$ feltételnek, a második a feladat feltételének (a gyök természetes szám) nem felel meg. Mindezekből következik, hogy a feladatnak a természetes számok halmazán nincs megoldása.

865. $-3 \leq x \leq -2$ vagy $2 \leq x \leq 3$. 866. $-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}$

FEJEZET

Gyökös kifejezéseket tartalmazó egyenletek

57. Négyzetre emelve az egyenlet mind a két oldalán: $3 - x = 16$. Ebből $x = -13$, és ez valóban kielégíti az eredeti egyenletet.

58. $\frac{47}{4}$.

59. 508.

70. $\frac{17}{56}$.

71. 18.

72. $\frac{13}{48}$.

73. *Első megoldás:* Két nemnegatív szám összege akkor és csak akkor 0, ha mind a két szám külön-külön 0. A $\sqrt{x+2} = 0$ egyenletből $x = -2$, a $\sqrt{1-3x} = 0$ egyenletből $x = \frac{1}{3}$. Ez a kettő egyszerre nem teljesülhet,

ezért az egyenletnek nincs megoldása a racionális számok halmazán. *Második megoldás:* Ha az egyik (például a második) gyökmennyiséget átvisszük az egyenlet jobb oldalára, majd négyzetre emelünk, akkor az $x + 2 = 1 - 3x$ egyenletet kapjuk, és ebből $x = -\frac{1}{4}$. Ez azonban nem

elégíti ki az eredeti egyenletet, mert visszahelyettesítve $\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \neq 0$;

ezért az egyenletnek nincs megoldása a racionális számok halmazán.

Megjegyzések. 1. Mind a két megoldásból (pl. az első megoldásbeli ellentmondásból) az is látszik, hogy az egyenletnek a valós számok halmazán sincs megoldása.

2. Ha az eredeti egyenlet mind a két oldalán emelünk négyzetre, akkor a kétszeres szorzatban a négyzetgyök megmarad, és egy újabb négyzetre emelést kell végrehajtanunk. Ennek eredménye rendezés után $16x^2 + 8x + 1 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek kettős gyöke $x = -\frac{1}{4}$. Látható, hogy az utóbbi megoldás mennyire bonyolult.
874. Nincs megoldás a racionális számok halmazán.
875. Nincs megoldás a negatív számok halmazán.
876. $\frac{1}{36}$.
877. 9840.
878. $17\sqrt{2}$.
879. $\frac{17}{2}$.
880. $\frac{7}{30}$.
881. Igen. $x = \frac{25}{24}$.
882. 1.
883. 1,6.
884. -4.
885. $\frac{5}{32}$.
886. $-\sqrt{15}; \sqrt{15}$.
887. -2; 2.
888. 0.
889. $x_{1,2} = \pm 5\sqrt{2}$. Az egyenlet egyik valós gyöke sincs a $] -5; 5[$ intervallumban.
890. $x_{1,2} = \pm 3$. Igen, mind a kettő.

1. -5; 5.
2. 11, mert -11 nem természetes szám.
3. $x = \pm\sqrt{\frac{119}{120}} = \pm 0,992$, ezért az egyenletnek 1-nél nagyobb valós gyöke nincs. (Ez a $119 < 120$ egyenlőtlenségből is azonnal látszik.)
4. $\pm\sqrt{\frac{11}{12}} = \pm 0,916$.
5. Az egyenlet mind a két oldalán négyzetre emelve és rendezve az $x^2 - 4x - 12 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $x_1 = 6$, $x_2 = -2$. A második gyök nem pozitív, ezért nem felel meg a feladat feltételének, tehát a pozitív számok halmazán egy megoldás van: $x = 6$.
6. $x_1 x_2 = 3(-4) = -12$.
7. Van. (Mind a két gyöke az adott intervallumba esik, mert $x_1 = \frac{1 + \sqrt{73}}{12} = 0,795 < 1$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{73}}{12} = -0,629 > -1$.)
8. 2; 7.
9. A rendezés után kapott egyenlet $3x^2 + 2x - 1 = 0$; ennek gyökei $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -1$. Az eredeti egyenletet az x_2 nem elégíti ki, x_1 igen, ezért a megoldás $x = \frac{1}{3}$.
10. 1.
11. 2.
12. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_1 + x_2 = 0,7$.
13. 0,5, mert az egyenletnek csak ez az egy valós gyöke van.
14. $\frac{1}{3}$.
15. $\frac{3}{2}$.

906. $\frac{1}{4}$.
907. A négyzetre emelés után kapott egyenlet $6x^2 + 5x - 6 = 0$ alakú. Ebből $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. Az eredeti egyenletet csak az $x = \frac{2}{3}$ elégíti ki.
908. $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$.
909. $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$.
910. 3.
911. Nincs ilyen gyök, mert $x_1 = 5$ és ez nem esik az adott intervallumra, $x_2 = -2$, ez viszont nem elégíti ki az eredeti egyenletet.
912. $\frac{1}{2}$.
913. $-\frac{1}{4}$.
914. Nincs megoldás a valós számok halmazán.
915. A négyzetre emelés és rendezés után kapott egyenlet $3x^2 + 7x - 6 = 0$ alakú. Ebből $x_1 = \frac{2}{3}$; ez kielégíti az eredeti egyenletet is és a feltétel is, $x_2 = -3$, ez kielégíti ugyan az eredeti egyenletet, de a feladat feltételét nem, ezért a megoldás $x = \frac{2}{3}$.
916. $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$.
917. $\frac{4}{3}$.
918. -2 ; $\frac{3}{7}$.
919. $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{5}{2}$, tehát van a gyökök között egész szám: $x = 2$.
- 4.
- 4.
- 4.
- 10.
1. Az $]1; 2[$ intervallumban nincs megoldás, mert $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.
5. Az egyenlet gyökei: 0; 3. A feltételnek csak a 3 felel meg.
5. Nincs megoldása a feladatnak.
7. A négyzetre emelés és rendezés után kapott $x^2 - 7x + 12 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = 4$, $x_2 = 3$. Ezek egyike sem elégíti ki az eredeti egyenletet, ezért nincs megoldás a valós számok halmazán.
- 1.
2. Nincs megoldás a negatív számok halmazán.
2. $\frac{13}{2}$; $-\frac{7}{2}$.
1. *Első megoldás.* Ha az egyenletet $\sqrt{x+3}$ -mal megszorozzuk és rendezzük, akkor az $x+7 = 4\sqrt{x+3}$ egyenletet, majd négyzetre emelés és rendezés után az $x^2 - 2x + 1 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek egy kétszeres gyöke van: $x = 1$. Ez az eredeti egyenletet is kielégíti.
- Második megoldás.* A $\sqrt{x+3} = y$ helyettesítés után az $y^2 - 4y + 4 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek egyetlen kétszeres gyöke: $y = 2$, ezzel $x = y^2 - 3 = 1$, és ez az eredeti egyenletet is kielégíti.
2. $x = 5$, de ez nem elégíti ki az eredeti egyenletet, ezért nincs megoldás a valós számok halmazán.
3. 4.
4. $\frac{5}{2}$. ($x = 0$ nem felel meg a feladat feltételeinek.)
5. Az első négyzetre emelés után $2\sqrt{(4-x)(x-3)} = 0$, a második négyzetre emelés után $x^2 - 7x + 12 = 0$. Ennek gyökei $x_1 = 4$, $x_2 = 3$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet.
5. $\frac{3}{2}$.

937. -1 .
938. A kétszeri négyzetre emelés és rendezés után $x^2 - 2x - 3 = 0$. E $x_1 = 3$, de ez nem elégíti ki az eredeti egyenletet; $x_2 = -1$, ez kielégíti az eredeti egyenletet, de nem természetes szám. Ezért nincs megoldás a természetes számok halmazán.
939. $\{34\}$.
940. \emptyset .
941. $\{5\}$.
942. Nincs megoldás a valós számok halmazán.
943. Az adott egyenlet a $\sqrt{(2x+1)^2} - \sqrt{(2x-3)^2} = 4$, illetve az $|2x+1| - |2x-3| = 4$ alakba írható. Ha $x < -\frac{1}{2}$, akkor $-2x-1 - (-2x+3) = 4$, és ebből nincs gyök. Ha $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$, akkor $2x+1 - (-2x+3) = 4$, ebből $x = \frac{3}{2}$, de ez nem elégíti ki az eredeti feltételt. Ha $x \geq \frac{3}{2}$, akkor $2x+1 - (2x-3) = 4$. Ez az egyenlet minden x értékre fennáll. Az adott egyenlet megoldáshalmaza tehát a $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ számhalmaz.
944. 4.
945. 1; 3.
946. 2.
947. A megoldandó egyenlet: $9x^2 + 20x + 4 = 0$. Ebből $x_1 = -\frac{2}{9}$, $x_2 = -\frac{4}{9}$.
948. 6.
949. A megoldandó egyenlet: $3x^2 - 4x - 24 = 0$. Nincs megoldás a racionális számok halmazán, mert a diszkrimináns (304) nem négyzetszám.
950. Van, $x = 5$.
951. Nincs. ($x = 3$).

2.
 $x = 6$.

Az egyenlet bal oldala akkor van értelmezve, ha $x \geq 2$, és ekkor értéke $\geq \sqrt{2}$. Az egyenlet jobb oldala ugyanekkor $1 - x \leq -1$. E két megállapítás ellentmond egymásnak, ezért az egyenletnek nincs megoldása, megoldáshalmaza az üres halmaz: \emptyset .

Megjegyzés: Ha a gyökmennyiségek kiküszöbölése érdekében kétszer négyzetre emelünk és összevonunk, akkor az $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 9 = 0$ negyedfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldáshalmazát középiskolai eszközökkel nem tudjuk meghatározni.

$\{3\}$.

1.

Négyzetre emeléssel és rendezéssel az egyenlet az $x-1 = 16^2(x-1)^2$ alakra hozható. Ez vagy akkor teljesül, amikor $x_1 = 1$, vagy akkor, amikor $x-1 = \frac{1}{16^2}$. Ebből $x_2 = \frac{257}{256}$. Az x_1 gyök kielégíti az eredeti egyenletet és benne van az adott intervallumban. Ha a fenti átalakítást nem vesszük észre, akkor a megoldandó egyenlet $256x^2 - 513x + 257 = 0$ alakú.

Nincs megoldása a valós számok halmazán.

A megoldandó egyenlet $x^2 - 14x + 33 = 0$. Ennek $x_1 = 3$ gyöke kielégíti az eredeti egyenletet, de nincs az adott intervallumban, az $x_2 = 11$ gyöke nem elégíti ki az eredeti egyenletet.

Négyzetre emelések és rendezések után $x^2 - 18x + 45 = 0$. Az $x_1 = 15$ nem elégíti ki az eredeti egyenletet, az $x_2 = 3$ gyök igen, a megoldás: 3.

$\frac{2}{3}$.

3.

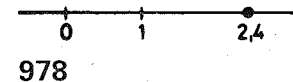
A megoldandó egyenlet $4x^2 - 15x - 25 = 0$. Ennek $x_1 = 5$ gyöke kielégíti az eredeti egyenletet és benne van a $[3; 5]$ számközben, tehát megoldás; $x_2 = -\frac{5}{4}$ kielégíti az eredeti egyenletet, de nincs az adott intervallumban, tehát nem megoldás.

964. A megoldandó egyenlet $5x^2 - 47x + 110 = 0$. Ennek csak az x gyöke elégíti ki az eredeti egyenletet is és benne van a $]4; 5[$ számkörben is.
965. 26.
966. 7.
967. Köbre emelés és rendezés után az $x(x^2 - 4x + 4) = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 2$. Mind a három gyök kielégíti az eredeti egyenletet és a feltételt is, tehát két különböző gyök van: $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ (ez kétszeres gyök).
Megjegyzés: A természetes számok halmaza egyes definíciók szerint tartalmazza a 0-t, mások szerint nem. Az MSZ 4899/2-84 matematikai szabvány szerint a természetes számok halmazának legkisebb eleme a 1.
968. $-2; 2$.
969. 1.

FEJEZET

Exponenciális és logaritmus egyenletek és egyenletrendszerek

- Azonos átalakítással $9^x = 9^{-3}$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt ebből $x = -3$. A különböző pozitív és 1-től különböző alapú exponenciális függvények szigorú monotonitására a fejezet csaknem minden exponenciális egyenlete megoldásánál hivatkozni szükséges, de ezt helykímélés érdekében nem mindig tesszük meg a továbbiakban.
71. -5 .
72. $-\frac{1}{3}$.
73. $-\frac{5}{4}$.
74. Van, $x = -2,5$.
75. $3^{-\frac{7}{3}} = 3^x$, ebből $x = -\frac{7}{3}$.
76. Van, $x = \frac{5}{6}$.
77. $\frac{4}{3}$.
78. $\frac{12}{5}$ (978. ábra).
79. Azonos átalakítással $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-8}$. Ebből $x = -\frac{8}{3}$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet.



980. 3.

981. Azonos átalakításokkal $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{24}{54}$. Ebből $x=2$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet.

982. 1.

983. Felhasználva, hogy $1=5^0$, az eredeti egyenletből $3x-1=0$ következik. Ebből $x = \frac{1}{3}$.

984. $\frac{2}{5}$ (984. ábra).



985. 2.

986. Azonos átalakításokkal $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$. Ebből $x=3$.

987. $x = -3$.

988. Igen, $x = \frac{3}{2}$.

989. 4.

990. Azonos átalakításokkal $2^{\frac{2x-3}{3}} = 2^{-\frac{3-x}{7}}$. Ebből $14x-21 = -9+12$ vagyis $x = \frac{12}{11}$.

991. Az átalakított egyenlet $2^{2x-4} \cdot 2^{x-3} = 2^8$ alakú, ebből $3x-7 = 8$, így $x=5$.

992. Nincs megoldás az egész számok halmazán, mert a bal oldalon álló hatványa páros, 3 hatványa páratlan szám, ezek különbsége pedig lehet páros szám. $2^{x+2} = 1$ sem lehet, mert ekkor a bal oldal nem

993. Nincs megoldás a valós számok halmazán, mert rendezés után az egyenlet egyik oldalán 0, a másik oldalán 72 áll, ez pedig ellentmondás.

994. $x=2$.

995. A megoldandó egyenlet $9^x = 81$, ebből $x=2$.

996. Azonos átalakítások után $4^x = \frac{3}{2}$. Ebből $x = \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg 4} = 0,2925$.

997. 3.

998. Van, $x=3$.

999. 2.

1000. Az egyenlet megoldása $x=1$. Mivel ez kisebb, mint 2, a feladat kérdésére „igaz” a válasz. Sőt „igaz” a válasz akkor is, ha a kérdés (élesebben) így hangzott volna el: „Igaz-e az, hogy $x < 2$, ha...”.

1001. Azonos átalakítások után a $8 \cdot 2^{2x} - 33 \cdot 2^x + 4 = 0$, a 2^x ismeretlenre nézve másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $2^x = 4$ és $2^x = \frac{1}{8}$.

Ebből $x_1=2$, $x_2=-3$. Ezek megoldásai az eredeti egyenletnek, de az adott intervallumban nincsenek benne, ezért az egyenletnek a $[0; 1]$ intervallumban nincsen megoldása.

1002. Van, $x = -1$.

1003. Az átalakított $2 \cdot 8^x + 9 \cdot 9^x = 11$ egyenletről leolvasható, hogy akkor teljesül, ha $x=0$, tehát a kért és feltételezett egyetlen (mert egyszerűen számolt a kérdező) valós gyököt megtaláltuk. A megoldás $x=0$.

1004. $\frac{1}{4}$.

1005. Azonos átalakításokkal $3x^2 - 2x - 1 = 0$. Ebből $x_1=1$ és ez megfelel a feladat feltételének is, $x_2 = -\frac{1}{3}$, de ez nem felel meg a feladat feltételének, mert nem pozitív. A megoldás $x=1$.

1006. 2.

1007. 2.

1008. 24.

1009. Kettes alapú hatványokra átvéve $2^{-3} \cdot 2^{\frac{3x-1}{2}} = 2^{-2}$. Ebből $-6 + 3x - 1 = -4$, és így $x=1$.

1010. A két oldal azonos átalakításával $\left(\frac{8}{5}\right)^{2(\sqrt{x}-1)} = \left(\frac{8}{5}\right)^{-4(\sqrt{x}-1)}$. Ebből $\sqrt{x}-1 = -2(\sqrt{x}-1)$, $\sqrt{x}-1 = 0$, $x=1$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet is.

1011. Azonos átalakításokkal $5^{2x-4} = 2^{1-x}$, majd $50^x = 1250$. Ebből $x = \frac{\lg 1250}{\lg 50} = \left(2 - \frac{\lg 2}{\lg 50}\right) = 1,82$.

1012. -2.

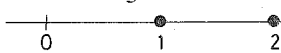
1013. Azonos átalakítások után $2^{\frac{3x^2-12}{3}} = 2^{-3x}$, ebből $x^2+3x-4=0$. A gyökök $x_1=1$, $x_2=-4$. Mind a kettő eleget tesz az egyenletnek és a feladat feltételeinek is.

1014. A megoldandó egyenlet $x^2+2x-3=0$. Ennek gyökei: $x_1=1$, $x_2=-3$, de ezek közül a feladat feltételének csak az $x=1$ felel meg.

1015. 1. 1016. 1.

1017. Az egyenletből $|3x-2|=2$. Ha $x \geq \frac{2}{3}$, akkor $3x-2=2$, ebből $x=\frac{4}{3}$ és ez megfelel. Ha $x < \frac{2}{3}$, akkor $-3x+2=2$, és ebből $x=0$ és ez is megfelel. Két megoldása van az egyenletnek: $x=\frac{4}{3}$ és $x=0$.

1018. $\{-1; 1\}$.



1019

1019. A kitevők egyenlőségéből $x = \frac{1}{3}$, de ez nem gyök, mert a bal oldal negatív szám törtkitevős hatványa állna, és ezt nem értelmezzük. Mind a két alap 1, akkor $x=2$. Ha mind a két alap 0, akkor $x=1$ (1010. ábra).

1020. A kitevők egyenlőségéből $x=6$ vagy $x=5$. Ha mind a két alap 0, akkor $x=3$, de ez nem gyök, mert a bal oldalon ekkor 0° áll. Ha mind a két alap 1, akkor $x=4$. Ha mind a két alap -1 , akkor $x=2$, és ekkor a kitevők párosak, tehát az egyenlet teljesül. Így az egyenlet megoldásai száma: $\{2; 4; 5; 6\}$.

1021. 3. 1022. 4. 1023. -1.

24. A megoldandó egyenlet: $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$. $3^x = 9$, ebből $x=2$, másik gyöke $3^x = -3 < 0$. A kapott gyök eleget tesz a feladat feltételének is ezért a megoldás $x=2$.

25. 2.

26. 1; 3.

27. -1.

28. -2.

29. 1.

30. $x=1$.

31. A megoldandó egyenlet $9 \cdot 3^{2x} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$. Ennek egyik gyöke $3^x = \frac{1}{9}$, ebből $x=-2$, de ez nem felel meg a feladat feltételének, mert nem pozitív, másik gyöke $3^x = -3 < 0$, de ez lehetetlen. Nincs olyan pozitív x érték, amelyre az egyenlet teljesül.

32. $x=2$; $x=3$.

33. 0.

34. -2.

35. 3 (1035. ábra).



1035

36. $\{5\}$.

37. $\{6\}$.

38. $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

39. $x=0$.

40. 1.

41. Azonos átalakításokkal $3 \cdot 2^x = \frac{8}{9} \cdot 3^x$, majd $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$. Ebből $x=3$ és ez kielégíti az eredeti egyenletet is és a feltételt is.

42. 2.

43. 1.

1072. feltétel

1010. A két oldal azonos átalakításával $\left(\frac{8}{5}\right)^{2(\sqrt{x}-1)} = \left(\frac{8}{5}\right)^{-4(\sqrt{x}-1)}$. Ebből $\sqrt{x}-1 = -2(\sqrt{x}-1)$, $\sqrt{x}-1 = 0$, $x=1$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet is.

1011. Azonos átalakításokkal $5^{2x-4} = 2^{1-x}$, majd $50^x = 1250$. Ebből $x = \frac{\lg 1250}{\lg 50} = \left(2 - \frac{\lg 2}{\lg 50}\right) = 1,82$.

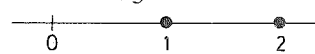
1012. -2.

1013. Azonos átalakítások után $2^{\frac{3x^2-12}{3}} = 2^{-3x}$, ebből $x^2+3x-4=0$. A gyökök $x_1=1$, $x_2=-4$. Mind a kettő eleget tesz az egyenletnek és a feladat feltételeinek is.

1014. A megoldandó egyenlet $x^2+2x-3=0$. Ennek gyökei: $x_1=1$, $x_2=-3$, de ezek közül a feladat feltételének csak az $x=1$ felel meg.

1015. 1. 1016. 1.

1017. Az egyenletből $|3x-2|=2$. Ha $x \geq \frac{2}{3}$, akkor $3x-2=2$, ebből $x=\frac{4}{3}$ és ez megfelel. Ha $x < \frac{2}{3}$, akkor $-3x+2=2$, és ebből $x=0$ és ez is megfelel. Két megoldása van az egyenletnek: $x=\frac{4}{3}$ és $x=0$.



1019

1018. $\{-1; 1\}$.

1019. A kitevők egyenlőségéből $x = \frac{1}{3}$, de ez nem gyök, mert a bal oldal negatív szám törtkitevős hatványa állna, és ezt nem értelmezzük. Mind a két alap 1, akkor $x=2$. Ha mind a két alap 0, akkor $x=1$ (1010. ábra).

1020. A kitevők egyenlőségéből $x=6$ vagy $x=5$. Ha mind a két alap 0, akkor $x=3$, de ez nem gyök, mert a bal oldalon ekkor 0° áll. Ha mind a két alap 1, akkor $x=4$. Ha mind a két alap -1 , akkor $x=2$, és ekkor a kitevők párosak, tehát az egyenlet teljesül. Így az egyenlet megoldáshalmaza: $\{2; 4; 5; 6\}$.

1021. 3. 1022. 4. 1023. -1.

24. A megoldandó egyenlet: $3^{2x}-6 \cdot 3^x-27=0$. Ennek egyik gyöke $3^x=9$, ebből $x=2$, másik gyöke $3^x=-3 < 0$ és ez nem lehetséges. A kapott gyök eleget tesz a feladat feltételének is (természetes szám), ezért a megoldás $x=2$.

25. 2.

26. 1; 3.

27. -1.

28. -2.

29. 1.

30. $x=1$.

31. A megoldandó egyenlet $9 \cdot 3^{2x}+26 \cdot 3^x-3=0$. Ennek egyik gyöke $3^x = \frac{1}{9}$, ebből $x=-2$, de ez nem felel meg a feladat feltételének, mert nem pozitív, másik gyöke $3^x=-3 < 0$, de ez lehetetlen. Nincs olyan pozitív x érték, amelyre az egyenlet teljesül.

32. $x=2$; $x=3$.

33. 0.

34. -2.

35. 3 (1035. ábra).



1035

36. $\{5\}$.

37. $\{6\}$.

38. $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

39. $x=0$.

40. 1.

41. 1.

42. Azonos átalakításokkal $3 \cdot 2^x = \frac{8}{9} \cdot 3^x$, majd $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$. Ebből $x=3$ és ez kielégíti az eredeti egyenletet is és a feltételt is.

43. 2.

44. 1.

1044. 0.

1045. 1.

1046. 1.

1047. Az $5^{\sqrt{x+1}}$ -ben másodfokú egyenlet egyik gyöke $5^{\sqrt{x+1}} = 5$, ebből $\sqrt{x+1} = 1$, és így $x=0$; másik gyöke $5^{\sqrt{x+1}} = 5^{-1}$, ebből $\sqrt{x+1} = -1$, de ez nem lehetséges, mert a bal oldalon pozitív szám áll. Az $x=0$ érték minden feltételt teljesít, ez a megoldás.

1048. Az egyenlet $\lg x = 4 \lg 2 = \lg 16$ alakra hozható. A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt ez akkor és csak akkor teljesül, ha $x=16$. Az egyenletnek van egész gyöke, mégpedig a 16. A különböző pozitív (de nem 1) alapú logaritmusfüggvények szigorú monotonitására a fejezet csaknem valamennyi logaritmusos feladatának megoldásánál hivatkozni szükséges, de helykímélés végett ezt a többször nem tesszük meg a továbbiak során.

1049. 5.

1050. 200.

1051. 100.

1052. 9.

1053. 8 (1053. ábra).



1054. 26.

1055. Az egyenlet jobb oldalának azonos átalakításaival $\lg(x-0,99) = \frac{\lg 100}{\lg 0,1} = \frac{2}{-1} = -2 = \lg 0,01$. Ebből $x-0,99 = 0,01$, vagyis $x=1$. Ez az érték megfelel a feladat feltételeinek is.

1056. 104.

1057. 4.

1058. A $\lg(2x-1) = \lg(x-2)$ egyenletből $2x-1 = x-2$, és ebből $x=-1$, de erre az értékre nincs értelme az adott egyenletnek, mert ekkor $x-2 = -3 < 0$. Az egyenletnek nincs megoldása (az egész számok halmazán sem).

1059. -1.

60. $x = \frac{1}{2}$. Nincs megoldása a racionális számok halmazán, mert például

$$x-3 = \frac{1}{2} - 3 < 0.$$

61. 2.

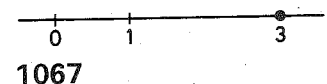
62. Átalakításokkal $100^{\lg(x+20)} = 100^2$, $\lg(x+20) = \lg 100$, $x+20 = 100$, $x=80$. Igaz, hogy $x \geq 70$ (sőt az is, hogy $x > 70$).

63. 18.

64. Átalakítások után $(5^{\sqrt{x}})^2 - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$. Ebből vagy $5^{\sqrt{x}} = 125$, $\sqrt{x} = 3$, $x=9$, és ez a megoldás, vagy $5^{\sqrt{x}} = -1$, ami lehetetlen, mert a bal oldalon pozitív szám áll.

$$65. \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

66. A megoldandó egyenlet $16x^2 - 122x + 225 = 0$. Ebből $x_1 = \frac{9}{2}$, ez valóban megoldás, $x_2 = \frac{25}{8}$, de ez $4x - 15 = \frac{25}{2} - 15 < 0$ miatt nem jöhet szóba.



67. 3 (1067. ábra).

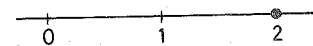
1067

68. Az átalakítások után kapott egyenlet: $x^2 - 8x + 15 = 0$. Ennek (és az eredeti egyenletnek) gyökei: $x_1 = 3$; $x_2 = 5$.

69. Az átalakítások után kapott egyenlet $\lg^2 x - 17 \lg x + 16 = 0$. Ennek gyökei $\lg x = 1$, $\lg x = 16$. Ezekből $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{16}$. Az első kielégíti az eredeti egyenletet, a második nem, mert $4 - 16 \neq 3 \cdot 4$. A megoldás $x = 10$.

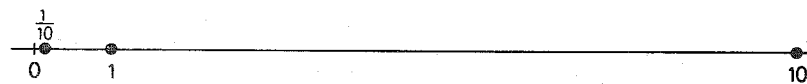
70. Fokozatosan átalakítva az egyenletet: $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = \lg 100$, $2x^2 - 19x - 91 = 0$. Ennek egyik gyöke $x_1 = 13$ és ez kielégíti az eredeti egyenletet is, másik gyöke $x_2 = 9$, de erre az értékre nem értelmezhető az egyenlet bal oldalának első tagja. Így a megoldás $x = 13$.

71. 2 (1071. ábra).



1071

1072. 6.
1073. Átalakítva az egyenletet: $\sqrt{3x-5}\sqrt{7x-3} = 10\sqrt{0,11}$; $21x^2 - 44x + 4 = 0$. Ennek $x_1 = 2$ gyöke megoldás, $x_2 = \frac{2}{21}$ gyöke nem, mert erre értékre az egyenlet nem értelmezhető.
1074. 0.
1075. Átalakítva az egyenletet: $(\lg x)^2 = \lg 1000 + \lg x^2$; $\lg^2 x - 2 \lg x - 3 = 0$. Ebből $\lg x_1 = 3$, $\lg x_2 = -1$, vagyis $x_1 = 1000$, $x_2 = 0,1$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet.
1076. $\frac{9}{2}$; $\frac{99}{2}$.
1077. Az adott egyenlet csak akkor áll fenn, ha $\log_3(x-1) = 2$. Ez akkor igaz, ha $x-1 = 3^2$, ebből pedig $x = 10$. Ez az érték kielégíti az eredeti egyenletet is, tehát megoldás.
1078. Az átalakítás lépései: $1 + \log_2(1 + 3 \log_2 x) = 3$; $\log_2(1 + 3 \log_2 x) = 2$; $1 + 3 \log_2 x = 4$; $\log_2 x = 1$; $x = 2$. Ez az eredeti egyenletet is kielégíti, tehát megoldás.
1079. $x = -1$.
1080. $x = 2$.
1081. $\{4\}$. (Fel kell ismerni, hogy $0,4771 = \lg 3$.)
1082. $\{80\}$.
1083. A megoldandó egyenlet $(x^{\lg x})^2 - 11x^{\lg x} + 10 = 0$. Ebből $x^{\lg x} = 1$ vagy $x^{\lg x} = 10$. Az első egyenletből $(\lg x)^2 = 0$, $x_1 = 1$, a másodikból $(\lg x)^2 = 1$, $\lg x = \pm 1$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0,1$. Mind a három érték kielégíti az eredeti egyenletet is, tehát három megoldás van (1083. ábra).



1083

1084. 8.
1085. $\frac{7}{4}$.

6. Az átalakított egyenlet $4x^2 + 3x - 10 = 0$. Az $x_1 = \frac{5}{4}$ gyök a feltétel miatt nem jöhet szóba, az $x_2 = -2$ gyök pedig nem esik a feltételként előírt halmazba. Az adott egyenletnek a negatív számok halmazán nincs megoldása.
7. 3; 1,5.
8. -1.
9. Az átalakításokkal kapott egyenletek $x^3 + 3x^2 - 27 = x^3$; $x^2 = 9$. Ebből $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. $x_2 < 0$, ezért nem lehet logaritmus alapja, x_1 kielégíti az eredeti egyenletet is, ezért a megoldás $x = 3$.
10. Az átalakított egyenlet $(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x - 4 = 0$. Ebből $\log_2 x = 4$, $x_1 = 16$ és $\log_2 x = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet is.
11. 4.
12. $\frac{1 + \sqrt{73}}{2}$ ($\approx 4,77$).
13. 3.
14. 2.
15. 2.
16. $\sqrt[3]{4}$.
17. $\{2\}$.
18. 5.
19. 5.
20. Az átalakításokkal kapható egyenletek: $\lg(10x^2 + 20) = \lg 100 + \lg 0,3x$; $10x^2 + 20 = 30x$; $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ebből $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Mind a két gyök minden feltételnek megfelel, tehát megoldás.

21. 13.
22. 0.

1103. Az átalakításokkal kapható egyenletek: $x \lg 2 = \lg(3 + 2^{x-2})$; $6. = 3 + \frac{2^x}{4}$; $2^x = 4$. Ebből $x = 2$ és ez kielégíti az eredeti egyenletet a feltételt is.

1104. 10.

1105. A megoldandó egyenlet $2^{4x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$. Ebből $2^x = 1$, így $x =$

1106. $\{0\}$.

1107. 0.

1108. Nincs. A két gyök $x = \sqrt{10}$ és $x = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

1109. $x = 10$.

1110. A megoldandó egyenlet $(\log_2 x)^2 + (\log_2 x) - 6 = 0$. Ebből \log_2 vagy $\log_2 x = -3$. Az elsőből $x_1 = 4$, a másodikból $x_2 = \frac{1}{8}$. Az egy

megoldáshalmaza: $\left\{\frac{1}{8}; 4\right\}$.

1111. 100.

1112. 1000, mert a másik gyök 100.

1113. 100; 1000 (1113. ábra).



1113

1114. $\left\{\frac{1}{10}\right\}$.

1115. Átalakítások után $2 \lg^2 x - \lg x - 1 = 0$. Ebből vagy $\lg x_1 = 1$ és

$x_1 = 10$, vagy $\lg x_2 = -\frac{1}{2}$ és így $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Mind a két gyök kiel

az eredeti egyenletet és a kisebbik gyök az $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

5 alapra hozva az egyenlet valamennyi tagját: $5^{\lg x - \lg^2 x} = 5^{-3} \cdot 5^{\lg x - 1}$. Ebből $\lg x - \lg^2 x = \lg x - 4$, $\lg^2 x = 4$, $\lg x = \pm 2$. Ha $\lg x = 2$, akkor $x = 100$ és ez megfelel valamennyi feltételnek; ha $\lg x = -2$, akkor $x = \frac{1}{100}$ és ez kielégíti az adott egyenletet, de a feladat feltételét nem

(nem egész), így a megoldás $x = 100$.

7. $\frac{2}{3}$.

8. Az egyenlet jobb oldala azonos átalakításokkal: $\log_2 \frac{x^2}{2} + 3 = 2 \log_2 x -$
 $-\log_2 2 + 3 = 2(\log_2 x + \log_2 2) - 3 \log_2 2 + 3 = 2 \log_2 2x$. Így az egyenlet $(\log_2 2x)^2 - 2 \log_2 2x = 0$ alakra hozható. Ez akkor teljesül, ha vagy $\log_2 2x = 0$, vagy ha $\log_2 2x = 2$. Az első esetben $2x = 1$ és így $x = \frac{1}{2}$, a második esetben $2x = 2^2 = 4$, és így $x = 2$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet, tehát a megoldás $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

19. Átalakítások után az adott egyenlet $4 \cdot (2^{\log_x 5})^2 + 15 \cdot 2^{\log_x 5} - 4 = 0$ alakra hozható. Innen $2^{\log_x 5} = \frac{1}{4}$ vagy $2^{\log_x 5} = -4$, de ez utóbbi nem lehetséges. A $2^{\log_x 5} = 2^{-2}$ egyenletből $\log_x 5 = -2$, $x^{-2} = 5$, így $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. $x = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0$ nem lehet logaritmus alapszáma, ezért $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ és ez minden feltételt kielégít.

20. $\left\{\frac{1}{4}; 2\right\}$.

21. $\left\{\frac{1}{9}; 27\right\}$.

22. $x = \sqrt[3]{5}$.

23. $x = \frac{1}{2}$; $x = 4$.

1124. A $2^{\log_x 3}$ -ban másodfokú egyenletből $2^{\log_x 3} = 9$ vagy $2^{\log_x 3} = 8$. Az egyenlet $2^{\log_x 3} = 2^{\log_2 9}$ alakba írható. Ebből $\log_x 3 = \log_2 9$, vagy az alapokra áttérve $\frac{\log_2 3}{\log_2 x} = 2 \log_2 3$. Ebből $\log_2 x = \frac{1}{2}$ és végül $x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. A második egyenlet $2^{\log_x 3} = 2^3$ alakjából $\log_x 3 = 3$ és így $x^3 = 3$, vagy $x = \sqrt[3]{3}$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

1125. $x = 1$.

1126. Az adott egyenletből $\lg x^2 = 5$ vagy $\lg x^2 = -8$. Az első egyenletből $x^2 = 10^5$ és így $x_{1,2} = \pm \sqrt{10^5}$; a második egyenletből $x^2 = 10^{-8}$, ebből $x_{3,4} = \pm 10^{-4}$. Az egyenletet mind a négy gyök kielégíti, a feladat feltételének azonban csak az $x = -100 \sqrt{10}$ ($= -316,23$) és $x = -0,0001$ gyök felel meg.

1127. Azonos alapú logaritmusokra áttérve az egyenlet $\log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 0,5} = 8$. Felhasználva, hogy $\log_2 0,5 = -1$, az egyenletből $\log_2 x = 4$, így $x = 2^4 = 16$, és ez az érték kielégíti az eredeti egyenletet is.

1128. 16.

1129. 64.

1130. 25.

1131. a alapú logaritmusokra áttérve az adott egyenlet $\log_a x + 2 \frac{\log_a x}{\log_a a} + \frac{\log_a x}{\log_a a^3} = 7$, illetve $\log_a x + 2 \frac{\log_a x}{2} + \frac{\log_a x}{3} = 7$ alakú; ebből $\log_a x = 3$, $x = a^3$, és ez kielégíti az adott egyenletet is.

1132. $\frac{1}{2}$.

1133. 49.

1134. $\{5\}$.

1135. Azonos, például 4-es alapú logaritmusokra áttérve $(2 \log_4 x)(\log_4 2 + \log_4 x) = 1$. Átalakításokkal $2(\log_4 x)(\log_4 2 + \log_4 x) = 1$, majd $2(\log_4 x)^2 + \log_4 x - 1 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Ebből $\log_4 x =$

vagy $\log_4 x = \frac{1}{2}$. Az első egyenletből $x_1 = \frac{1}{4}$, a másodikból $x_2 = 2$. Az eredeti egyenletet mind a két gyök kielégíti, és mind a két gyök az adott számközbe esik.

36. $x = 9$.

37. Azonos átalakításokkal: $\log_2 (\sqrt{\lg x + 1})^2 - \log_2 (\sqrt{\lg x + 1}) = \log_2 2$, $(\sqrt{\lg x + 1})^2 = 2(\sqrt{\lg x + 1})$. Ebből vagy $\sqrt{\lg x} = -1$, ami nem lehetséges, mert a jobb oldal negatív, a bal pedig nem; vagy $\sqrt{\lg x + 1} = 2$, $\sqrt{\lg x} = 1$, $\lg x = 1$, $x = 10$ és ez kielégíti az eredeti egyenletet.

38. 3; 9.

39. x alapú logaritmusokra áttérve az egyenlet

$$\log_x 8 - \frac{\log_x 8}{\log_x 4x} = \frac{\log_x 16}{\log_x 2x}, \text{ illetve } 3 \log_x 2 - \frac{3 \log_x 2}{\log_x 4x} = \frac{4 \log_x 2}{\log_x 2x}$$

alakú. Mivel $\log_x 2 \neq 0$ minden megengedett x -re, ezért egyenletünk $3(\log_x 4x)(\log_x 2x) - 3 \log_x 2x = 4 \log_x 4x$ alakban írható fel. Felhasználva, hogy $\log_x x = 1$, az előbbi egyenlet

$$3(2 \log_x 2 + 1)(\log_x 2 + 1) - 3 \log_x 2 - 3 = 8 \log_x 2 + 4$$

és ebből $3(\log_x 2)^2 - \log_x 2 - 2 = 0$ alakra hozható. Az egyenlet gyökei

$$\log_x 2 = 1 \text{ és } \log_x 2 = -\frac{2}{3}. \text{ Az elsőből } x = 2, \text{ a másodikból } x = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Az adott egyenletet mind a két gyök, a feladat feltételét csak az $x = 2$ gyök elégíti ki. *Megjegyzés:* Hasonló megoldáshoz jutunk, ha 2-es alapú logaritmusokra térünk át. Ekkor a megoldandó egyenlet $2(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 3 = 0$.

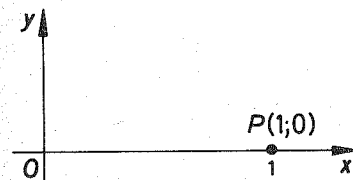
40. 5.

41. Azonos átalakításokkal $4(\log_4 x)^2 + 3 \log_4 x - 1 = 0$. Ennek gyökei $\log_4 x = \frac{1}{4}$, ebből $x_1 = \sqrt{2}$ és $\log_4 x = -1$, ebből $x_2 = \frac{1}{4}$. A megadott

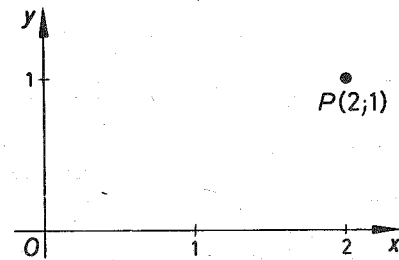
$[1; 2]$ intervallumba ezek közül x_1 esik és ez kielégíti az adott egyenletet is. Megoldás: $x = \sqrt{2}$.

42. 5.

1143. Írjuk át közös, például 10-es alapú logaritmusra az összes logaritmust. Ekkor $\frac{\lg(x-0,5)}{\lg(x+1)} = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-0,5)}$. Ebből $\lg^2(x-0,5) = \lg^2(x+1)$ majd $\lg(x-0,5) = \pm \lg(x+1)$. A pozitív előjelet figyelembe véve $x-0,5 = x+1$, de ez lehetetlen, a negatív előjelet tekintve $x-0,5 = \frac{1}{x+1}$ és ez rendezés után $2x^2 + x - 3 = 0$ alakú. Ebből $x_1 = 1$ és $x_2 = -\frac{3}{2}$. Ez utóbbi értékre nem értelmezhető az eredeti egyenlet, az előbbi kielégíti az adott egyenletet és egyetlen gyök lévén, egyúttal a legnagyobb is. Megoldás: $x = 1$.
1144. Ha az egyszerűbb írásmód kedvéért a $\log_9 x = y$ helyettesítést alkalmazunk, akkor az adott egyenlet az $5 \frac{y}{y-1} + \frac{3y}{1-y} + \frac{16y}{1+2y} = 2$ alakúvá írható fel. Ez rendezés után $8y^2 - 6y + 1 = 0$ alakú és ebből $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{1}{2}$. A $\log_9 x = \frac{1}{4}$ egyenletből $x = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$, a $\log_9 x = \frac{1}{2}$ egyenletből $x = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$, de ez utóbbi nem racionális szám. Az $x = 3$ gyök minden feltételnek megfelel, ez a megoldás.
1145. 64-es alapú logaritmussal dolgozva az egyenlet $6(\log_{64} x)^2 - \log_{64} x - 1 = 0$ alakra hozható. Ebből $\log_{64} x = \frac{1}{2}$, vagyis $x_1 = 8$ és $\log_{64} x = -\frac{1}{3}$, vagyis $x_2 = \frac{1}{4}$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet. A két gyök összege $8 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4}$.
1146. Például egyenlő együtthatók módszerével számolva $3^x = 3$ és $2^y = 2$. Ebből $x = 1$, $y = 2$.
1147. $x = 1$; $y = 2$.
1148. $x = 1$; $y = 0$ (1148. ábra).
1149. $x = 2$; $y = 1$ (1149. ábra).
1150. $\lg x = 2$, $\lg y = 1$, így a számpár: (100; 10).



1148



1149

51. $x = 10$; $y = \frac{1}{10}$.
52. Mind a két egyenlet mind a két oldalának 10-es alapú logaritmusát véve $\lg x + \lg y = \lg 500$, $(\lg y)(\lg x) = \lg 25$. $\lg x$ és $\lg y$ a $z^2 - (2 + \lg 5)z + 2 \lg 5 = 0$ egyenlet gyökeinek tekinthető. Mivel $z_1 = 2$ és $z_2 = \lg 5$, ezért a $\lg x = 2$, $\lg y = \lg 5$ egyenletekből $x = 100$, $y = 5$; a $\lg x = \lg 5$, $\lg y = 2$ egyenletekből pedig $x = 5$, $y = 100$. Mind a két számpár megfelel a feladat feltételeinek. (10⁶; 10⁻¹).
54. Az egyenletrendszer $4x^2 - y^2 = 3$, $\frac{2x+y}{2x-y} = 2$ alakra hozható. A második egyenletből $y = \frac{2}{3}x$, ezt az elsőbe helyettesítve $32x^2 = 27$. Ebből $x_{1,2} = \pm \frac{3\sqrt{6}}{8}$, a megfelelő y értékek $y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$. A negatív számpár nem tartozik az egyenletrendszer értelmezési tartományába, a pozitív kielégíti az egyenletrendszert, tehát a megoldás a $(\frac{3\sqrt{6}}{8}; \frac{\sqrt{6}}{4})$ számpár.
155. $x = 1$, $y = 8$; $x = 8$, $y = 1$.
156. Ha a $\log_3 x = a$, $\log_9 y = b$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor a megoldandó egyenletrendszer $a + b = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3$ alakú. A második egyenlet (az első felhasználásával) $ab = \frac{1}{2}$. Így a és b a $2z^2 - 3z + 1 = 0$ egyenlet gyökeinek tekinthető. A gyökök: $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Ha $a = \log_3 x = 1$ és $b = \log_9 y = \frac{1}{2}$, akkor $x_1 = 3$, $y_1 = 3$; ha

$a = \log_3 x = \frac{1}{2}$ és $b = \log_9 y = 1$, akkor $x_2 = \sqrt{3}$, $y_2 = 9$. Mind a számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert.

1157. $x = 7; y = 3$.

1158. $x = 1000; y = 10$.

1159. A megoldandó egyenletrendszer: $11x = 13y$, $x^2 + y^2 = 290$. Csak a pozitív gyökpár felel meg: $x = 13; y = 11$.

1160. $x = \frac{15}{2}; y = \frac{25}{2}$ és $x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}$.

1161. Azonos átalakításokkal az első egyenlet $\sqrt{xy} = 4 - x$, a második $2\sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y}$ alakra hozható. E két egyenlet különbségéből $2\sqrt{xy} - \sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y} - 4 + x$, azaz $\sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y} - 4 + x$, vagyis $\sqrt{y} = 5 - 2x$. Ha ezt a második egyenletbe helyettesítjük, akkor rendezés után a $4x\sqrt{x} - 2x - 10\sqrt{x} + 8 = 0$ egyenlethez jutunk. Azonnal látszik, hogy $\sqrt{x} = 1$, vagyis $x_1 = 1$ megoldás. Ha az előbbi \sqrt{x} -ben harmadfokú polinomot a $(\sqrt{x} - 1)$ gyöktényezővel elosztjuk, akkor a $4x + 2\sqrt{x} - 8$ hányadost kapjuk. Ennek zérushelyei $\sqrt{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$. A negatív gyök nem jöhet szóba, mert \sqrt{x} pozitív.

$\sqrt{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$, $x_2 = \frac{17 - \sqrt{33}}{8}$. A megfelelő y értékek: $y_1 =$

$y_2 = \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{4}\right)^2 = \frac{21 + 3\sqrt{33}}{8}$. Mind a két gyökpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert, tehát a megoldás: $x_1 = 1, y_1 = 9;$

$x_2 = \frac{17 - \sqrt{33}}{8}, y_2 = \frac{21 + 3\sqrt{33}}{8}$.

1162. $x_1 = 4, y_1 = 8; x_2 = -4, y_2 = -8$.

1163. $x = 4; y = 2$, vagy $x = 4; y = -2$.

1164. $x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}$.

1165. Az első egyenlet $xy = 5$, a második $x = 2 + 3y$ alakban írható fel. Az első egyenletbe helyettesítve $3y^2 + 2y - 5 = 0$. Ebből $y_1 =$

$y_2 = -\frac{5}{3}$. A második gyök nem jöhet szóba. Így $x = 5$. Az $x = 5, y = 1$ számpár kielégíti az egyenletrendszert.

66. *Első megoldás.* Ha az adott egyenletek mind a két oldalának 3-as alapú logaritmusát vesszük, akkor $(\log_3 x)^2 + (\log_3 y)^2 = 5$, $2(\log_3 x)(\log_3 y) = 4$. A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva $(\log_3 x + \log_3 y)^2 = 9$. Ebből vagy $\log_3 x + \log_3 y = 3$ vagy $\log_3 x + \log_3 y = -3$. Az első esetben $\log_3 x = 3 - \log_3 y$, ezt pl. a második egyenletbe helyettesítve $(3 - \log_3 y)(\log_3 y) = 2$, vagyis $(\log_3 y)^2 - 3\log_3 y + 2 = 0$. Ebből $\log_3 y = 2$ vagy $\log_3 y = 1$, vagyis $y_1 = 9$ vagy $y_2 = 3$. A megfelelő x értékek például a második egyenletből $\log_3 x = 1$, illetve $\log_3 x = 2$ alapján $x_1 = 3, x_2 = 9$. A második esetben $\log_3 x = -3 - \log_3 y$. Ezt pl. ismét a második egyenletbe helyettesítve $(-3 - \log_3 y)(\log_3 y) = 2$, vagyis $(\log_3 y)^2 + 3\log_3 y + 2 = 0$. Ebből $\log_3 y = -1$, vagyis $y_3 = \frac{1}{3}$ vagy $\log_3 y = -2$, vagyis $y_4 = \frac{1}{9}$. Négy megoldás van: $x_1 = 3, y_1 = 9; x_2 = 9, y_2 = 3; x_3 = \frac{1}{3}, y_3 = \frac{1}{9}; x_4 = \frac{1}{9}, y_4 = \frac{1}{3}$.

Második megoldás. A két egyenlet megfelelő oldalainak a hányadosa

$\left(\frac{x}{y}\right)^{\log_3 x} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\log_3 y} = 3$. Ebből $\left(\frac{x}{y}\right)^{\log_3 \frac{x}{y}} = 3$, majd $\left(\log_3 \frac{x}{y}\right)^2 = 1$, vagyis $\log_3 \frac{x}{y} = \pm 1$. Ez akkor teljesül, ha $\frac{x}{y} = 3$ vagy $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$. Az első

esetben, vagyis ha $x = 3y$, akkor pl. az eredeti második egyenletbe helyettesítve $(3y)^{\log_3 y} \cdot y^{\log_3 3y} = 3^4$. Mind a két oldal 3-as alapú logaritmusát véve $2(\log_3 y)(\log_3 3y) = 4$, vagyis $(\log_3 y)^2 + \log_3 y - 2 = 0$. Ebből $\log_3 y = 1$, vagyis $y_1 = 3$ vagy $\log_3 y = -2$, vagyis $y_3 = \frac{1}{9}$.

Ezekből $x_1 = 9, x_3 = \frac{1}{3}$. Ha $x = \frac{y}{3}$, akkor hasonló módon a második egyenletből $(\log_3 y)^2 - \log_3 y - 2 = 0$. Ebből $\log_3 y = 2$, vagyis $y_2 = 9$, vagy $\log_3 y = -1$, vagyis $y_4 = \frac{1}{3}$, ekkor $x_2 = 3, x_4 = \frac{1}{9}$. Négy megoldáspár van: $x_1 = 9, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = 9; x_3 = \frac{1}{3}, y_3 = \frac{1}{9}; x_4 = \frac{1}{9}, y_4 = \frac{1}{3}$.

$x_1 = 9, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = 9; x_3 = \frac{1}{3}, y_3 = \frac{1}{9}; x_4 = \frac{1}{9}, y_4 = \frac{1}{3}$.

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy (1) az egyenletrendszernek a racionális számok halmazán négy megoldáspárja van; (2) ezeket, de az elemi megoldásokat is a kétféle megoldásban más-más másodfokú egyenletből más-más csoportosításban kaptuk meg; (3) az adott egyenletrendszer x -ben és y -ban szimmetrikusak, ezért ennek a megoldásokra is teljesítenie kell.

1167. $x=2; y=6.$

1168. Az első egyenletből $\lg x = \frac{5}{2} \lg y$, a másodikból $(\lg x)(\lg y) - \lg^2 y = 0$
 $= \lg x$. Ide $\lg x$ kifejezését behelyettesítve $\frac{5}{2} \lg^2 y - \lg^2 y = \frac{5}{2} \lg y$, vagyis
 $(\lg y)(3 \lg y - 5) = 0$. Ez akkor teljesül, ha vagy $\lg y = 0$, de ekkor
a második egyenletnek nincs értelme, vagy ha $\lg y = \frac{5}{3}$. Ekkor $y = 10^{\frac{5}{3}}$
és a $\lg x = \frac{25}{6}$ egyenletből $x = 10^{\frac{25}{6}}$. Egyetlen számpár a megoldás:
 $(10^{\frac{25}{6}}; 10^{\frac{5}{3}})$.

1169. A két egyenlet mind a két oldalának 10-es alapú logaritmusát véve
 $\lg x + \lg y = \lg 300$, $(\lg y)(\lg x) = \lg 9$. $\lg x$ és $\lg y$ a $z^2 - z \lg 300 + \lg 9 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek tekinthető. Mivel
 $z_{1,2} = \frac{\lg 300 \pm \sqrt{\lg^2 300 - 4 \lg 9}}{2} = \frac{2 + \lg 3 \pm \sqrt{(2 + \lg 3)^2 - 8 \lg 3}}{2}$
 $= \frac{2 + \lg 3 \pm \sqrt{(2 - \lg 3)^2}}{2} = \frac{2 + \lg 3 \pm (2 - \lg 3)}{2}$, ezért $z_1 = 2$, $z_2 = 1$.
Ebből következik, hogy $x_1 = 100$, $y_1 = 3$ vagy $x_2 = 3$, $y_2 = 100$. Mindkét
gyökpár kielégíti az adott egyenletrendszert.

1170. A második egyenletből $y = \frac{3}{2}x$. Az első egyenlet mind a két oldalát
 x alapú logaritmusát véve $y = x \log_x y$. y kifejezett értékét ide helyettesítve
 $\frac{3}{2}x = x \log_x \frac{3}{2}x = x \left(\log_x \frac{3}{2} + 1 \right)$. Ez akkor teljesül, ha vagy $x = 0$ és ekkor
 $y = 0$, de ez nem megoldás, mert 0^0 -t nem értelmezünk, vagy ha $\log_x \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.
Ebből $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$, vagyis $x = \frac{9}{4}$. A hozzá tartozó y érték: $y = \frac{27}{8}$.
A $(\frac{9}{4}; \frac{27}{8})$ számpár kielégíti az adott egyenletrendszert.

FEJEZET

egyenlettel vagy egyenletrendszerrel megoldható
röveges feladatok

171. Ha a tört nevezője x , akkor $\frac{x-5}{x} = \frac{x+2}{x+12}$. Ebből $x = 12$. A tört $\frac{7}{12}$.

172. Jelölje a szám tízeseit x , egységeit y , akkor $x + y = 12$. A feladat feltétele
szerint $1,75(10x + y) = 10y + x$. x helyébe $(12 - y)$ -t téve $17,5(12 - y) +$
 $+ 1,75y = 10y + 12 - y$. Ebből $y = 8$. A szám a 48.

173. 96 vagy 69.

174. Ha az első számot x jelöli, akkor a második szám $x - 138$. A feladat
feltétele szerint $x - 15 - (x - 138 + 15) = 3(x - 15 + x - 138 + 15)$. Ebből
 $x = 87$, $x - 138 = -51$. Az első szám 87, a második -51.

175. Az első szám a 119, a második szám a 19.

176. A nagyobbik szám az 1973, a kisebbik a 314.

177. Ha a két szomszédos egész szám x és $x + 1$, akkor $(x + 1)^2 - x^2 = 51$,
ebből $x = 25$. A két szám 25 és 26, vagy $x^2 - (x + 1)^2 = 51$, és ebből
 $x = -26$. A két szám lehet -26; -25 is.

178. 8.

179. Legyen az eredeti tört nevezője x . Akkor $4 \cdot \frac{3}{x} = \frac{3}{x-12}$. Ebből $x = 16$.

A keresett nevező 16.

180. Ha a gondolt szám x , akkor $\frac{3x-5}{4} + 2x = 18$. Ebből $x = 7$. A 7-re
gondoltunk.

181. A szám a 62.

182. Ha x és y jelöl egy-egy számot, akkor $xy + x + y = 34$, illetve
 $(x + 1)(y + 1) = 35$. Mivel x és y egészek, ezért $x + 1 = 5$, $y + 1 = 7$
vagy fordítva. Ebből $x = 4$, $y = 6$ vagy $x = 6$, $y = 4$. $x + 1 = 1$, $y + 1 = 35$

vagy fordítva nem lehetséges, mert $x=0$ vagy $y=0$ nem felel meg a feladat feltételének. A két szám 4 és 6.

1183. A szám a 36.

1184. A feladat feltételei szerint $x+y+z=10$, $xy+yz+zx=31$.
 $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 100$ egyenlőségből $x^2+y^2+z^2=38$. Ez azt jelenti, hogy a legnagyobb szám (legyen például z) legfeljebb 6 lehetne, de 6 nem lehet, mert akkor $x=y=1$ az összeg nem 10. Ha $z=5$, akkor $y=3$, $x=2$ megfelel. Ha $z=4$, akkor sem $y=4$, $x=2$, sem $y=3$, $x=3$ választás nem felel meg, mert a négy szám összeg nem 38. A „legnagyobb” z 4-nél kisebb nem lehet. A három szám tehát 2, 3, 5.

1185. Mivel a feladat feltételei a 0-t nem zárják ki, a két szám 0 és 0 is lehet. Ha a két szám x és y , akkor $x+y=xy = x^2-y^2$. Az első egyenletet $x = \frac{y}{y-1}$ és ezt a második egyenletbe helyettesítve $\frac{y^2}{y-1} = \frac{y^2}{(y-1)^2} - y^2$. Ebből $y^2 - y - 1 = 0$. Az egyenlet gyökei $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. A meg-

lelő x értékek $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Két (nem zérus) számpár felel meg a feladat feltételeinek: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1186. Ha a szám második, harmadik, negyedik jegye rendre x , y , z , akkor a feltétel szerint:
 $3(2 \cdot 1000 + 100x + 10y + z) = 1000x + 100y + 10z + 2 + 27$.
 Ebből rendezés után $5971 = 700x + 70y + 7z$, vagyis
 $853 = 100x + 10y + z$. A keresett szám $2000 + 853 = 2853$.

1187. 4637.

1188. 2534.

1189. Ha a szám páros jegyeit x , páratlan jegyeit y jelöli, akkor $2(x+y) = 100x + 10y + x + y = 200$. Ebből a szám: 1919.

1190. Ha a négyjegyű szám jegyei rendre x , y , z , v , akkor $10x+y+10z+v=95$, és $1000z+100v+10x+y=1000x+100y+10z+v+58$. Ebből $10z+v-10x+y=59$. Összevetve ezt az első egyenlettel $2(10z+v)=154$. Ebből $10z+v=77$, és így $10x+y=18$. A keresett szám 1877.

191. 0 és 70.

192. 0 és 48.

193. Ha a számot x jelöli, akkor $\frac{30+x}{50+x} = \frac{50+x}{80+x}$. Ebből $x=10$.

194. Ha a legfiatalabb testvér jelenleg x éves, akkor $x+11+5x+1=10x$. Ebből $x=3$ és így a három testvér 3, 11, 15 éves.

195. Ha x jelöli a menetrend szerinti érkezés óráit, akkor $3x-6=2x-1$. Ebből $x=5$. Tehát 5 órakor érkezik a vonat menetrend szerint.

196. Legyen az egyik zsebemben x forint, akkor a másikban $200-x$ forint van. A pénz átrakása után $x - \frac{1}{4}x - 20 = 200 - x + \frac{1}{4}x + 20$ Ft van az egyes zsebekben. ebből $x=160$, így $200-x=40$. Az egyik zsebemben 160 Ft, a másikban 40 Ft van.

197. A megoldandó egyenlet $4x-1000=1000-x$. Így $x=400$ forintom van.

198. Ha a játékos x forinttal ült le játszani, akkor $\frac{5}{6} \left[\frac{4}{5} \left(\frac{x}{2} + 50 \right) + 40 \right] - 50 = 350$. Ebből $x=1000$.

199. Ha a négyzet oldala x egység, akkor a feltétel szerint $(x+9)(x-6) = x^2$. Ebből a négyzet oldala 18 egység.

1200. 8 m.

1201. 40 m, 30 m, 32 m.

1202. A téglalap oldalai 5 cm és 8 cm hosszúak.

1203. Ha x jelöli a kelme hosszát, akkor $\frac{40 \cdot \frac{7}{8}x}{25} + 64 = \frac{45x}{25}$. Ebből $x=160$ cm.

1204. A kendő szélessége 28 cm, hosszúsága 84 cm.

1205. A megoldandó egyenlet $x+x+30^\circ=180^\circ$. Ebből $x=75^\circ$.

1206. A háromszög szögei 38° , 86° , 56° .

1207. Ha a négy számot rendre x, y, z, v jelöli, akkor $x+y+z+v = 72$
 $x+5 = y-5 = 5z = \frac{v}{5}$. x -szel kifejezve a többi ismeretle
 $y = x+10, z = \frac{x+5}{5}, v = 5(x+5)$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve
 $x+x+10 + \frac{x+5}{5} + 5(x+5) = 72$. Ebből $x=5$, majd rendre $y=$
 $z=2, v=50$. A keresett négy szám az 5; 15; 2; 50.
1208. A három szám a 8; 2; 15.
1209. A három szám a 4; 8; 3.
1210. Ha x számú alma volt, akkor a megoldandó egyenlet
 $2\{2[2(1+2)+2]+2\} = x$. Ebből $36=x$. A 36 almából Péter 20-at, Pi
10-et, míg Mari 5-öt kapott.
1211. A 7–9. oldal megszámozásához 3, a 10–99. oldal megszámozásához
 $2 \cdot 90 = 180$ számjegy szükséges. A 100. oldaltól minden oldal megszá
mozásához három jegy szükséges. Így a feladat feltétele szerint (ah
 x jelöli a 99-nél nagyobb sorszámú oldalak számát): $3+2 \cdot 90+3x$
 $= 819$. Ebből $x=212$. Mivel $212+99 = 311$, ezért 311 oldalas a könyv.
1212. A szótár 1996 oldalas.
1213. Ha az egyik gyereknek x , a másiknak y forintja volt, akkor a felad
feltételei szerint $\frac{10}{9}x = \frac{6}{5}y$ és $x+y-22 = \frac{10}{9}x$. Az egyenletrendszer
megoldása $x=27, y=25$. A játék $\frac{6}{5}y = 30$ forintba került, az egy
gyereknek 27 Ft-ja, a másiknak 25 Ft-ja volt a vásárlás előtt.
1214. A téglalap területe a négyzet területének a $\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$ -szöröse. E
 $1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25} = 0,04$ résszel, vagyis 4%-kal kisebb a négyzet területének
1215. 37 db 5 és 10 forintosra van szükség.
1216. 1 perc alatt az első munkás $\frac{2}{3}$ terméket, a második munkás $\frac{1}{2}$, a harmad

dik munkás $\frac{1}{3}$ terméket készít el. Így 1 perc alatt együtt $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$
 $= \frac{3}{2}$ terméket állítanak elő. Az első munkás teljesítménye $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{4}{9}$, a
másodiké $\frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$, a harmadiké $\frac{1}{3} : \frac{3}{2} = \frac{2}{9}$. Mivel a 3150 forintot a
teljesítmények arányában osztották el, ezért az első munkás $\frac{4}{9} \cdot 3150 =$
 $= 1400$, a második munkás $\frac{1}{3} \cdot 3150 = 1050$, a harmadik munkás
 $\frac{2}{9} \cdot 3150 = 700$ forintot kapott.

1217. A hallgató a 2-esen kívül két 3-ast és egy-egy 4-est és 5-öst kapott.
1218. Ha x a fiúk, y a lányok száma, akkor $x-1 = y$ és $2(y-1) = x$. Ebből
 $y=3, x=4$.
1219. Az egyik raktárban 3820 kg, a másikban 955 kg liszt van.
1220. Ha x napig tartott a kirándulás, akkor $(x-1)15+10 = 10(x-1)+35$.
Ebből $x=6$. 6 napig tartott a kirándulás.
1221. A csoportban 24 gyermek, az óvónőnek 80 cukorkája volt.
1222. Ha x jelöli a télen üdülők számát, akkor $x+x+72 = 214$. Ebből
 $x=71$. $\frac{71}{214} = 0,3318, \frac{143}{214} = 0,6682$. A dolgozók 33%-a télen, 67%-a
nyáron üdült.
1223. Ha a szij sebessége állandó, akkor a szóban forgó tárcsák fordulatszám
ának és átmérőjének a szorzata is állandó. Válasszuk a tárcsa átmérő
jét 200 mm-nek.
1224. 150 fenyőfa és 50 tölgyfa van a farakásban.
1225. Ha az első rekeszben x kg alma van, akkor a másodikban $90-x$ kg
alma és $0,25x = 0,2(90-x)$. Ebből $x=40, y=50$. Az első rekeszben
40 kg, a másodikban 50 kg alma van.
1226. A kereskedő 1 kg szőlőt 16 forintért vett. A feladat feltétele szerint
 $1,15 \cdot 16 \cdot x + 0,95 \cdot 16 \cdot (50-x) = 856$, ha x jelöli a haszonnal eladott
szőlő mennyiségét. Az egyenletből $x=30$. 30 kg szőlőt nyereséggel,
20 kg szőlőt veszteséggel adott el a kereskedő.

1227. 70 Ft.
1228. Ugyanakkora távolságon a két kerék átmérőjének és a fordulatszámnak az aránya fordított. Ha x jelöli a hátsó kerék fordulatszámát, akkor $\frac{2x-50}{x} = \frac{3}{2}$. Ebből $x=100$. A keresett távolság $75\pi = 236$ méter.
1229. A nehezebb téglából 676 darabot, a könnyebből 370 darabot tettek gépkocsira.
1230. Az első utcában 26, a másodikban 22 háztömb van. Ha y jelöli az első utcában levő egy-egy tömb lakóinak a számát, akkor $26(y-50) = 22 \cdot 325$. Innen $y = 325$. Így összesen $21[26 \cdot 275 + 22 \cdot 325] = 300\,300$ l vizet kell a vezetékekbe szivattyúzni.
1231. Az első fiú 5, a második 6, az utolsó, az x -edik fiú, $x+4$ almát osztott ki, és mivel tőle mindegyik lány kapott almát, x fiú és $x+4$ lány volt az osztályban. Mivel $x+x+4 = 20$, ebből $x=8$, $x+4 = 12$. 12 lány volt az osztályban.
1232. Jelölje az út hosszát s . Az első turista (a visszafordulás miatt) $\frac{7}{5}s$ utat tesz meg és 140 percig (10 percet időzik) van úton, a második turista s utat tesz meg és 150 percig van úton. Ezért a feladat szerint $\frac{140}{\frac{7s}{5}} + 5 = \frac{150}{s}$. Ebből A és B távolsága: $s = 10$ km.
1233. Jelölje x azt az utat, amit a B -ből induló jármű az A -ból indulóval való találkozásig megtesz, t azt az időt, ami a C -ből induló járműnek az A -ból indulóval való találkozásig eltelik. Készítsünk táblázatot a egyes járművek adatairól! (Nevezzük az A -ból induló járművet A -nak stb.)

	idő	út	sebesség
A és B találkozásáig			
az A -ból induló	2	$AB+x$	$\frac{AB+x}{2}$
a B -ből induló	2	x	$\frac{x}{2}$

B és C találkozásáig			
a B -ből induló	3	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{2}$
a C -ből induló	3	$\frac{3x}{2} - AB$	$\frac{\frac{3x}{2} - AB}{3}$
A és C találkozásáig			
az A -ból induló	t	$\frac{t}{2}(AB+x)$	$\frac{AB+x}{2}$
a C -ből induló	t	$\frac{t}{3}\left(\frac{3x}{2} - AB\right)$	$\frac{\frac{3x}{2} - AB}{3}$

Mivel a C jármű $AC = 2 \cdot AB$ úttal kevesebbet tett meg az A -val való találkozásig, ezért $\frac{t}{2}(AB+x) = 2 \cdot AB + \frac{t}{3}\left(\frac{3x}{2} - AB\right)$. Ebből $3t \cdot AB + 3tx = 12 \cdot AB + 3tx - 2t \cdot AB$, vagyis $5t \cdot AB = 12 \cdot AB$, $t = \frac{12}{5}$. Az A -ból induló jármű $\frac{12}{5}$ óra (azaz 2 óra 24 perc) múlva éri utol a C -ből indulót.

1234.

3 óra alatt.

1235.

Ha h , c , f jelöli rendre a hajó, a csónak és a folyó vízének a sebességét $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, akkor a megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{5}{h-f} = \frac{3}{c+f}; \quad \frac{1}{c+f} = \frac{1}{h-f} + \frac{1}{h+f}; \quad \frac{1}{2c+f} + \frac{7}{6} = \frac{1}{h-f} + \frac{1}{h+f}.$$

Ebből $h = \frac{25 \text{ km}}{38 \text{ h}}$; $c = \frac{7 \text{ km}}{38 \text{ h}}$; $f = \frac{5 \text{ km}}{38 \text{ h}}$. A hajó 3 óra 10 perc alatt ér vissza A -ba.

1236.

Ha v jelöli a gyalogos sebességét, akkor $10v + 135 = 10 \cdot 10v$. A gyalogos sebessége $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a vonaté $15 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1237.

A gépkocsinak $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel kell haladnia.

1238.

Ha a busz átlagsebességét v , a menetidejét t jelöli, akkor a megoldandó egyenletrendszer $(v+8)(t-0,8) = (v-2)(t+0,25) = vt$. Ebből $t = 5$ óra, $v = 42 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ és az út hossza 210 km.

1239. Ha t óra múlva éri utol a személyszállító gép a teherszállítót, akkor $(t+2) \cdot 350 = 600t$. Ebből $t = \frac{14}{5}$, vagyis 2 óra 48 perc múlva éri utol a személyszállító gép a teherszállító gépet.
1240. Az út hossza 225 km, a gépkocsi átlagsebessége 75 km/h.
1241. Siófok 100 km-re van Tatabányától. Az első diák átlagsebessége 25 km/h, a másodiké 20 km/h volt.
1242. Ha a tehergépkocsi átlagsebességét v , a találkozásig megtett utat s jelöljük, akkor $\frac{s+126}{v+42} = 5$; $\frac{2}{v} = 8$. Ebből $v=28$, $s=224$. Az AB út 574 km hosszú, a személygépkocsi átlagsebessége 70 km/h, a tehergépkocsié 28 km/h.
1243. A $11t - 100 = 9t$ egyenletből $t=50$, vagyis 50 másodperc múlva éri utol Béla Andrást.
1244. Ha v_1 és v_2 jelöli a testek sebességét, t a találkozásig eltelt időt, akkor a teljes kör hossza egyrészt $v_1t + v_2t = v_2(t+9)$, másrészt $v_1(t+4) = v_2(t+9)$. Ebből $\frac{9}{t} = \frac{t+9}{t+4}$, $t^2 = 36$, $t = \pm 6$. Csak $t=6$ jöhet szóba. A kört az egyik test $6+4 = 10$, a másik $6+9 = 15$ másodperc alatt futja végig, vagyis az egyik test 6-szor, a másik 4-szer futja le a kört 1 perc alatt.
1245. A két brigád egy napi termelése 107 t. Ha az első brigád egy napi teljesítménye x tonna, akkor a másodiké $107-x$ tonna és a megoldandó egyenlet $0,4x + \frac{107-x}{3} = 39$. Ebből $x=50$. Az első brigád napi 50 t, a második 57 t szenet fejtett.
1246. A munkacsoport az egységnyi területűnek tekintett első parcellának $\frac{1}{10}$, a másodiknak $\frac{1}{15}$ hektárnyi részét műveli meg egy nap alatt. Ennek átlaga $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{12}$, ezért a munkacsoport átlagos napi teljesítménye 12 hektár.
1247. 25 m³ homokot kellett a markolónak óránként kiraknia.
1248. Ha az egyik műhelyben x , akkor a másikban $180-x$ alkatrész készül a terv szerint. A feltétel szerint $1,12x + 1,1(180-x) = 200$. Ebből $x=100$, $180-x=80$ és az egyik műhely 112, a másik 88 alkatrészt gyártott.
1249. 105 alkatrész.
1250. Ha az egyik csapat x , a másik y nap alatt végzi el a munkát, akkor $30 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1$; $6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{40}{x} = 1$. Ebből $x=50$, $y=75$ nap.
1251. Ha az egyes munkások munkabére rendre x , y , z , akkor a kereseti viszonyok az $x=0,9y$; $0,9y+400=z$; $y=0,75z$ egyenletrendszerrel írhatók le. Az utolsó két egyenletből $y=923,08$; $z=1230,77$. Egész forintra kerekítve: az első munkás 831 Ft-ot, a második 923 Ft-ot, a harmadik 1231 Ft-ot keresett.
1252. Még 2 munkást kell alkalmazni. Az a munkás, aki 6 napot dolgozott, 720 Ft-ot, aki 3 napot dolgozott, 360 Ft-ot kapott.
1253. Ha x jelöli a munka elvégzésének tervezett időtartamát, y a pótlólag felveendő munkások számát, akkor $(x-4)11 = (x-5)(11+y)$, ahol x, y pozitív egész számok. Ebből $x=6$, $y=11$ vagy $x=16$, $y=1$. Ha a munkát 6 nap alatt akarják befejezni, akkor 11 új munkást kell felvenni, ha csak 16 nap alatt, akkor elég 1 új munkást felvenni.
1254. Ha a segítő egyedül x óra alatt javította volna meg a gépet, akkor a feltételek szerint $\left(13 \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{x} \right) = 1$, ebből $x=30$, vagyis a segítő egyedül 30 óra alatt javította volna meg a gépet.
1255. A második gépkezelő 60 m³-ért 150 Ft-ot, a harmadik 70 m³-ért 175 Ft-ot kapott.
1256. Ha a feladatot t óra alatt végzi el az A , B és C gép együtt, akkor a feltételek alapján $\frac{x}{12} + \frac{x-2}{16} + \frac{x-1,5}{18} = 1$. Ebből $x=6$, vagyis 6 óra alatt végeznek a munkával.
1257. A 8 óra alatt elkészíthető beton maximális mennyisége $8 \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} \right) = \frac{98}{3}$. 98 m³ beton tehát nem készíthető el.

Megjegyzés. Ha 24 órás munkanapot engedett volna meg a feladat, akkor (pontosan) elkészíthető a kívánt mennyiségű beton.

1258. Eredetileg 20 szivattyú működött.
1259. Ha x, y, z jelöli rendre Péter győztes, vesztes, döntetlen játszmáit, akkor $x + y + z = 10$ és $20x - 30y = 50$. A két egyenletből $y = \frac{3x - z}{7}$. Mivel y egész szám, ezért (az $x, z \leq 10$ feltételt is figyelembe véve) vagy $x = 7, z = 0$, és akkor $y = 3$, vagy $x = 4, z = 5$, és ekkor $y = 1$. Péter kétféle módon is nyerhetett 50 forintot 10 játszma után, vagy úgy, hogy hétszer nyert és háromszor kikapott, vagy úgy, hogy négyszer nyert, egyszer kikapott és ötször döntetlenül mérkőzött.
1260. Ha x jelöli a kisebb tartály térfogatát, akkor a vásárolt olaj térfogata a feltétel szerint egyrészt $2x - 50$, másrészt $x + \frac{2x - 50}{3}$. A $2x - 50 = x + \frac{2x - 50}{3}$ egyenletből $x = 100, 2x = 200, 2x - 50 = 150$. Ez azt jelenti, hogy 150 liter olajat vásároltak, az egyik tartály 100, a másik 200 literes.
1261. 1800 készülék.
1262. Ha x jelöli a készülék eredeti anyagköltségét, akkor eredeti energiaköltsége $3,5x$. A feltételek szerint $0,82 \cdot 3,5x + 0,88x + 1500 = 3,5x + x$. Ebből $x = 2000$. Így a készülék eredeti energiaköltsége 7000 Ft, anyagköltsége 2000 Ft volt, amelyek az újítás következtében 5740 Ft-ra, illetve 1760 Ft-ra csökkentek.
1263. Az utolsó hónapban a negyedévi terv 33,6%-át kell teljesíteni.
1264. Ha x liter édesvizet kell felhasználnunk, akkor $0,05 \cdot 40 = 0,02(40 + x)$. Ebből $x = 60$, vagyis 60 liter édesvizet kell a tengervízhez keverni.
1265. $15,2 \cdot 34,5 \cdot 0,168 \cdot 0,88 = 77,527$ tonna cukrot gyártottak.
1266. 110,5 kg tejből készíthető 5 kg vaj.
1267. Ha a gazdaságnak x traktora volt, akkor a nagyobb földön $\frac{x}{2} + \frac{x}{4}$ műszakkal, a feleakkora területű földön $\frac{x}{4} + 1$ műszakkal elvégezték a

szántást. A teljesítményekre az $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 2 \left(\frac{x}{4} + 1 \right)$ feltétel igaz. Ebből $x = 8$, vagyis 8 traktora volt a gazdaságnak.

1268. $62,5^\circ\text{C}$ hőmérsékletű volt a víz.
1269. Ha az 50%-os töménységű sóoldatból x litert veszünk, akkor $x \cdot 0,5 + (45 - x)0,7 = 45 \cdot 0,62$. Ebből $x = 18$. 18 liter 50%-os és 27 liter 70%-os töménységű sóoldatot kell összeönteni.
1270. 15 liter 6%-os és 9 liter 30%-os töménységű sósavat kell összeönteni.
1271. 115 liter 2,5%-os és 35 liter 5,5%-os töménységű sóoldatot kell összeönteni.
1272. Legyen az ötvözet x tömegű $y\%$ -os ezüst. Az első ötvözéskor az $yx + 1 \cdot 3 = 0,9(3 + x)$, a második ötvözéskor az $yx + 0,9 \cdot 2 = 0,84(2 + x)$ egyenlet írja le a színezüst változását. A két egyenlet különbségéből $1,2 = 1,02 + 0,06x$. Ebből $x = 3$. Így az eredeti ötvözet tömege 3 kg, amelyből $3y = 2,4, y = 0,8, yx = 0,8 \cdot 3 = 2,4$ kg az ezüst.
1273. Ha az első csapon át összesen x liter 54°C -os, a második csapon át $180 - x$ liter 14°C -os víz folyt a kádba, akkor a végén 180 liter 37°C -os víz lett a kádban, vagyis $54x + 14(180 - x) = 37 \cdot 180$. Ebből $x = 103,5$, továbbá $180 - x = 76,5$. A 103,5 liter víz az első csapon át $\frac{3 \cdot 103,5}{20} = 15,525$ perc alatt, a 76,5 liter víz a második csapon át $\frac{2 \cdot 76,5}{15} = 10,2$ perc alatt folyt be. Ezért az 54°C -os víz csapját 15 perc 34,5 másodpercig, a 14°C -os víz csapját pedig 10 perc 12 másodpercig kell nyitva tartani.
1274. Tegyük fel, hogy az aránypárok első helyén szereplő fémből x , a másodikból $10 - x$ kg van az ötvözetben. Ekkor a feladat feltételei szerint $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}(10 - x) = \frac{p}{p + 1} \cdot 10$. Ebből $x = \frac{60 - 90p}{p + 1}$ és $10 - x = \frac{100p - 50}{p + 1}$.
- A feladatnak akkor van értelme, ha $\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{2}{3}$.

1275. Ha a három kohó x napig dolgozik együtt, akkor a feltételek szerint $x \left(\frac{36\,000}{60} + \frac{36\,000}{45} + \frac{36\,000}{90} \right) = 36\,000$. Ebből $x=20$. A 3 kohó együtt 20 nap alatt olvasztja ki az ércet. Az első kohó 12 000 t, a második 8000 t, a harmadik pedig 16 000 t ércet olvaszt ki ennyi idő alatt.

1276. Ha a 23%-os töménységű alkohol mennyisége x kg, akkor a feltétel szerint $0,23x + 0,9 \cdot 10 = 0,4(10 + x)$. Ebből $x=29,41$ kg. Ezért 39,4 kg a keverék tömege.

1277. A szerelvénnyel „áthaladása” a hídon az első kocsinak a hídra érkezésétől az utolsó kocsi távozásáig tart, vagyis úgy tekintendő, mintha egy $2 \cdot 500 = 1000$ m hosszú szerelvénnyel pl. eleje érkezne és távozna a híd végén. Így a szerelvénnyel sebessége $\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ perc}} = 60 \text{ km/óra}$.

1278. Készítsünk táblázatot az életkorokról a feladat közlései alapján:

	5 évvel ezelőtt	most	5 év múlva	
én	$x-5$	x	$x+5$	éves.
barátom	$y-5$	y	$y+5$	

A feltétel szerint $y+5 = 3(x-5)+5$ és $x+5 = \frac{y+5}{2}$. Ebből $x=20$, $y=45$. Barátom most 45 éves.

Megjegyzés: A feladat feltételei beépíthetők a táblázat második sorába is. Ekkor a második sor utolsó adata: $3(x-5)+5$ és az egyenlet $\frac{3(x-5)+5}{2} = x+5$. A legutolsó egyenlet természetesen táblázat nélkül is felírható például így: Én öt év múlva $x+5$ éves leszek. Barátom ekkor az $x-5$ életkoromhoz képest $3(x-5)+5$ éves lesz. Ez pedig $x+5$ éves korom fele.

1279. Készítsünk táblázatot a lehetséges téglalapokról:

Négyzetek száma	Téglalapok mérete	Téglalapok területösszege
10	1 · 10 és 2 · 5	20
9	1 · 9 és 3 · 3	18
8	1 · 8 és 2 · 4	16
7	1 · 7	7
6	1 · 6 és 2 · 3	12
5	1 · 5	5
4	1 · 4 és 2 · 2	8
3	1 · 3	3
2	1 · 2	2
1	1 · 1	1

összesen: 92

15 különböző méretű téglalap alkotható, amelyek összterülete 92 cm^2 .

1280. A megoldandó egyenlet $2^x = \frac{960}{15} = 64 = 2^6$. Ebből $x=6$. $x+1=7$ fogaskereket illesztettek össze. (Érdemes ábrát is készíteni.)

1281. a) 67,5 óra múlva találkozik a két test ötödször az AB út felénél.

b) Az első test az AB felezőpontjába $t_m = \frac{75+150m}{75} = 1+2m$, $m \in \mathbb{N}$, a második test $t_n = \frac{75+150n}{50} = \frac{3}{2} + 3n$, $n \in \mathbb{N}$ óránként érkezik. Mivel nincs olyan természetes m és n , amelyre $t_m = t_n$, ezért a mozgó testek az AB út felénél nem találkozhatnak.

1282. Ha a kerékpáros odafelé rendre x, y, z km, akkor visszafelé rendre x, z, y km utat tett meg vízszintes úton, lejtőn, illetve emelkedőn. Az ehhez szükséges idő $3 = \frac{2x}{16} + \frac{y+z}{24} + \frac{z+y}{12}$. Ebből $2(x+y+z) = 48$. Az út hossza $AB = x+y+z = 24$ km.

1283. A megoldandó egyenletrendszer: $x+y=16$, $x+8=y$. Ebből $x=4$, $y=12$. A testvérek most 4, illetve 12 évesek.

1284. Ha az A kosárban a , a B kosárban b alma van, akkor az átrakások a következő egyenletekkel írhatók le: $a-n=b+n$ és $a+n=2(b-n)$. A két egyenlet különbségéből $b=5n$, és így $a=7n$. Mivel a szöveg nem

mondta meg, hogy melyik kosárban lesz kétszer annyi alma, ezért a második egyenlet $2(a+n) = b-n$ is lehetne. Akkor a két egyenlet különbségéből $a = -5n$ és ez lehetetlen. Ezért az A kosárban $7n$, a B kosárban $5n$ alma van.

1285. Ha x számú második, y számú harmadik díjat adunk ki, akkor $1 \cdot 500 + x \cdot 120 + y \cdot 80 = 1500$. Ebből $x = \frac{25-2y}{3}$. Mivel x és y pozitív egész, ezért $x = 1; 3; 5; 7$. A kiadható díjak száma:

Második díj	1	3	5	7
Harmadik díj	11	8	5	2

1286. Ketten 3 teli, 1 félig teli és 3 üres hordót kapnak fejenként, míg a harmadik 1 teli, 5 félig teli és 1 üres hordót kap. Más megoldás is lehet.

1287. Összesen 8 cipőjük volt, így az osztozkodásnál egy vándornak $\frac{8}{3}$ cipő jutott. Ezért a $\frac{8}{3}$ cipőért adott a harmadik vándor 8 forintot, vagyis $\frac{1}{3}$ cipőért 1 forintot. Az egyik vándor $5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$, a másik $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ cipőt adott át, ezért akinek 5 cipője volt, az 7 Ft-ot kap, a másik 1 Ft-ot.

1288. Ha az út hossza x km, akkor a feltétel szerint $\frac{x}{45} + \frac{1}{3} = \frac{x}{30} - 1,6$. Ebből $x = 174$. Az út hossza 174 km, az átlagsebesség $v = \frac{174}{189} \cdot 45 = 41,43$
 $v = 41,43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1289. A víz sebessége $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. A feladat eredeti szövege irreális eredményhez vezet (a víz sebessége $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$!).
Helyesen: Egy motorcsónak a Dunán a vízfolyás irányával ellentétesen halad. A 604. km-t jelző rúdnál labdát ejtenek a folyóba, 60 perc múlva visszafordulnak, és a labdát az 598. km-t jelző rúdnál érik utól. Mekkora a víz sebessége? (Ekkor a sebesség $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.)

1290. Ha a kerékpáros x km utat tett meg az első találkozásig, akkor a busz $(144-x)$ km-t. A kerékpáros $2 \frac{2}{3}$ óráig, a busz $3 \frac{1}{3}$ óráig volt úton, így sebességük $v_k = \frac{3x}{8} \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_b = \frac{3(144-x)}{10} \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ha a második találkozásig a kerékpáros y km-t, akkor a busz $(144+y)$ km-t tett meg és a kerékpáros is $5 \frac{1}{3}$, a busz is $5 \frac{1}{3}$ órát volt úton (a kerékpáros egy órával később indult, a busz összesen egy órát várakozott!), így sebességük $v_k = \frac{3y}{16}$, $v_b = \frac{3(144+y)}{16}$. A $\frac{3x}{8} = \frac{3y}{16}$ egyenletből $y = 2x$, a $\frac{3(144-x)}{10} = \frac{3(144+2x)}{16}$ egyenletből $x = 24$. Ezt felhasználva $v_b = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_k = 9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, vagyis az autóbusz átlagsebessége $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a kerékpárosé $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1291. Ha x jelöli az AB távolságot, akkor $\frac{7}{8}x + \frac{1}{8}x = \frac{1}{8}x + \frac{7}{8}x + \frac{1}{4}$. Ebből $x = 8$.
 a) A és B távolsága 8 km.
 b) A -ból B -be 7 km az emelkedő, 1 km a lejtő.
 c) 2,5 óra alatt ért A -ból B -be a turista.

1292. A két vonat hosszának összege 504 m.
 a) Ha a két vonat egymással szemben halad, akkor ez $t = \frac{0,504}{72+54}$ óra = 0,004 óra = 14,4 másodpercig tart.
 b) Ha a két vonat párhuzamosan halad, akkor ez $t = \frac{0,504}{72-54}$ óra = 0,028 óra = 100,8 másodpercig tart.

1293. Ha a két futó szemben fut egymással, akkor sebességük: $v_1 = \frac{x}{0,5}$,

illetve $v_2 = \frac{400-x}{0,5} \frac{\text{m}}{\text{perc}}$. Ha azonos irányban futnak, akkor $v_1 = \frac{y}{13}$,
 $v_2 = \frac{400+y}{13} \frac{\text{m}}{\text{perc}}$. Az első két egyenletből $y = 26x$, a
 $\frac{400-x}{0,5} = \frac{400+26x}{13}$ egyenletből $x = \frac{2500}{13}$, így $y = 5000$ méter. A két
 futó sebessége $\frac{5000}{13} = 384,6 \frac{\text{m}}{\text{perc}}$, illetve $\frac{5400}{13} = 415,4 \frac{\text{m}}{\text{perc}}$.

1294. Ha egy ceruza x forintba, egy füzet y forintba kerül, akkor a feltételek alapján a $11x = 7y$, $7x + 7,2 = 11y$ egyenletrendszer írható fel. Ennek megoldása $x = 0,7$, $y = 1,1$. Ezért 5 ceruza és 9 füzet 13,40 Ft-ba kerülnek.

1295. Ha egy könyv ára x , egy füzet ára y forint, akkor $x + y = 22$ és $x = 3y + 2$. Ebből $x = 5$, $y = 17$. Ha k db könyvet és f db füzetet óhajtanak venni 270 forintért, akkor $17k + 5f = 270$. Ebből $f = 54 - \frac{17}{5}k$,

ahol f és k is természetes szám. Ez csak úgy lehetséges, ha k a 0; 5; 10; 15 számok egyike és ekkor f rendre 54; 37; 20; 3. Ezért 270 Ft-ért vagy 15 könyvet és 3 füzetet, vagy 10 könyvet és 20 füzetet, vagy 5 könyvet és 37 füzetet, vagy 54 füzetet vehetünk.

1296. 2 füzetet és 3 könyvet vásároltak.

1297. Ha a második szám x , akkor az első $x + 4$, a harmadik pedig $2 \cdot 30 - (x + 4) = 56 - x$. A három szám számtani közepe $\frac{x + x + 4 + 56 - x}{3} = 28$. Ebből $x = 24$, $x + 4 = 28$, $56 - x = 32$. A három szám sorrendben a 28, a 24 és a 32.

1298. Ha a könyv x oldalas, akkor $x - 220 = 3(x - 330)$. Ebből $x = 385$. A könyv 385 oldalas. (A gyakorlatban a könyvek csak páros oldal számúak lehetnek.)

1299. Ha az üzemnek x kocsija van és egy kocsi y ládát tud elszállítani, akkor a feladat feltételeit a $(2x - 7)(y + 11) = xy$ egyenlet írja le, amelyben x és y természetes számok és $x \neq 0$, $y \neq 0$. Átalakításokkal $(x - 7)(y + 22) = -77$. -77 osztóit (± 1 ; ± 7 ; ± 11 ; ± 77) végigtekintve csak az $x - 7 = -1$ és $y + 22 = 77$ jöhet szóba, mert minden más esetben vagy x vagy y negatív vagy 0. Így $x = 6$, $y = 55$, vagyis az üzemnek 6 kocsija van és 330 ládát kell elszállítania.

1300. Ha x jelöli a tanulók számát, y az egy főre jutó összeget, akkor $(x + 4)(y - 2) = (x - 3)(y + 2)$ és $xy = (x + 4)(y - 2)$. A két egyenletből $x = 24$, $y = 14$, vagyis 24 tanuló között kell 336 Ft-ot felosztani.

1301. Ha az első osztályú szőlő kilója x , a másodosztályú szőlőé y forint, akkor a feltételeket a $25x + 45y = 705$; $45x + 25y = 765$ egyenletrendszer írja le. Ebből $x = 12$, $y = 9$, vagyis az első osztályú szőlő kilója 12 Ft, a másodosztályúé 9 Ft.

1302. Ha a raktárban x m piros és y m kék kelme van, akkor a feladat összefüggéseit a $60x + 50y = 16\,000$; $60 \cdot 0,25x + 50 \cdot 0,2y = 3500$ egyenletrendszer írja le. Az egyenletrendszer megoldása $x = 100$, $y = 200$. Ezt felhasználva $(1 - 0,25)100 = 75$ méter piros és $(1 - 0,20)200 = 160$ méter kék kelme maradt a raktárban.

1303. Ha x jelöli az első részt, akkor a második feltétel szerint $440 - x = x$, ebből $x = 220$ Ft. A második rész ekkor $\frac{0,4}{0,5}x = 176$ Ft, a harmadik rész $440 - (220 + 176) = 44$ Ft.

1304. Ha x jelöli az egyik betét, y a másik betét összegét, akkor a feltételek a $0,02x + 0,03y = 66$; $0,03x + 0,02y = 59$ egyenletrendszerrel írhatók le. Ebből $x = 900$, $y = 1600$. Így az egyik betét 1600 Ft, a másik 900 Ft.

1305. Ha az egyik gép x óra alatt, a másik y óra alatt permetezi meg a szőlőt egyedül, akkor a feladat feltételei szerint $12\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$,
 $8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{7}{x} = 1$. Ebből $\frac{1}{x} = \frac{1}{21}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{28}$. Az egyik gép 28 óra, a másik 21 óra alatt végzett volna egyedül a permetezéssel.

1306. A munka elvégzéséhez összesen $30 \cdot 8 \cdot 9 = 2160$ munkaóra szükséges. Ha 9 nap elteltével x munkás csatlakozott a 9 régi munkáshoz és elvégezték a munkát, akkor $8 \cdot 9 \cdot 9 + 9(30 - 9 - 7)(9 + x) = 2160$. Ebből $x = 3$, vagyis 3 új munkás csatlakozott a régiékhöz.

1307. A megoldandó egyenlet: $(m - x)p + xq = mr$ alakú. Ebből $x = \frac{r - p}{q - p}m$.
 $\frac{q - r}{q - p}m$ kg $p\%$ -os és $\frac{r - p}{q - p}m$ kg $q\%$ -os sóoldatot kell összekeverni. A feladat adataival: 72 kg 10%-os és 48 kg 20%-os oldatot kell összekeverni.

1308. Ha a sóoldat eredeti töménysége $x\%$, akkor $300x + 400 \cdot 0,05 = 760 \cdot \frac{x}{2}$.
Ebből $x = 0,25$. Az oldat eredeti töménysége 25% -os.
1309. Ha x liter vizet adunk az 1 liter $a\%$ -os alkoholhoz, akkor a megoldandó egyenlet $\frac{1+x}{2}b + \frac{1+x}{2}c = a$. Ebből $x = \frac{2a}{b+c} - 1$, vagyis $\frac{2a}{b+c} - 1$ liter vízre van szükség.
1310. Ha az egyes oldatokból rendre x, y, z kg szükséges, akkor a feltételeket az $55 \cdot 0,45 = x \cdot 0,35 + y \cdot 0,8 + z \cdot 0,4$; $55 \cdot 0,03 = y \cdot 0,1 + z \cdot 0,05$; $55 = x + y + z$ egyenletrendszer írja le. Ebből $x = 33, y = 11, z = 11$. Az első oldatból 33 kg, a második és harmadik oldatból $11-11$ kg szükséges.
1311. Ha a 7% -os oldatból x , a 18% -os oldatból y litert keverünk össze, akkor a feltétel szerint $0,07x + 0,18y = (x + y)0,13$. Ebből $6x = 5y$. A 7% -os és a 18% -os cukoroldat szükséges aránya $5 : 6$.
1312. Ha az első, második, harmadik oldatból rendre x, y, z litert keverünk össze, akkor a keverék NaCl- és KCl-tartalmára $x \cdot 0,04 + y \cdot 0,13 + z \cdot 0,08 = (x + y + z) \cdot 0,1$, $x \cdot 0,17 + y \cdot 0,06 + z \cdot 0,03 = (x + y + z) \cdot 0,05$ áll fenn. Ebből $x : z = 2 : 21$; $y : z = 18 : 21$; $x : y = 1 : 9$. A három oldatot sorrendben a következő arányban kell keverni: $2 : 18 : 21$.
1313. Jelölje a $20 \frac{1}{\text{perc}}$ hozamú csapok számát x . Akkor a feltétel szerint $10x \cdot 20 + 10(9 - x)24,4 = 1976$. Ebből $x = 5$. A $20 \frac{1}{\text{perc}}$ hozamú csapból 5 db van, a másiktól 4 .
1314. Ha a csapok és a lefolyó x óráig vannak nyitva, akkor $\frac{x}{2} + x - \frac{x}{4} = 1$.
Ebből $x = \frac{4}{5}$. A kád 48 perc alatt telik meg.
1315. Ha a kemencék x óráig dolgoznak együtt, akkor a feltétel szerint $x \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4,5} \right) = 1$. Ebből $x = 2$. 2 óra alatt kisütik a kenyeret a kemencék. Az első 1200 kg-ot, a második 800 kg-ot, a harmadik 1600 kg-ot süt ki.
1316. Ha az első csapon át x , a másodikon y liter víz folyik át percenként, akkor a második feltétel szerint $2x = 3y$, az első feltétel szerint pedig $20(x + y) + 1000 = 70(x + y) - 250$. Ebből $x = 15, y = 10$. A medence $20(x + y) + 1000 = 1500$ literes és ezért az első csap 100 perc alatt, a második 150 perc alatt tölti meg a medencét.
1317. Legyen az első és a második csap vízhozama x , a harmadiké y . Akkor az első feltétel szerint $5x + 4x + 6y = 1$, a második feltétel szerint $\frac{1}{3} \cdot 2x = y$. Ebből $x = \frac{1}{13}, y = \frac{2}{39}$. Ha a három csap egyszerre t ideig van nyitva, akkor $\left(\frac{2}{13} + \frac{2}{39} \right) t = 1$. Ebből $t = \frac{39}{8}$, vagyis $\frac{39}{8}$ óra = $292,5$ perc alatt telik meg a medence.
1318. Ha a negyedik csap egyedül t óra alatt tölti meg a tartályt, akkor a feltételek szerint $2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{t} = 1$. Ebből $t = 3$. 3 óra alatt töltené meg egyedül a negyedik csap a tartályt.
1319. Ha a vízmelegítő eredeti árát x -ed részével változtatták meg, akkor a változások az $(1 - x)(1 + x)1600 = 1500$ egyenlettel írhatók le. Ebből $x = \pm \frac{1}{4} = \pm 0,25$. Ezért a vízmelegítő árát 25% -kal változtatták.
1320. Ha a második úrhajó az elsőt t óra alatt éri utol, akkor a sebességek aránya $\frac{1}{2} = \frac{t-2}{t}$. Ebből $t = 4$. Ha a harmadik úrhajó a másodikat x óra alatt éri utol, akkor ismét a sebességek arányát felírva $\frac{2}{3} = \frac{4-x}{4}$. Ebből $x = \frac{4}{3}$. Ezért a harmadik úrhajónak a második indulása után $2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ órával (40 perccel) később kell elindulnia.
1321. Ha a tanuló helyes feleleteinek száma x , akkor $10x - 7(8 - x) = 46$. Ebből $x = 6$. A tanulónak 6 jó és 2 hibás felelete volt.
1322. Ha a sorok számát x , az egy sorban lévő betűk számát y jelöli, akkor a feltételeket az $(x - 4)(y - 5) = xy - 360$, $(x + 3)(y + 2) = xy + 228$ egyenletrendszerrel írhatjuk le. Rendezés után az egyenletrendszer $5x + 4y = 380$, $2x + 3y = 222$ alakú. Ennek megoldása $x = 36, y = 50$. Így 36 sor és egy sorban 50 betű van a könyv egy-egy oldalán.

1323. Ha a kocsik száma x , a szállítást pedig y óra alatt kell lebonyolítani, akkor a feltételek szerint $(x-2)(y+2) = xy$, $(x+4)(y-2) = xy$. Ebből $x=8$, $y=6$. Ezért 8 gépkocsi 6 óra alatt végzi el a szállítást.
1324. Ha a régi varrógépen x óra alatt készül el a sorozat, akkor a feltételek alapján a $40\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-30}\right) + \frac{60}{x} = 1$ egyenlet írható fel. Ez rendezéssel az $x^2 - 170x + 3000 = 0$ alakra hozható. Gyökei $x_1 = 150$, $x_2 = 20$. A második gyök nem jöhet szóba, mert ekkor $x-30$ negatív. Így a régi gépen 150, az új gépen 120 óra alatt készül el a munka. Ha a két gépen együtt dolgoznak y óráig, akkor $y\left(\frac{1}{150} + \frac{1}{120}\right) = 1$. Ebből $y = \frac{200}{3}$ óra, vagyis a két gépen $66\frac{2}{3}$ óra alatt készül el a sorozat.
1325. Ha a tört számlálója x , nevezője y , akkor a feltételek szerint $\frac{x-1}{y+1} = \frac{1}{2}$, $\frac{x+1}{y-1} = 1$. Ebből $x=5$, $y=7$. Így ez a tört az $\frac{5}{7}$.
1326. Ha a tört számlálója x , nevezője y , akkor $\frac{x+1}{y+1} = \frac{2}{3}$, $\frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{2}$. Ebből $x=3$, $y=5$, ezért ez a tört a $\frac{3}{5}$.
1327. Az örökösödési viszonyokat az $A+B+C = 300\,000$, $A = B+C$ és $A-B = B-C$ egyenletekkel írhatjuk le. Ezekből $B=2C$, $A=3C$, végül $C=50\,000$. Így A 150 000 Ft-ot, B 100 000 Ft-ot, C 50 000 Ft-ot örökölt.
1328. Ha x tízforintosom és y húszforintosom van, akkor $10x+20y = 240$ és $x:y = 2:3$. Ebből $x=6$, $y=9$, azaz 6 db 10 Ft-osom és 9 db 20 Ft-osom van.
1329. Legyenek a téglalap oldalai a m és b m hosszúak, akkor a feltételek szerint $a-4 = b+3$, $(a-4)(b+3) = ab+3$. Az egyenletrendszer megoldása: $a=13$, $b=6$. A téglalap oldalai 6 és 13 m hosszúak.
1330. Ha a nagyobb négyzet oldala x , akkor $x^2 - (x-12)^2 = 240$. Ebből $x=16$. A két négyzet oldalai 16, illetve 4 m hosszúak.
1331. Ha a rózsaburgonya x forintba, a sárgaburgonya y forintba kerül különként, akkor a megoldandó egyenletrendszer $3x+2y = 23$,

$2x+3y = 22$ alakú. Ebből $x=5$, $y=4$. Egy kg rózsaburgonya 5 Ft-ba, egy kg sárgaburgonya 4 Ft-ba került.

1332. Legyen a szóban forgó konvex sokszögnek n számú csúcsa. Minden csúcsból $n-3$ számú átló húzható, de ekkor minden átlót kétszer vettünk figyelembe, vagyis a feltétel szerint $\frac{n(n-3)}{2} = 35$. Ebből $n_1 = 10$, $n_2 = -7$, de ez utóbbi nem jöhet szóba. A válasz ezért igen, a konvex 10 szögnek van 35 átlója.
1333. Ha a konvex sokszögnek n oldala van, akkor a feltétel szerint $\frac{n(n-3)}{2} - n = 25$. Ebből $n_1 = 10$, $n_2 = -5$, de ez utóbbi lehetetlen. A konvex sokszög a tizszög.
1334. Ha az egyik konvex sokszög x oldalú, a másik y oldalú, akkor $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{y(y-3)}{2} = 47$; $x+y = 17$. Ebből $x=9$, $y=8$. A nyolc- és a kilencszög felel meg.
1335. Az n oldalú sokszög minden csúcsa $n-1$ csúccsal köthető össze, de ekkor minden vonalat kétszer számoltunk meg, ezért $n(n-1) = 2 \cdot 171$. Ebből $n_1 = 19$, $n_2 = -18$. Csak az első gyök jöhet szóba, ezért a keresett sokszög a 19 oldalú szabályos sokszög.
1336. Az n pont a feltétel szerint $n-1$ ponttal köthető össze, ezért az összekötő egyenesek száma $\frac{n(n-1)}{2} = 28$. Ebből $n_1 = 8$, $n_2 = -7$. Csak az első gyök jöhet szóba. 8 pontot helyeztek el a síkon.
1337. $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ kézfogás történt.
1338. Mivel minden csapat minden ellenfelével kétszer játszott, ezért $x(x-1) = 306$, ahol x a csapatok számát jelöli. Ebből $x_1 = 18$, $x_2 = -17$. 18 csapat mérkőzött.
1339. 13 csapat vett részt a tornán.
1340. Ha az egyik parcella mindegyik sorába x , a másik parcella mindegyik sorába $x-5$ fát ültettek, akkor $x^2 + (x-5)^2 = 630 - 5$. Ebből a pozitív gyök $x=20$. Az egyik parcellába $20^2 = 400$, a másikba $15^2 = 225$ fát ültettek.

1341. Ha a lépcsők száma x és a lépcsők magassága y cm, akkor egyrészt $xy = 360$, másrészt $(x+3)(y-4) = 360$. Az első egyenletből $y = \frac{360}{x}$ ezt a másodikba helyettesítve rendezés után az $x^2 + 3x - 270 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek pozitív gyöke $x = 15$. Ekkor $y = 24$. 15 db (24 cm-es) lépcsője van a lépcsőháznak.

1342. Legyen az egyik szám egyeseinek száma x , ekkor a feltétel szerint $[10(x+2)+x]^2 + (10x+x+2)^2 = 4034$. Rendezés után $x^2 + 2x - 15 = 0$. Ebből $x_1 = 3$, $x_2 = -5$. A keresett szám a 35 vagy az 53.

1343. Ha a kétjegyű szám második jegye x , akkor feltételünk alapján $[10(x+4)+x][x+4+x] = 306$. Rendezés után a $11x^2 + 62x - 73 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek pozitív gyöke $x = 1$. A keresett szám az 51.

1344. Ha a keresett szám egyeseit x jelöli, akkor $[10(x+1)+x](x+1+x) = 1666$. Ebből $x = 8$. A keresett szám a 98.

1345. Ha a tört nevezője x , akkor számlálója $x-4$ és $\frac{x-4}{x} + \frac{x}{x-4} = \frac{58}{21}$. Rendezés után az egyenlet $x^2 - 4x - 21 = 0$ alakú és gyökei $x_1 = 7$, $x_2 = -3$. A keresett tört tehát a $\frac{3}{7}$.

Megjegyzés. A második gyök alapján felírható $\frac{-7}{-3}$ tört formailag megfelel ugyan a feladat követelményeinek, de az egyszerűsítés után kapott (vele egyenlő) $\frac{7}{3}$ tört nem felel meg annak a követelménynek, hogy a számlálója 4-gyel kisebb, mint a nevezője.

1346. Ha az egyik szám x , a másik y , akkor az első feltétel szerint $x^2 - y^2 = 1805$, vagyis $(x+y)(x-y) = 5 \cdot 19^2$. Mivel x is és y is osztható 19-cel, ezért összegük is és különbségük is. Ezért az előbbi egyenletből következik, hogy vagy $x+y = 5 \cdot 19$ és $x-y = 19$ vagy az, hogy $x+y = 19$ és $x-y = 5 \cdot 19$. Az első esetben $x = 57$ és $y = 38$, a második esetben $x = 57$ és $y = -38$, de ez utóbbi nem természetes szám, tehát nem felel meg a feltételnek. A keresett két szám az 57 és 38.

1347. Ha a keresett számrendszer alapszáma x , akkor a tízes számrendszerben $6 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 6 = 307$ érvényes. Ebből $x_1 = 7$, $x_2 = -\frac{43}{6}$, de ez

utóbbi nem lehet egy számrendszer alapszáma. A válasz: a 7-es számrendszerben.

1348. Ha a téglalap egyik oldala a cm, a másik oldala b cm, akkor $2(a+b) = 85$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 32,5$ egyenletekkel írhatók le a feltételek. Ha az első egyenletből pl. a -t kifejezzük és a másodikba helyettesítjük, akkor a $2b^2 - 85b + 750 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $b_1 = 30$, $b_2 = 12,5$. A hozzájuk tartozó a értékek: $a_1 = 12,5$, $a_2 = 30$. Egy téglalap van és területe 375 cm^2 .

1349. Ha a telek egyik oldala a m, akkor a másik $a+20$ m és az első feltételből, az $a(a+20) = 2400$ egyenletből a telek méretei $a = 40$ m, $a+20 = 60$ m, kerülete 200 m. A négy csúcsban az illesztéseknél az átfedés elkerülése miatt $4 \cdot 4$ cm-rel rövidebb a kerítés hossza, mint a telek kerülete, ezért a kerítéshez $x = \frac{100}{94} \cdot 199,84 \cdot 2 \cdot 0,04 = 17,0077 \text{ m}^3$, kerekítve $17,0 \text{ m}^3$ deszkára van szükség.

1350. A téglalap és a keret területének összege $t_1 + t_2 = 2 \cdot 15 = 30 \text{ (m}^2\text{)}$. A belső téglalap és a keret területének különbsége $t_1 - t_2 = 16 \text{ (m}^2\text{)}$. E két egyenletből a belső téglalap területe 23 m^2 , a keret területe 7 m^2 . Ha a keret x m széles, akkor a területe $2 \cdot 2x + 2(15-2x)x = 7$. Ebből

$$4x^2 - 34x + 17 = 0. \text{ A gyökök } x_1 = \frac{17+3\sqrt{29}}{4} = 8,289,$$

$$x_2 = \frac{17-3\sqrt{29}}{4} = 0,211. \text{ Az első gyök nem jöhet szóba, mert ez több, mint a téglalap egyik oldalának hossza, a másik megfelel, ezért a keret } \frac{17-3\sqrt{29}}{4} = 0,21 \text{ m széles.}$$

1351. A raktár teljes alapterülete 210 m^2 , a fal alapterülete $210 - 180 = 30 \text{ (m}^2\text{)}$. A fal alapterülete – ha a fal vastagsága x méter – $2x(31-2x) = 30$. Ebből $2x^2 - 31x + 15 = 0$. Az $x_1 = 15$ gyök nem jöhet szóba, az $x_2 = 0,5$ gyök megfelel, ezért a raktár fala $\frac{1}{2}$ méter vastag.

1352. Ha az út szélességét x méterre tervezzük, akkor teljesülnie kell a $2x(17-2x) = (5-2x)(12-2x)$ egyenletnek. Ez rendezés után $2x^2 - 17x + 15 = 0$ alakú. Egyik gyöke $7,5$, de ez nem felel meg, másik gyöke 1 , ez megfelel, tehát az út 1 m széles.

1353. Ha a , illetve b jelöli a két négyzet, x pedig a keletkezett téglalap rövidebb oldalát, akkor $x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$, és a bizonyítandó állítás

$\frac{a^2 + b^2}{a + b} > \frac{a + b}{2}$. Ebből azonos átalakításokkal $(a - b)^2 > 0$, ez pedig $a \neq b$ miatt mindig igaz.

1354. Ha a paralelogramma hosszabbik oldala a , akkor a rövidebb oldala $a - 3$, hosszabb átlója $a + 2$, rövidebb átlója a , és $2[a^2 + (a - 3)^2] = a^2 + (a + 2)^2$. Ebből $a = 7$. Így a paralelogramma oldalai 4 cm és 7 cm, átlói 7 cm és 9 cm hosszúak.

1355. A derékszögű háromszög oldalainak szokásos jelölésével $a + b + c = 24$, $ab = 48$. Pitagorasz tétele alapján $\left(\frac{48}{b}\right)^2 + b^2 = \left(24 - b - \frac{48}{b}\right)^2$. Ez rendezés után $b^2 - 14b + 48 = 0$ alakú. Gyökei $b_1 = 8$, $b_2 = 6$. A hozzájuk tartozó a értékek $a_1 = 6$, $a_2 = 8$. Mind a két értékpárhoz a $c = 10$ tartozik. Egy derékszögű háromszög van, oldalai 6 cm, 8 cm, illetve 10 cm hosszúak.

1356. A szokásos jelölésekkel a feltételek: $a + b = c + 8$, $a + b + c = 48$, $c^2 = a^2 + b^2$. Az első két egyenletből (pl. kivonással) $c = 20$, és ezzel az első két egyenlet $a + b = 28$, $a^2 + b^2 = 400$ alakú. Ezekből helyettesítéssel például a $b^2 - 28b + 192 = 0$ egyenlethez juthatunk, amelynek gyökei $b_1 = 16$, $b_2 = 12$. Így $a_1 = 12$, $a_2 = 16$. A derékszögű háromszög oldalai 12 cm, 16 cm és 20 cm hosszúak.

1357. Két eset lehetséges. Ha az egyenlő szárú háromszög alapja a , akkor szárai $0,4a$ méter hosszúak vagy ha szárai b , akkor alapja $0,4b$ méter hosszú, ugyanis a feladat szövege mind a két lehetőséget megengedi. Az első esetben azonban $0,4a + 0,4a < a$, a háromszög-egyenlőtlenség nem teljesül, háromszög nem keletkezik. A második esetben a megoldandó egyenlet $2b + 0,4b = 24$, ebből $b = 10$ m és így az alap hossza 4 m. Egy háromszög felel meg a feladat feltételeinek, ennek alapja 4 m, szárai 10 m hosszúak.

1358. A rombusz oldala 13 cm. Ha a rombusz átlóinak a felét x és y jelöli, akkor $xy = 60$, és $x^2 + y^2 = 169$. Az egyenletrendszerből $x = 5$, $y = 12$. A rombusz átlói 10 cm és 24 cm hosszúak.

1359. A téglatest élleinek hossza az adott arány szerint a , $2a$, $3a$, a feltétel alapján pedig $(a + 2)(2a + 1)(3a + 3) = 6a^3 + 426$. Ez rendezés után

$a^2 + a - 20 = 0$ alakú. Gyökei $x_1 = 4$ és $x_2 = -5$, de ez utóbbi nem felel meg. Így a téglatest élei 4 cm, 8 cm és 12 cm hosszúak.

1360. Ha az egyik kocka éle a méter, a másiké b méter, akkor a feltételek szerint $a + b = 1,7$, $a^3 + b^3 = 1,853$. Ha az első egyenletből például a -t a másodikba helyettesítünk, rendezés után a $170b^2 - 289b + 102 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $b_1 = 0,5$, $b_2 = 1,2$. Ezekkel $a_1 = 1,2$, $a_2 = 0,5$. A kockák élei 0,5 m, illetve 1,2 m hosszúak.

1361. Ha a húr x távolságra van a körök középpontjától és a belső körbe y hosszúságú része esik, akkor a külső körbe a $\frac{3}{2}y$ része és Pitagorasz tétele szerint $x^2 + y^2 = 17^2$ és $x^2 + \left(\frac{5}{2}y\right)^2 = 25^2$. Az első egyenletből x^2 kifejezett értékét a másodikba helyettesítve a $289 - y^2 + 6,25y^2 = 625$, majd az $y^2 = 64$ egyenlethez jutunk. Ennek pozitív gyöke $y = 8$ és ezzel $x = 15$. Ebből következik, hogy a húr hossza $\frac{5}{2}y = 20$ egység, és 15 egységre van a körök középpontjától.

1362. Ha a tehervonat menetideje t óra és a személyvonat átlagsebessége $\frac{\text{km}}{h}$, akkor a tehervonaté $v - 12 \frac{\text{km}}{h}$ és a feltételek szerint $v\left(t - \frac{2}{3}\right) = 96$, $(v - 12)t = 96$. A két egyenlet különbségéből $t = \frac{v}{18}$, ezt pl. a második egyenletbe helyettesítve rendezés után a $v^2 - 12v + 1728 = 0$ egyenlethez jutunk; ennek gyökei $v_1 = 48$, $v_2 = 36$.

Az első esetben a tehervonat átlagsebessége $v_1 - 12 = 36 \frac{\text{km}}{h}$, e két adat megfelel a feladat feltételeinek, mert $\frac{96}{48} + \frac{2}{3} = \frac{96}{36}$, a második esetben $v_2 - 12 = 24 \frac{\text{km}}{h}$, de ez nem felel meg, mert $\frac{96}{36} + \frac{2}{3} \neq \frac{96}{24}$. Ezért a személyvonat átlagsebessége $48 \frac{\text{km}}{h}$, a tehervonaté $36 \frac{\text{km}}{h}$.

1363. Legyen a gépkocsi átlagsebessége $v \frac{\text{km}}{h}$, menetideje t óra. Akkor egy-

részt $310 = vt$, másrészt $310 = (v-12)\left(t + \frac{6}{5}\right)$. Az első egyenletből

$t = \frac{v}{310}$, ezt a másodikba helyettesítve és rendezve a $v^2 - 12v - 3100 = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből a pozitív gyök $v = 62$. Ez megfelel a feltételeknek is, tehát a gépkocsi átlagsebessége $62 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1364. Ha v jelöli a lassúbb gépkocsi sebességét, akkor $\frac{150}{v} - \frac{150}{v+10} = \frac{1}{2}$. Ebből $v^2 + 10v - 3000 = 0$ és a pozitív gyök $v = 50$. Az egyik gépkocsi $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt.

1365. Legyen az egyik turista átlagsebessége $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, menetideje t óra, akkor $40 = vt$, $40 = (v+2)(t-1)$. Ezekből $v^2 + 2v - 80 = 0$, $v_1 = 8$, $v_2 = -10$. Ez utóbbi nem megoldás. Így az egyik turista sebessége $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másiké $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1366. Ha a turista napi teljesítménye x km, akkor menetideje $\frac{105}{x}$ nap. A feltétel szerint $\left(\frac{105}{x} + 2\right)(x-6) = 105$. Ebből $x^2 - 6x - 315 = 0$. $x_1 = 21$ megfelel a feladatnak, $x_2 = -15$ nem, ezért a turista naponta 21 km-t tett meg.

1367. Legyen a vonat eredeti sebessége $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, menetideje t óra. Ekkor a feladat feltételei szerint $192 = vt$, $192 = (v+10)\left(t - \frac{16}{60}\right)$. Az egyenletrendszer megoldása a $\left(80; \frac{12}{5}\right)$ és a $\left(-90; -\frac{32}{15}\right)$ számpár, de a feladat feltételeinek csak az első felel meg, tehát a gyorsvonat eredeti sebessége $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.

1368. Legyen $AB = x$ és a gépkocsi átlagsebessége v_1 , a motorkerékpáré v_2 . Ha az első találkozásig t_1 idő telt el, akkor $v_1 t_1 = 37$ és $v_2 t_1 = x - 37$. Ha a második találkozásig további t_2 idő telt el, akkor $v_1 t_2 = 2x - 53$ és $v_2 t_2 = x + 53$. Szorozzuk össze az első és a harmadik, illetve a második és a negyedik egyenlet megfelelő oldalait! A kapott egyenletek bal oldala azonos, tehát kell, hogy a jobb oldalak egyenlők legyenek, azaz $37(x+53) = (x-37)(2x-53)$ legyen. Ebből rendezés után $x^2 - 82x = 0$. Mivel $x \neq 0$, ezért $x = 82$. A két város 82 km-re van egymástól.

Megjegyzés. Mivel a találkozásig azonos ideig haladtak a járművek, ezért a megtett utak aránya állandó, vagyis $\frac{37}{x-37} = \frac{2x-53}{x+53}$, és ez éppen az előzőekben kapott egyenlet. A kétféle módszert azért említettük meg, hogy megmutassuk: lehet egy feladat feltételeit apró lépésekben haladva felírni, majd a kapott egyenleteket algebrai jellegű felismerésekkel megoldani, és lehet a döntő kapcsolatot felismerve egyetlen lépésben, egyetlen egyenlettel a megoldáshoz eljutni.

1369. Ha a vetés x napig tartott, akkor a napi teljesítmény $\frac{2000}{x}$ hektár. A feltétel szerint $\left(\frac{200}{x} + 5\right)(x-2) = 200$. Ebből $x^2 - 2x - 80 = 0$. Az $x_1 = 10$ gyök megfelel a feladat feltételének, az $x_2 = -8$ nem, ezért a vetés 10 napig tartott.

1370. Ha a szakmunkás x nap alatt végzi el a munkát, akkor a betanított munkás $x+3$ nap alatt teszi ezt és így napi teljesítményük a munka $\frac{1}{x}$, illetve $\frac{1}{x+3}$ része. A feltétel szerint $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = 1$. Ebből $x^2 - x - 6 = 0$. $x_1 = 3$ megfelel, $x_2 = -2$ nem. Így a szakmunkás 3 nap alatt, a betanított munkás $3+3 = 6$ nap alatt végzi el egyedül a munkát.

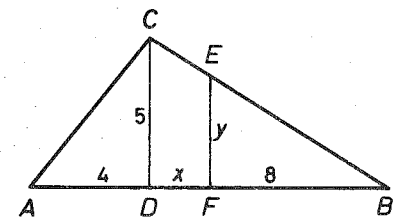
1371. Ha a bánya x db $\frac{600}{x}$ tonna teherbírású kocsit kért, és a vasút $(x-10)$ db $\frac{600}{x} + 5$ tonna teherbírású kocsit küldött, akkor $(x-10)\left(\frac{600}{x} + 5\right) = 600$. Ebből $x^2 - 10x - 1200 = 0$. $x_1 = 40$ megfe-

1382. Ha az egyik szám x , akkor a megoldandó egyenlet $x^3 + (18-x)^3 = 1674$. Ebből $x_1 = 11$, $x_2 = 7$, így $18 - x_1 = 7$, $18 - x_2 = 11$. A két szám a 11 és a 7.
1383. Ha az egyik szám x , akkor $(4+x)^3 - x^3 = 1468$. Ebből $x^2 + 4x - 117 = 0$, $x_1 = 9$, $x_2 = -13$, így $4 + x_1 = 13$, $4 + x_2 = -9$. A két szám a 13 és 9 vagy a -9 és -13 .
1384. Ha x jelöli az egyik, y a másik számot, akkor $x^2 + y^2 = 8,5$, $xy = 3,75$. Ebből helyettesítéssel $y^4 - 8,5y^2 + 14,0625 = 0$, így vagy $y^2 = 6,25$, vagy $y^2 = 2,25$, $y_{1,2} = \pm 2,5$, $y_{3,4} = \pm 1,5$. A megfelelő x értékek: $x_{1,2} = \pm 1,5$, $x_{3,4} = \pm 2,5$. Két számpár felel meg, a 2,5; 1,5 és a $-2,5$; $-1,5$.
1385. Ha x jelöli az egyik, y a másik számot, akkor a megoldandó egyenletrendszer $xy = 36$, $x^2 + y^2 = 97$ alakú. Helyettesítés után a $\left(\frac{36}{y}\right)^2 + y^2 = 97$, $y^4 - 97y^2 + 1296 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $y_{1,2} = \pm 9$, $y_{3,4} = \pm 4$. A megfelelő x értékek: $x_{1,2} = \pm 4$, $x_{3,4} = \pm 9$. Két különböző számpár felel meg, a 9; 4 és a -9 ; -4 .
1386. A feladat feltételei szerint $p = x_1 + x_2 = 3 - 5 = -2$, $-q = x_1 x_2 = -15$, vagyis $q = 15$.
1387. Ha az egyik szám a , akkor a másik $10 - a$ és $a(10 - a) = 9$, vagyis $a^2 - 10a + 9 = 0$. Ebből $a_1 = 9$, $a_2 = 1$ és a megfelelő másik szám 1 és 9. A negyedik hatványok összege mind a két esetben 6562.
1388. Ha p és r egészek és p páros (páratlan), akkor az egyenlet diszkriminánsa $d = p^2 - 4r$ páros (páratlan), és mivel a diszkrimináns teljes négyzet is, ezért négyzetgyöke egész, mégpedig páros (páratlan). Ebből következik, hogy a megoldóképlet számlálója mindig páros és így az egyenlet gyökei egész számok.
1389. A feltételek alapján $p = x_1 + x_2 = 6$, $-q = x_1 x_2 = 8$, vagyis $p = 6$; $q = -8$.
1390. Legyen a tört számlálója a , nevezője b , akkor $ab = 42$ és $\frac{a+1}{b-1} = \frac{b}{a}$. Az utóbbi egyenletből $b^2 - a^2 = b + a$ és így vagy $a + b = 0$, vagy $b - a = 1$. Az első esetben $a = -b$, de ekkor az első egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldala 42, és ez lehetetlen. A második esetben $b = a + 1$, és ezt az első egyenletbe helyettesítve $a^2 + a - 42 = 0$. Ebből $a_1 = 6$,

$a_2 = -7$, a megfelelő b értékek: $b_1 = 7$, $b_2 = -6$. Két tört felel meg, a $\frac{6}{7}$ és $\frac{-7}{-6}$.

Megjegyzés: Az $\frac{a+1}{b-1} = \frac{b}{a}$ egyenletből csak speciális esetként következik, hogy $a+1 = b$ és $b-1 = a$ (és ez a kettő most éppen ugyanazt jelenti), mert eleve nem biztos, hogy a törtek között nincs áltört. Pl. az $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ egyenlőség alapján hiba volna azt mondani, hogy $1 = 2$ és $4 = 8$. Esetünkben azonban az $ab = 42$ és $a+1 = b$ egyenletrendszer is (de nem szükségszerűen) az egyébként helyes megoldást adja.

1391. Ha a derékszögű háromszög befogóit a és b , átfogóját c jelöli, akkor $a + b + c = 24$, $a^2 + b^2 + c^2 = 200$ és $a^2 + b^2 = c^2$. E két utóbbi egyenletből $c = 10$. Az $a^2 + (14 - a)^2 = 100$ egyenletből $a^2 - 14a + 48 = 0$, és így $a_1 = 8$, $a_2 = 6$, a megfelelő b értékek $b_1 = 6$, $b_2 = 8$. Egy háromszög felel meg, amelyben a befogók 6 egység, illetve 8 egység, az átfogó 10 egység hosszú.
1392. Legyen a derékszögű háromszög két befogója a és b . Ekkor $ab = 1260$ és $a^2 + \left(\frac{1260}{a}\right)^2 = 53^2$. Rendezés után $a^4 - 2809a^2 + 1\,587\,600 = 0$; ebből $a_1^2 = 2025$, $a_2^2 = 784$. Csak a pozitív gyökök jöhetnek szóba. Így $a_1 = 45$, $a_2 = 28$. A megfelelő b értékek: $b_1 = 28$, $b_2 = 45$. A befogók 28 cm, illetve 45 cm hosszúak.
1393. Ha a téglalap oldalainak hossza a , illetve b , akkor $ab = 1925$ és $a + b = 90$. a és b a $b^2 - 90b + 1925 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek tekinthető. Mivel $b_1 = 55$, $b_2 = 35$, ezért az oldalak hossza 55 m és 35 m.
1394. A háromszög területe 30 területegység. Legyen a keresett szakasz hossza y egység és legyen a CD magasságtól x egységre (1394. ábra)! Ekkor az EFB derékszögű háromszög területe $\frac{(8-x)y}{2} = \frac{30}{2}$ és a $CDFE$ trapéz területe $\frac{5+y}{2}x = \frac{30}{2} - \frac{5 \cdot 4}{2} = 5$. A két egyenletből rendezés után $x^2 - 16x + 16 = 0$, ebből pedig $x_{1,2} = 8 \pm 4\sqrt{3}$. $x_1 = 8 + 4\sqrt{3} = 14,93 > 12$ nem felel



1394

meg a feladatnak, $x_2 = 8 - 4\sqrt{3}$ igen, és ezzel $y = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. A szakasz hossza $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (= 4,33) egység.

1395. Ha az egyes épületekben rendre a, b, c, d diák lakik, akkor a feladat feltételeit az $a+b+c+d = 436$, $a = d+10$, $d = c+8$, $b = c+10$ egyenletrendszerrel írhatjuk le. c -vel kifejezve az a -t is $a = c+8+10 = c+18$, és ezeket az első egyenletbe helyettesítve $(c+18) + (c+10) + c + (c+8) = 436$. Ebből $c = 100$, és ezt felhasználva az egyes épületekben 118; 110; 100; 108 diák lakik.

1396. Ha egy jegy x forintba került, akkor $\left(\frac{384}{x} - 4\right)(x+3) = 420$, vagy rendezve $x^2 + 12x - 228 = 0$. Ebből $x_1 = 12$, $x_2 = -24$, de ez utóbbi nem felel meg. Mivel $\frac{384}{12} = 32$, ezért az első osztály 32 jegyet vett darabonként 12 Ft-os áron, a második osztály 28 jegyet vett darabonként 15 Ft-os áron.

1397. Jelölje a hátsó kerék kerületét x , az elsőét y , akkor a feladat feltételei szerint $\frac{36}{x} + 6 = \frac{36}{y}$, $\frac{36}{x+1} + 3 = \frac{36}{y+1}$. A két egyenletből rendezés után $5x^2 - 13x - 6 = 0$. Ebből $x_1 = 3$, $x_2 = -0,4$. A második gyök nem jöhet szóba. $x = 3$ esetében $y = 2$. Így az első kerék 18, a második 12 fordulatot tesz meg a távon.

1398. Ha a jelöli az apa, b, c és d a fiúk mostani életkorát, akkor a feladat feltételei szerint $a-5 = b+c+d$, $a+10 = 2(b+10)$, $a+20 = 2(c+20)$, $a+30 = 2(d+30)$. b, c és d értékét a -val kifejezve $b = \frac{a-10}{2}$, $c = \frac{a-20}{2}$, $d = \frac{a-30}{2}$, és ezt az első egyenletbe helyettesítve $a = 50$. Ezért $b = 20$, $c = 15$, $d = 10$. A fiúk most 20, 15, 10 évesek.

1399. Tegyük fel, hogy a két vonat A -tól x km távolságra találkozik. Akkor $\frac{x}{300-x} = \frac{300-x}{3}$. Ebből $x = 180$. Az egyik vonat **átlagsebessége** $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másiké $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1400. Ha a gépek indulásuk után t óra múlva találkoztak, akkor az egyik gép sebessége $\frac{1400 \text{ km}}{t + \frac{4}{3} \text{ h}}$, a másiké $\frac{1400 \text{ km}}{t + \frac{3}{4} \text{ h}}$. A találkozásig együtt

$$1400 = \left(\frac{1400}{t + \frac{4}{3}} + \frac{1400}{t + \frac{3}{4}} \right) t \text{ km utat tettek meg. Ebből rendezés után}$$

$t^2 = 1$ és így $t = 1$ (t negatív nem lehet). Ezért az A -ból B -be repülő repülőgép átlagsebessége $1400 : \frac{7}{3} = 600 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt, az ellenkező irányba

$$\text{repülőé } 1400 : \frac{7}{4} = 800 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

1401. Ha az első fűrőpajzs x , a második y méter alagutat fúr naponta, akkor az alagút hossza $60x + 60y$ méter. Az első feltétel szerint $\frac{30}{100} \cdot 60x +$

$$+ \frac{26}{100} \cdot 60y = 60, \text{ a második feltétel szerint } \frac{2}{3} \cdot \frac{60y}{x} = \frac{3}{10} \cdot \frac{60x}{y} + 4.$$

Az első egyenletből $y = \frac{30-9x}{8}$, ezt a másodikba helyettesítve és rendezve $7x^2 - 64x + 100 = 0$, $x_1 = \frac{50}{7}$, $x_2 = 2$. Az első gyök nem felel

meg, mert ekkor $y = -30 < 0$, a második igen $\left(y = \frac{3}{2}\right)$, ezért az első fűrőpajzs 2 m, a második 1,5 m alagutat fúr naponta.

1402. Ha f jelöli a folyó vizének a sebességét, v a hajó sebességét állóvízben, akkor $\frac{9}{v+f} + \frac{9}{v-f} = 2,25$; $\frac{9}{v+2f} + \frac{9}{v-2f} = 3$. Ebből $v = \frac{26}{3}$, $f = \frac{2\sqrt{13}}{3}$. A folyó sebessége $\frac{2}{3}\sqrt{13} = 2,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a hajó sebessége állóvízben $26 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1403. Ha az egyik gépíró x , a másik y óra alatt írja le a kéziratot, akkor a feltételek szerint $1 = 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$, $0,8 = 4\frac{1}{x} + 6\frac{1}{y}$. Ebből $\frac{1}{x} = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{15}$. Az egyik gépíró 10 óra alatt, a másik 15 óra alatt írja le a kéziratot egyedül.

1404. Egy-egy traktoros 100%-os napi teljesítménye a terület $\frac{1}{18}$ részének a felszántása. Ha a második esetben t nap alatt lettek készen a munkával, akkor $1,2 \cdot \frac{1}{18}t + \frac{1}{18}(t-4) = 1$. Ebből $2,2t = 22$, vagyis $t = 10$. 10 nap alatt lettek készen a munkával.

1405. Ha az első munkás x , a második y óra alatt végzi el a munkát, akkor az első feltétel szerint $12\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$, a második feltétel szerint $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 25$. A második egyenletből $y = 50 - x$. Ezt az elsőbe helyettesítve $x^2 - 50x + 600 = 0$. Ebből $x_1 = 30$, $x_2 = 20$. A megfelelő y értékek $y_1 = 20$, $y_2 = 30$. Látszik, hogy két szimmetrikus, azaz lényegében egy megoldás van, ezért nem szükséges első és második munkásról beszélni, hanem elegendő az egyik, másik jelző. Az egyik munkás 20 nap, a másik 30 nap alatt végezné el a munkát egyedül.

1406. Tegyük fel, hogy az n ember $x (> 0)$ óránként állt munkába és az utolsó ember munkába állása után még $x + y (y \geq 0)$ óráig dolgoztak együtt. Ekkor $(1 + 2 + \dots + n)x + ny = 24n$, és a második feltétel szerint $nx + y = 5(x + y)$. A második egyenletből $y = \frac{(n-5)x}{4}$ (ahol $n \geq 5$), és ezt az elsőbe helyettesítve $(n-1)x = 32$. Ebből $x = \frac{32}{n-1}$ és így $y = \frac{8(n-5)}{n-1}$, ahol $n \geq 5$. (Figyeljük meg, hogy $x + y = 8$.) Ha x és y értékére nem teszünk további megszorításokat, végtelen sok megoldás van. Ha pl. $y = 0$, akkor $n = 5$, $x = 8$, vagyis az utolsóknak beállt munkás 8, az utolsó előtti 16 stb., az első 40 órát dolgozott. Ha pl. azt kötjük ki, hogy x legyen egész szám, akkor $y = 8 - x$ is egész, és ekkor a következő négy megoldást kapjuk:

x	1	2	4	8
y	7	6	4	0
n	33	17	9	5

XII. fejezet

Egyenlőtlenségek

1407. $x > 2$.

1408. $x < 3$.

1409. $x \leq 1$.

1410. $x \geq -4$.

1411. $x > -18$ (1411. ábra).

1412. $x > -\frac{5}{6}$ (1412. ábra).

1413. $x \leq \frac{120}{11}$. Igen.

1414. $x \leq 6,3$. Igen.

1415. $x \geq \frac{77}{6}$. Ennek nincs közös része a $[10; 12]$ intervallummal.

1416. $x \geq 12$. Nem.

1417. $x \leq -0,6$.

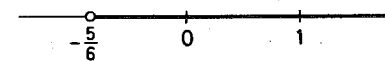
1418. $x \leq 6$.

1419. $x > \frac{71}{51}$. Nem.

1420. $x > -\frac{5}{3}$. Mivel a $\left] -\frac{5}{3}, \infty \right[$ intervallum nyílt, ezért ilyen érték nincs.



1411



1412

1421. $x \leq 1$. A legnagyobb érték: $x = 1$.
1422. $x \geq 2$. Igen, az $x = 2$.
1423. $x \leq 0$. Van, az intervallum minden pontja.
1424. $x > 13$. Nincs.
1425. $x > 13$. Nincs.
1426. $x \geq 2$, a legkisebb szám: $x = 2$.
1427. Ha $x \geq 1$, akkor az abszolútérték definíciója szerint $x - 1 < 2$ és így $x < 3$. Ha $x < 1$, akkor $1 - x < 2$, és ebből $x > -1$. Ez egyszerre akkor teljesül, ha: $-1 < x < 3$.
1428. Ha $x \geq -2$, akkor $x + 2 < 3$, $x < 1$; ha $x < -2$, akkor $-x - 2 < 3$, $x > -5$. Így a megoldás: $-5 < x < 1$.
1429. $x < 2$ vagy $x > 4$.
1430. $x < -6$ vagy $x > -2$.
1431. Ha $3 - 2x \geq 0$, azaz $x \leq \frac{3}{2}$, akkor az egyenlőtlenség $3 - 2x \leq 3$ alakú, és ebből $x \geq 0$. Így $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Ha $3 - 2x < 0$, azaz $x > \frac{3}{2}$, akkor $-3 + 2x \leq 3$, és ebből $x \leq 3$. Így $\frac{3}{2} < x \leq 3$. A megoldás tehát $0 \leq x \leq 3$ (1431. ábra).



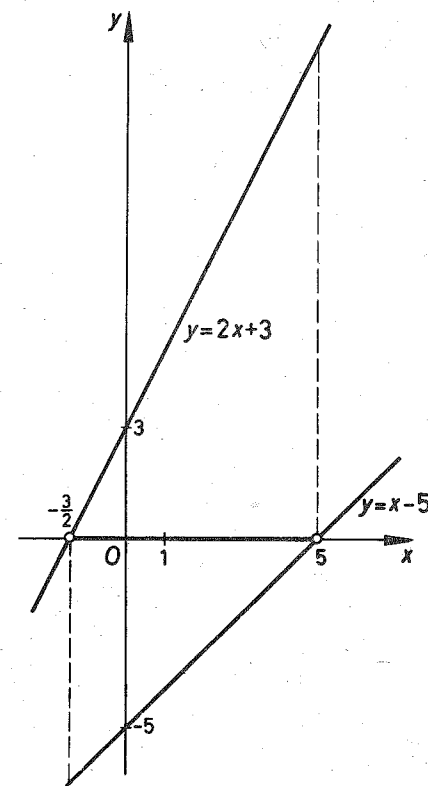
1431

1432. Ha $x \geq 4$, akkor $\frac{x}{2} + 2 > \frac{3}{2}$, $x > -1$. Ha $x < -4$, akkor $-\frac{x}{2} - 2 > \frac{3}{2}$, $-7 > x$. (1432. ábra).



1432

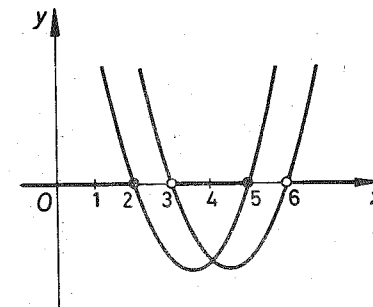
1433. $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ és így $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.
1434. $x \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.
1435. Ha $2x + 1 \geq 0$, azaz $x \geq -\frac{1}{2}$, akkor $2x + 1 < 5$, ebből $x < 2$, tehát $-\frac{1}{2} \leq x < 2$. Ha $2x + 1 < 0$, azaz $x < -\frac{1}{2}$, akkor $-2x - 1 < 5$, ebből $x > -3$, tehát $-3 < x < -\frac{1}{2}$. Az x -re kapott értékek között két természetes szám van: $x = 1$ és $x = 0$.



1437

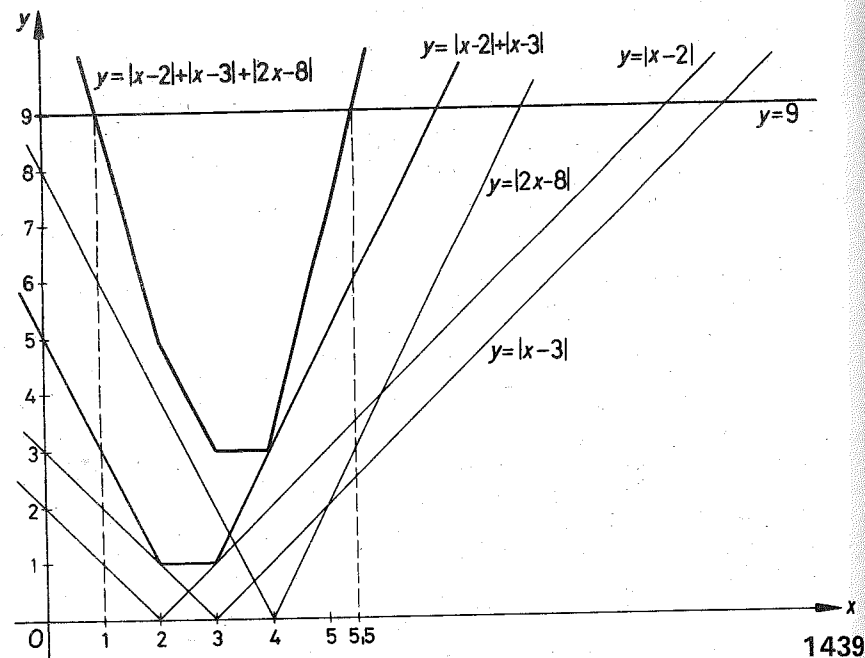
1436. $x \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
1437. A tört értéke negatív, ha a számláló és a nevező ellentett előjelű. Ez a $\left] -\frac{3}{2}; 5 \right[$ intervallumban következik be (1437. ábra). Így a megoldás $-1,5 < x < 5$.

1438. (1438. ábra)
 $]-\infty; 2] \cup]3; 5] \cup]6; \infty[$.

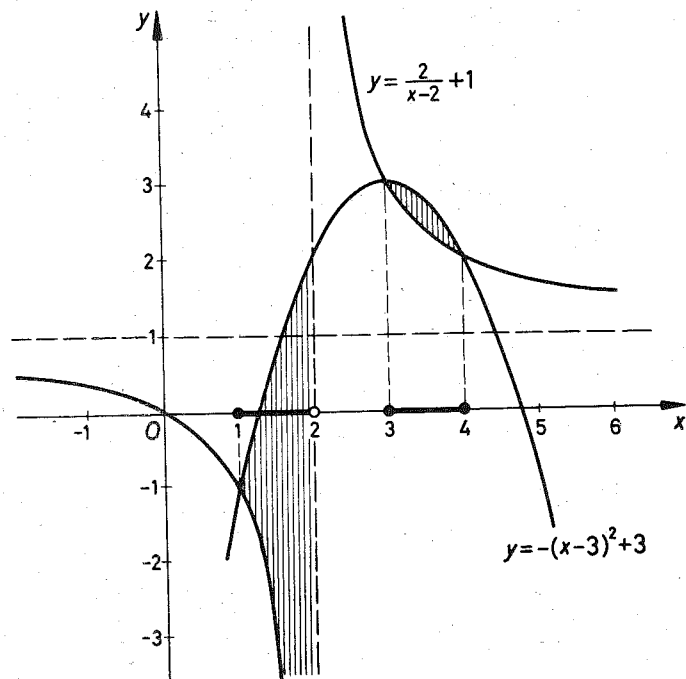


1438

1439. (1439. ábra.) $x=1$; $x=5,5$.



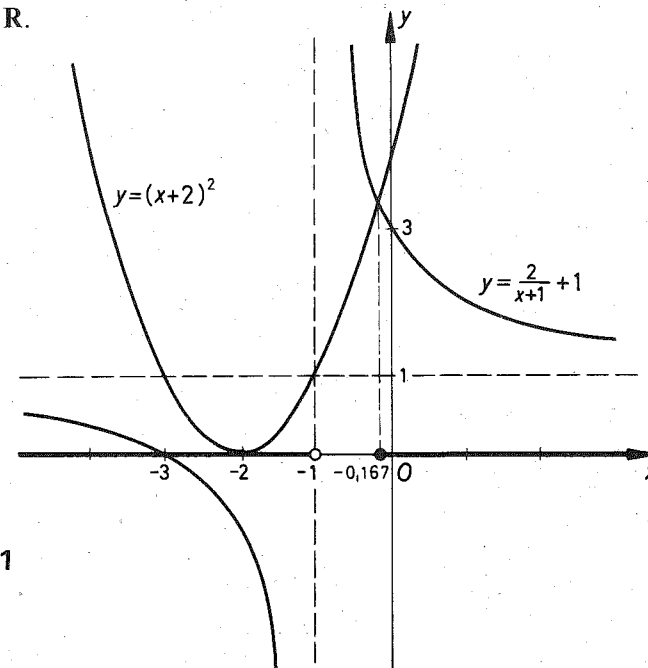
1440. (1440. ábra.) $[1; 2[\cup [3; 4]$.



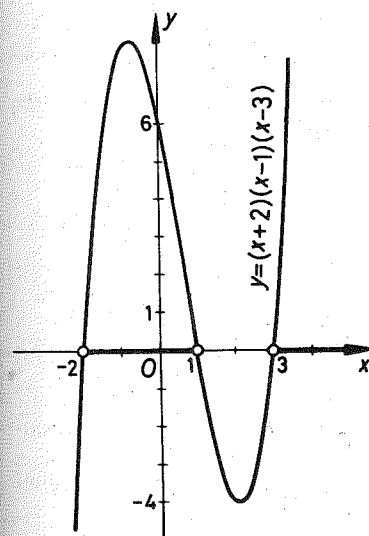
1441. (1441. ábra.) $]-\infty; -1[\cup [-0,167; \infty[$.

1442. (1442. ábra.) $]-2; 1[\cup]3; \infty[$.

1443. (1443. ábra.) $x \in \mathbb{R}$.

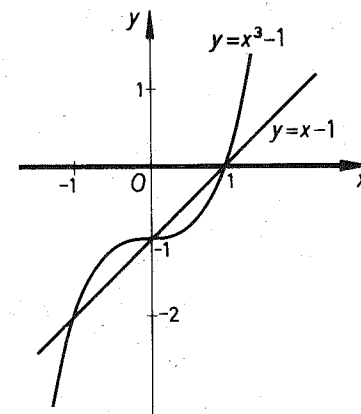


1441



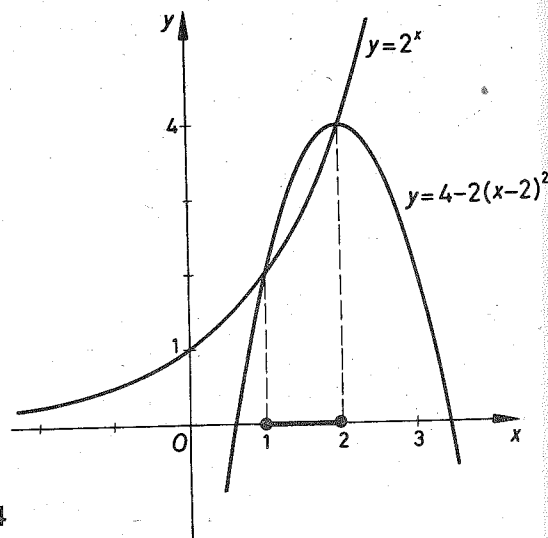
1440

1442



1443

1444. (1444. ábra) [1; 2].



1444

1445. A tört értéke akkor pozitív, ha számlálója és nevezője egyszerre pozitív vagy negatív. Az első esetben $5-5x > 0$ és $2x-3 > 0$; ezekből $x < 1$ és $x > 1,5$, de ez egyszerre nem teljesülhet. A második esetben $5-5x < 0$ és $2x-3 < 0$; ezekből $x > 1$ és $x < 1,5$, vagyis $1 < x < 1,5$. Ebben az intervallumban természetes szám nincs, ezért az egyenlőtlenségnek a természetes számok halmazán nincs megoldása.

1446. Azonos átalakításokkal az egyenlőtlenség $\frac{8}{x-4} \leq 0$ alakra hozható. Ez akkor teljesül, ha $x-4 < 0$, azaz $x < 4$. Minden 4-nél kisebb egész szám megoldása az egyenlőtlenségnek.

1447. $0 < x \leq 5$.

1448. $\frac{13}{4} < x < 5$.

1449. Ha $3x+7 > 0$, azaz $x > -\frac{7}{3}$, akkor az egyenlőtlenségből $x < 37$, vagyis $-\frac{7}{3} < x < 37$. Ha $3x+7 < 0$, azaz $x < -\frac{7}{3}$, akkor az egyenlőtlenségből $x > 37$, de ez egyszerre nem teljesülhet. A megoldás tehát $-\frac{7}{3} < x < 37$.

1450. $x > \frac{2}{5}$.

1451. $x > \frac{13}{3}$.

1452. $x > \frac{37}{11}$.

1453. Rendezés után az egyenlőtlenség $-1 > -12$ alakú, ami mindig igaz, ezért az egyenlőtlenség minden valós x értékre teljesül (1453. ábra).

1454. $x > \frac{9}{34}$ (1454. ábra).

1455. $x < \frac{19}{5}$ (1455. ábra).

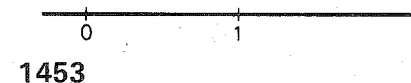
1456. $x < -\frac{59}{2}$. Nem.

1457. *Első megoldás.* A törték számlálója pozitív. Ha mind a két nevező pozitív, vagyis $x > 4$ és $x > -3$, akkor rendezve az egyenlőtlenséget $x < -10$. E három feltétel egyszerre nem teljesül. Ha mind a két nevező negatív, vagyis $x < 4$ és $x < -3$, akkor az egyenlőtlenségből $x < -10$, és ekkor az előző két feltétel is teljesül. Ha a két nevező ellenkező előjelű, vagyis ha (első eset) $x < 4$ és $x > -3$, akkor az adott egyenlőtlenségből $x > -10$, és e utolsó három egyenlőtlenségből $-3 < x < 4$; ha (második eset) $x > 4$ és $x < -3$, akkor nincs újabb megoldás, mert e két egyenlőtlenség egyszerre nem teljesül. Összefoglalva: Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $] -\infty; -10[\cup] -3; 4[$. Az adott intervallum nem tartozik a megoldáshalmazhoz.

Második megoldás: Azonos átalakításokkal az egyenlőtlenség az $\frac{x+10}{(x-4)(x+3)} < 0$ alakra hozható. Ez az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a bal oldalon álló három elsőfokú polinom vagy mindegyike vagy csak az egyike negatív. Az első esetben $x < -10$, a második esetben $-3 < x < 4$.

1458. $-1 < x < 2$ vagy $x > 8$. Nem.

1459. $x < -\frac{1}{2}$; $2 < x < 3$. Nem.



1453

1454



1455

1460. $-\frac{11}{92} < x < -\frac{1}{32}$; $x > 2$. Nem, mert az $x = 2$ nem tartozik a megoldáshalmazhoz.

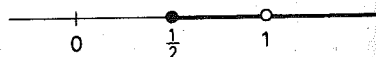
1461. $x < -2$; $-\frac{1}{2} < x < 2$. Igen.

1462. $x < -1$; $x > \frac{1}{2}$ (1462. ábra).



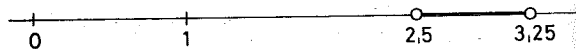
1462

1463. Azonos átalakításokkal az adott egyenlőtlenség a $\frac{2x-1}{(x-1)^2} \geq 0$ alakra hozható. A nevező nem lehet 0, ezért $x \neq 1$. Minden más esetben a nevező pozitív, ezért az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $2x-1 \geq 0$, vagyis $x \geq 0,5$. Az egyenlőtlenség megoldása tehát a $[0,5; 1[\cup]1; \infty[$ számhalmaz (1463. ábra).



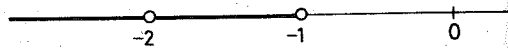
1463

1464. $\frac{5}{2} < x < \frac{13}{4}$ (1464. ábra).



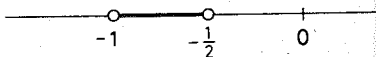
1464

1465. $x < -2$; $-2 < x < -1$ (1465. ábra).



1465

1466. $-1 < x < -\frac{1}{2}$. (1466. ábra).



1466

1467. $-2 < x < -1$; $0 < x < \frac{1}{2}$.

1468. $x < -7$; $3 - \sqrt{22} < x < 3 + \sqrt{22}$.

1469. $1 < x < 2$.

1470. Az egyenlőtlenség azonos átalakításokkal a $\frac{2x-3}{(x-2)(x-1)} \geq 0$ alakra hozható. A tört akkor nemnegatív, ha vagy $2x-3 \geq 0$ és $(x-2)(x-1) > 0$, vagy $2x-3 \leq 0$ és $(x-2)(x-1) < 0$. Az első eset-

ben $x > 2$, a második esetben $1 < x \leq \frac{3}{2}$. Ezekre az x értékekre teljesül az egyenlőtlenség.

1471. Az első egyenlőtlenség azonos átalakításokkal a $\frac{2x-13}{3(5x+2)} < 0$ alakra hozható. Ez akkor teljesül, ha vagy $2x-13 < 0$ és $5x+2 > 0$, vagy $2x-13 > 0$ és $5x+2 < 0$. Az első esetben $-\frac{2}{5} < x < \frac{13}{2}$, a második esetben nincs megoldás. A második egyenlőtlenség a $\frac{-23x}{2(5x+2)} < 0$ alakra hozható. Ez akkor teljesül, ha vagy $x > 0$, vagy $x < -\frac{2}{5}$. Az adott két egyenlőtlenség tehát akkor teljesül egyszerre, ha $0 < x < \frac{13}{2}$.

1472. $(1,98 =) \frac{103}{52} < x < \frac{97}{48} (= 2,02)$.

1473. $-5 < x < -2$.

1474. Nem. Az első egyenlőtlenség a $0 < x < 1$ értékekre, a második az $x < 0$ értékekre teljesül.

1475. Nem. Mind a két egyenlőtlenség az $x > -1$ értékekre teljesül, de a második egyenlőtlenségben $x \neq 0$.

1476. Az első egyenlőtlenség az $x < 2$, a második a $-1 \leq x$ értékekre teljesül. A két egyenlőtlenség a $-1 \leq x < 2$ értékekre áll fenn, és ezek között három egész szám van, mégpedig a $-1; 0; 1$.

1477. Az egyenlőtlenség megoldása $-\frac{1}{2} < x < \frac{4}{5}$, tehát $x = 0$.

1478. $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$.

1479. $x < \frac{23}{6}$, tehát a legnagyobb egész szám a 3.

1480. 3.

1481. Ha $5x-3 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{3}{5}$, akkor az egyenlőtlenség $5x-3 < 7$, és

ebből $x < 2$. Ebben az esetben a megoldás $\frac{3}{5} \leq x < 2$. Ha $5x - 3 < 0$, azaz $x < \frac{3}{5}$, akkor az egyenlőtlenség $-5x + 3 < 7$, és ebből $x > -\frac{4}{5}$.

Ebben az esetben a megoldás $-\frac{4}{5} < x < \frac{3}{5}$. A két esetet összevetve az adott egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $]-\frac{4}{5}; 2[$ számhalmaz.

1482. $-\frac{2}{3} < x < 0$.

1483. Az egyenlőtlenséget átalakítva $(x-4)^2 > 0$, és így a megoldás minden valós szám, kivéve a 4.

1484. $-2 < x < 3$.

1485. $x \leq -1$; $x \geq 5$ és x egész szám.

1486. $\{0; 1\}$.

1487. $0 < x < 2$.

1488. $(1,76 =) 4 - \sqrt{5} < x < 4 + \sqrt{5} (= 6,24)$.

1489. Minden valós számra teljesül.

1490. $0,5 < x < 1$.

1491. Mivel a nevező teljes négyzet, ezért az $x=0,5$ kivételével minden x értékre és így minden negatív x értékre is igaz az egyenlőtlenség.

1492. $x < -6$.

1493. Minden 4-nél nagyobb egész szám.

1494. Azonos átalakításokkal az egyenlőtlenség a $\frac{-x^2 + x + 2}{2(x^2 + 3x - 4)} < 0$ alakra hozható. A számlálóban álló polinom zérushelyei $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. A polinom e két zérushely közötti intervallumban pozitív, az intervallumon kívül negatív. A nevezőben álló polinom zérushelyei $x_3 = -4$ és $x_4 = 1$. A polinom e két zérushely közötti intervallumban negatív, az intervallumon kívül pozitív. Ellentett előjelű a két polinom akkor, ha $x < -4$; $-4 < x < 1$; $x > 2$. Érdemes a polinomok grafikonját elkészíteni (parabolák) és az ábráról az előjelviszonyokat leolvasni.

1495. $-\infty < x < -\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{2} < x < 2$. Nem (az $x=2$ érték nem tartozik a megoldáshalmazhoz).

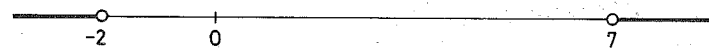
1496. $-1,5 < x < 2$; $x > 3$. Nem.

1497. $-\infty < x < -\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$. Igen.

1498. $x < -6$; $-3 < x < 0$.

1499. $\frac{1}{3} < x < 1$; $x > 2$.

1500. Az egyenlőtlenség felírható a $\frac{3(x-2)^2(x+2)}{x-7} > 0$ alakban, ahol $(x-2)^2$ az $x=2$ kivételével minden x értékre pozitív, tehát elegendő a továbbiakban az $\frac{x+2}{x-7} > 0$ egyenlőtlenséggel foglalkozni. A tört értéke akkor pozitív, ha vagy $x+2 > 0$ és $x-7 > 0$, vagyis ha $x > 7$, vagy akkor, ha $x+2 < 0$ és $x-7 < 0$, és ekkor $x < -2$. Az adott egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát $]-\infty; -2[\cup]7; \infty[$ (1500. ábra).



1500

1501. $-5 < x < 2$ (1501. ábra).



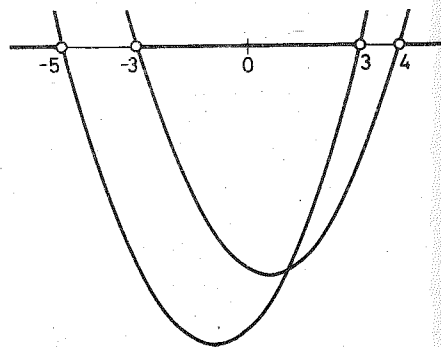
1501

1502. $x < 0$; $1 < x < 6$.

1503. $x \leq -0,25$; $x \geq 1$.

1504. A számlálóban álló másodfokú polinom zérushelyei $x_1 = -3$; $x_2 = 4$. A polinom a két zérushely közötti intervallumban negatív, az intervallumon kívül pozitív értékeket vesz föl. A nevezőben álló másodfokú polinom zérushelyei $x_3 = -5$, $x_4 = 3$. A polinom a két zérushely közötti intervallumban negatív, az intervallumon kívül pozitív értékeket vesz föl. Mind a két polinom pozitív, ha $x < -5$ vagy $x > 4$; mind a két

polinom negatív, ha $-3 < x < 3$. Az egyenlőtlenség megoldását tehát azok az x értékek adják, amelyekre $x < -5$; $-3 < x < 3$; $x > 4$ (1504. ábra).



1504

1505. $x < -4$; $2 < x < 4$; $x > 5$. Nem.

1506. $x = 1$.

1507. $x < 1$; $x > 3$.

1508. $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, tehát -1 .

1509. 4.

1510. $0 < x < 2$.

1511. $1 < x < 2$; $7 < x < 10$.

1512. $0 < x < 1$; $x > 6$.

1513. A tört számlálója is, nevezője is felírható elsőfokú polinomok szorzataként: $\frac{(x-2)(x-5)}{x(x-1)(x+2)} < 0$. Ha $x < -2$, akkor mind az öt tényező és így

a tört is negatív (megoldás). Ha $-2 < x < 0$, akkor egy tényező pozitív, négy negatív, így a tört értéke pozitív (nem megoldás). Ha $0 < x < 1$, akkor két tényező pozitív, három negatív, a tört negatív (megoldás). Ha $1 < x < 2$, akkor három tényező pozitív, kettő negatív, a tört pozitív (nem megoldás). Ha $2 < x < 5$, akkor négy tényező pozitív, egy negatív, a tört negatív (megoldás). Végül ha $x > 5$, akkor mind az öt tényező és így a tört is pozitív (nem megoldás). *Összefoglalva:* az egyenlőtlenség teljesül, ha $x < -2$; $0 < x < 1$; $2 < x < 5$.

1514. $-5 < x < 3$; $5 < x < 6$. Nem.

1515. $\{3; 4\}$.

1516. Nincs megoldás a valós számok halmazán.

1517. Az egyenlőtlenség megoldása: $-4 < x < -1$; $1 < x < 5$. A közös rész: $-2 \leq x < -1$; $1 < x \leq 3$.

1518. Az egyenlőtlenség megoldása: $-3 \leq x < 1$; $1 < x \leq 2$. A keresett egész számok így: -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 2 .

1519. Minden valós x -re teljesül.

1520. $2 < x < 3$.

1521. $x < -\frac{1+3\sqrt{5}}{2}$ ($= -3,85$); $-3 < x < 2$; $x > \frac{-1+3\sqrt{5}}{2}$ ($= 2,85$).

1522. $\{2; 3; 4\}$.

1523. 2 és az 5-nél nagyobb egész számok.

1524. $1 < x < 1,8$; $x > 2$.

1525. Az első egyenlőtlenség megoldása: $x < -3$; $-2 < x < 5$; $x > 7$, a második: $-3 < x < \frac{1}{3}$; $x > 5$. A megoldáshalmazok közös része: $-2 < x < \frac{1}{3}$; $x > 7$.

1526. Rendezve az egyenlőtlenséget $3(a-2)x > a-2$. $a \neq 2$, mert $a=2$ esetén ellentmondás ($0 > 0$) van. Ha $a > 2$, akkor $x > \frac{1}{3}$, ha $a < 2$, akkor $x < \frac{1}{3}$.

1527. Ha $m=3$, akkor minden valós x megoldás. Ha $m > 3$, akkor $x \leq m+3$, ha $m < 3$, akkor $x \geq m+3$.

1528. Ha $m=1$, akkor minden valós x megoldás, ha $m > 1$, akkor $x \geq m+1$, ha $m < 1$, akkor $x \leq m+1$.

1529. $x = \frac{2}{1-a}$. Ez akkor pozitív, ha $a < 1$, de $a \neq -1$.

1530. $x = \frac{-4}{p+2}$; $p > -2$; $p \neq 2$.

1531. $x = \frac{p-2}{p-1}$; $p < 1$.

1532. Az egyenletből kapott $x = \frac{a+12}{2a+3}$ akkor nagyobb, mint 1, ha $-\frac{3}{2} < a < 9$.

1533. $k \neq 1$, mert ha $k=1$, akkor az egyenlet $\frac{x+2}{x+2} = 4$ alakú, és ez ellentmondás. Az egyenletből $x = \frac{k+5}{k-4}$; $\frac{k+5}{k-4} < 3$ akkor áll fenn, ha $k > 8,5$ vagy $k < 4$. Így a feladat feltételének az alábbi k értékek tesznek eleget: $k < 1$; $1 < k < 4$; $k > 8,5$.

1534. $m < 2$; $m > 3$; $m \neq -3$; $m \neq 0$.

1535. $x = \frac{p^2+p-2}{p^2+3p+2} > 1$, ha $p < -1$, de $p \neq -2$; $p \neq -3$.

1536. $x = \frac{2m+16}{5-m} > 2$, ha $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{5} < m < 5$.

1537. Ha $a=1$, akkor az egyenlőtlenség elsőfokú és $-3x+9 > 0$ alakú. Ebből $x < 3$, vagyis az egyenlőtlenség nem „bármely” x -re teljesül. Ezért $a \neq 1$. Ha $a > 1$, akkor a másodfokú polinom csak úgy lehet minden x -re pozitív, ha diszkriminánsa negatív, azaz (rendezés után) $-11a^2+4a+16 < 0$. A bal oldal akkor zérus, ha $a_{1,2} = \frac{2 \pm 6\sqrt{5}}{11}$. A bal oldal akkor negatív (figyelembe véve az $a > 1$ feltételt is), ha $a > \frac{2+6\sqrt{5}}{11}$ ($= 1,4$). Ha $a < 1$, akkor a másodfokú polinom másodfokú tagjának együtthatója negatív és ezért a polinom minden x értékre nem lehet pozitív. Az a paraméter kérdéztett értékei ezért $a > \frac{2+6\sqrt{5}}{11}$ ($= 1,4$).

1538. $2 < m < 4$.

1539. $k=5$ esetén a bal oldalon álló polinom elsőfokú és alakja $8x-8=0$, de ez nem minden x -re negatív; ezért $k \neq 5$. Ha $k < 5$, akkor a másodfokú polinom másodfokú tagjának együtthatója pozitív, és ezért a polinom minden x értékre nem lehet negatív. Ha $k > 5$, akkor csak úgy lehet a polinom minden x értékre negatív, ha diszkriminánsa negatív, vagyis

(rendezés után) $-k^2+10k-9 < 0$. Ebből vagy $k < 1$ vagy $k > 9$. Egybevetve ezt a $k > 5$ feltétellel, azt mondhatjuk, hogy a polinom minden x értékre akkor negatív, ha $k > 9$.

1540. $m > \frac{14+5\sqrt{10}}{6}$ ($= 4,96$).

1541. Ha $x \geq 0$, akkor az egyenlőtlenség $x^2 \leq x$, azaz $x(x-1) \leq 0$ alakú. A feltétel mellett ez akkor teljesül, ha $0 \leq x \leq 1$. Ha $x < 0$, akkor az egyenlőtlenség $x^2 \leq -x$ alakú. A feltétel mellett ez akkor teljesül, ha $-1 \leq x < 0$. Az adott egyenlőtlenség tehát azokra az x valós értékekre áll fenn, amelyekre $-1 \leq x \leq 1$.

Megjegyzés: Mivel mind az $x \mapsto x^2$, mind $x \mapsto |x|$ függvények grafikonja könnyen felrajzolható, az egyenlőtlenség grafikus úton is megoldható, vagy az ellenőrzéshez felhasználható.

1542. A négyzetre emelés és rendezés után kapott $x^2-13x+30 < 0$ egyenlőtlenség megoldása $3 < x < 10$. Ebben az intervallumba eső egész számok 4; 5; 6; 7; 8; 9, kielégítik az egyenlőtlenséget. $x+6 \geq 0$, $x \geq -6$, de $x \leq 3$ esetén a bal oldal ≥ 0 a jobb oldal ≤ 0 , tehát ezek a megoldások is jók. Megoldás: $x \in \mathbf{Z}$; $-6 \leq x \leq 9$.



1543. $-7 \leq x < 2$. 1544. $3 < x$.

1545

1545. $x > -4$ (1545. ábra).

1546. Ha az egyenlőtlenség mind a két oldalát $\frac{1}{2}$ hatványaként írjuk fel, akkor az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a kitevőkre $\frac{x+1}{x-1} < 5$ áll fenn. Ha $x > 1$, akkor az előbbi egyenlőtlenségből $x > \frac{3}{2}$, és e két egyenlőtlenség az $x > \frac{3}{2}$ értékekre teljesül. Ha $x < 1$, akkor az előbbi egyenlőtlenségből $x < \frac{3}{2}$, és e két egyenlőtlenség az $x < 1$ értékekre teljesül. A megoldás tehát $x < 1$, $x > \frac{3}{2}$. A $[0; 1]$ intervallum $[0; 1]$ részintervalluma esik a megoldáshalmazba.

1547. Azonos átalakítások után $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 < 0$. A 2^x -ben másodfokú polinom zérushelyei -1 és 3 . Mivel 2^x csak pozitív lehet, ezért az adott

egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $0 < 2^x < 3$, vagyis ha $-\infty < x < \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} (= 1,58)$.

1548. A logaritmusfüggvény akkor értelmezhető, ha $3x - 2 > 0$, azaz $x > \frac{2}{3}$.

Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő, ezért az adott

egyenlőtlenség akkor teljesülhet, ha $0 < 3x - 2 < 1$, vagyis $\frac{2}{3} < x < 1$.

Ezt nem szűkíti az előbbi feltétel, ezért ez a megoldás.

1549. $x > 1$.

1550. $(-0,38 =) \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \leq x < 0$.

1551. $1 < x < 2; x > 3$.

1552. Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $\frac{7 - 4x - x^2}{1 + x^2} > 1$, vagyis ha (mivel $x^2 + 1 > 0$) $x^2 + 2x - 3 < 0$. Ebből $-3 < x < 1$, vagyis a megoldás: $-2; -1; 0$.

1553. $x > 4$.

1554. A szereplő logaritmusfüggvények akkor értelmezhetők, ha $x > 0$. A 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért $x + 3 > 2x$, ebből $x < 3$. A két korlátot egybevetve a megoldáshalmaz a $]0; 3[$ intervallum (1554. ábra).



1554



1555

1555. $0,5 < x < 3$ (1555. ábra).

1556. $0,5 < x < 2$. A $]0,5; 1]$ részintervallum.

1557. Az első egyenlőtlenségből $x \leq -1$, a másodiktól $x < -\frac{3}{5}$, a megoldás tehát: $x \leq -1$.

1558. $x > 0,5$.

1559. $\frac{2}{7} < x < 2$.

1560. $3,125 < x < 9$ (1560. ábra).

1561. $-\frac{12}{5} < x < \frac{11}{35}$ (1561. ábra).

1562. $-\frac{17}{13} < x < \frac{14}{5}$.

1563. $x \leq 0$.

1564. Ha $x > 0$, akkor rendezés után az első egyenlőtlenségből $x > \frac{13}{3}$, a másodiktól $x > 3$. A kettő akkor teljesül egyszerre, ha $x > \frac{13}{3}$. Ha

$x < 0$, akkor az első egyenlőtlenségből (változatlanul) $x > \frac{13}{3}$, a másodiktól $x < 3$. A kettő akkor teljesül egyszerre, ha $x > \frac{13}{3}$.

1565. $x < 0; x > 4$. A metszethalmaz a $[-1; 0[$ intervallum.

1566. $1 < x < \frac{10}{7}$.

1567. Az első egyenlőtlenség megoldása $x < 1$ és $x > 2,5$; a másodiké $x < 2$. Közös megoldás tehát van, mégpedig minden 1-nél kisebb egész szám.

1568. Van. Minden 4-nél nagyobb egész szám. Például $x = 5$.

1569. $-6 < x < 1$, de $x \neq -3$.

1570. Azonos átalakítás után az első egyenlőtlenség $2(x-3)^2(x-5) < 0$ alakú, és ez akkor teljesül, ha $x < 5$, de $x \neq 3$ (mert akkor a bal oldal 0), a második egyenlőtlenség akkor, ha $x > 2$. A két egyenlőtlenséget azok az x értékek elégítik ki, amelyekre $2 < x < 5$, de $x \neq 3$.



1560



1561

1571. $-2 < x < -1; \frac{2}{3} < x < 1.$

1572. $-1; 0; 1; 2; 3.$

1573. Az első egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $3 < x < 6$, a második akkor, ha $-3 < x < 4$. Az első vagy a második egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-3 < x < 6$.

1574. $-4 < x < 5.$

1575. $-3 < x < -2; 2 < x < 3.$

1576. Minden valós x értékre teljesül, vagy az egyik vagy a másik egyenlőtlenség.

1577. $2; 3; 4.$

1578. Az első egyenlőtlenségből $x \geq 7$, a másodikból $x < 10,1$. Tehát $x \in \{7; 8; 9; 10\}$.

1579. $-2; -1; 0.$

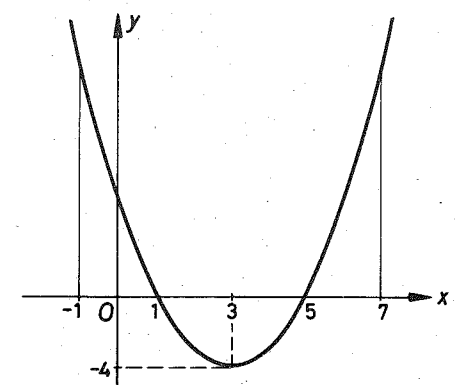
1580. $-13 < x < -6; 2 < x < 5.$

1581. $(-1,3 =) \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < 2.$

XIII. FEJEZET

Függvények értelmezése, ábrázolása

1582. $x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$. ÉK: $[-4; \infty[$ (1582. ábra). A függvény pozitív a $]-\infty; 1[$ és az $]5; +\infty[$ intervallumokon, nulla az $x = 1$ és $x = 5$ helyeken, míg negatív az $]1; 5[$ számközön.



1583. a) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$,
ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

b) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$,
ÉK: $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{5}\right\}$.

Mivel

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3),$$

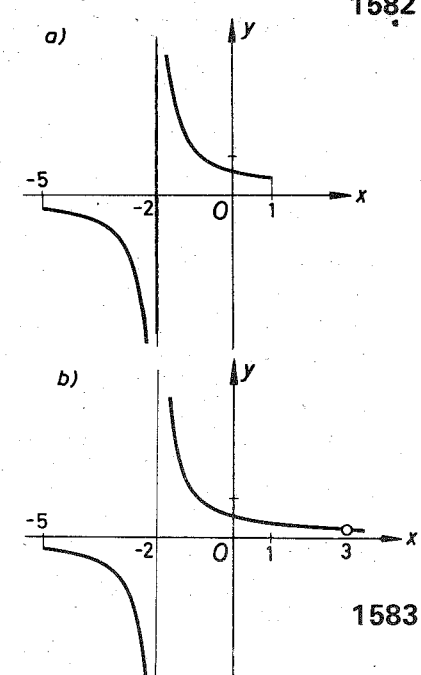
ezért $g: \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \frac{x - 3}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{x + 2}.$$

A hozzárendelés módja közös, de a két függvény különböző, mert ÉT-ban (és így ÉK-ben is) különböznek. Görbékük egy

pont híján azonos (a b) görbé-

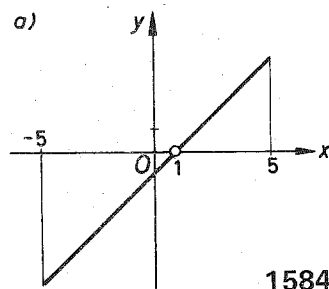
jén nincs a $\left(3; \frac{1}{5}\right)$ (1583. ábra).



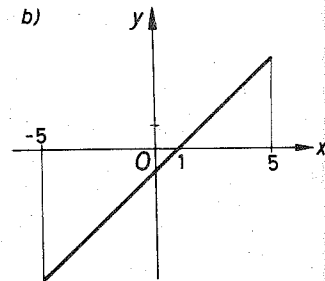
1584. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, tehát

- a) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. b) ÉT: \mathbb{R} ,
 ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; ÉK: \mathbb{R} .

Görbékük egy pont híján azonos, az a)-nak nincs (1; 0) pontja (1584. ábra)!

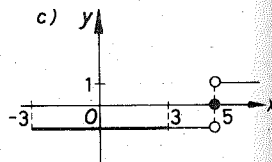
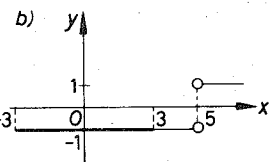
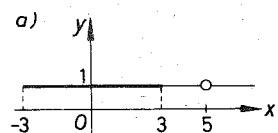


1584



1585. a) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, b) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, c) ÉT: \mathbb{R} ,
 ÉK: $\{1\}$; ÉK: $\{-1; 1\}$; ÉK: $\{-1; 0; 1\}$.

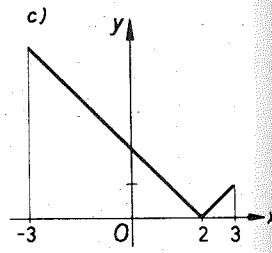
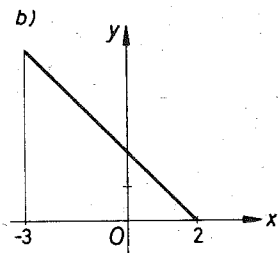
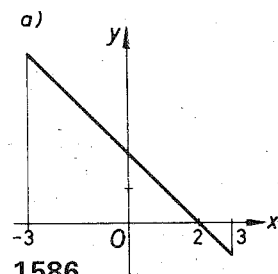
Az $x - 5$ kifejezés mindegyikben szerepel, és így mindegyikük görbéjének van egy közös félegyenese (1585. ábra).



1585

1586. a) ÉT: \mathbb{R} , b) ÉT: $]-\infty; 2]$, c) ÉT: \mathbb{R} ,
 ÉK: \mathbb{R} ; ÉK: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; ÉK: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

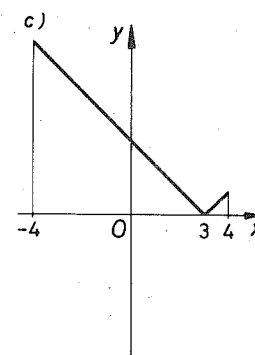
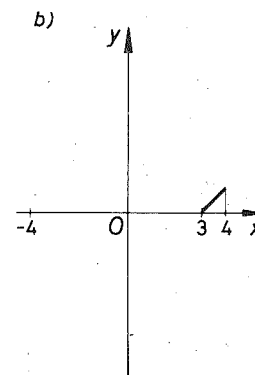
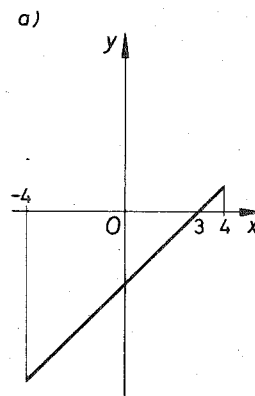
A $2 - x$ kifejezést mind tartalmazza, s így mindegyikük görbéjének van egy közös félegyenese (1586. ábra).



1586

1587. a) ÉT: \mathbb{R} , b) ÉT: $[3; +\infty[$, c) ÉT: \mathbb{R} ,
 ÉK: \mathbb{R} ; ÉK: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; ÉK: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

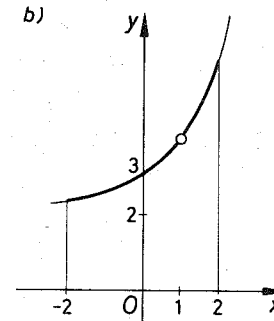
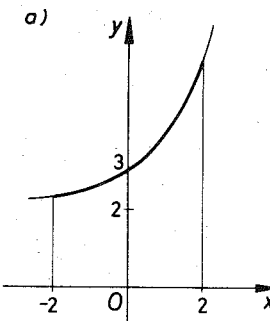
Az $x - 3$ kifejezést mindegyik tartalmazza, és így mindegyikük görbéjének van egy közös félegyenese (1587. ábra).



1587

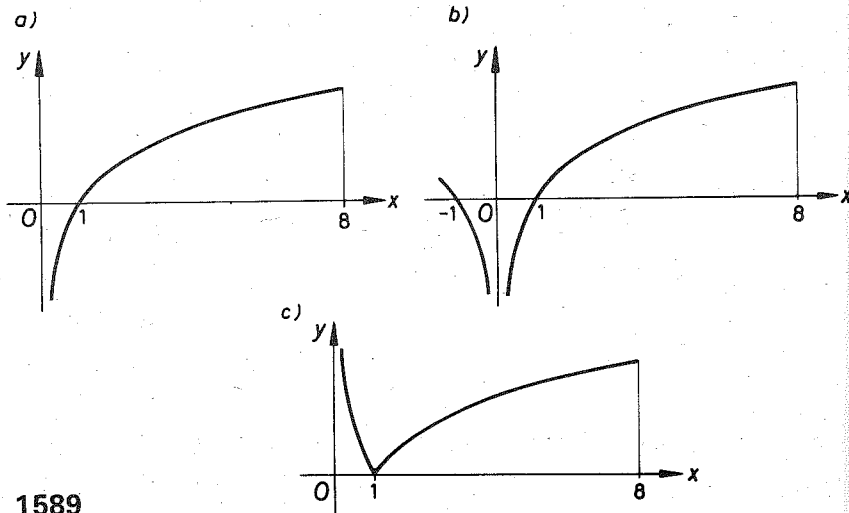
1588. a) ÉT: \mathbb{R} , b) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 ÉK: $]2; +\infty[$; ÉK: $]2; +\infty[\setminus \{4\}$.

Az (1; 4) pont híján azonos a két görbe (1588. ábra).



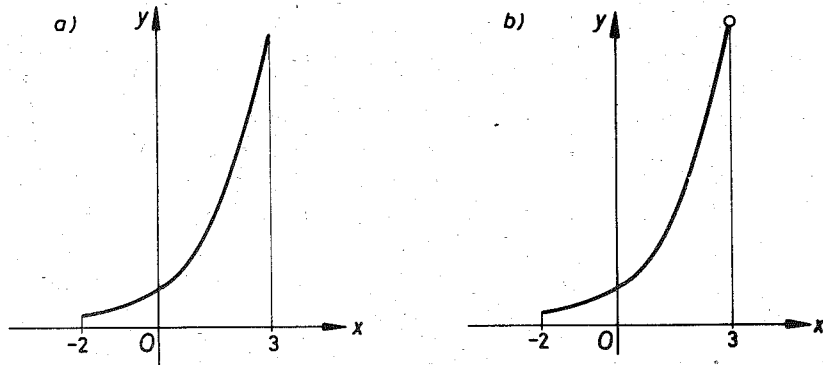
1588

1589. a) ÉT: \mathbb{R}^+ ,
ÉK: \mathbb{R} ;
(1589. ábra).
b) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
ÉK: \mathbb{R} ;
c) ÉT: \mathbb{R}^+ ,
ÉK: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.



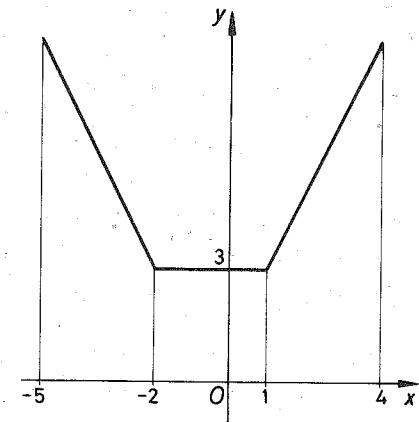
1589

1590. a) ÉT: \mathbb{R} ,
ÉK: \mathbb{R}^+ ;
a) és b) azonosak. A c) görbéje az a) pozitív fele, és ennek az y tengelyre vonatkozó tükörképének egyesítésével adódik.
b) ÉT: \mathbb{R} ,
ÉK: \mathbb{R}^+ ;
c) ÉT: \mathbb{R} ,
ÉK: $[1; +\infty[$.
1591. a) ÉT: \mathbb{R} ,
ÉK: \mathbb{R}^+ ;
b) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$,
ÉK: $\mathbb{R}^+ \setminus \{8\}$.
A két függvény görbéje a (3; 8) pont kivételével azonos (1591. ábra).



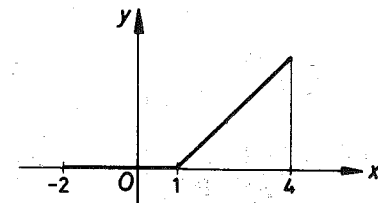
1591

1592. Ha $x \leq -2$, úgy $|x+2| = -x-2$ és $|x-1| = -x+1$, tehát kifejezésünk $-2x-1$. Ha $-2 \leq x \leq 1$, úgy kifejezésünk $|x+2| = x+2$ és $|x-1| = -x+1$ miatt a 3, végül $1 \leq x$ mellett $|x+2| = x+2$ és $|x-1| = x-1$, tehát kifejezésünk a $2x+1$. A függvény görbéje a $[-5; 4]$ felett (1592. ábra). ÉT: \mathbb{R} ; ÉK: $[3; +\infty[$.



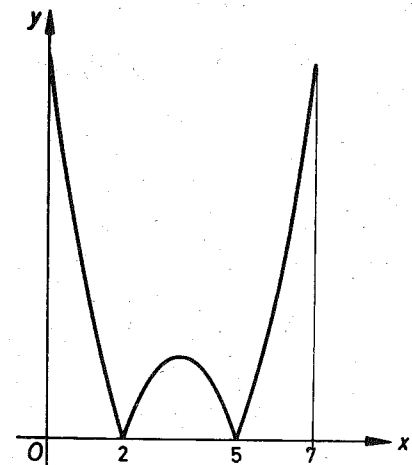
1592

1593. Ha $x \leq 1$, úgy $|x-1| = -x+1$, ha viszont $1 \leq x$, akkor $|x-1| = x-1$, tehát az első esetben kifejezésünk az azonosan 0, míg az utóbbi esetben az $x-1$ (1593. ábra). ÉT: \mathbb{R} ;
ÉK: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.



1593

1594. Az $x^2 - 7x + 10 = (x-2) \cdot (x-5)$, és ezért $x \leq 2$ -re
 $|x^2 - 7x + 10| = |(x-2) \cdot (x-5)| = |x-2| |x-5| = (-x+2)(-x+5) = x^2 - 7x + 10$. Ha $2 \leq x \leq 5$, akkor $|x^2 - 7x + 10| = |x-2| |x-5| = (x-2)(-x+5) = -x^2 + 7x - 10$, végül $5 \leq x$ esetén $|x^2 - 7x + 10| = |x-2| |x-5| = (x-2)(x-5) = x^2 - 7x + 10$. ÉT: \mathbb{R} ; ÉK: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (1594. ábra).



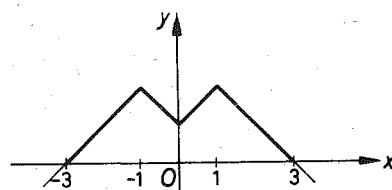
1594

1595. Ha az $x \leq 0$, úgy $|x| = -x$, tehát $|x| - 1 = -x - 1$. Ha most még $x \leq -1$ is, úgy $||x| - 1| = |-x - 1| = -x - 1$, míg $0 \geq x \geq -1$ mellett $||x| - 1| = |-x - 1| = x + 1$. Vagyis

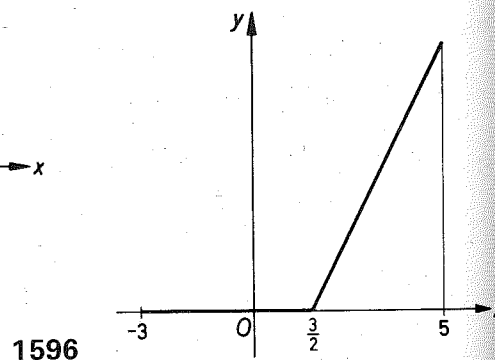
$$||x| - 1| - 2| = \begin{cases} |-x - 1 - 2| = |-x - 3|, & \text{ha } x \leq -1; \\ |-x - 1| = x + 1, & \text{ha } -1 \leq x \leq 0; \\ ||x - 1| - 2|, & \text{ha } 0 \leq x. \end{cases}$$

Ennélfogva, ha $x \leq -3$, akkor $|-x - 3| = -x - 3$ és $-3 \leq x \leq -1$ mellett $|-x - 3| = x + 3$. Ha pedig $0 \leq x \leq 1$, úgy $|x - 1| = -x + 1$, tehát $||x - 1| - 2| = |-x + 1 - 2| = |-x - 1| = x + 1$. Az $1 \leq x$ -re $|x - 1| = x - 1$, ezért $||x - 1| - 2| = |x - 3|$, tehát $1 \leq x \leq 3$ -ra $||x - 1| - 2| = |x - 3| = -x + 3$, és $3 \leq x$ esetén $||x - 1| - 2| = |x - 3| = x - 3$.
ÉT: \mathbf{R} ; ÉK: $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.

Vagy: $|x| = |-x|$ miatt a függvény páros függvény, menetét tehát elég a nemnegatív helyeken vizsgálni. Görbéje tükrös az y tengelyre (1595. ábra).



1595



1596

1596. ÉT: \mathbf{R} és $\sqrt{c^2} = |c|$ miatt kifejezésünk a $\sqrt{(2x-3)^2} + 2x - 3 = |2x-3| + 2x - 3$ alakot ölti. Ezért $x \leq \frac{3}{2}$ -re $|2x-3| = -2x+3$, vagyis

$$\sqrt{(2x-3)^2} + 2x - 3 = 0, \text{ míg } \frac{3}{2} \leq x \text{-re } |2x-3| = 2x-3, \text{ tehát } \sqrt{(2x-3)^2} + 2x - 3 = 2(2x-3) = 4x - 6. \text{ Képe: (1596. ábra). ÉK: } \mathbf{R}^+ \cup \{0\}.$$

1597. a) $3^x - 9 \geq 0$, ha $x \geq 2$, mert az $x \mapsto 3^x$ szigorúan növekedő függvény. ÉT: $[2; +\infty[$.
b) $3^x - 9 > 0$, ha $x > 2$ az előzőek miatt. ÉT: $]2; +\infty[$.

1598. a) $x^2 \geq 0$ miatt ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$;
b) ÉT: \mathbf{R}^+ .

1599. a) $x - 4 > 0$ és $x + 1 > 0$ egyszerre kell teljesüljön. Így ÉT: $]4; +\infty[$.
b) Mivel $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$, amiből $x - 4 > 0$ és $x + 1 > 0$, vagy $x - 4 < 0$ és $x + 1 < 0$ kell egyszerre fennálljon. Ezek az $x > 4$ vagy $x < -1$ mellett teljesülnek, tehát ÉT: $] -\infty; -1[$ és $]4; +\infty[$.

1600. a) Mivel $\sqrt{x-1} \geq 0$ valós számot jelöl, ezért ha $x > 1$, úgy $\sqrt{x-1} > 0$, és így $\lg \sqrt{x-1}$ létezik. ÉT: $]1; +\infty[$.
b) $x > 1$ mellett értelmezhető a $\lg(x-1)$ kifejezés és $\lg(x-1) \geq 0$, ha $x-1 \geq 1$, azaz $x \geq 2$. ÉT: $[2; +\infty[$.

1601. a) $\frac{x+1}{x} > 0$ pontosan akkor, ha $x+1 > 0$ és $x > 0$, vagy $x+1 < 0$ és $x < 0$. Így ÉT: $] -\infty; -1[$ és $]0; +\infty[$.
b) $x \neq 0$ kell legyen a nevező miatt, míg $x+1 > 0$ a számláló miatt. ÉT: $] -1; 0[$ és $]0; +\infty[$.

1602. a) $x^2 - x - 6 > 0$ és $4 - x^2 > 0$ egyszerre kell teljesüljön. $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ miatt $x > 3$ és $x > -2$, vagy $x < 3$ és $x < -2$ mellett következik be az első tag értelmezhetősége, míg $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$, így $2-x > 0$ és $2+x > 0$, vagy $2-x < 0$ és $2+x < 0$ teljesíti a második taggal szembeni követelményt. Az első esetben $-2 < x < 2$, míg a második feltétel nem teljesíthető. A tagok külön-külön értelmezhetők, de értelmezési tartományaiknak nincs közös része, így ÉT: \emptyset .
b) A nevező zérustól különböző kell legyen, ezért $|x| \neq 1$, tehát $x \neq -1$ és $x \neq 1$. A számlálóban $1 - x^2 \geq 0$ kell legyen. Ez előbbi megszorításaink miatt a $-1 < x < 1$ mellett teljesül ÉT: $] -1; 1[$.

1603. Az első tag $2-x \geq 0$, vagyis $x \leq 2$ mellett, a második tag $x > 0$ mellett értelmezhető, így az összeg a $]0; 2]$ -ben.

a) ÉT: $]0; 2]$; b) ÉT: $]0; 2] \cap \mathbf{Q}$; c) ÉT: $\{1, 2\}$.

1604. a) A nevező miatt $\sin x > 0$ kell legyen a \lg függvény értelmezhetősége miatt, de $\lg \sin x = 0$, azaz $\sin x = 1$ kizárt. Így $2\pi k < x < \pi(2k+1)$; $k \in \mathbf{Z}$, de $x \neq \frac{\pi}{2}(4k+1)$, a nevező értelmezési tartománya. A számláló $16 - x^2 = (4-x)(4+x) \geq 0$ mellett értelmezhető, vagyis $-4 \leq x \leq 4$ kell legyen. A hányados tehát a $[-4; -\pi[\cup]0; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \pi[$ számközön értelmezhető.

b) $\sin x > 0$ kell legyen az lg függvény értelmezhetősége és $\lg \sin x \geq 0$ a négyzetgyökfüggvény értelmezhetősége miatt. Mivel $|\sin x| \leq 1$ és 1-nél kisebb valóságokra az lg értékkészlete negatív, ezért $\sin x = 1$ lehet csak. ÉT: $\left\{ \frac{\pi}{2}(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

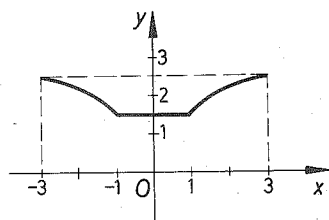
1605. a) Mivel $|\sin x| \leq 1$, ezért $1 + \sin x \geq 0$ és így ÉT: \mathbf{R} .

b) $1 + \operatorname{tg} x \geq 0$, ha $-1 \leq \operatorname{tg} x$, tehát ÉT: $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

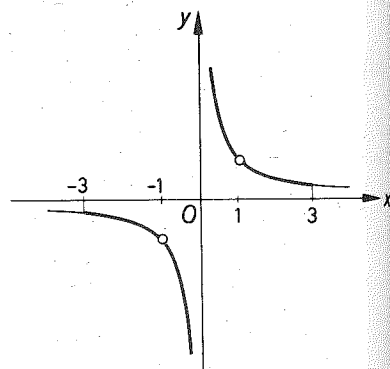
1606. a) $x \geq 0$ kell legyen a nevező \sqrt{x} tagja miatt, és $x \leq 1$ a számláló miatt. Ezért ÉT: $[0; 1]$.

b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 0$ pontosan akkor, ha $\left(\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ miatt $0 \leq \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x}$. Ennek számlálója pozitív, tehát $\operatorname{tg} x > 0$ lesz annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a kifejezés értelmezhető legyen. ÉT: $\left] \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right[$, $(k \in \mathbf{Z})$.

1607. A gyökjel alatti tagok mindegyike nemnegatív, ezért ÉT: \mathbf{R} . Ha $x \leq -1$, úgy $\sqrt{|x+1| + |x-1|} = \sqrt{-x-1-x+1} = \sqrt{-2x}$, ha $-1 \leq x \leq 1$, úgy $\sqrt{|x+1| + |x-1|} = \sqrt{x+1-x+1} = \sqrt{2}$, végül $1 \leq x$ -re $\sqrt{|x+1| + |x-1|} = \sqrt{x+1+x-1} = \sqrt{2x}$ (1607. ábra).



1607



1608

1608. Egyrészt $x-1 \neq 0$ és $x+1 \neq 0$, azaz $x \neq -1$ és $x \neq 1$ az 1 számlálójú törtek miatt, másrészt $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = 0$ is kizárt, vagyis

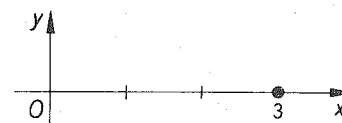
$1+x-(1-x) = 0$, tehát $x=0$ sem lehet. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

ÉK: $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ (1608. ábra).

1609. Mivel $x-3 \geq 0$ és $3-x \geq 0$ egyszerre kell teljesüljön, ami egyedül $x=3$ mellett teljesül, s ekkor $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-3} = 0$, ÉT: $\{3\}$, ÉK: $\{0\}$ (1609. ábra).



1609

1610. Az $x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$ miatt $x + \frac{a}{2} = 0$ adja a minimum helyét, tehát $3 + \frac{a}{2} = 0$, azaz $a = -6$. Erre $x^2 + ax + b = -2$, ha $9 + (-6) \cdot 3 + b = -2$, azaz $b = 7$.

1611. A $-x^2 + ax + b = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + b + \frac{a^2}{4}$ maximális, ha $x = \frac{a}{2}$, azaz $-1 = \frac{a}{2}$, tehát $a = -2$. Erre a maximum $b + \frac{a^2}{4} = 3$, ha $b = 2$.

1612. A $\cos \frac{x}{2}$ értelmezési tartománya: \mathbf{R} , a $\operatorname{tg} x$ függvényé

$$\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Így ezek közös része $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ a kifejezés értelmezési tarto-

mánya. A $\operatorname{tg} x$ periódusa π , a $\cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x+4\pi k}{2} = \cos \left(\frac{x}{2} + 2\pi k \right)$, $k \in \mathbf{Z}$ miatt a $\cos \frac{x}{2}$ periódusa 4π , így függvényünk 4π -ben periodikus.

1613. A tagok mindenütt értelmezettek, így ÉT: \mathbf{R} . A $\sin 2x$ periódusa $\sin 2x = \sin 2(x+\pi k) = \sin (2x+2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$ miatt π . A $\cos(x+\pi) = -\cos x$ és ennélfogva $\cos^2 x = \cos^2(x+\pi)$, tehát a $\cos^2 x$ periódusa is π , ezért $\sin 2x + \cos^2 x = \sin(2(x+\pi)) + \cos^2(x+\pi)$, tehát a függvény periódusa π .

1614. A $\sin 4x$ mindenütt, a $\operatorname{tg} 2x$ a $2x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken nem értelmezett, vagyis ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

$$\sin 4x = \sin 4 \left(x + \frac{\pi}{2} n \right) = \sin (4x + 2\pi n), \quad n \in \mathbf{Z}$$

miatt a $\sin 4x$ -nek $\frac{\pi}{2}$ a periódusa, míg $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2 \left(x + \frac{\pi}{2} n \right) = \operatorname{tg} (2x + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$ szerint a $\operatorname{tg} 2x$ is $\frac{\pi}{2}$ -ben periodikus, így a $\sin 4x - \operatorname{tg} 2x + 1$ periódusa $\frac{\pi}{2}$.

1615. A kifejezés minden valós x -re értelmezett, hiszen tagjai ilyenek. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (minden $x \in \mathbf{R}$) és $\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{x+4\pi k}{2} = \sin \left(\frac{x}{2} + 2\pi k \right)$, $k \in \mathbf{Z}$ miatt függvényünk 4π -ben periodikus.

1616. A $\operatorname{tg} x$ $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2n+1) \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$ értelmezési tartománya adja a kifejezés értelmezési tartományát, hiszen többi tagja minden $x \in \mathbf{R}$ -re értelmezett. A $\cos 2x = \cos 2(x+\pi n) = \cos (2x+2\pi n)$ miatt a függvény π -ben periodikus, hiszen $\cos 2x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - \pi = \cos 2(x+\pi n) + \frac{1}{2} \operatorname{tg} (x+\pi n) - \pi$ minden szóba jövő valós x -re.

1617. A $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ azonosság miatt $\sin^2 2x - \cos^2 2x = -\cos 4x$, tehát egyrészt az ÉT: \mathbf{R} , másrészt $\cos 4x = \cos 4 \left(x + \frac{\pi}{2} n \right) = \cos (4x + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$, tehát a függvény periódusa $\frac{\pi}{2}$.

1618. Mind a sinus-, mind a cosinusfüggvény mindenütt értelmezett, így kifejezésünkre is az ÉT: \mathbf{R} . Mivel $\sin \left(\frac{2}{3}x - \pi \right) = \sin \frac{2}{3} \left(x - \frac{3\pi}{2} + 3\pi n \right) = \sin \left(\frac{2}{3}x - \pi + 2\pi n \right)$, $n \in \mathbf{Z}$ és $\cos \left(\frac{2}{5}x + \pi \right) = \cos \frac{2}{5} \left(x + \frac{5\pi}{2} + 5\pi n \right) = \cos \left(\frac{2}{5}x + \pi + 2\pi n \right)$, tehát az első tag 3π -ben, a második 5π -ben periodikus, így összegük a 15π -ben periodikus.

1619. $\frac{x}{5} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, ha $x = \frac{5\pi}{4}(4k+1)$. Ezért a kifejezés az $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{5\pi}{4}(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ halmazon értelmezett. Mivel $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{x+5\pi n}{5} + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{4} + \pi n \right)$, $n \in \mathbf{Z}$, ezért a függvény periódusa 5π .

1620. Kizárni csak az $\frac{x}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ eshetőséget kell a tangens értelmezése miatt, tehát ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{ \pi(6k-1) \mid k \in \mathbf{Z} \}$.

A $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin x = \operatorname{tg} \left(\frac{x+6\pi k}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin (x+6\pi k) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{6} + \frac{2\pi}{3} + \pi k \right) - \sin (x+2\pi m)$, $m=3k$, $k \in \mathbf{Z}$ miatt 6π -ben periodikus függvény.

1621. A sinusfüggvény mindenütt értelmezett, tehát ÉT: \mathbf{R} .

Mivel $\sin \left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{6} + \pi \right)$, ezért a $\sin^2 \left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{6} \right) - 1$ periódusa $\frac{5\pi}{2}$.

1622. Mindkét tag értelmezési tartománya a valós számok halmaza, így a kifejezése is, ÉT: \mathbf{R} .

$$\begin{aligned} \cos \frac{3x}{2} &= \cos \left(\frac{3}{2} \left(x + \frac{4\pi}{3} n \right) \right) = \cos \left(\frac{3x}{2} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbf{Z} \text{ és } \sin \frac{x}{3} = \\ &= \sin \frac{x+6\pi n}{3} = \sin \left(\frac{x}{3} + 2\pi n \right) \text{ miatt a függvény a } \frac{4\pi}{3} \text{ és } 6\pi \text{ legkisebb} \\ &\text{közös többszörösében, azaz } 12\pi\text{-ben periodikus } \left(12\pi = 2 \cdot 6\pi = 9 \cdot \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

1623. ÉT: \mathbf{R} , mivel a tagok mindegyike külön-külön is értelmezhető a valós számok halmazán. $\cos 2x = \cos 2(x+\pi)$ miatt ez a tag π -ben periodikus. A $\sin \frac{nx}{4} = \sin \frac{n}{4} \left(x + \frac{8\pi}{n} \right)$, ha $n \neq 0$ és $\sin \frac{nx}{4} = \sin 0 = 0$, ha $n=0$. Ezért $n=0$ -ra a függvény π -ben, míg $n \neq 0$ -ra a periódus a π és a $\frac{8\pi}{n}$ legkisebb közös többszöröse. Ez, ha n a 8-nak osztója $\frac{8\pi}{n}$, ha 8 osztója az n -nek, akkor π és minden más n -re 8π .

1624. ÉT: \mathbf{R} , mivel a tagok mindenütt értelmezhetők!

$\sin ax = \sin a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right)$ és $\cos \frac{x}{a} = \cos \frac{x+2a\pi}{a} = \cos \left(\frac{x}{a} + 2\pi \right)$ miatt a függvény periódusa a $\frac{2\pi}{a}$ és a $2a\pi$ „legkisebb” közös többszöröse, ha van olyan x és y pozitív egész, melyekre $\frac{2\pi}{a} x = 2a\pi y$, azaz $x = a^2 y$. Ez pontosan akkor áll, ha $a^2 \in \mathbf{Q}^+$.

1625. $\sin \frac{2x}{3} > 0$ kell legyen az lg értelmezhetősége miatt. Ez $2\pi k < \frac{2x}{3} < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis $3\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 3\pi k$ adja az lg $\sin \frac{2x}{3}$ értelmezési tartományát.

A $\sin \frac{2x}{3} = \sin \frac{2}{3} (x+3\pi) = \sin \left(\frac{2x}{3} + 2\pi \right)$ miatt a függvény periódusa 3π .

1626. $\sin 2x \leq 1$ miatt $1 - \sin 2x \geq 0$, tehát $\sqrt{1 - \sin 2x} \geq 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ -re. $\sqrt{1 - \sin 2x} > 0$, ha $\sin 2x \neq 1$, azaz $2x \neq \frac{\pi}{2} (4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis ha $x \neq \frac{\pi}{4} (4k+1)$. A kifejezés ÉT-je: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} (4k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$. Minden $x \in \text{ÉT-re}$ $\sin 2x = \sin 2(x+\pi) = \sin (2x+2\pi)$, tehát függvényünk periódusa π .

1627. $\sin \frac{\pi x}{5} > 0$ kell legyen, vagyis $2\pi k < \frac{\pi x}{5} < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, azaz $10k < x < 10k+5$, $k \in \mathbf{Z}$ mellett lg $\sin \frac{\pi x}{5}$ értelmezett. Mivel $\sin \frac{\pi}{5} x = \sin \frac{\pi}{5} (x+10) = \sin \left(\frac{\pi x}{5} + 2\pi \right)$, ezért a függvény periódusa 10.

1628. $\text{tg} \frac{\pi x}{3} > 0$ kell legyen, azaz $\pi k < \frac{\pi x}{3} < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, tehát $3k < x < \frac{3}{2} + 3k$, $k \in \mathbf{Z}$ adja a kifejezés értelmezési tartományát. $\text{tg} \frac{\pi x}{3} = \text{tg} \frac{\pi}{3} (x+3) = \text{tg} \left(\frac{\pi x}{3} + \pi \right)$ miatt a függvény periódusa 3.

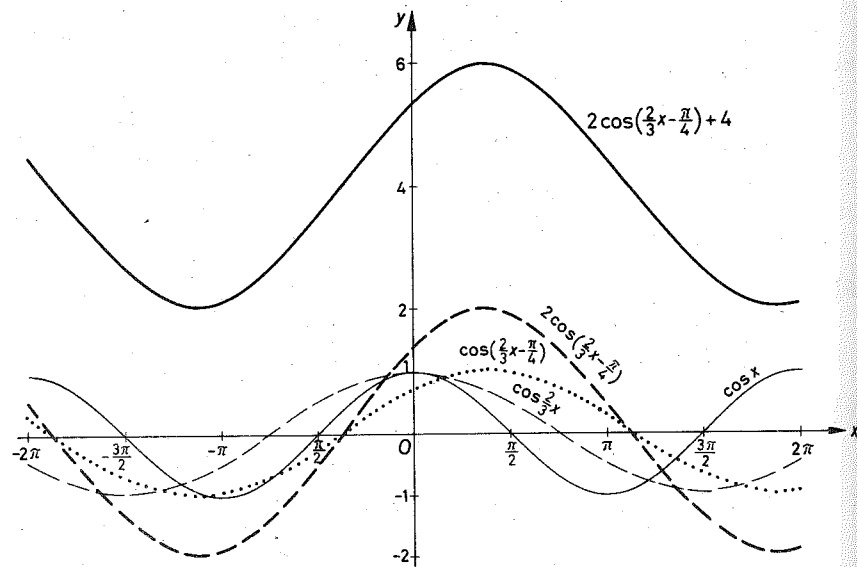
1629. A $\sin^2 x$ értelmezési tartománya is, a 2^t értelmezési tartománya is a valós számok halmaza, tehát ÉT: \mathbf{R} . Mivel $\sin^2 x = \sin^2 (x+\pi) = (-\sin x)^2$, ezért a függvény periódusa π .

1630. $\sin 5x > 0$ kell legyen. Ez a $2\pi n < 5x < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ mellett, azaz $\frac{2\pi}{5} n < x < \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} n$, $n \in \mathbf{Z}$ esetén áll fenn. Ez az ÉT. $\sin 5x = \sin 5 \left(x + \frac{2\pi}{5} \right) = \sin (5x+2\pi)$ minden $x \in \text{ÉT-ra}$, így a függvény periódusa $\frac{2\pi}{5}$.

1631. $\sin x > 0$ és $\cos x > 0$ szükséges és elégséges feltétele a kifejezés értelmezhetőségének. Ez a $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ feltétellel teljesül. Ez adja a kifejezés ÉT-át. $\sin x = \sin (x+2\pi)$ és $\cos x = \cos (x+2\pi)$ minden $x \in \mathbf{R}$ -re, tehát a függvény periódusa 2π .

1632. ÉT: R. A függvény képét transzformációval állítjuk elő a $\cos x$ képéből. Az x tengely menti $\frac{3}{2}$ -szeres nyújtással a $\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ képét a tengely mentén történő $\frac{3\pi}{8}$ -dal pozitív irányba való eltolással a $\cos\frac{2}{3}\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$ képét kapjuk. Ha ezt 2-szeresére nyújtjuk, majd 4 egységgel eltoljuk és mindezt az y tengely mentén, úgy a függvény képét nyerjük.

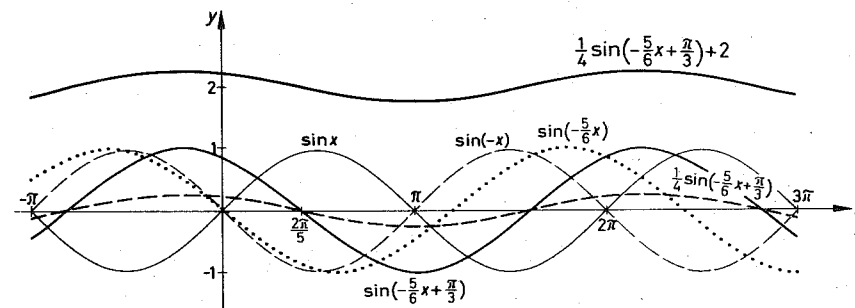
A $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2(x+3\pi)}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ miatt a függvény 3π -ben periodikus (1632. ábra).



1632

1633. ÉT: R. A $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5}{6}\left(x + \frac{12\pi}{5}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5}{6}x\right)$ miatt a görbe $\frac{12\pi}{5}$ -ben periodikus. A függvény képét a $\sin x$ képéből transzformációval kaphatjuk. A $\sin x$ képét az y tengelyre tükrözve a $\sin(-x)$ képét, az

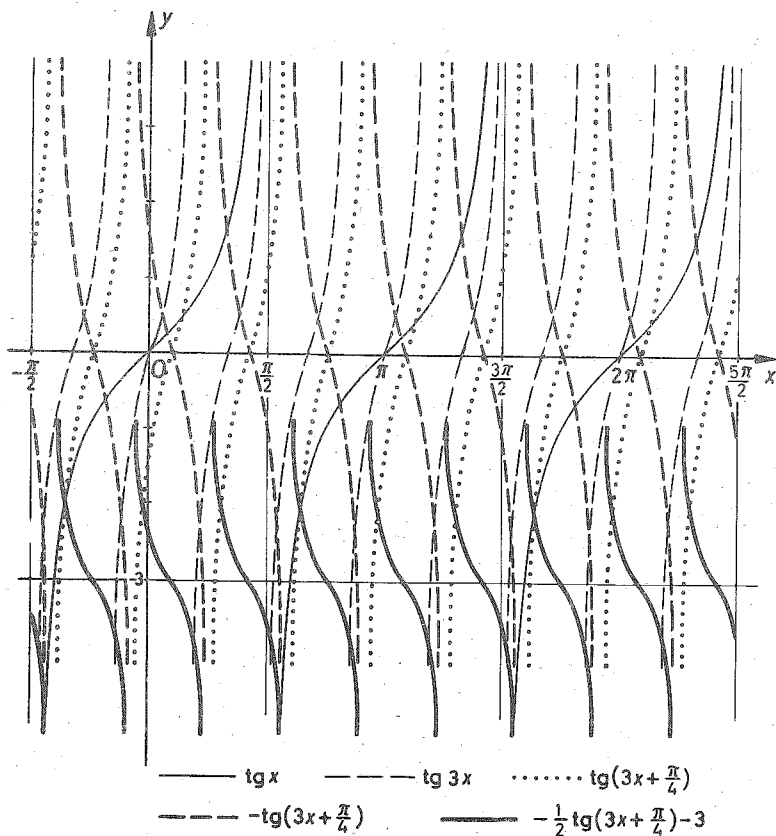
x tengely menti $\frac{6}{5}$ -szörös nyújtásával a $\sin\left(-\frac{5}{6}x\right)$ képét, majd a tengely menti $+\frac{2\pi}{5}$ eltolással a $\sin\left(-\frac{5}{6}\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5}{6}x\right)$ képét nyerjük. Az y tengely menti $\frac{1}{4}$ -szeres zsugorítást követő 2 egységnyi eltolás adja a függvény görbét (1633. ábra).



1633

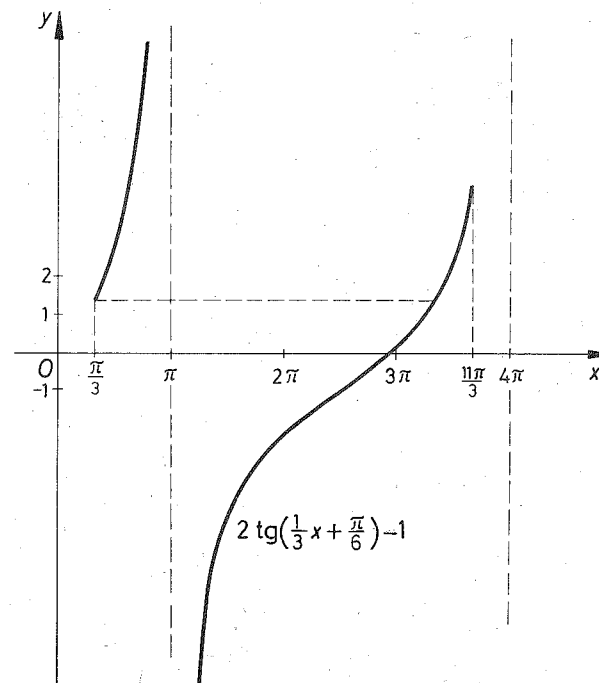
1634. $\frac{\pi}{4} + 3x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ azaz $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k$, $k \in \mathbf{Z}$ kizárt.

ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12}(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$. Mivel $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$, ezért a függvény $\frac{\pi}{3}$ -ban periodikus. Képét a $\operatorname{tg} x$ képéből transzformációval nyerjük. A $\operatorname{tg} x$ képéből x tengely menti $\frac{1}{3}$ -szoros zsugorítással $\operatorname{tg} 3x$ képét, ebből a tengellyel párhuzamos negatív irányú $\frac{\pi}{12}$ -vel történő eltolás a $\operatorname{tg} 3\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ képét eredményezi. Ezt tükrözve az x tengelyre a $-\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ képét nyerjük. Az y tengely menti $\frac{1}{2}$ -szeres zsugorítással és 3-mal negatív irányba eltolva a kívánt görbét kapjuk (1634. ábra).



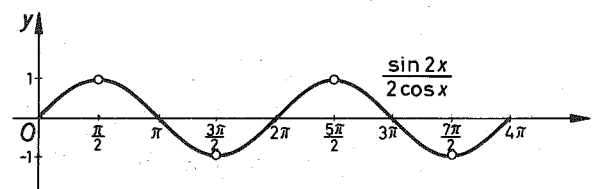
1634

1635. $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, azaz $x = \pi(3k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ kizárt. Mivel $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}(x+3\pi) + \frac{\pi}{6}\right)$, ezért a függvény 3π -ben periodikus. A $\operatorname{tg} x$ képéből x tengely mentén történt 3-szoros nyújtás a $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x\right)$ képét adja, és ezt $\frac{\pi}{2}$ -vel negatív irányba eltolva a $\operatorname{tg}\frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$ képét nyerjük. Ha most y tengely mentén 2-szeresre nyújtjuk a görbét, majd e tengely mentén negatív irányba 1 egységgel eltoljuk, a kívánt képet kapjuk (1635. ábra).



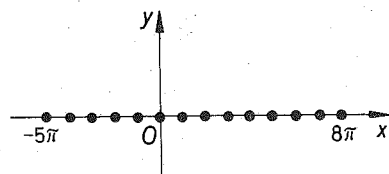
1635

1636. Mivel $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, ezért $\frac{\sin 2x}{2 \cos x} = \sin x$, minden $x \in \mathbf{R}$, melyre $\cos x \neq 0$. $\cos x = 0$ pontosan akkor, ha $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, tehát
- ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ (1636. ábra).



1636

1637. Mivel $|\cos x| \leq 1$, ezért $\cos^2 x - 1 \geq 0$ pontosan akkor, ha $|\cos x| = 1$, azaz ha $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ÉT: $\{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.



A függvény értékkészlete a $\{0\}$, így a függvény görbéje (1637. ábra):

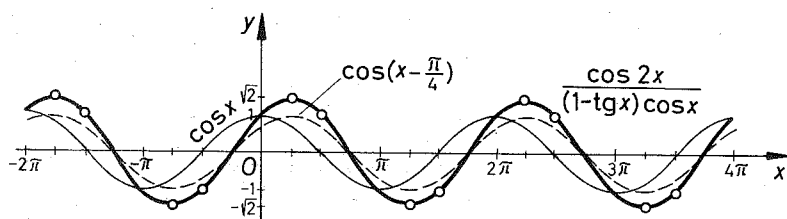
1638. A nevező pontosan akkor 0, ha $\operatorname{tg} x = 1$ vagy $\cos x = 0$. Ha tehát $x \neq \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ és $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, akkor mind a $\operatorname{tg} x$, mind

a kifejezés értelmezhető. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}(4k+1), \frac{\pi}{4}(4k+2) \right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\frac{\cos 2x}{(1 - \operatorname{tg} x)\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x =$$

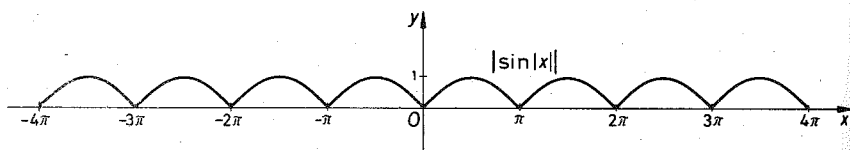
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

miatt a függvény görbéje (1638. ábra).



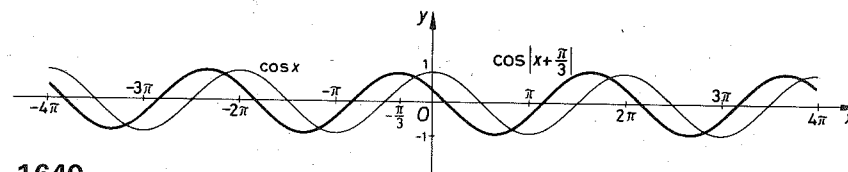
1638

1639. A $|\sin |x||$ kifejezés mindenütt értelmezhető, így ÉT: \mathbf{R} . $\sin |x| = \sin |-x|$, tehát a függvény páros (1639. ábra).



1639

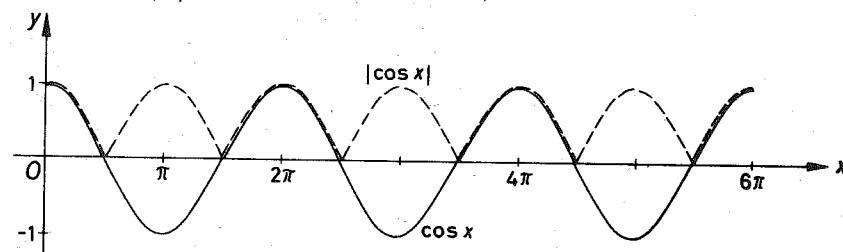
1640. ÉT: \mathbf{R} . Mivel $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{3}\right)$, és $|a| = a$, ha $a \geq 0$, $|a| = -a$, ha $a \leq 0$, ezért $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$ (1640. ábra).



1640

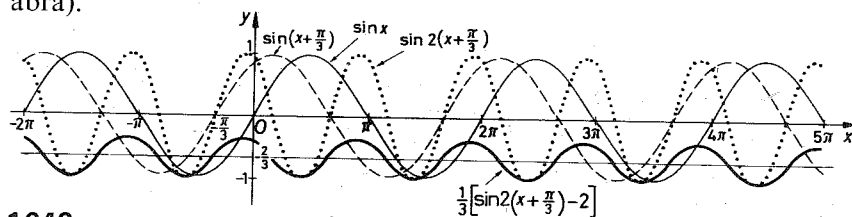
1641. ÉT: \mathbf{R} . $\sqrt{a^2} = |a|$ miatt a kifejezés $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$ -vel azonos.

$$\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x| \text{ (1641. ábra).}$$



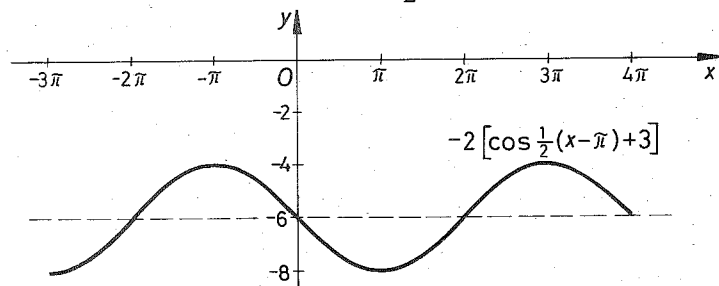
1641

1642. ÉT: \mathbf{R} . Függvénytranszformációval: $\sin x$ -ből az x tengely menti $-\frac{\pi}{3}$ eltolással $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Ebből x tengely menti $\frac{1}{2}$ arányú zsugorítással (affinitással) a $\sin 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nyerhető. Ezt az y tengely mentén -2 -vel eltoljuk, majd y tengely mentén $\frac{1}{3}$ arányú affinitást alkalmazunk (1642. ábra).



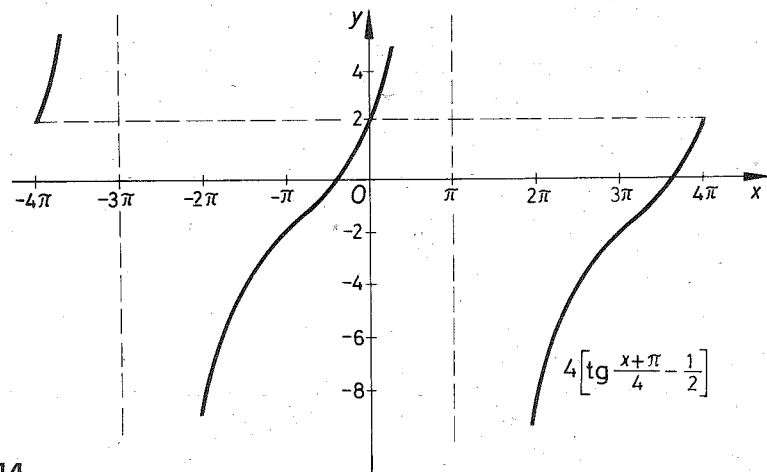
1642

1643. ÉT: \mathbf{R} . $\cos \frac{1}{2}(x-\pi) = \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) = \sin \frac{x}{2}$, mert a cosinusfüggvény páros és a pótszög szögfüggvényéről ismertek alkalmazhatók. Így függvénytranszformációval, az x tengely menti kétszeresre nyújtással (affinitás) nyerjük $\sin \frac{x}{2}$ -t (1643. ábra).



1643

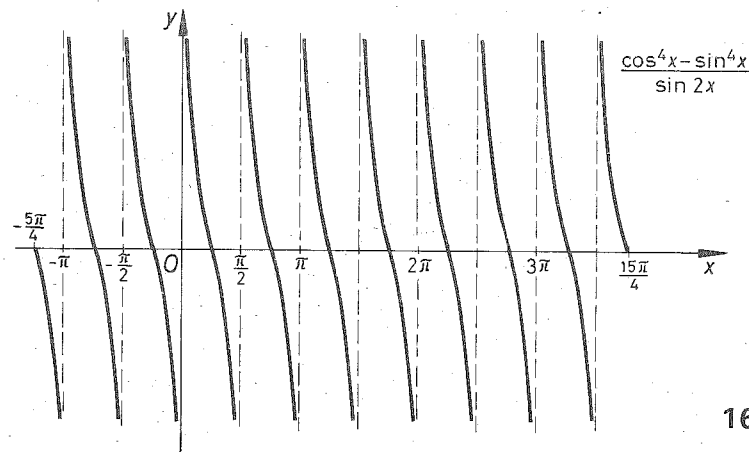
1644. Az $\frac{x+\pi}{4}$ nem lehet $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszöröse, azaz $\frac{x+\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis $x = \pi(4k+1)$ kizárt. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{\pi(4k+1) | k \in \mathbf{Z}\}$. Függvénytranszformációval $\text{tg } x$ -ből a $\text{tg } \frac{x}{4}$ az x tengely mentén való 4-szeresre nyújtással (affinitás) nyerhető. Ebből a tengely menti $-\frac{\pi}{4}$ -del való eltolás adja a $\text{tg} \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$ görbéjét. Ezt az y tengellyel párhuzamo-



1644

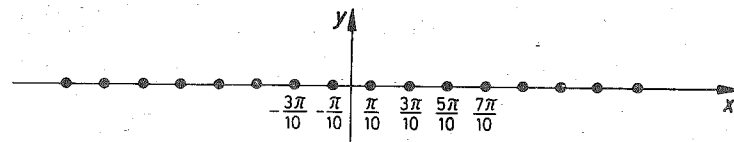
san eltoljuk $-\frac{1}{2}$ -nyit, majd ugyane tengely mentén 4-szeresére nyújtjuk (1644. ábra).

1645. Csak a $\sin 2x = 0$ helyeken nem értelmezhető a kifejezés, tehát ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}n | n \in \mathbf{Z} \right\}$. $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$, tehát a kifejezés $\text{ctg } 2x$ -szel azonos! Ezt a $\text{ctg } x$ -ből x -tengely menti $\frac{1}{2}$ arányú affinitással nyerjük (1645. ábra).



1645

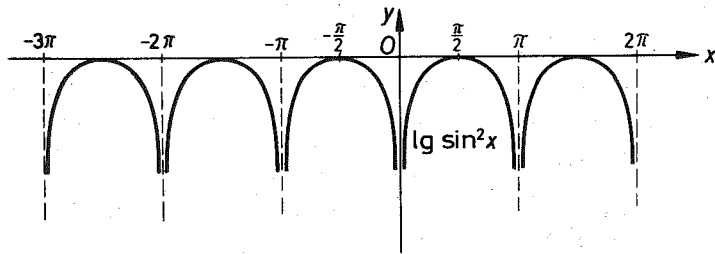
1646. Mivel $|\sin \alpha| \leq 1$, ezért $|\sin^2 \alpha| \leq 1$ is, tehát $\sin^2 5x - 1 \geq 0$ csak akkor, ha $\sin^2 5x = 1$. Ezért ÉT: $\left\{ \frac{\pi}{10}(2k+1) | k \in \mathbf{Z} \right\}$ (1646. ábra).



1646

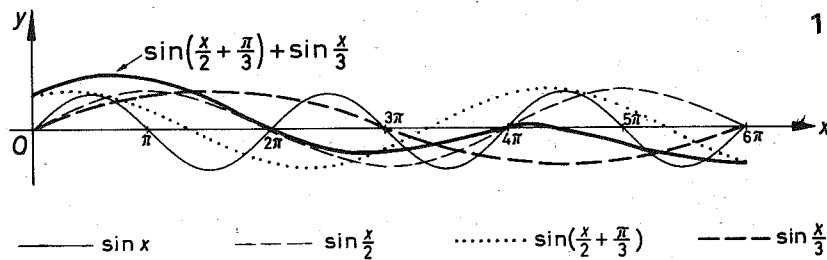
1647. $\sin^2 x > 0$, ha $\sin x \neq 0$, ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{\pi k | k \in \mathbf{Z}\}$. A függvény páros és π -ben periodikus, mert $\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$ és $\sin^2(x+\pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$. $\lim_{x \rightarrow +\pi k} \lg \sin^2 x = -\infty$, $\lg \sin^2 \left(\frac{\pi}{2}k \right) = 0$, $\lg \sin^2 x \leq 0$. $\sin x = \sin(\pi-x)$ miatt a $\lg \sin^2 x$ görbéje az $x =$

$= \frac{\pi}{2}(2k+1)$ egyenesekre szimmetrikus. Mivel a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ -ben a $\sin x$ szigorúan nő és a \lg függvény is szigorúan növekvő, ezért $\lg \sin^2 x$ itt szigorúan növekvő (1647. ábra).



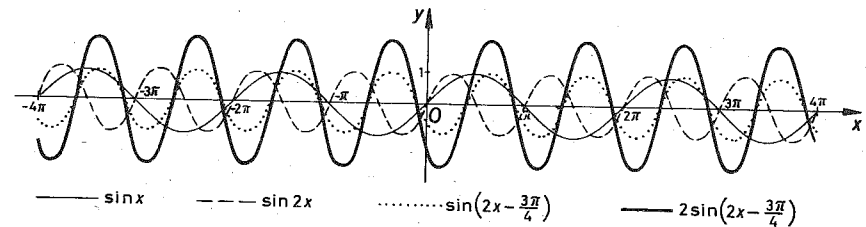
1647

1648. ÉT: R. $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{x}{3}$ miatt a kifejezés a $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{x}{3}$ -dal azonos. Zérushelyei: $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{x}{3}\right)$ gyökei, azaz $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{x}{3}\right) = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ vagy $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{x}{3}\right) = \pi(2n+1), n \in \mathbf{Z}$. Így $5x = -2x + 12\pi n$, vagyis $x = \frac{2\pi}{5}(6n-1)$ vagy $x = 4\pi(3n+1)$ (1648. ábra).



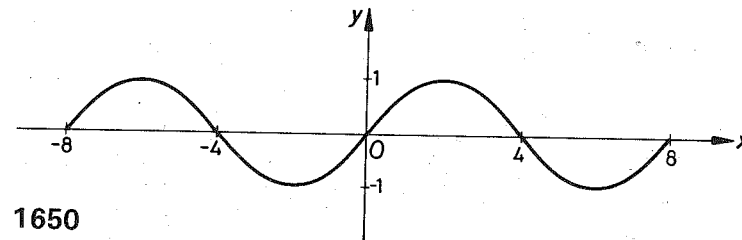
1648

1649. ÉT: R. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ miatt $\cos\left(\frac{5\pi}{4} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} + 2x\right) = \sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$, azaz a kifejezés $2 \sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$ -gyel azonos. (1649. ábra).



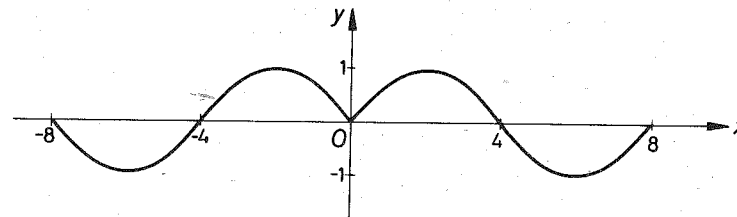
1649

1650. ÉT: R. Zérushelyei: $\frac{\pi x}{4} = \pi n, n \in \mathbf{Z}$, vagyis $x = 4n, n \in \mathbf{Z}$ helyeken. Szélsőértékeit a $\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbf{Z}$, azaz $x = 4k+2, k \in \mathbf{Z}$ helyeken veszi fel. A függvény periódusa 8, hiszen $\sin \frac{\pi(x+8)}{4} = \sin\left(\frac{\pi x}{4} + 2\pi\right) = \sin \frac{\pi x}{4}$ (1650. ábra).



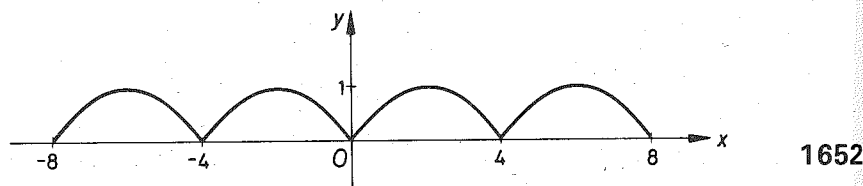
1650

1651. ÉT: R. Mivel $\sin\left|\frac{\pi x}{4}\right| = \sin\left|\frac{-\pi x}{4}\right|$, ezért a kifejezés páros függvény, tehát görbéjét az 1650. ábra $[0; 8]$ feletti részének és az y tengelyre vonatkozó tükörképének egyesítése adja (1651. ábra).



1651

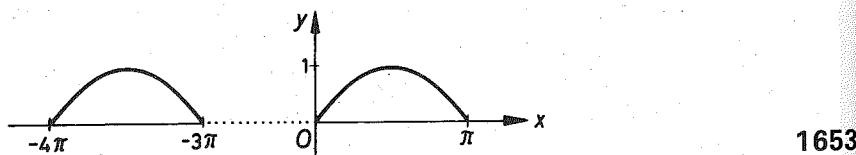
1652. ÉT: \mathbf{R} . Az $\left| \sin \frac{\pi x}{4} \right|$ görbét az 1651. ábra x tengely alatti részének e tengelyre vonatkozó tükröképe és a tengely feletti rész egyesítése adja (1652. ábra).



1652

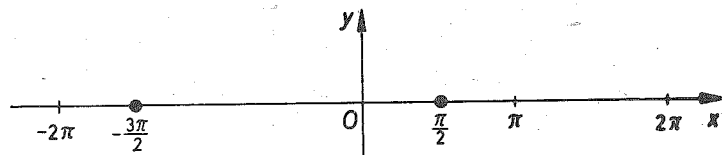
1653. ÉT: $0 \leq \sin x$, azaz $2\pi n \leq x \leq \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Zérushelyei: $\sqrt{\sin x} = 0$, ha $\sin x = 0$, azaz $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Maximuma: $\sin x \leq 1$ miatt $\sin x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ helyeken. A függvény 2π -ben periodikus, hiszen

$\sin(x+2\pi) = \sin x$, és a $\left[-4\pi, -\frac{7\pi}{2}\right]$ és $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ -ben szigorúan nő, mert a $\sin x$ is és négyzetgyök is ilyen, míg a $\left[-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right]$ és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ -ben $\sin x = \sin(\pi-x)$ miatt szigorúan csökken (1653. ábra).



1653

1654. ÉT: $\sin x > 0$ kell legyen (vagyis $2\pi n < x < \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$) ahhoz, hogy logaritmusá értelmezhető legyen. Ám $\sin x \leq 1$ miatt $\lg \sin x \leq 0$, tehát $\sqrt{\lg \sin x}$ csakis $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ helyeken értelmezhető (1654. ábra).



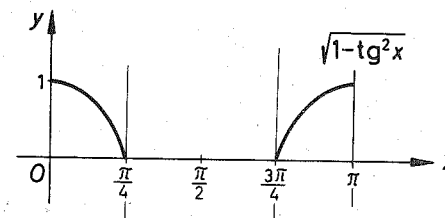
1654

1655. ÉT: $1 - \operatorname{tg}^2 x \geq 0$, azaz $\operatorname{tg}^2 x \leq 1$, tehát $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$. A $\operatorname{tg} x$ $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ -ben szigorúan nő, ezért a $\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ itt szigorúan

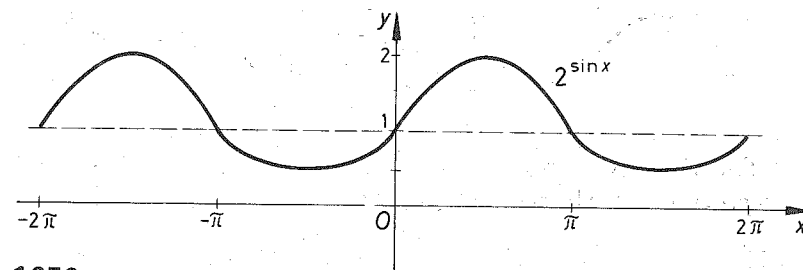
csökken. A $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ -ben a

$\operatorname{tg} x$ negatív és szigorúan nő, így $\operatorname{tg}^2 x$ szigorúan csökken, tehát $1 - \operatorname{tg}^2 x$ és $\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ szigorúan nő (1655. ábra).



1655

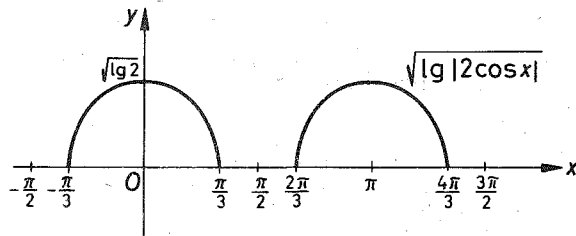
1656. ÉT: \mathbf{R} . A függvény 2π -ben periodikus, a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ -ben szigorúan nő, mert a szinuszfüggvény is és a 2^x exponenciális függvény is növekedő itt. A $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ -ben szigorúan csökken az előbbi függvények ilyen tulajdonsága miatt. A $2^{\sin(x+\pi)} = 2^{-\sin x}$ és $2^{\sin(-x)} = 2^{-\sin x}$ miatt $2^{\sin(x+\pi)}$ görbéje és a $2^{\sin x}$ görbéje szimmetrikus az $x=0$ egyenesre (1656. ábra).



1656

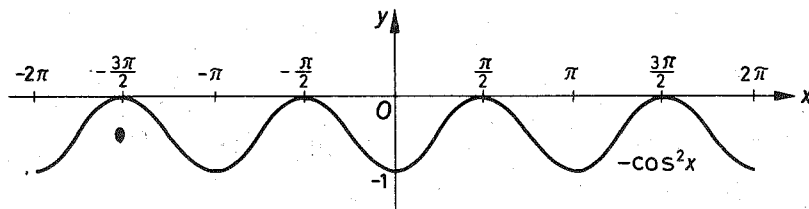
1657. $|2 \cos x| \geq 1$ a feltétele annak, hogy $\lg |2 \cos x| \geq 0$ legyen. $|\cos x| \geq \frac{1}{2}$, ha ÉT: $-\frac{\pi}{3} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. $\cos(-x) = \cos x$ és $|\cos(x+\pi)| = |-\cos x| = |\cos x|$, elég tehát a görbe menetét a $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ -ban ismerni. A $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ -ban $\cos x$ szigorúan csökken, ezért

$|2 \cos x|$ is, így $\lg |2 \cos x|$ és $\sqrt{\lg |2 \cos x|}$ szigorúan csökkenők, mert a \lg és a négyzetgyökfüggvény szigorúan nő (1657. ábra).



1657

1658. ÉT: \mathbf{R} . A $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$ és $\cos^2 x = \cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2$ és $\cos(-x) = \cos x$ miatt a függvény görbéje π -ben periodikus és szimmetrikus az y tengelyre. A $[0; \pi]$ -ben a koszinuszfüggvény szigorúan csökken, tehát a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ -ben a $\cos^2 x$ is, hiszen itt $\cos x \geq 0$, és ezért a $-\cos^2 x$ szigorúan nő, míg a $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ -ben $\cos x \leq 0$, tehát $\cos^2 x$ szigorúan nő és így $-\cos^2 x$ szigorúan fogy (1658. ábra).



1658

1659. $\sin 2x = 0$, pontosan akkor, ha $2x = \pi n$, azaz $x = \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbf{Z}$.

ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} n \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$. A függvény zérushelyei $\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\sin 2x} =$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x = \frac{1 + \cos x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1 + \cos x}{2 \cos^2 x}$$

miatt csak a $\cos x = -1$ gyökei lehetnek, itt azonban nincs értelmezve, tehát függvényünk azonos ez utóbbi kifejezéssel annak ÉT-án. A függvény 2π -ben periodikus, mivel mind

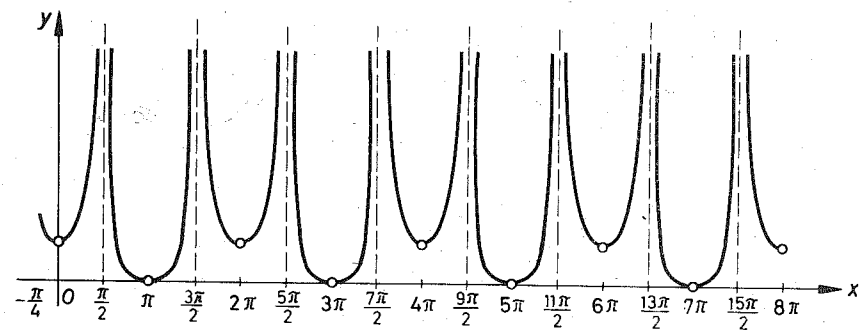
a számláló, mind a nevező ilyen. A függvény páros is, mert a $\cos x$ is páros. A függvény mindenütt pozitív, mert nevezője ilyen, és $|\cos x| \leq 1$ miatt a számlálója is. A szakadási helyeken $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ egész többszöröseinél)

a függvény határértékei rendre: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{2 \cos^2 x} = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{2 \cos^2 x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{2 \cos^2 x} = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{2 \cos^2 x} = +\infty.$$

A függvény $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ -ben szigorúan nő, mert az $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x}$ összeg minden tagja (a $\cos x$ szigorúan fogyó volta miatt) növekedő. Hasonlóan: $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ -ben e tagok szigorúan fogyók.

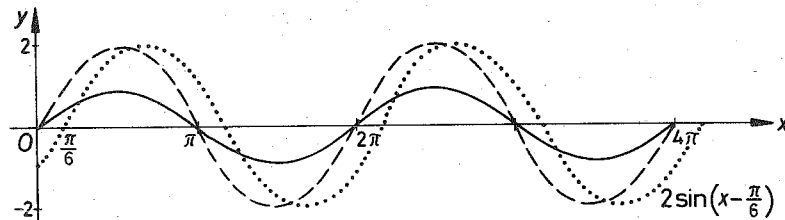
Az $\frac{1 + \cos(\pi - x)}{2 \cos^2(\pi - x)} = \frac{1 - \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{1 + \cos(\pi + x)}{2 \cos^2(\pi + x)}$ miatt a függvény görbéje az $x = \pi$ (és a periodikusság miatt, minden $x = \pi(2k + 1)$, $k \in \mathbf{Z}$) egyenesre szimmetrikus (1659. ábra).



1659

1660. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) =$
 $= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cos x \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$. ÉT: \mathbf{R} . A függvény képét a $\sin x$ képéből transzformációval: x tengelyre merőleges 2-szeres

nyújtással és x tengely mentén, pozitív irányú $\frac{\pi}{6}$ -tal való eltolással nyerjük (1660. ábra).

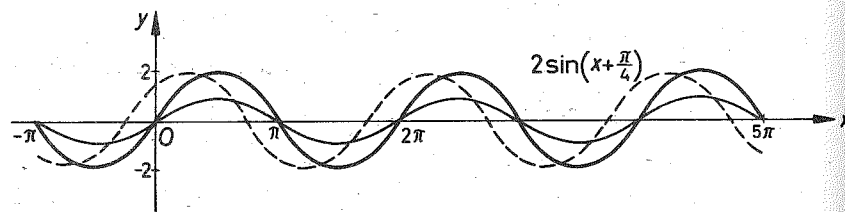


1660

1661. ÉT: \mathbf{R} , hiszen minden tagja értelmezhető \mathbf{R} -en.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \\ &= 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Függvénytranszformációval a görbe (1661. ábra):

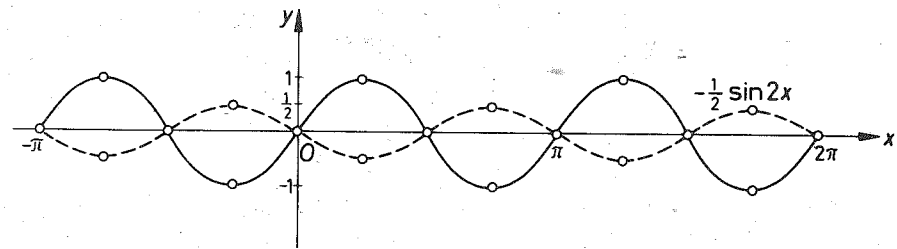


1661

1662. A nevező zérushelyei $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, azaz $\operatorname{tg}^2 x = 1$, tehát $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Mivel a $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ függvények $\frac{\pi}{2}$ páratlan, illetve páros többszöröseiben nincsenek értelmezve, ezért

$$\text{ÉT: } \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}n \mid n \in \mathbf{Z} \right\}. \quad \frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}} =$$

$= -\sin x \cos x = -\frac{1}{2} \sin 2x$ miatt a görbe függvénytranszformációval (1662. ábra):



1662

1663. A $|\sin x| \leq 1$ miatt $\log_2 \sin x \leq 0$, ahol $0 < \sin x$. A $\log_2 \sin x = 0$ adja tehát az ÉT: $\left\{ \frac{\pi}{2}(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ halmazt.

1664. $\operatorname{tg} \sin x \geq 0$ kell legyen. A $\operatorname{tg} \alpha$ függvényről ismert, hogy csak a $\pi k \leq \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken nemnegatív. Így $\pi k \leq \sin x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ kell legyen. Mivel $|\sin x| \leq 1$, ezért csakis a $k=0$, azaz $0 \leq \sin x \leq \frac{\pi}{2}$ feltétel adja a szóba jövő x helyeket. E feltétel pedig a $2\pi k \leq x \leq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ esetén teljesül.

1665. $\operatorname{ctg} \cos x \geq 0$ kell legyen. A $\operatorname{ctg} \alpha$ -ról ismert, hogy $\pi k < \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$ helyeken nemnegatív, így $\pi k < \cos x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k$ kell legyen, ami $|\cos x| \leq 1$ miatt csak $k=0$ mellett lehetséges. A $0 < \cos x \leq 1$ pedig a $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) intervallumokon teljesül.

1666. $\log_{\frac{1}{2}} \cos x \geq 0$ kell legyen. Mivel $|\cos x| \leq 1$ és $\log_{\frac{1}{2}} y$ nemnegatív minden $0 < y \leq 1$ -re, ezért $0 < \cos x \leq 1$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy függvényünk az \mathbf{R} legbővebb részhalmazán értelmezhető legyen. Ezért ÉT: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

1667. $\lg(1 - \sin^2 x) = \lg \cos^2 x \geq 0$ kell legyen. Ám $|\cos x| \leq 1$ miatt amaz csak $\cos^2 x = 1$, azaz $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ esetén teljesül.

1668. $\sin \cos x > 0$ feltétel mellett értelmezhető a kifejezés, ami csakis $2\pi n < \cos x < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ esetén áll fenn. A $|\cos x| \leq 1$ miatt csak $n=0$ lehet, és $0 < \cos x < \pi$ pontosan akkor, ha $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ez az ÉT.

1669. Mivel $\sin \sin x > 0$ kell legyen, ami $2\pi n < \sin x < \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ feltétellel áll. A $|\sin x| \leq 1$ miatt csak $n=0$ jön szóba, és $0 < \sin x < \pi$ pontosan akkor, ha $2\pi k < x < \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

1670. Az értelmezhetőségnek $\cos \sin x \geq 0$ a szükséges és elégséges feltétele. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $-\frac{\pi}{2} < -1 \leq \sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, ami minden $x \in \mathbf{R}$ -re teljesül.

1671. Mivel $\sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$, és $\lg |\cos x|$ minden $\cos x \neq 0$ helyen értelmezhető, ezért ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2n+1) \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$.

1672. A kifejezés pontosan akkor értelmezhető, ha $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x} > 0$, ami a $\log_{\frac{1}{2}} y$ függvény szigorúan csökkenő volta miatt $0 < \frac{2}{x} < 1$, azaz $2 < x$ mellett teljesül.

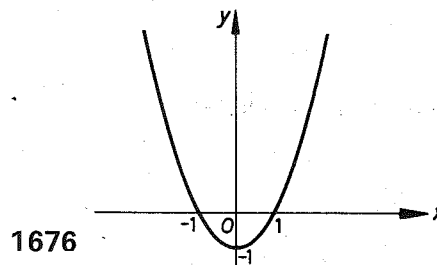
1673. Egyrészt a $0 < a < 1$, másrészt az $1 < a$ eseteket kell vizsgáljuk, ugyanakkor $\frac{1}{\log_a x} = 1$, azaz $x = a$ lehetőséget ki kell zárjuk, mert különben a nevező 0 lenne.

Ha $0 < a < 1$, úgy $\frac{1}{\log_a x} > 0$ pontosan akkor, ha $\log_a x > 0$, és ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy $0 < x < 1$ legyen. Ha pedig $1 < a$, úgy $\frac{1}{\log_a x} > 0$, akkor és csak akkor, ha $0 < \log_a x$, és ez pontosan az $1 < x$ feltétellel teljesül.

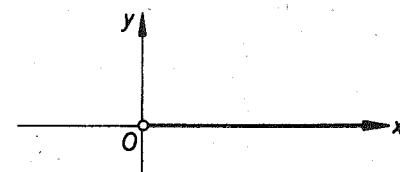
1674. $\log_{\frac{1}{a}} x > 0$ kell legyen. Ha $0 < \frac{1}{a} < 1$, azaz $1 < a$, úgy $0 < x < 1$, ha pedig $1 < \frac{1}{a}$, azaz $0 < a < 1$, akkor $1 < x$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy kifejezésünk értelmezhető legyen.

1675. Ha $x \geq 0$, úgy \sqrt{x} értelmezett és $x + \sqrt{x} \geq 0$, tehát $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ is értelmezett.

1676. Mivel $(|x| - 1)(|x| + 1) = |x|^2 - 1 = x^2 - 1$ minden $x \in \mathbf{R}$ -re, ezért (1676. ábra):



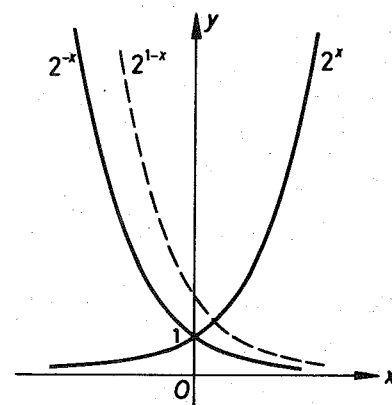
1676



1677

1677. $x^2 > 0$ és $x > 0$ annak feltétele, hogy a tagok külön-külön értelmezhetők legyenek. Így ÉT: \mathbf{R}^+ . A pozitív x -ekre $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$, függvényünk tehát az azonosan zérusfüggvény (a pozitív valós számok halmaza) (1677. ábra).

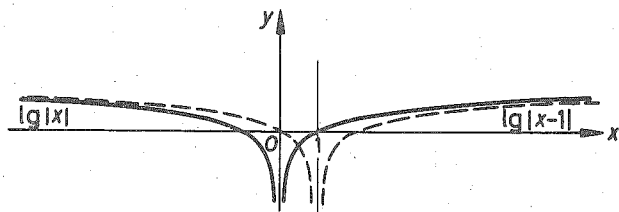
1678. $2^{1-x} = 2 \cdot 2^{-x}$. Ha a 2^x képét az y tengelyre tükrözzük, úgy 2^{-x} képét nyerjük. Ennek 2-szeresre nyújtása (y tengely mentén) adja görbénket (1678. ábra).



1678

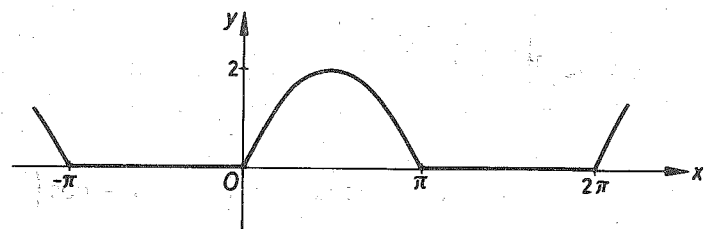
1679. $|x-1| > 0$, azaz $x \neq 1$ annak feltétele, hogy a kifejezés értelmezhető legyen. ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

A $\lg|x|$ görbájéből x tengely menti egységnyi eltolással nyerjük $\lg|x-1|$ görbáját, hiszen ez az 1-gyel nagyobb x helyeken veszi fel ugyanazokat az értékeket, mint a $\lg|x|$. Mivel $x > 0$ esetén $|x| = x$ és $x < 0$ mellett $|x| = -x$, ezért a $\lg|x|$ képe a $\lg x$ képe és ennek y tengelyre tükrözöttjének egyesítése (1679. ábra).



1679

1680. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, minden $x \in \mathbb{R}$ -re. $|\sin x| = \sin x$, ha $\sin x \geq 0$, azaz $2\pi n \leq x \leq \pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, és különben $|\sin x| = -\sin x$. Ezért a függvény $2 \sin x$, ha az előbbi intervallumból való az x , és 0 különben. A függvény 2π -ben periodikus, mert tagjai is ilyenek (1680. ábra).



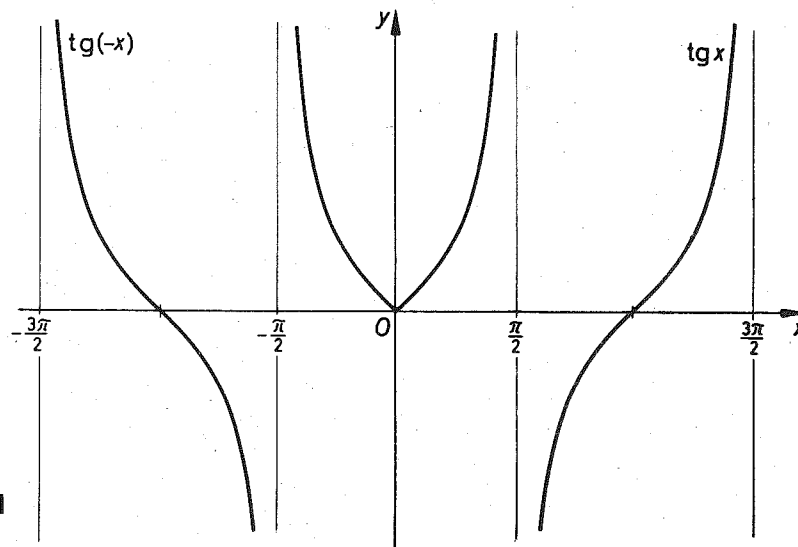
1680

1681. $\cos|x| = 0$ nem lehet. Ez $|x| = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$,

$k \in \mathbb{Z}$ esetén áll fenn. ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ha $x \in \text{ÉT}$ és $0 < x$,

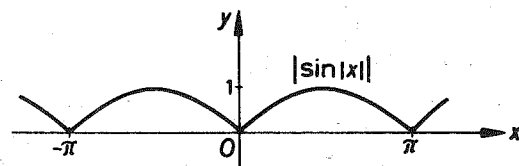
úgy $|x| = x$ és $\frac{\sin|x|}{\cos|x|} = \frac{\sin x}{\cos x} = \text{tg } x$, különben $|x| = -x$ és $\frac{\sin|x|}{\cos|x|} =$

$\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \text{tg}(-x) = -\text{tg } x$ (1681. ábra).



1681

1682. Mivel $\sin|-x| = \sin|x|$, ezért a függvény görbéje szimmetrikus az y tengelyre, ugyanakkor $\sin|x+\pi| = -\sin|x|$, tehát $|\sin|x+\pi|| = |\sin|x||$, vagyis függvényünk π -ben periodikus. Ezért a $[0; \pi]$ feletti képéből eltolással nyerjük az ÉT-on való képét. Ha $0 \leq x \leq \pi$, úgy $0 \leq \sin|x| = \sin x \leq 1$, tehát $|\sin|x|| = \sin x$ (1682. ábra).

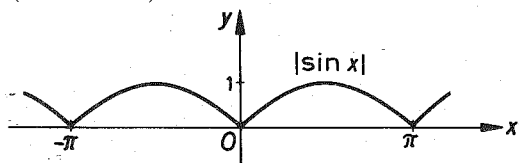


1682

1683. A koszinuszfüggvény páros, tehát $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \sin x$, így $\cos\left|\frac{\pi}{2} - x\right| = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ minden x -re. Függvényünk tehát azonos a $|\sin x|$ függvénnyel. Ezt pedig a $\sin x$ görbéjének „ x tengely alatti” részének e tengelyre vonatkozó

tükröképének és a $\sin x$ tengely „feletti” részének egyesítéséből nyerjük (1683. ábra).



1683

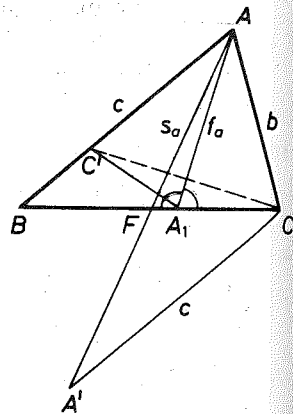
Geometriai bizonyítások, számítások

1684. Feltehetjük, hogy a háromszög oldalaira $a \leq b \leq c$. (Ennek megfelelően jelöljük a háromszög oldalait.) Ebből $a \leq \frac{b+b}{2} \leq \frac{b+c}{2}$ következik, amit bizonyítani kellett.

1685. A háromszög szögeire feltehetjük, hogy $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. (Ennek megfelelően jelöljük a háromszög szögeit.) Ebből $\alpha \leq \frac{\beta+\beta}{2} \leq \frac{\beta+\gamma}{2}$ következik, amit bizonyítani kellett.

1686. I. Először belátjuk, hogy $s_a < \frac{b+c}{2}$ (1686. ábra). Tükrözzük a háromszög A csúcsát a BC oldal F felezőpontjára. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az AA_1C háromszögre: $2s_a < b+c$.

II. Megmutatjuk, hogy $f_a \leq s_a$. Ha $AB=AC$, akkor $f_a=s_a$. Ha $AB \neq AC$, akkor feltehetjük, hogy $AB > AC$. A szögfelezőtétel szerint $A_1B : A_1C = AB : AC$, így $A_1B > A_1C$. Tükrözzük C -t az f_a szögfelezőre (C'). $AB > AC$ miatt C' AB belső pontja. Ezért $CA_1A \sphericalangle = C'A_1A \sphericalangle < BA_1A \sphericalangle$, így $BA_1A \sphericalangle$ tompaszög. Tehát az FA_1A háromszögben $s_a > f_a$.

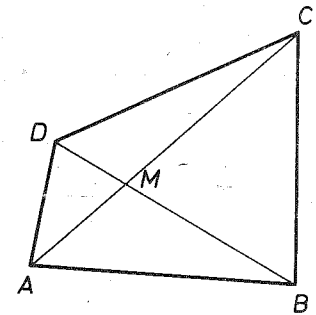


1686

1687. Jelöljük az átlók metszéspontját M -mel (1687. ábra). Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az ABM , BCM , CMD és DMA háromszögekre.

$$\begin{aligned} AB &< AM + BM, \\ BC &< BM + CM, \\ CD &< CM + DM, \\ DA &< DM + AM. \end{aligned}$$

A négy egyenlőtlenséget összeadva kapjuk: $4 \min(AB, BC, CD, DA) \leq AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD) \leq 4 \max(AC, BD)$, ahol $\min(AB, BC, CD, DA)$ jelöli az AB, BC, CD és DA szakaszok közül a legkisebbet, és $\max(AC, BD)$ jelöli az AC és BD szakaszok nagyobbikát.



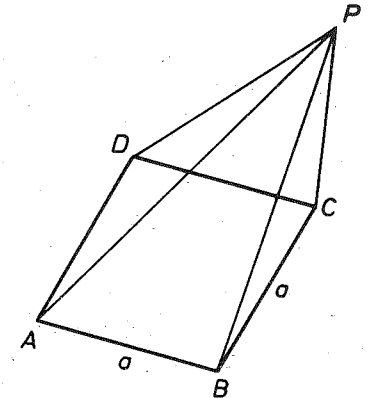
1687

1688. Írjuk fel az ABP , DAP , BCP és a DCP háromszögekre a háromszög-egyenlőtlenségeket.

$$\begin{aligned} PA &< PB + a, \\ PA &< PD + a, \\ a &< PC + PB, \\ a &< PC + PD. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségeket összeadva és rendezve a bizonyítandó $PA < PB + PC + PD$ egyenlőtlenséget kapjuk. A másik három egyenlőtlenség hasonlóan bizonyítható (1688. ábra).

Megjegyzés: Ha P a rombusz valamelyik oldalegyenesére esik, akkor a négy egyenlőtlenség közül legfeljebb két egyenlőtlenség helyett állhat fenn egyenlőség.

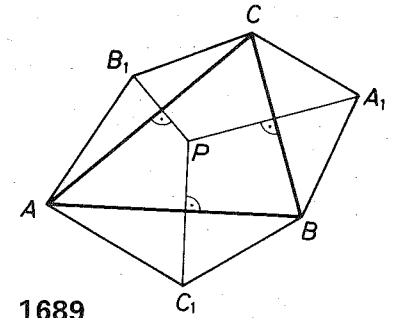


1688

1689. Írjuk fel az ABC_1 , BCA_1 és CAB_1 háromszögekre a háromszög-egyenlőtlenséget.

$$\begin{aligned} AB_1 + B_1C &> AC, \\ CA_1 + A_1B &> CB, \\ BC_1 + C_1A &> BA. \end{aligned}$$

Ezeket összeadva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk (1689. ábra).



1689