

II. Számelmélet és aritmetika

1. Természetes számok

1. a) 2^{22} ; b) 3^{33} ; c) 5^{55} . 2. $10^{10} + 1$. 3. Legalább 301 számjegyből. 4. 6837. 5. 8. 6. $\underbrace{33\dots3}_n \cdot \underbrace{33\dots34}_n$. 7. 0; 2;
6. 9. Igaz. 10. Igaz. 12. 10. 13. 400. 14. 164.
15. 249. 16. $\frac{1000}{p} + \frac{1000}{p^2} + \frac{1000}{p^3} + \dots + \frac{1000}{p^k}$, k az a legnagyobb pozitív egész szám, amelyre $p^k < 1000$. 17. c_n . 18. -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -7 ; 0. 19. pl. ha $a=12$, $b=99$; b számjegyeinek összege 18 és ab számjegyeinek összege is 18. 21. 142 857; 285 714. 22. Igaz. 23. a) $131 \cdot 958$; b) $125 \cdot 689$.
24. 12. 25. Igen. 26. 898. 27. 90; Igen: 121, 484, 676. 28. Nem. 29. 3; 3; 8 évesek. 30. Nem. 31. Nem érhető el. 32. 87–85; 86–86; 89–83; 88–84, és fordítva. 33. 65.
34. Igen; $(10^{n+1} + 1)^2$. 36. Nem. 37. Nincsen ilyen. 38. $3025 = 55^2$. 39. $(10^{n+1} - 1)^2$. 40. 81 649. 41. 232 324. 42. Nincsen. 44. Igaz. 46. 0. 48. 1-re. 49....00.
52. ...24. 54. Páros és páratlan is lehet.

MII.

2. Oszthatóság az egész számok halmazában

56. a) igen; b) nem; c) nem; d) igen; e) nem; f) nem.
57. a) igen; b) igen; c) nem; d) igen; e) nem; f) nem. 58. A: nem igaz; B: nem igaz; C: nem igaz; D: igaz; E: nem igaz; F: igaz.
59. A: nem igaz; B: igaz; C: nem igaz; D: nem igaz. 66. a) igen; b) igen; c) igen; d) nem; e) igen. 67. Szorzatra igaz. 68. Nem. 70. Igaz. 73. Nem lehet. 74. Nincsen. 75. Nincsen. 76. a) 0; 1; b) 0; 1; c) 0; 1; 4. 78. Igaz. 79. 35; 46. 80. 17; 251; 757; 991 prímszámok. 83. 9. 84. 661–673-ig. 86. (61; 83; 47; 59; 2), (13; 47; 89; 5; 2), (2; 5; 7; 389; 461),

(17; 43; 89; 5; 2) stb. 87. 3. 88. 3. 89. 3. 90. Nincsen. 91. A megfordítás nem igaz. 92. 3. 95. Például 11; 13 vagy 17; 19. 97. 3. 98. Nem lehet. 100. Nem. 101. Nem lehet. 102. -1 ; 1 . 105. a) $2^8 \cdot 3^3$; b) $2^2 \cdot 7 \cdot 17$; c) $2^2 \cdot 3 \cdot 29$; d) $3^2 \cdot 7^2$; e) $2^4 \cdot 5 \cdot 23$; f) $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$; g) $2^3 \cdot 5^2 \cdot 17$; h) $2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$; i) $3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$; j) $3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$; k) $3^5 \cdot 5 \cdot 7$; l) $5 \cdot 3373$. 106. Igaz. Nem egyértelmű, pl. $36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 18$. 107. $2 \cdot 30 = 6 \cdot 10$; $6 \cdot 6 \cdot 10 = 2 \cdot 6 \cdot 30 = 2 \cdot 10 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 90$; $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 = 2^4 \cdot 50$; $2^6 \cdot 10$; $54 \cdot 10 = 2 \cdot 270$. 108. a) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$; b) 2^{10} ; c) $7 \cdot 23$; d) 997 ; e) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; f) $2^3 \cdot 23 \cdot 31$; g) $2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 79$; h) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 47$; i) $3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$; j) $3^2 \cdot 7 \cdot 109$. A prímtényezős felbontásból adódnak az osztók. 110. Nem. 111. Nem. 112. a) 242; 243; 244; b) nincsen; c) 3123; 3124; 3125; 3126; 3127. 113. $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$. 115. 6. 116. n -edik. 117. $A = 15 \cdot 10^k$. 119. $73 \cdot 137 = 10^4 + 1$. 121. e) $100b + 10c + d$; f) $10b + c$; g) d ; h) $10c + d$. 123. 0; 8; 7; 5; 6; 1; 8; 6. 124. a) igen; b) igen; c) igen; d) 0; e) 1; f) 2; g) 0; h) 0, 0; 1, 1; 2, 2; 3, 0; 4, 1; 5, 2; 6, 0; 7, 1; 8, 2; 0, 0; i) 0 vagy 3, vagy 6. 125. 708; 504. 129. $37 \cdot 27 = 999$, $999 + 1 = 1000$ alapján. 131. 10^3 . 132. 210; 240; 270; 222; 252; 282; 204; 234; 264; 294; 216; 246; 276; 228; 258; 288. 133. Igen. 134. Nem, pl. $486 \cdot 5 = 2430$. 138. Nincsen ilyen négyzetszám. 142. 20. 144. 48. 145. Legalább 9-et. 147. Nem lehet. 148. Ha n páratlan szám. 149. Első: 1, 4, 6, 11; második: 2, 3, 7, 10; harmadik: 5, 8, 9. 150. Ha n vagy $n + 1$ 3-nak többszöröse. 151. a) n páratlan; b) $n = 16k - 1$ alakú; c) bármely n természetes száma; d) nincsen ilyen n ; e) nincsen ilyen n ; f) n páratlan természetes szám; g) n páratlan természetes szám; h) nincsen ilyen n . 153. Nincsen ilyen n és k . 154. 1. 157. a) -12 ; -9 ; -6 ; -5 ; -4 ; -2 ; -1 ; 0 ; 3 ; 6 ; 9 ; 15 ; b) -12 ; -7 ; -4 ; -3 ; -1 ; 0 ; 3 ; 8 . 158. Nincsen ilyen természetes szám. 162. Igaz. 163. Igen. 168. Igen. 171. 8 osztója n -nek. 173. Nincsen ilyen polinom. 174. pl. $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$. 175. Ötödfokú

polinomra nem igaz hasonló, pl. $p(x) = x^5 - x$. **176.** Az állítás tetszőleges n -ed fokú polinomra igaz. **177.** 1 éves. **178.** 14 éves. **179.** Igen. **180.** 1; 2; 2; 6; 5; 6; 8; 7; 8. **181.** a) 8; b) 36; c) 60. **184.** a) 5; b) 9; c) 15; d) 21; e) 5; f) 25.

185. a) 8; b) 6; 16; 48. **186.** a) 2^6 ; b) 24; c) 36; d) 48; e) 1024; f) 60; g) 240. **187.** Négyzetszámok szorzata.

189. a) 6; b) 8; c) 25; d) 160. **191.** a) 8; b) 4; c) 8; d) 4; e) $2 \cdot d(a)$, ahol $d(a)$ az a pozitív osztóinak számát jelenti.

192. a) 3; b) 5; c) 6; d) 2; e) 6; f) 11; g) 6; h) 13; i) $\frac{d(n)}{2}$;

j) $\frac{d(n)+1}{2}$. **193.** a) 72^6 ; b) 4^5 ; c) 180^9 ; d) 525^6 ; e) 17^3 ;

f) 25^5 ; g) $n^{\frac{d(n)}{2}}$. **194.** 45. **195.** Igen. **196.** a) 3; b) 7; c) 12; d) 15; e) 13; f) 28; g) 31; h) 39; i) 20. **197.** a) 121; b) 511; c) 399; d) 364; e) 720; f) 1092. **198.** a) 255; b) 156; c) 121; d) 195; e) 6248; f) 1860. **201.** a) 744; b) 3751; c) 186 004; d) 4032. **202.** a) 511; b) 21 523 360; c) $2^{32} - 1$;

d) $\frac{p^5 - 1}{p - 1}$; e) $\frac{p^{12} - 1}{p - 1}$; f) $\frac{p^{17} - 1}{p - 1}$; g) $\frac{p^{22} - 1}{p - 1}$; h) $\frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$.

204. pl. 28; 496. **205.** Nem. **213.** (284; 220), (1184; 1210), (2620; 2924), (5020; 5564). **214.** 4. **215.** 20. **216.** a) 1; b) 1; c) 5; d) 16; e) 1458; f) 34 588 806; g) $p^{10} - p^9$;

h) $p^k - p^{k-1}$; i) 96; j) 19 440. **217.** Igaz. **218.** a) 120; b) 240; c) 840. **219.** $\varphi(n)$ páros, ha $n > 2$, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$.

220. $x = 8$. **222.** $p = 5$; $q = 11$.

MII.

3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

223. a) 12; b) 128; c) 1; d) 81; e) 17; f) 13; g) 120; h) 875.

224. 2., 3., 4. igaz. 225. a) b; b) b; c) b; d) b. 226. a) 1; b) ha a páros, akkor 2, ha páratlan, akkor 1.
227. Igaz. 230. a) 6; b) 13; c) 397; d) 512; e) 216; f) 11.
231. a) $7 \cdot 126 - 2 \cdot 438 = 6$; b) $3 \cdot 1599 - 8 \cdot 598 = 13$;
 c) $5 \cdot 1985 - 2 \cdot 4764 = 397$; d) $4608 - 4096 = 512$;
 e) $3 \cdot 1080 - 2 \cdot 1512 = 216$; f) $28 \cdot 9713 - 369 \cdot 737 = 11$.
233. a) $\frac{7}{15}$; b) $\frac{5}{17}$; c) $\frac{7}{11}$; d) $\frac{3}{4}$. 234. 375, 840. 235. 147, 1176;
 294, 1029; 588, 735 és fordítva. 236. 1111. 237. 1 vagy 2.
239. $n = 5k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ alakú. 240. Nincsen. 241. (3; 4),
 (3; 10), (3; 28), (3; 35), (4; 15), (4; 21), (4; 35), (4; 63), (6; 35), (10; 21),
 (10; 63), (15; 28). 248. Végtelen sok. 249. a) 4; b) 7; c) 15;
 d) 1; e) 17. 250. Például: (36; 48; 53). 252. 68; 51.
253. 10, 240; 30, 80. 254. a) 112; b) 450; c) 1260; d) 5916; e) 2850;
 f) 156 400. 255. 4. igaz. 256. a) 108; 3; 36; 108; b) 300; 5; 60; 300; c)
 209; 1; 209; 209; d) 131 072; 128; 1024; 131 072; e) 60 401; 17; 3553;
 60 401; f) 3 976 000; 4; 994 000; 3 976 000.
257. Igen. 258. $3k$ -szor $k \in \mathbb{N}^+$. 259. Nem. 260. 300 méte-
 renként. 261. 1 óra múlva. 262. a) 2, 105; 3, 70; 5, 42; 7, 30;
 6, 35; 10, 21; 14, 15; 1, 210; b) 9, 175; 25, 63; 7, 225; 1, 1575; c) 4, 45;
 5, 36; 9, 20; 1, 180; d) 1, 256; e) 8, 325; 25, 104; 13, 200; 1, 2600.
263. 122 darab. 265. a) 5166; b) 31; c) 63; d) 45 144; e) Nincsen
 ilyen x ; f) 3; 6; 12; 24; 48; g) $(2k + 1) \cdot 15$, $k \in \mathbb{N}$; h) $2k$, $5l$ alakú
 számok kivételével minden egész szám ($k, l > 0$, egész). 267. Nin-
 csenek ilyen egész számok. 268. $a = 2$, $b = 3$, $p = 2$; $a = 3$, $b = 2$,
 $p = 2$. 269. a) 117; 221; b) 154; 350; c) 208; 598; d) 270; 100;
 e) 18; 80; f) 552; 115; 435; 232. 270. 16; 12; 20, 4; 12; 80, 4; 20;
 80, 4; 4; 240. 272. 503. 273. 720 721. 274. 27 720

4. Diofantoszi problémák

275. 0, 10; 1, 9; 2, 8; 3, 7; 4, 6; 5, 5 és fordítva. 276. $21n - 12$, $n > 0$,
 egész. 277. $15m + 8$, $m \in \mathbb{N}$. 278. Nincsen. 279. $2 \cdot 24 -$
 $- 36 = 12$. 280. $x = 3$; $y = 4$; $z = 5$; $u = 6$. 281. $x = 2$; $y = 1$.

282. Nincsen megoldás. 283. a) Nincsen megoldás. b) Nincsen megoldás. 285. Nem. 286. Nincsen. 288. 3, 4, 5; 8, 15, 17 b. 292. A relatív prím számhármakok száma 16. 294. a) Igen; b) Nincsen. 296. $(2n+1)^2 + (2n(n+1))^2 = (2n(n+1)+1)^2$, ahol n természetes szám. 297. 24; 7; 25. 298. 24; 10; 26. 299. Nincsen ilyen háromszög. 300. 16; 30; 34. 301. Nincsen ilyen háromszög. 303. 5; 12; 13 vagy 6; 8; 10. 304. Például 696; 697; 985. 305. (0; 1; 2; 3; 4), (-2; -1; 0; 1; 2), (-10; -11; -12; -13; -14) 308. b) $a=2$, $b=1$; $a=3$, $b=2$; $a=5$, $b=10$.

5. Számrendszerek

309. 9; Igen. 310. 12, 6, 4; 110010110011_2 , 302303_4 , 6263_8 . 311. a) 1100_2 ; 30_4 ; 22_5 ; 10_{12} ; b) 10011010_2 ; 2122_4 ; 1104_5 ; $10(10)_{12}$; c) 11101100_2 ; 3230_4 ; 1421_5 ; 178_{12} ; d) 101101001_2 ; 11221_4 ; 2421_5 ; 261_{12} ; e) 1111010101_2 ; 3311_4 ; 12411_5 ; 699_{12} ; f) 1111011000_2 ; 33120_4 ; 12414_5 ; $6(10)_{12}$; g) 110101001_2 ; 12221_4 ; 3200_5 ; $2(11)_{12}$; h) 1111101000_2 ; 33220_4 ; 13000_5 ; $6(11)_{12}$; i) 1010100011_2 ; 22203_4 ; 10200_5 ; 483_{12} ; j) 10000000000_2 ; 100000_4 ; 13044_5 ; 714_{12} . 312. Igen. 313. 20 kérdés. 315. a) 8-as; b) 4-es; c) 5-ös; d) 7-es. 316. a) 13; 27; 33; b) 36; 301; 1773; c) 27; 16; 51; d) 208; 2381; 351. 317. 11027_8 . 318. 5. 319. a) 31_8 ; b) 5. 320. a) 114023_6 ; b) 49204_{12} ; c) 32465145_7 ; d) 15476_8 . 321. a) 5-ös; 11-es; 15-ös; b) 2-es; c) 14-es; 7-es; 4-es; d) 7-es; 6-os. 322. 7-; 49-szeresére! 323. a) 12345679_{10} ; b) 1234568_9 ; c) 1235_6 ; d) $123...(g-3)(g-1)$. 325. Igen. 326. 8-as. 328. $112_3 \cdot 22_3$. 329. 256_8 . 330. a) 0,625; 0,84375; 3,75; 11,125; b) $2,7$; $4,4$; 10,7037; 8,1. 331. 6; 2; 6; 5. 332. a) $1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}$; b) $1; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{18}$. 333. Nem. 334. ha

$2^n < a \leq 2^{n+1}$, akkor pontosan n nullával. 335. 1. a) $\frac{3}{8}; \frac{7}{16}; 1\frac{5}{8}$; $7\frac{3}{4}; \frac{15}{32}$; b) $\frac{2}{9}; \frac{5}{27}; \frac{4}{81}; 6\frac{2}{9}; 19\frac{5}{27}$; 2. a) $2\frac{5}{8}$, végtelen nem szakaszos tizedestört nem lesz közöttük. 336. $0,1412_6$. 337. a) $g > 3$

MII.

egész szám $f=2g$; b) Nincsen ilyen g, f ; c) $f=g^2$.

338. $0,012345679$; $0,0123457_8$; $0,012346_7$; $0,01234...(b-3)(b-1)_b$.

339. a) nincsen olyan g ; b) nincsen olyan g ; c) 2; 3; 5; 6; 8...; d) Nincsen. 344. $ak+1$, ahol $k \geq 1$ egész szám. 345. 0.

346. Igen. 347. $g^2=ak$, $k > 0$, egész szám. 348. 21.

349. a) 24654_8 ; b) 18276_9 ; c) 24130_6 ; 24234_6 ; 24432_6 ; d) 25160_8 ; 25464_8 ; e) 39280_{12} ; 39253_{12} ; 39226_{12} ; $392(10)9_{12}$; f) 452310_6 ; 454313_6 ; g) 35020_6 ; 35322_6 ; 35124_6 ; 35520_6 ; h) 47030_8 ; 47532_8 ; 47334_8 ; 47136_8 ; 47730_8 ; i) 50340_9 ; 54340_9 ; 58340_9 ; 51343_9 ; 55343_9 ; 52346_9 ; 56346_9 ; j) 10030_5 ; 10430_5 ; 11330_5 ; 12230_5 ; 13130_5 ; 14030_5 . 350. Nincsen ilyen. 351. 1. 353. $g=5k+2$;

$g=5k+3$; $g=5k+4$ (k pozitív egész szám). 354. 305_9 .

355. a) Nem; b) Bármely $g > 1$. 357. 13421_5 . 358. $x=9, a=9, b=5$. 359. A számrendszer alapja: 11; 46; 81 lehet. A keresett

számok 1610 ; $101\ 710$; $544\ 810$. 360. $53\ 561$. 361. $\overline{abc}_g$, ahol $a=2c+1$; $b=3c+1$; $g=3c+2$; $c \geq 1$ egész. 362. Négyzet-számmra.

6. Racionális számok

365. a) $-\frac{1}{64}$; b) $19\frac{2}{3}$; c) $18\frac{1}{10}$; d) 1; e) $5\frac{35}{84}$; f) 21; g) $-\frac{5}{6}$;

h) $9\frac{9}{140}$; i) $-3\frac{4}{7}$; j) $5\frac{16}{49}$; k) $1\frac{3}{4}$; l) $2\frac{5}{12}$. 366. a) $\frac{75}{154}$;

b) $\frac{16}{85}$. 367. Csökken. 368. Növekszik. 369. Igaz.

371. 57 db. 372. c) $3,45628398 \cdot 10^5$; d) $2,3907 \cdot 10^{-6}$; e) $4,5692606 \cdot 10^2$; f) $6,5000067 \cdot 10^{-4}$; g) $2,3478234 \cdot 10^4$; h) $5,643 \cdot 10$; i) $8,00061$. 373. a) $17,586817$; b) $-2,37561$;

c) $0,687$; d) $0,2444444444$. 374. $\frac{381}{57} > \frac{565}{85}$. 375. a) $-\frac{29}{11}$;

$-\frac{3}{7}; \frac{23}{30}; \frac{7}{3}$; b) $-\frac{5}{3}; -\frac{7}{5}; 0; \frac{29}{15}; \frac{36}{11}; \frac{17}{4}$. 377. a) $-4,5 < a < 2,5$

racionális számok; b) $a < 1,99$ vagy $a > 2,01$ racionális számok;

c) $14,9 < a < 15,1$ racionális számok. 378. 100-nál nagyobb.

379. $n > 100$. 381. Igen, pl. $\frac{17}{24}; \frac{33}{48}; \frac{35}{48}; \frac{65}{96}; \frac{67}{96}; \frac{69}{96}; \frac{71}{96}; \frac{129}{192};$

$\frac{131}{192}; \frac{133}{192}; k_1 < k_1 + \frac{k_2 - k_1}{2} < k_2; k_1, k_2$ racionális számok.

382. Nincsen. 383. Nincsen. 384. Nincsen. Igen a nulla. Nincsen.

385. a) $\frac{2}{10}; b) \frac{75}{10^3}; c) \frac{35}{10^2}; d) \frac{36}{10^2}; e) \frac{375}{10^3}; f) \frac{88}{10^3}; g) \frac{5^8}{10^7};$

$h), i), j)$ nem lehet. 386. Véges tizedestört alakúak: $b), c), d), e), f)$. Tiszta szakaszos tizedestört alakúak $h), i)$. Vegyes szakaszos tizedestört alakúak $a), f), g), j)$.

387. 1. hamis; 2. hamis; 3. igaz; 4. hamis; 5. hamis; 6. hamis; 7. igaz; 8. igaz; 9. igaz.

388. $1, 1, \dots = 1 \frac{1}{9}$. 389. a) $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots; b) \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} +$

$+\frac{6}{10^3} + \dots; c) \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots; d) \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + \frac{35}{10^6} + \dots;$

$e) \frac{134}{10^3} + \frac{134}{10^6} + \frac{134}{10^9} + \dots; f) 9 + \frac{6}{10} + \frac{24}{10^3} + \frac{24}{10^5} + \frac{24}{10^7} + \dots$

390. a) $\frac{12}{10^2}; b) \frac{298}{10^5}; c) \frac{35}{10^3}; d) \frac{1263}{10^4}; e) \frac{123}{99}; f) \frac{13625}{900}$.

393. a) $\frac{x}{9}; b) \frac{9x-y}{90}$, x, y számjegyek.

395. Igen, pl.: 1. 3; 4; 5;

2. 1; 2; $\sqrt{5}$; 3. $\sqrt{2}; \sqrt{2}$; 2; 4. $\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{6}$.

3. hamis; 4. igaz; 5. igaz; 6. igaz.

400. $p=46, q=51, p=47, q=52$.

404. $a=1; b=6; c=2$.

MII.

7. Irracionális számok

409. Igaz. 414. Igaz. 417. a) Igaz; b) Igaz. 419. Igen, pl.

$y = \sqrt{2}x$ egyenletű egyenes.

420. d). 421. a) irracionális; b)

racionális; c) racionális; d) racionális; e) racionális; f) irracionális.

422. 1. hamis; 2. hamis; 3. hamis; 4. hamis; 5. igaz; 6. igaz;

7. igaz. 424. Nincsen. 425. 1. igaz; 2. igaz; 3. hamis; 4. hamis;

5. hamis. **427.** Mindegyik esetben egy. a) 2; b) 3; c) 5; d) 11; e) -18. **428.** Igaz. **429.** Ilyen pl.: a) 1,4; 1,5; b) 1,41; 1,42; c) 1,41421; 1,41422; d) 1,4; 1,41; e) 1,41; 1,414; f) 1,41421.

8. A számfogalom bővítésével kapcsolatos néhány feladat

- 430.** $1; \frac{7}{5}; \frac{8}{6}; \frac{10}{7}; \frac{11}{8}$. **432.** a) $2; \frac{9}{5}; \frac{10}{6}; \frac{16}{9}; \frac{17}{10}$;
b) $3; \frac{16}{5}; \frac{19}{6}; \frac{28}{9}; \frac{31}{10}$. **433.** a) $\frac{21}{15}; \frac{35}{15}; \frac{106}{75}$; b) $\frac{26}{15}; \frac{43}{25}; \frac{130}{75}$;
c) $\frac{47}{15}; \frac{79}{25}; \frac{236}{75}$. **434.** $\frac{1}{2q} < \frac{1}{q}, q > 0$. **438.** ha i nagyobb, mint k , akkor igaz. Igen. Egyetlen szám van. **441.** c) . **442.** 2501.
445. 9-es.
***447.** b) $p = \frac{2a-3}{a-2}$, ha $a \neq 2$. **448.** a) nem, nem; b) igen, igen;
c) igen, nem; d) igen, nem; e) nem, nem. **449.** 1. igaz; 2. hamis;
3. igaz; 4. igaz; 5. igaz. **450.** Van ilyen művelet és egy van.
451. $a=0$, $e=-1$, $a=1$, $e=0$. **452.** Nem, nem.
453. a) $x*y \in L$; b) asszociatív; c) igaz. **454.** c) Igaz; d) igen, nincsen, nincsen.

9. Komplex számok

- 455.** a) $5i$; b) $3i$; c) $\frac{4}{7}i$; d) $\frac{9}{4}i$. **456.** a) $x > -5$; b) $x < -4$;
c) $x > 3$; c) $x > \frac{4}{5}$. **457.** $x = -\frac{4}{11}$; $y = \frac{5}{11}$.
458. a) $x = -16$; $y = -10$; b) $x = 2$; $y = 3$; c) $x = \frac{1}{a}$; $y = 0$, ha $b \neq 0$;

és $x = \frac{1}{a}$, $y \in \mathbf{R}$, ha $b=0$. 460. a) $c=10$, $d=-3$; b) $c=\frac{3}{2}$,

$d=-2$; c) $c=2$, $d=0$; d) $c=0$, $d=-\frac{2}{5}$; e) $c=4$, $d=2$.

461. a) $x_{1,2} = 1 \pm 3i$; b) $x_{1,2} = 2 \pm 5i$; c) $x_{1,2} = 3 \pm 4i$;

d) $x_{1,2} = \pm 11i$. 462. A téglalap csúcsai: $5+3i$; $5-3i$; $-5-3i$.

463. a) $7i$; b) $-i$; c) i ; d) -12 ; e) -18 ; f) b^2-a^2 ; g) -7 ;

h) $-\frac{1}{4}$; i) $-\frac{1}{6}$. 464. a) $21+4i$; b) $\frac{17}{12} - \frac{3}{10}i$; c) $3+4i$;

d) $-14+20i$; e) $-1+5i$; f) 2 ; g) $27+5i$; h) $\frac{15}{13} + \frac{10}{13}i$;

i) $-\frac{23}{65} - \frac{41}{65}i$. 465. a) $4-4i$; b) $3a+3bi$; c) $13+15i$;

d) x^4+4 . 466. a) x bármely valós szám, $y=-5$; b) x bármely

valós szám, $y=1$; c) $x=-3$, $y \in \mathbf{R} \setminus \{-8\}$; d) $x=-6$,

$y \in \mathbf{R} \setminus \{7\}$; e) $x \in \mathbf{R}$, $y=-b$; f) $x=-a$, $y \in \mathbf{R} \setminus \{-b\}$;

g) $x+2y=0$; h) $bx+ay=0$; i) $ax-by=0$ és $ay+by \neq 0$;

j) $x=a$, $y=-b$.

467. A komplex számok képzetes részei ellentett előjelűek legyenek.

468. a) pl. $z_1 = 3+5i$ és $z_2 = 2-5i$; b) pl. $z_1 = 2+3i$ és

$z_2 = 6-9i$; c) pl. $z_1 = 1+i$ és $z_2 = 1-i$. 469., 470., 471.

A gyököket az egyenletbe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

472. a) $x=2+i$; $y=2-i$; b) $x=1+i$; $y=i$. 473. a) 5 ;

b) $-2i$; c) $5i$; d) $1-i$; e) $-2-3i$; f) $8+7i$. 474. a) 3 ; b) 2 ;

c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{29}$; e) $3\sqrt{5}$; f) $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

475. a) $\sqrt{13}$; b) $\sqrt{53}$; c) $\sqrt{34}$; d) $\frac{5}{12}$; e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; f) $\frac{5}{6}$.

476. A háromszög oldalainak hossza: 2 ; $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

477. a) $(a+bi)(a-bi)$; b) $(a+2i)(a-2i)$; c) $(a+i\sqrt{2})(a-i\sqrt{2})$.

478. Két komplex szám hányadosának konjugáltja egyenlő a komplex számok konjugáltjainak hányadosával, ha a nevező nullától

különböző. 479. a) 0 ; 1 ; $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; b) -1 ; 0 ;

1; i ; $-i$. **486.** a) $\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$; b) $\cos \pi + i \sin \pi$; c) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$; d) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$; e) $2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$; f) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; g) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; h) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$; i) $2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$; j) $2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$; k) $2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; l) $\sqrt{10}(\cos 18^\circ 26' + i \sin 18^\circ 26')$. **487.** $z_1 z_2 = -2$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$.

488. a) 6; b) $2\sqrt{3}+2i$; c) $-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$; d) $\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$.

490. $i^0=1$; $i^1=i$; $i^2=-1$; $i^3=-i$; $i^4=1$; $i^5=i$; ...; $i^{4k}=1$; $i^{4k+1}=i$; $i^{4k+2}=-1$; $i^{4k+3}=-i$, ($k \in \mathbb{N}$). **491.** a) 0; b) -4 ; c) -4 .

492. $n=4k$, k pozitív egész szám. **493.** $\frac{1}{z} = \bar{z}$. **494.** a) $\frac{3}{2}-2i$;

b) $3+4i$; c) $3+4i$; d) 0; e) $\pm i$; 0. **495.** $\sqrt{\frac{3}{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\sqrt{\frac{3}{2}}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

496. a) z_1 középpontú 2 egység sugarú körön; b) z_1 középpontú 2 egység sugarú körön kívül; c) z_1 középpontú 2 egység sugarú körön

belül. **497.** a) -8 ; b) 16. **498.** a) a gyökök: 1 ; $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

$-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

b) gyökök: $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$; $-1-i$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

499. a) $x_0=1$; $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; b) $x_0=1$;

$$x_1 = i; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = -i; \quad c) \quad x_0 = 1; \quad x_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5};$$

$$x_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}; \quad x_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5};$$

$$x_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}; \quad d) \quad x_0 = 1; \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2};$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}; \quad x_3 = -1; \quad x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}; \quad x_5 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2};$$

$$e) \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}; \quad f) \quad x_1 = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} +$$

$$+ i \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} - i \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}.$$

MII.