

ÚTMUTATÁSOK ÉS EREDMÉNYEK

I. Halmazok tulajdonságai és a matematikai logika elemei

1. Halmaz, részhalmaz fogalma

1. 1., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10., 12., 13., 14., 15., 18., 19. egyértelműen meghatározottak. 2. 1. 0, -1; 2. János Vitéz, Nemzeti dal; 3. 53, 59; 4. $\{3\}$, $\{3; 5\}$; 5. 0, -2, 2; 6. Például $x - 100 = 0$, $2x - 1 = 199$; 7. 2, 3; 8. 3, 1; 9. szabályos tetraéder, kocka 10. 1, 6. 3. 1. 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81; 2. 4; 3. $\emptyset$; 4. 0; 5. 0, 1, 2; 6. 3; 7. 450; 8. 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90; 9. 45; 10. 1, 3, 3^2 , 3^3 , 3^4 , 3^5 , 3^6 . 4. Egyenlők: 1., 2., 4., 7., illetve 3., 6., ezeken kívül 5., 9., valamint 8., 10. 5. Igaz állítások: 1., 2., 3., 6., 8., 10. 6. Igaz állítások: 1., 3., 5., 6., 8., 10. 7. 1. Igaz, ha $X = \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$; 2. Igaz, ha $X = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$; 3. Igaz, ha $X = \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$; 4. Igaz, ha $X = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$. 8. 1. 8; 2. 9; 3. 10; 4. 99; 5. 0; 6. 2; 7. 0; 8. 1; 9. 3; 10. 17. 9. 2, ha $A = \{0, b\}$, 3, ha $A = \{0, a, -a\}$. 10. A, B, E, G, H .

11. Például $\frac{1}{2^n} \in A$, ahol $n \in \mathbf{N}$. 12. és 13. Vizsgáljuk meg az

elemek lehetséges értékeit! 14. 1. $\mathbf{I}$; 2. $\mathbf{Q}$; 3. 0 és a negatív számok; 4. $\emptyset$; 5. $\mathbf{R}$. 15. Az eredeti halmazzal, illetve a halmaz komplementerével.

16. Igen, ha az alaphalmaz véges. 17. $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{1; 4\}$, $\{1; 5\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$, $\{2; 5\}$, $\{3; 4\}$, $\{3; 5\}$, $\{4; 5\}$.

18. a) 20, b) 1. 19. A részhalmazok: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{1; 3\}$, $\{1; 5\}$, $\{1; 7\}$, $\{3; 5\}$, $\{3; 7\}$, $\{5; 7\}$, $\{1; 3; 5\}$, $\{1; 3; 7\}$, $\{1; 5; 7\}$, $\{3; 5; 7\}$, $\{1; 3; 5; 7\}$. 20. $N \subset T \subset P$ és $N \subset R \subset P$. 21. Igazak:

1., 3., 4., 7., 9., 10. 22. Igaz. 23. Bizonyítsunk indirekt módon!

24. $A = \emptyset$. 25. Használjuk a részhalmaz definícióját!

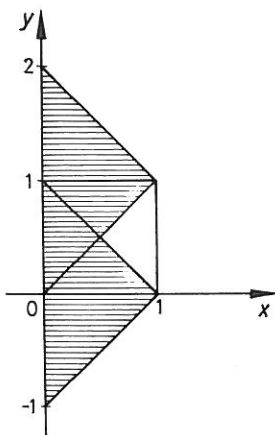
26. A halmazok végesek. 27. Igazoljunk például teljes indukcióval!

28. Készítsünk ábrát!

MI.

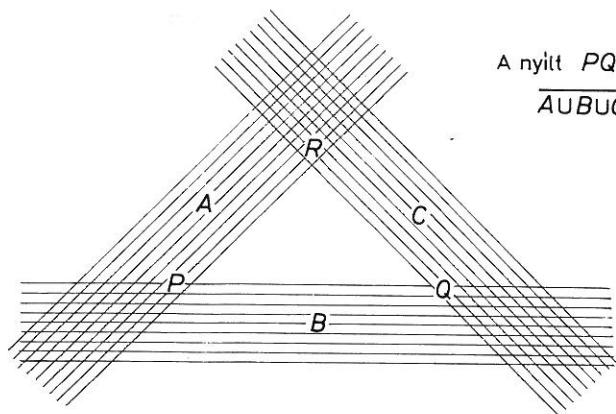
2. Műveletek halmazokkal

29. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24\}$, $B \cup C = B$, $C \cup A = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16\}$, nincsenek egyenlők. 30. $x(x+2) \cdot (x^2-1) = 0$. 31. $A \cup B$ olyan derékszögű trapéz, melynek csúcsai: $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(0; 2)$, $B \cup C$ a 64. ábrán látható, $C \cup A$ egy derékszögű trapéz, melynek csúcsai $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(0; 1)$,



64. ábra

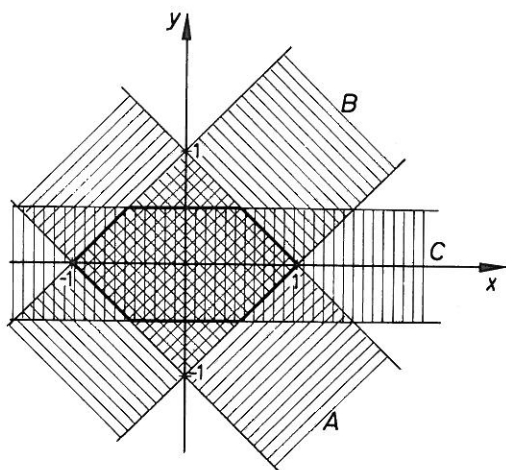
$A \cup B \cup C$ olyan szimmetrikus trapéz, melynek csúcsai: $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(0; 2)$. 32. Ha A és B határvonala párhuzamos vagy egybeeső és a felsíkok ellentétes irányításúak. 33. Lásd a 65. ábrát! 34. Tekintsük az összes lehetséges esetet! 35. Nézzük végig, hogy milyen elemekből állnak az egyes halmazok! 36. 0. 37. 1., 4., 5. nem igaz, 2., 3., 6. igaz. 38. Igazoljunk indirekt módon! 39. $A = \{a \text{ 2-nél nagyobb természetes számok}\}$, $B = \{a \text{ természetes számok}\}$. 40. $A \cap B = \{a \text{ 6-tal osztható kétjegyű számok}\}$, $B \cap C = \{30; 60; 90\}$, $C \cap A = \{\pm 30; \pm 60; \pm 90\}$. 41. $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, $C = \{2; 4\}$. 42. Használjuk az adott művelet definícióját!



A nyílt PQR háromszöglap:

$$\overline{A \cup B \cup C}$$

65. ábra



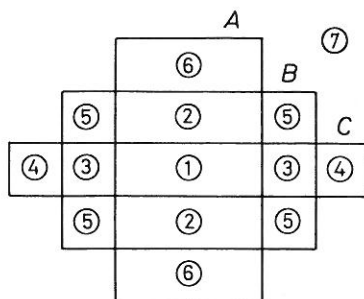
$A \cap B \cap C$ a „vastagított”
hatszöglap pontjai-
nak halmaza

66. ábra

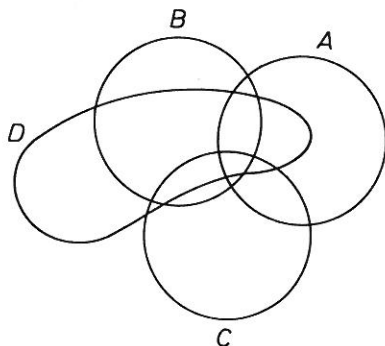
43. Lásd a 66. ábrát. 44. $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ egy négyzetlap, melynek csúcsai: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

45. Használjuk a megfelelő definíciókat! 46. Használjuk fel, hogy

$|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$ 47. 10. 48. 2, 6, 14, 26. 49. Lásd a 67. ábrát! 50. Számoljuk le, hogy egy újabb téglalap felvétele hány új tartományt eredményezhet. 51. Rajzoljunk ábrát! 52. Lásd a 68. ábrát! 53. $A \cap B \cap C = C$, $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ a $6k+2$ és



67. ábra



68. ábra

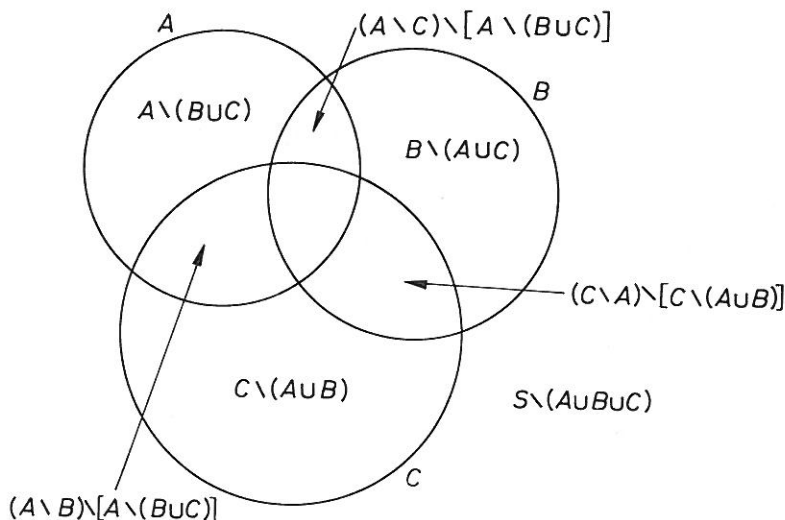
$6k+4$ alakú számok halmazának uniója, $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ a $6k+3$ alakú számok halmaza, $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ a $6k+1$, illetve $6k+5$ alakú számok halmazának uniója, ahol k tetszőleges természetes szám.

54. $A \setminus B$ a körgyűrű pontjaiból áll, $B \setminus A = \emptyset$. 55. 1. $A \setminus B = \{6k+2\} \cup \{6n+4\}$; 2. $B \setminus A = \{6k+3\}$; 3. $A \setminus C = \{4k+2\}$; 4. $C \setminus A = \emptyset$; 5. $\emptyset$; 6. az olyan $5k$ alakú számok halmaza, ahol $4 \nmid k$; 7. az ötre végződő számok halmaza; 8. az olyan $5k$ alakú számok halmaza, ahol $4 \nmid k$ és $3 \nmid k$; 9. $\emptyset$; 10. $E \setminus D$, ahol k tetszőleges természetes szám. 56. Rajzoljuk le külön-külön az egyes eseteket!

57. Használjuk a műveletek definícióit! 58. Ha az A, B, C halmazok páronként diszjunktak. 59. $A \times B = \{(0; 0), (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 0), (2; 1), (2; 2)\}$. 60. 64. 61. $A \times B$ a $(-1; -1), (1; -1), (1; 1), (-1; 1)$ csúcspontokkal rendelkező négyzetlap pontjainak halmaza. 62. 9. 63. $A \times A$, illetve $\emptyset$.

64. Igazoljunk indirekt módon! 65. Bizonyítsunk a műveletek definíciói alapján! 66. 1. 1; 2. 8; 3. 2; 4. 4. 67. $10 \leq |A \cup B| \leq 101$, $0 \leq |A \cap B| \leq 10$. 68. $A = \{1; 8; 19\}$, $B = \{9; 12; 21\}$. 69. $A = \{1; 2; 3; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 5\}$. 70. Rajzoljunk Venn-diagramokat! 71. $A = \{1; 2; 4; 6; 8; 9\}$, $B = \{1; 2; 3; 5; 9; 10; 11\}$,

- $C = \{1; 3; 4; 7; 11\}$. 72. Például: $\{1; 2\}$, $\{2; 3\}$, $\{3; 1\}$.
 73. $\{a; c; d; e\}$, $\{a; b; d; e\}$, $\{a; b; c; d\}$, $\{a; b; c; e\}$, $\{b; c; d; e\}$.
 74. Használjuk a műveletek definícióit! 75. Lásd a 69. ábrát!



69. ábra

76. $\{1; 2; 3; 4; 5\}$, $\{1; 6; 7; 8; 9\}$, $\{2; 6; 10; 11; 12\}$, $\{3; 7; 10; 13; 14\}$,
 $\{4; 8; 11; 13; 15\}$, $\{5; 9; 12; 14; 15\}$. 77. Mutassuk meg, hogy

- mindkét oldalon ugyanazok az elemek szerepelnek!
 78. a) $\{-2; 0; 1\}$, illetve $\{-2; -1; 0\}$, b) $\{-2; -1; 0; 1\}$, illetve
 $\{1\}$. c) $\{-2; 0; 1\} \cup \{-2; -1; 0\} = \{-2; -1; 0; 1\}$, illetve
 $\{-2; 0; 1\} \setminus \{-2; -1; 0\} = \{1\}$. 79. a) $\{0; 1; 2; 3; 4\}$, b) $\{1; 3\}$,
 c) $\emptyset$, d) $\{2\}$, e) $F \cup G \cup H$; f) $(F \cup G) \setminus H$; g) $F \setminus (G \cup H)$;

- h) $F \cap G \cap H$. 80. Nem, például $a(x) = \frac{x-2}{x-1}$, $b(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$.

81. $a(x) = \frac{x-1}{x}$, $b(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $c(x) = \frac{x-2}{x-1}$. 82. Például $b(x) = \frac{1}{a(x)}$
 esetén teljesül az állítás. 83. a) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 1\}$. 84. a)

- $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, illetve $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. b) $\{-2; 2\}$, illetve $\{-1; 0\}$. c) $\{-1; 2\}$.

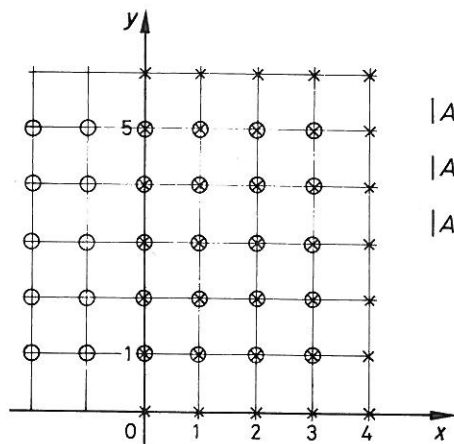
85. $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \{2\}$, $I_1 \cap I_2 \cap I_4 = [1; 2]$, $I_1 \cap I_3 \cap I_4 = \{2\}$, $I_2 \cap I_3 \cap I_4 =$

MI.

$= [2; 3]$. **86.** A metszet: $\{2\}$, az unió: $[0; 4]$. **87.** 0. **88.** Ez a pont az origó. **89.** Először igazoljuk az állítást három intervallumra! **90.** Bizonyítsunk például a teljes indukció módszerével! **91.** Például legyen $I_n = \left]0; \frac{1}{n}\right]$.

3. Halmaz elemeinek száma

92. $|A \setminus B| = 0$, $|B \setminus A| = 100$, $|A \cup B| = 199$, $|A \cap B| = 99$.
93. $|A \setminus B| = 4$, $|B \setminus A| = 8$, $|A \cap B| = 8$. **94.** Lásd a 70. ábrát!
95. 1. 0 és 2; 2. 2 és 4; 3. 0 és 2; 4. 4 és 6. **96.** $|A \cap B| = 2$,



$$\begin{aligned} |A| &= 35, & |B| &= 30, \\ |A \setminus B| &= 15, & |B \setminus A| &= 10, \\ |A \cap B| &= 20, & |A \cup B| &= 45. \end{aligned}$$

70. ábra

$|A \cup B| = 11$. **97.** Használjunk Venn-diagramot! **98.** $|A| = 10$, $|B| = 11$, $|A \setminus B| = 7$, $|B \setminus A| = 8$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B| = 18$. **99.** 8. **100.** 3, 23. **101.** Rajzoljuk meg három halmaz Venn-diagramját a lehetséges módokon! **102.** 18. $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; a; b\}$, $B = \{1; 2; 6; 7; 8; 10; c; d\}$, $C = \{4; 5; 7; 8; 9; 10; e; f\}$, $D = \{2; 3; 4; 6; 7; 8; g; h\}$. **103.** Rajzoljuk meg a feladathoz tartozó diagramot! **104.** és **105.** Használjuk fel, hogy $|A_i| \geq |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|$, $i = 1, 2, \dots, k$ esetén. Egyenlőség az

$A_1 = A_2 = \dots = A_k$ esetben van. **106.** 1. 3; 2. $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = A \cap B \cap C$; 3. 7. **107.** Mindkettőnek 10 000. **108.** Használjuk fel, hogy $|A \times B| = |B \times A|$. **109.** 9. **110.** és **111.** Vizsgáljuk meg, hogy milyen elempárok lehetnek a metszetben! **112.** $\{1; 2; 3\}, \{1; 4; 5\}, \{2; 4; 6\}, \{3; 5; 6\}$. **113.** Használjuk fel, hogy egy halmaznak mindegyik halmazzal van közös eleme, melyek egymástól különbözők! **114.** 15. **115.** Vegyük figyelembe, hogy mindegyik halmaz legalább $k - 1$ elemű, és egy elem az „unióban” legfeljebb kétszer szerepelhet. **116.** 4. **117.** $3k + 1 \leq |A \cup B \cup C| \leq 6k + 1$. Először azt mutassuk meg, hogy $|A \cup B \cup C|$ akkor minimális, ha $|A \setminus (B \cup C)| = |B \setminus (C \cup A)| = |C \setminus (A \cup B)| = 0$. **118.** Igen. **119.** Alkalmazzuk az előző feladat megoldásának menetét! **120.** $\{1; 2; 3; 4\}, \{2; 3; 4; 5\}, \{3; 4; 5; 6\}, \{4; 5; 6; 7\}, \{5; 6; 7; 1\}$. **121.** és **122.** Az állítás helyessége a halmazok különbözőségéből következik. **123.** Elegendő igazolni az előző feladat szerint, hogy n -nél több eleme nem lehet az uniónak. Ha viszont bármelyik $n - 1$ halmaznak van közös eleme, akkor ezek különbözők is és minden elemnek szerepelnie kell valamilyen $n - 1$ tagú metszetben. **124.** Tekintsük az $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ halmaz $(n - 1)$ elemű részhalmazait! **125.** $11 \leq |A \cup B \cup C| = 18, |A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 4$ alapján például tetszőleges esetet mondhatunk.

MI.

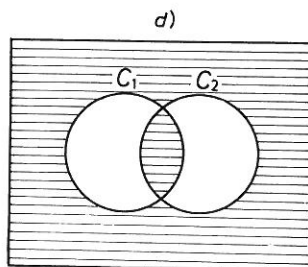
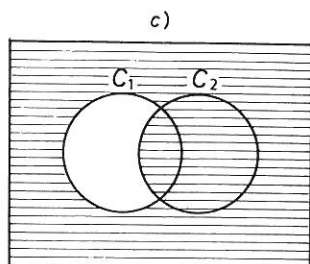
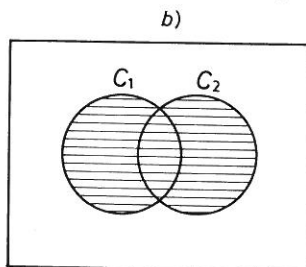
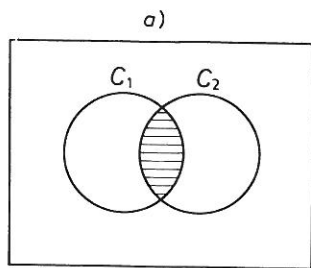
4. Műveletek tulajdonságai, azonosságok

126. Az állítások igazak. **127.** Bizonyítsunk indirekt módon!
128. Mutassuk meg, hogy mindkét halmaz A és B mindegyik elemét tartalmazza! Rajzoljunk Venn-diagramot is! **129.** 1. $A = B$; 2. $A = B$; 3. $B \subseteq A$; 4. $B \subseteq A$; 5. $A = \emptyset$; 6. $B = C$. **130.** Például $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{2, 4\}$. **131.** Egy ellenpélda: $A = \{1; 2; 3\}, B = \{1; 2\}, C = \{3\}$. Zárójelezhető például az $A = \{1; 2; 3\}, B = C = \{1\}$ esetben. **132.** Igazoljuk, hogy a bal oldal A és B közös elemeit tartalmazza, más elemét pedig nem!
133. Rajzoljunk Venn-diagramokat! **134.** Például $A = \{2; 3\}, B = \{3; 4; 5\}, C = \{5; 6\}$. **135.** Nem, illetve igen. **136.** Ha $(A \cap C) \setminus B = \emptyset$.

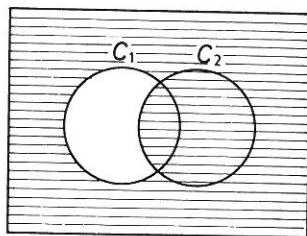
137. $\overline{A \cap B} = \overline{A \setminus (A \setminus B)} = \overline{B \setminus (B \setminus A)} = R \setminus [A \setminus (A \setminus B)]$.
 138. Például: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, $B \setminus A = B \cap \bar{A}$,
 $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = R \setminus (\bar{A} \cap \bar{B})$. 139. Rajzoljunk Venn-diagramot!
 A négy tartomány: $\overline{A \cup B}$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $A \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cup B$. 140. Bizonyítsuk,
 hogy az egyes halmazok minden eleme a másik oldalon levő halmaz-
 nak is eleme és fordítva! 141. Lásd a 140. feladat megoldását!
 142. Készítsünk Venn-diagramot! 143. Gondoljunk az összes le-
 hetőséges esetre! 144. 1. $\emptyset$; 2. A ; 3. $\emptyset$; 4. az alaphalmaz; 5. $\emptyset$; 6. $\emptyset$;
 7. $A \setminus B$; 8. $B \setminus A$; 9. A ; 10. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. 145. Rajzoljunk
 szemléltető ábrát! 146. Szemléltessük A -t, B -t Venn-diagrammal
 és mutassuk meg, hogy a kapott négy tartomány tetszőleges „pont-
 jai” nem elemei a felírt halmaznak! 147. Tekintsük az egyes
 műveletek definícióit!

5. Műveletek ítéletekkel (állításokkal) és logikai értékekkel

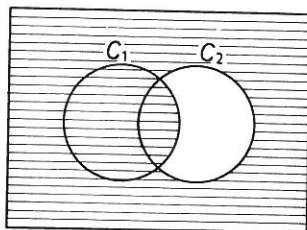
148. Igazak: 1., 2., 4., 8., 9. 149. a) 0; 1; 2; b) 1; 3; 5; c) 2;
 6; 8; d) 0; 3; 7; e) 0; 4; 8; f) 1; 4; 5; g) 1; 2; 3; h) 0; 1; 6; i) 4; 9;
 25; j) 2; 9; 10. 151. Ha az $A, B, \dots, G$ ítéletek logikai értéke igaz,
 akkor az új ítéletek közül igaz logikai értékű: 1., 2., 3., 4., 6., ha az
 eredeti ítéletek hamisak, akkor igaz lesz: 1., 3., 4., 6., 8. 152. Az
 A ítélet értékétől függ: $A \rightarrow \neg A$, $\neg A \rightarrow A$. 153. 1. $p=i, q=i, r=h$;
 2. csak a $p=i, q=r=h$ eset nem lehetséges; 3. $(i; i; h)$, $(h; h; h)$,
 $(h; i; h)$; 4. $(i; i; h)$; 5. $(h; i; i)$; 6. $p=i, q=h$, vagy $p=h, q=i$; 7. $(i; i; h)$,
 $(i; h; h)$, $(h; i; i)$, $(h; i; h)$; 8. $(i; i; h)$, $(i; h; i)$, $(i; h; h)$, $(h; i; i)$.
 154. Az implikáció nem kommutatív és nem asszociatív művelet.
 155. $(p \vee q) \wedge p$ például. 156. $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$. 157. Azt
 nézzük meg, hogy a műveletek eredménye mikor hamis!
 158. Igen. 159. Nem. 160. Minden esetben igaz.
 161. Mindkét oldal logikai értékét külön-külön számoljuk ki!
 162. a) $i; i; i; h; i; i$; b) $h; h; i; i; i; i$; c) $i; i; i; h; i; i$; d) $i; h; i; i; i; i$.
 163. Azonosságok: b), c), e). 164. Használjunk például érték-



71. ábra



$$A(x) \rightarrow B(x)$$

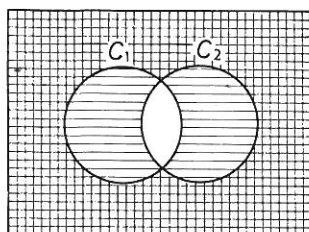


$$B(x) \rightarrow A(x)$$

72. ábra

MI.

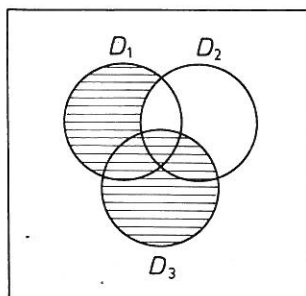
táblázatot! **165.** Lásd a 71. ábrát! **166.** Lásd a 72. ábrát!
167. Lásd a 73. ábrát! **168.** Lásd a 74. ábrát! **169.** Ha $x \in H$,
 ahol H az alaphalmaz, akkor elegendő csak $A(x) \wedge \neg A(x)$ -et vizsgálni
 x értékeire. **170.** $\{12; 24\}$, $\{12; 24\}$, $\{12; 24\}$, $\{12; 24\}$.
171. a) 4; b) 4; c) 11; d) 8. **172.** A $-2 \leq x \leq 0$ és a $3 < x \leq 4$
 egyenlőtlenségek által meghatározott intervallumok uniója.



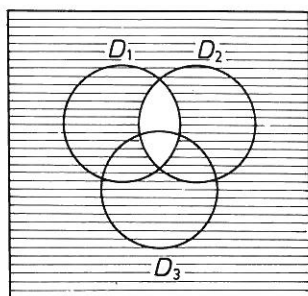
$\equiv$: $\neg(A(x) \wedge B(x))$ igazsághalmaza

$|||||$: $\neg A(x) \wedge \neg B(x)$ igazsághalmaza

73. ábra



$(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow C(x)$

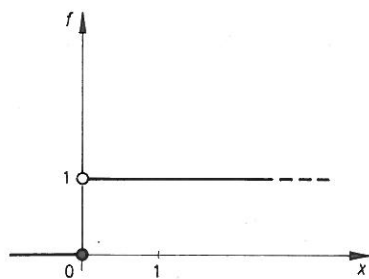


$A(x) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(x))$

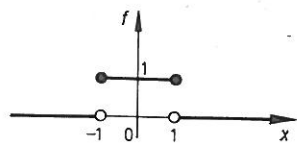
74. ábra

6. Logikai függvények

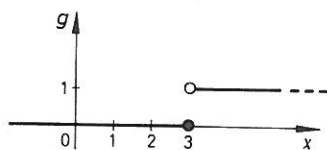
173. Lásd a 75. ábrát! 174. Lásd a 76. ábrát! 175. Lásd a 77. ábrát! 176. Lásd a 78. ábrát! 177. 1. 12; 2. 10; 3. 10; 4. 10; 5. 10; 6. 13; 178. a) igen; b) nem; c) nem; d) igen; e) nem; f) igen; g) nem; h) nem; i) igen; j) nem; k) igen; l) nem; m) igen; n) igen; o) igen; p) igen; r) igen; s) igen; t) igen; u) igen.



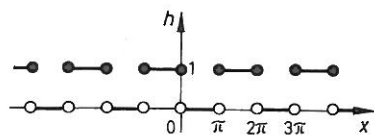
75. ábra



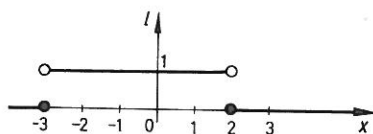
a)



b)

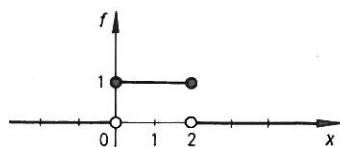


c)

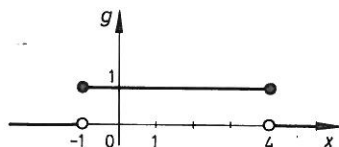


d)

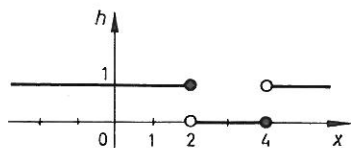
76. ábra



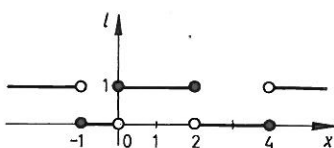
a)



b)



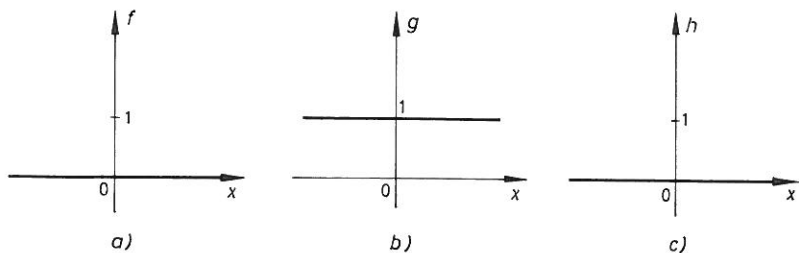
c)



d)

77. ábra

MI.



78. ábra

7. Következtetések

179. Nem. **180.** Előfordulhat, hogy helyes a következmény, de logikailag nem helyes a következtetés. Ha 1. hamis, akkor $(1. \rightarrow 2.) \wedge 2.$, 2. igaz volta esetén szintén igaz és 1. mégis hamis.

181. Az értéktáblázatból kiderül, hogy a következtetés helyes.

182. Használjunk értéktáblázatot! **183.** Lásd a **180.** feladatot! **184.** Péter állítása lehet igaz is, hamis is. **185.** Igen.

186. Készítsünk értéktáblázatot! **187.** Igen. **188.** Legyen p : egy szám osztható 2-vel, q : a szám prímszám, jelöléseinkkel a következtetés:

$\frac{(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q}{p}$. A következtetés helyességéről könnyen meggyőződhetünk a logikai értékek helyettesítésével.

189. Lásd az előző feladatot! **190.** Igen.

191. $\frac{[(e \wedge a) \vee (e \wedge b)] \wedge (e \wedge d) \wedge (d \rightarrow \neg b) \wedge (d \rightarrow \neg c)}{e \wedge a}$. **192.** He-

lyes, az utolsó helyen szereplő változóktól haladjunk előre!

193. Helyes következtetések: 1., 2., 3., 5., 8. **194.** Vizsgáljuk meg, hogy a „számlálók” mikor igazak! **195.** a) Például q ; b) $p \leftrightarrow q$;

c) $\neg p$; d) $p \wedge q$. **196.** Helyes. **197.** $\frac{(p \rightarrow q) \wedge \neg q}{\neg p}$, megfordítva:

$\frac{\neg p}{(p \rightarrow q) \wedge \neg q}$, a következtetés nem helyes. **198.** a) pontosan egy; b) Béla; c) egy.