

VII. Gráfelmélet

1. Gráfelméleti fogalmak kialakítása: csúcs, szögpont, él, fokszám. Egyszerű gráfok.

Irányított gráfok

1. a) Igaz; b) Igaz. 3. a) 4; b) 5. 4. Nem. 5. a) Nem;
 b) Nem; c) Igen. 6. a) Igen; b) Igen; c) Igen. 9. $\binom{n}{4}$.
 10. 54. 11. 70. 12. a) 4900; b) 1810. 13. $\binom{12}{4}\binom{8}{4}$.
 14. a) $34\,650^2$; b) $7959 \cdot 10^4$. 15. b) x és y azonos paritású;
 c) 49. 16. Nem. 17. Nem. 20. a) 15; d) Nem. 22. 120
 illetve 2. 23. a) 1; b) 30. Az élek száma 8. 24. 90 illetve 1. Az
 élek száma 10. 25. $2^{\binom{n}{2}}$. 27. a) Nem; b) Igen, pl.: D .
 28. Igen. 35. a) Lehet; b) lehet.

2. Élek, csúcsok és fokszámok közti összefüggések. Gráf komplementere. Gráfok izomorfája. Részgráfok

MVII.

38. 11. 39. a) 180; b) 1. 40. 12. 41. 23; 24; 25. 42. 4
 harmadfokú és 1 negyedfokú vagy 2 negyedfokú, 2 harmadfokú és
 1 másodfokú. 45. Nem. 46. Alkalmazzuk a 36. feladat állítá-
 sát! 47. Alkalmazzuk a 36. feladat állítását! 48. Igen.
 50. A gráfnak 45, a komplementerének 21 éle van. 51. a) 4;
 b) 56. 52. a) 4; b) 120. 53. Az első esetben nincs megoldás,
 a második esetben két megoldás van. 54. Nincs. 55. 676,
 illetve 9. 56. 1562, illetve 9. 59. A három család a következő:
 János, Judit, Emmi; Tamás, Mária, Miska; István, Zsuzsa, And-
 rás. 60. Igen. 4 csúcs esetén két 3 hosszúságú út. 5 csúcs esetén
 a teljes gráf két élfüggetlen, 5–5 hosszú körre bontható. 62. 6.

63. Nem. 64. Két megoldás van. 65. Igen. 66. Nem.
 67. Igen. 68. Igen. 69. Nem. 71. b) 4; c) 3.
 72. $\binom{\binom{n}{2}}{k}$.

3. Gráfok jellemzése mátrixokkal. Szomszédsági mátrix

$$73. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$74. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$75. a) \begin{matrix} A & B & C & D & E \\ A & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ D & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ E & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

$$77. a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

77. b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

79. a)

$$\begin{matrix} A & B & Fr & H & L & M & O & Fi \\ A & \begin{bmatrix} . & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ B & \begin{bmatrix} 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ Fr & \begin{bmatrix} 2 & 1 & . & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ H & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & . & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ L & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & . & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ M & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & . & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ O & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & . & 1 \end{bmatrix} \\ Fi & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & . \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

79. b) Nem.

81.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) $A + B$ elemei azt jelentik, hogy a szóban forgó városból együttesen hány autóbuszjárat és vasútvonal indul ki. 84. Mindkét gráf esetén 0-mátrix.

85. Csak két lényegesen különböző irányítás lehetséges: a) Van a gráfban irányított kör; b) Nincs.

87. Két esetet kell vizsgálni: a) Van irányított kör a gráfban; b) Nincs.

88. Igen. Csak azt kell elérni, hogy a gráfban ne legyen irányított kör.

4. Út, vonal, séta (élsorozat). Összefüggő gráfok. Fák, erdők

90. Irányított gráfok esetén az $AQ B \Rightarrow BQ A$ nem helyes. 95. A gráf utakra és/vagy körökre esik szét, továbbá izolált pontjai is lehetnek. 96. b) Igen; c) Nem. 97. Igen. 98. Igen.

100. Nem. 102. Nincs. 104. Nem. 105. 5 csúcs esetén 30;

6 csúcs esetén 160. 106. $\sum_{k=3}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{2}$.

107. $\sum_{k=3}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{2k}$. 108. Igen. 113. Igen.

119. A gráf egy 6 csúcsú teljes gráfból és egy izolált pontból áll.

120. 8 csúcs esetén két teljes 4-gráf; 9 csúcs esetén 4 megoldás van.

121. a) Igen; b) Igen. 122. Nem lehet megjelöletlen név.

123. Nem igaz, hogy bármely csúcsból bármely másikba vezet 2 hosszúságú út. 125. Igaz. 126. Igaz. 130. 17.

131. $n-k$. 132. 16; 125; 1296. 136. Igaz. 139. Minden csúcs fokszáma legfeljebb 3. 144. A gráf komponensei lehetnek:

izolált pontok, utak, körök. 146. a) 31; b) 30; c) 435;

MVII.

d) $2^{n+1} - 1$; $2^{n+1} - 2$; $2^{2n+1} - 2^{n+2} - 2^n + 3$. 147. 21. 148. 3.
 149. 10. 150. Az élek száma 8. A fák 2, 2, 2, 6; 2, 2, 3, 5; 2, 2, 4, 4; 2, 3, 3, 4 vagy 3, 3, 3, 3 szögpontúak lehetnek. 151. 14. 152. 6,
 illetve 10 megoldása van, ha a csúcsokat nem különböztetjük
 meg. 153. 126. 154. a) A foksám 2 és 18 között változhat;
 b) 3; c) 9. 155. 3. 156. a) Igen; b) Nem; c) Igen, illetve nem.
 157. 3. 158. 684. 160. a) $*+abc$; $ab+c*$; b) $+*acb$; $ac*b+$;
 c) $-+*+bcdae$; $abc+d*+e-$; d) $-+*ac*b+def$;
 $ac*bde+*+f-$. 161. $+++++*axbxcxdxe$; $ax*b+x*c+$
 $+x*d+x*e+$. 162. $/\pm -0b\uparrow -*bb**4ac0.5*2a$;
 $0b-bb*4a*c*-0.5\uparrow \pm 2a*/$, ha $a \neq 0$ 166. Mindkét esetben a
 kezdőnek van nyerő stratégiája.

5. Gráfok éleinek és csúcsainak bejárása: Euler-vonal, Hamilton-út és Hamilton-kör

167. 2. 168. Szállása az 1-es pontban van. Most a 4-es pontban van. 174. Kovács úr a B -vel jelölt helyiségben van. 175. 45. 176. Igen. 180. Nem. 181. a) m és n páratlan és legalább 3; b) $m=2$ és n páratlan vagy fordítva. 183. Nem. 184. Mindkettő létezik. 187. Igen. 188. Igen. 189. a) Nem; b) Igen. 190. Igen. 191. 4-et. 193. Igen. 194. Igen. 195. Igen. 196. 3, illetve 6. 197. Igen. 198. a) Nincs Hamilton-kör; b) 4. 201. a) Hamilton-köre nincs, Hamilton-útja van; b) Egyik sincs; c) Hamilton-köre nincs, Hamilton-útja van. 202. Nem. 204. 5, illetve 9. 213. Nem. 218. a) Nem; b) Igen. 221. Vannak több módon irányítható utak.

6. Páros gráfok, teljes részgráfok

226. a) Igen; b) Nem. 227. Igen. 228. Egyenlőek.
 229. Igen. 230. Igen. 231. Igen. 232. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
 233. Nem igaz. 234. Nincs. 235. Nincs. 243. A létszámok között legfeljebb 1 eltérés lehet. 244. Lásd 243. 245. 21.
 246. $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$. 248. $\binom{n-1}{2}$. 249. $\left\lceil \frac{n^2}{4} \right\rceil$.
 250. a) $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$; b) $n=3k$ esetén n , $n=3k\pm 1$ esetén $n-1$.
 252. 5. 254. A gráfban nincs háromszög, a komplementerében nincs teljes négyszög. 257. A gráfban van háromszög és teljes négyszög is, a komplementerében egyik sincs.

7. Poliéderek, síkgráfok, Euler-formula

264. Igen. 265. Igen. 267. Nem. 268. Igen. 269. 15.
 270. 54. 272. Nem. 273. Egyik sem síkgráf. 274. Igen.
 277. 18 élű igen, 19 élű nem. 278. $2n-4$. 281. Nem.
 284. Nem. 291. a) oktaédernek; b) oktaédernek; c) minden szabályos testnek; d) minden szabályos testnek.

MVII.

8. Színezési feladatok

300. Igen. 301. Igen. 302. Igen. 303. Két színnel színezhető a csúcsok. Sem Hamilton-köre, sem Hamilton-útja nincs. 308. tetraéder: 4; 4; kocka: 3; 2; oktaéder: 2; 3; dodekaéder: 4; 3; ikozaéder: 3; 4. 309. 4. 310. 3. 311. 4.
 312. tetraéder: 3; kocka: 3; oktaéder: 4; dodekaéder: 3; ikozaéder: 5.

9. Algoritmusok. Játékok

317. a) 11; b) 14; c) $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$. 318. $2n - 3$; $n \geq 40$.
 323. a) Nincs; b) Nincs; c) Igen. 325. 20. 327. 59; 23.
 328. a) 40; b) 62. 330. 9. 331. Az A vállalat ajánlata az olcsóbb (21). 332. Nem. 333. a) 2; b) 3. 334. Igen. Nem függ. 335. b) $n + 2k - 2$; c) $2n + 3k - 3$. 336. a) $n = 3$ esetén igen, egyébként nem; b) $n = 3$ esetén a kezdő nyer, $n > 3$ esetén igen. 337. $n = 5$ esetén a második nem tudja elrendezni, $n = 3$ esetén csak a harmadik nyerhet. $n \geq 6$ esetén bármelyik el tudja rendezni. 338. a) Kezdő nyer; b) Zár nyer; c) Kezdő nyer; d) Kezdő nyer; e) Nyit nyer; f) Zár nyer. 339. a) Zár nyer; b) Zár nyer; c) Zár nyer; d) Nyit nyer. 341. Mindhárom esetben a kezdő veszít.

10. Vegyes feladatok

342. Nem 343. A szomszédosakba nem, a szemköztibe igen.
 346. 14. 349. $n(n - 1) + 1$. 350. a) 2^{n-2} ; b) $2n - 2$.
 354. Nem. 355. Nem. 356. Nem. 357. Nem.
 360. Nem.