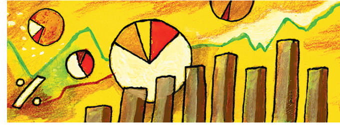


# 10.6. ESEMÉNYEK

## Események – megoldások

**2731** *a)* Igen, igen, nem, igen.

*b)* és *c)* {gól; nem gól}, {kosár jó; kosár nem jó}, –, cserepek száma.

**2732** *a)* {1, 2, 3, …, 19, 20}; *b)* {0, 1, 2};

*c)* {–20, –19, …, –1, 1, …, 19, 20}.

**2733** *a)* Igen. *b)* $8 \le x \le 13$

*c)* Rudi jó: $\{9{,}5 \le x \le 10{,}5\}$; rudi nem jó: $\{x < 9{,}5$ vagy $10{,}5 < x\}$; 10 cm-nél rövidebb: $\{x < 10\}$.

**2734** *a)* {1, 2, 3, …, 29};

*b)* $A$ = {1, 2, 3, 4, 5}, $B$ = {20, 21, 22, …, 29}, $C$ = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}.

*c)* $A$ = {6, 7, 8, …, 29} = {legalább 6.-ra húzunk királyt};

$B$ = {1, 2, 3, …, 19} = {legfeljebb 19.-re húzunk királyt};

$C$ = {1, 4, 6, …, 28} = {elsőre vagy összetett sorszámra húzunk királyt}.

*d)* Biztos esemény például: {legfeljebb 32.-re húzunk királyt}.

Lehetetlen esemény például: {29.-re sem húzunk királyt}.

**2735** *a)* {3, 4, 5, …, 18}.

*b)* Biztos esemény: {pozitív összeget dobunk}. Lehetetlen esemény: {20-nál többet dobunk}.

**2736** *a)* {piros, zöld, fehér}.

*b)* {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; p); (z; f); (f; p); (f; z)}.

*c)* {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; f)}.

*d)* {(p; p; p); (p; p; z); (p; p; f); (p; z; z); (p; z; f); (z; z; f)}.

*e)* {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; p); (z; f); (f; p); (f; z); (f; f)}.

**2737** *a)* A lehetséges kimenetelek táblázata:

*b)* 3-3-3.

| Zsolt \ Jenő | Kő | Papír | Olló |
|---|---|---|---|
| **Kő** | *D* | *J* | *Zs* |
| **Papír** | *Zs* | *D* | *J* |
| **Olló** | *J* | *Zs* | *D* |

**2738** *a)* A lehetséges kimenetelek táblázata:

*b)* 30.

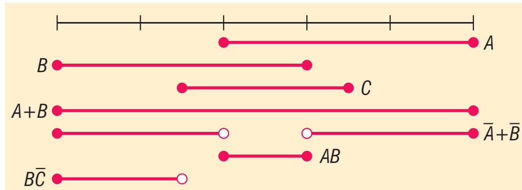
*c)* Mindkettőt ugyanannyi elemi esemény valósítja meg.

| T \ P | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | – | *P* | *P* | *P* | *P* | *P* |
| **2** | *T* | – | *P* | *P* | *P* | *P* |
| **3** | *T* | *T* | – | *P* | *P* | *P* |
| **4** | *T* | *T* | *T* | – | *P* | *P* |
| **5** | *T* | *T* | *T* | *T* | – | *P* |
| **6** | *T* | *T* | *T* | *T* | *T* | – |

# Műveletek eseményekkel – megoldások

**2739** *a)* $\overline{A} = \{\text{nincs fej}\}$; $\overline{B} = \{\text{van fej}\}$; $\overline{C} = \{0,\ 1 \text{ vagy } 3 \text{ fej}\}$; $\overline{D} =$ lehetetlen.
*b)* Nem.
*c)* Igen, {mind írás} és {pontosan kettő fej}.

**2740** *a)* és *b)*-nél az eseményeket az ábrán láthatjuk:
*c)* $A + B$ biztos, $\overline{A} \cdot \overline{B}$, $A \cdot B \cdot \overline{C}$ lehetetlen.
*d)* Például $A$ és $B \cdot \overline{C}$, illetve $A + B$ és $\overline{A} \cdot \overline{B}$.




**2741** *a)* $3! \cdot 2 = 12$, illetve $3! \cdot 3! = 36$. *b)* Igaz. *c)* $3! \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

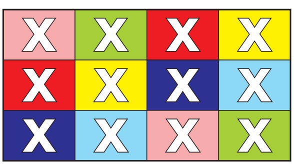
**2742** *a)* Az események szövegesen:

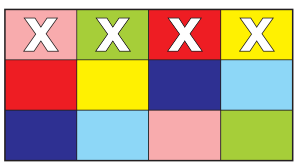
$$A + B = \{\text{tököt vagy tízest vagy ászt húzunk}\};$$
$$A \cdot B = \{\text{tök tízest vagy tök ászt húzunk}\};$$
$$B \cdot C = \{\text{ászt húzunk}\};$$
$$A + C = \{\text{tököt vagy figurás lapot húzunk}\};$$
$$\overline{C} \cdot A = \{\text{számozott tök lapot húzunk}\};$$
$$A \cdot B \cdot C = \{\text{tök ászt húzunk}\}.$$

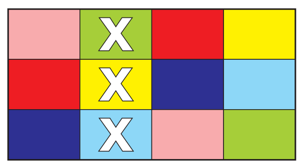
*b)* $|A| = 8$, $|B| = 8$, $|C| = 16$;
$|A + B| = 14$, $|A \cdot B| = 2$, $|B \cdot C| = 4$, $|A + C| = 20$, $|\overline{C} \cdot A| = 4$, $|A \cdot B \cdot C| = 1$.

**2743** *a)* $E = \overline{A}$; $F = \overline{B + D}$; $G = \overline{A + C} \cdot B$; $H = C \cdot \overline{D}$.
*b)* Igen, a következő párok: $A$ és $C$, $E$, $G$ vagy $H$; $B$ és $D$ vagy $F$; $C$ és $G$; $D$ és $F$, $G$ vagy $H$; $F$ és $G$.

**2744** *a)* $A + B$; $A \cdot \overline{B}$; $\overline{C} \cdot \overline{E}$.

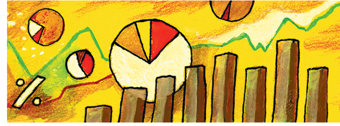



*b)* $F = A \cdot B$; $G = E \cdot \overline{D}$; $H = (E + D) \cdot \overline{E \cdot D}$.
*c)* $A \cdot B \cdot C$; $\overline{A} \cdot D$; $\overline{B} \cdot (C + E \cdot D) + A \cdot B \cdot (E + D) \cdot \overline{E \cdot D} + \overline{A} \cdot (C + E \cdot D)$.

**2745** *a)* $(A \cdot B) \setminus C = (A \cdot B) \cdot \overline{C}$;
*b)* $A + B + C$;
*c)* $\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$;
*d)* $(A \cdot B) + (B \cdot C) + (A \cdot C)$;
*e)* $(A + C) \setminus B = (A + C) \cdot \overline{B}$;
*f)* $(\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + \overline{C}) \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}$.



**2746** *a)* A megjelölt körívek a bal oldali ábrán láthatók.

*b)* $A + B + C = \{12;\ 5;\ 20;\ 1;\ 18;\ 4;\ 13;\ 6;\ 10;\ 15;\ 2\}$ (sárga körcikk a jobb oldali ábrán);

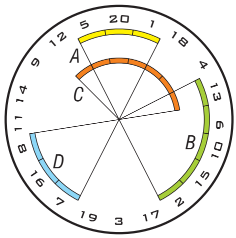
$C \cdot \overline{A + B} = \{12;\ 18;\ 4\}$ (narancssárga körcikk a jobb oldali ábrán);

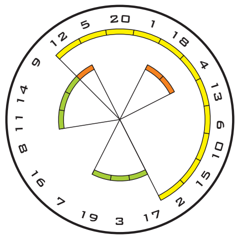
$B \cdot \overline{D} = B$;

$\overline{A + B + C + D} = \{17;\ 3;\ 19;\ 11;\ 14;\ 9\}$ (zöld körcikk a jobb oldali ábrán).

*c)* Bármely kettő, kivéve az $A$ és $C$ párt.

*d)* $A$ bekövetkezése maga után vonja $C$ bekövetkezését.




## Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség – megoldások

**2747** –

**2748** *a)* Géza: $\frac{12}{23} \approx 0{,}52$; Tamás: $\frac{7}{19} \approx 0{,}37$; Ferenc: $\frac{13}{22} \approx 0{,}59$.

*b)* Ferencre kell bízni a szabadrúgások elvégzését.

**2749** *a)* Piros: $\frac{12}{40} = 0{,}3$; kék: $\frac{8}{40} = 0{,}2$; sárga: $\frac{20}{40} = 0{,}5$.

*b)* Piros: 30 db $(100 \cdot 0{,}3 = 30)$; kék: 20 db $(100 \cdot 0{,}2 = 20)$; sárga: 50 db $(100 \cdot 0{,}5 = 50)$.

**2750** –

**2751** Legfeljebb 11.

**2752** Legalább négy.

**2753** –

**2754** –

## A valószínűség klasszikus modellje – megoldások

**2755** $\frac{1}{6} = 0{,}1\dot{6}$.

**2756** $\frac{2}{16} = 0{,}125$.

**2757** $\frac{24}{30} = 0{,}8$.

**2758** *a)* $\frac{3}{7} \approx 0,43.$ *b)* $\frac{2}{7} \approx 0,29.$

**2759** $\frac{10}{90} = 0,\dot{1}.$

**2760** $1 - 0,6 = 0,4.$

**2761** $1 - \frac{7}{30} = 0,7\dot{6}.$

**2762** $1 - \frac{7+9}{40} = 0,6.$

**2763** $\frac{14}{50} = 0,28.$

**2764** $\frac{6}{25} = 0,24.$

**2765** $\frac{x}{15} = 0,8;\ x = 12.$

**2766** $\frac{4}{x} = 0,2;\ x = 20.$

**2767** $\frac{x}{x+12} = 0,6;\ x = 18.$

**2768** $1 - \frac{20}{20+x} = 0,2;\ x = 5.$

**2769** $\frac{80^\circ}{360^\circ} = 0,\dot{2}.$

**2770** *a)* $\frac{1}{10} = 0,1;$ *b)* $\frac{1}{10} = 0,1;$ *c)* $3 \cdot \frac{1}{10} = 0,3.$

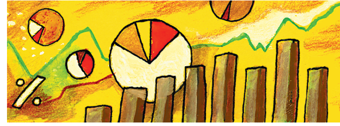
**2771** $\frac{11}{37} = 0,\dot{2}9\dot{7}.$

**2772** Például: $\{1; 2; 3; 4\}$ vagy {nem összetett szám dobása}.

**2773** *a)* $\frac{120}{150} = 0,8.$ *b)* Hetente egyszer.

**2774** *a)* Nem.
*b)* 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 21.
*c)* $\frac{4}{21} \approx 0,19.$
*d)* $\frac{11}{21} \approx 0,524.$

**2775** *a)* $\frac{8}{8^8} \approx 0,000000476;$ *b)* $\frac{2}{8^8} \approx 0,000000119.$



**2776** *a)* $\frac{1}{5!} \approx 0{,}0083;$ *b)* $\frac{2}{5!} \approx 0{,}0167.$

**2777** *a)* $\frac{6 \cdot 6 \cdot 3}{6^3} = 0{,}5;$ *b)* $\frac{6+6+2 \cdot 6 \cdot 6}{6^3} \approx 0{,}389;$ *c)* $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} \approx 0{,}556.$

**2778** *a)* $\frac{11}{100} = 0{,}11;$ *b)* $\frac{11-5}{100-16} \approx 0{,}071;$ *c)* $\frac{19}{100} = 0{,}19.$

**2779** *a)* $\frac{6}{6^2} \approx 0{,}167;$ *b)* $\frac{9+9+9}{6^2} = 0{,}75;$ *c)* $\frac{6}{6^2} \approx 0{,}167;$

*d)* $\frac{20}{6^2} = 0{,}\dot{5}.$

**2780** $\frac{8}{20} = 0{,}4.$

**2781** Érdemes áttérnünk a komplementer eseményre, hiszen az a csupa írás (1 eset). Az összes események száma $2^3$, így:

$$P = \frac{8-1}{2^3} = 0{,}875.$$

**2782** *a)* Feltehetjük, hogy egyetlen Kis Misi jár ebbe az osztályba:

$$P = \frac{1}{30} \approx 0{,}033.$$

*b)* A 30 tanulónak pontosan a fele szerepel a kinyitott napló jobb oldalán:

$$P = \frac{15}{30} = 0{,}5.$$

*c)* Az első 10 tanuló között:

$$P = \frac{10}{30} \approx 0{,}333.$$

*Megjegyzés:* Kis Misi esetében (és a többiben is) gondolkodhatunk úgy is, hogy 15 oldalpárnál nyílhat ki a napló, majd az ott levő két tanuló közül választ a tanár. Vagyis:

$$P = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2}.$$

**2783** *a)* Ha felcsapjuk a könyvet, egyszerre mindig két oldalt látunk. Azaz csak 180 lehetőség marad, hogy valahol kinyissuk, ebből 9 fő fejezethatár:

$$P = \frac{9}{180} = 0{,}05.$$

*b)* A 9 fő fejezet és a $9 \cdot 5 = 45$ szakaszhatár együtt 54 oldalt foglal el:

$$P = \frac{54}{180} = 0{,}3.$$

**2784** *a)* A keresett valószínűség:

$$P = \frac{1}{24} \approx 0{,}04167.$$

*b)* A kedvező esetek száma 1, az összes esetek száma $24 \cdot 24$, így:

$$P = \frac{1}{24^2} \approx 0{,}0017361.$$

*c)* A kedvező esetek száma itt 3!, az összes eseteké pedig $24 \cdot 24 \cdot 24$:

$$P = \frac{3!}{24^3} \approx 0{,}000434.$$

**2785** *a)* Minden színből 8-8 darab van a csomagban. Ha nem tesszük vissza a lapokat, akkor minden húzás után a még húzható lapok száma eggyel csökken:

$$P = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \approx 0{,}004746.$$

*b)* Figyeljük meg, hogy a számlálót nem befolyásolja a visszatevés, azonban a nevező már nem csökken. Azaz a valószínűség kevesebb lesz, méghozzá $\frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{32 \cdot 32 \cdot 32}$-szeresével:

$$P = \frac{8^4}{32^4} = 0{,}00390625.$$

**2786** *a)* 3 és 2 egyforma dolgot $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$-féleképpen tehetünk sorba. Mindannyiszor $8 \cdot 7 \cdot 6$-féleképpen húzhatunk pirosat a pirosak, $8 \cdot 7$-féleképpen tököt a tökök közül.

Az összes esetek száma $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28$, így:

$$P = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} \approx 0{,}00779.$$

*b)* Az első szorzótényező, a sorba rakások lehetősége nem változik. A többi igen, mivel nem csökken az egyes lehetőségek száma sem a kedvező, sem az összes esetek között:

$$P = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 8^3 \cdot 8^2}{32^5} \approx 0{,}009766.$$

**2787** *a)* Mivel a bástya csak a sorában és az oszlopában üt, ha az egyik oszlopban valamelyik mezőre elhelyezünk egy bástyát, akkor abban a sorban más bástya nem lehet. Így az első oszlopban 8, a másodikban már csak 7, aztán 6 stb. lehetőségünk van a bástyák elhelyezésére. A kedvező esetek száma 8!. Az összes eset száma $8^8$, ekkor ugyanis egymás mellé is tehetjük a figurákat, minden oszlopban nyolc helyre:

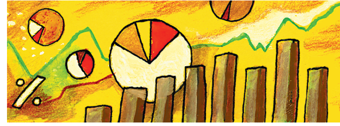
$$P = \frac{8!}{8^8} \approx 0{,}0024.$$

*b)* Ebben a részkérdésben az összes esetek száma megegyezik az előző példa kedvező eseteivel (nem ütik egymást), azaz 8!.

A kedvező esetek összeszámlálásához két dolgot kell észrevennünk: egyrészt minden sorban két átlómező található, egy világos és egy sötét (például az első és utolsó sorban a két szélső, a negyedik és ötödik sorban pedig a középső négyes); másrészt ezek a mezők szimmetrikusan helyezkednek el. Felülről indulva szabadon választhatunk az átlómezők közül az első négy sorban, azonban utána már a szimmetria miatt csak egy-egy szabad lehetőségünk van minden sorban. Vagyis a kedvező esetek száma $2^4$, így:

$$P = \frac{2^4}{8!} \approx 0{,}000397.$$

*Megjegyzés:* Mindkét részben a sorok és oszlopok szerepe felcserélhető.



**2788** *a)* Az öt szám hatféleképpen egyezhet meg (kedvező esetek). Az összes esetekhez bármelyik kockával dobhatunk 6-félét: $6^5$,

$$P = \frac{6}{6^5} \approx 0{,}00077.$$

*b)* Kis pókernél az egy különböző 5-féle kockára jöhet (megkülönböztetve a kockákat). A különböző kocka 5-féle számot mutathat. A többi négy 6-féleképpen lehet egyforma. A kedvező esetek száma így $5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$, ebből:

$$P = \frac{150}{6^5} \approx 0{,}0193.$$

**2789** *a)* A kis sor valószínűsége:

$$P = \frac{5!}{6^5} = 0{,}0154.$$

*b)* A két valószínűség egyenlő.

**2790** *a)* A rulettasztal számtáblázata az ábrán látható.


*b)* Minden sorban 3 szám áll:

$$P = \frac{3}{37} \approx 0{,}081.$$

(A 0 nem tartozik a sorok közé.)

*c)* Egy-egy oszlopban 12 szám áll:

$$P = \frac{12}{37} \approx 0{,}324.$$

(A 0 nem tartozik hozzá egy oszlophoz sem.) Az első tucatban ismét csak 12 szám van, így annak valószínűsége ugyanekkora.

*d)* Két szomszédos oszlopban 24 darab szám található, így:

$$P = \frac{24}{37} \approx 0{,}648.$$

Tehát 30 játékból kb. 20-szor nyerünk. (Ez azt jelenti, hogy kicsit ritkábban, mint három pörgetésenként kétszer nyerünk a fogadással – legalábbis ez *várható.*)

**2791** *a)* $P = \frac{1}{37} \approx 0{,}027$; *b)* $P = \frac{2}{37} \approx 0{,}054$; *c)* $P = \frac{n}{37} \approx n \cdot 0{,}027$.

*d)* 18 darab piros színű és 18 darab páratlan van a számok között, esélyük így ugyanakkora:

$$P = \frac{18}{37} \approx 0{,}486.$$

**2792** *a)* Mivel az összes esetek száma hat, ezért a valószínűségeik alapján $A$ és $B$ is 3-3 elemi eseményt kell, hogy tartalmazzon, szorzatuk (metszetük) pedig 2-t. Például: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$, $A \cdot B = \{2; 3\}$.

*b)* $A$ most is 3 elemi eseményből áll, $B$ azonban kettőből, összegük (egyesítésük) négyből. Például: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 4\}$, $A + B = \{1; 2; 3; 4\}$.

**2793** Nem ismerjük a pontos darabszámokat, legyen például a jó csokikból $n$ darab. Ekkor $0{,}25n$ lejárt szavatosságú van. A keresett valószínűség:

$$P = \frac{n}{n + 0{,}25n} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8.$$

*Megjegyzés:* Tökéletes megoldás, ha a feladat elején választunk egy „kellemes” darabszámot a jó csokiknak, például 100-at. Ekkor 25 darab lejárt szavatosságú csoki volt a dobozban:

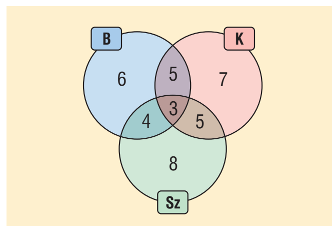
$$P=\frac{100}{125}=0{,}8.$$

**2794** *a)* Ha csak egy irányban közlekedik, akkor a 9 vagy a $-9$ pontba juthat el. Ha 8 egységet lép az egyik, és egyet a másik irányba, akkor a 7 vagy a $-7$ pontba jut. És így tovább: láthatjuk, hogy csak a páratlan számoknál fejezheti be kilenc perces sétáját.

*b)* Számoljuk össze a rendelkezésre álló kilenc perc alatt bejárható, összes és kedvező útvonalak számát. Mivel minden percben két irányban közlekedhet egy egységet, a kilenc perc alatt összesen $2^9$ lehetősége van a katicának mozogni. Az 5-ös pontban akkor fejezi be a sétát, ha öt percig a pozitív irányba halad, a maradék négy percben pedig kétszer előre, kétszer hátra mozog. Hogy mikor teszi meg ezeket a mozgásokat a kilenc perc alatt, az nem érdekes. Ha + és – jelekkel jelöljük az egyes lépéseket, akkor összesen hét + és kettő – jelet kell leírnunk minden kilenc jelből álló sorozatban. Például: +, –, +, +, +, +, –, +, +. Ezek száma $\frac{9!}{7!\cdot 2!}$, így a keresett valószínűség:

$$P=\frac{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}{2^9}\approx 0{,}07.$$

**2795** Mielőtt a konkrét kérdésekre válaszolnánk, ábrázoljuk Venn-diagrammal a gyümölcsimádókat. Szokás szerint haladhatunk belülről kifelé:




*a)* $P=\frac{8}{38}\approx 0{,}21;$ *b)* $P=\frac{8+7+6}{38}\approx 0{,}55;$

*c)* $P=\frac{38-3}{38}=\frac{6+5+7+5+8+4}{38}=1-\frac{3}{38}\approx 0{,}89.$

*Megjegyzések:* Nem érdemes logikai szitát használnunk, hiszen legfeljebb arra jövünk rá, hogy nincs olyan tanuló, aki ne szeretné legalább az egyik gyümölcsöt. A *c)* részkérdésnél áttérhetünk a komplementerre is. Így nincs szükség a Venn-diagramra, a szöveg tartalmazza a hármas metszet elemszámát.

Valószínűségek számításánál a komplementer eseményre való áttéréskor két dolgot is tehetünk: felírhatjuk az összes eseményből kivont ellentett eseményt; vagy kivonjuk a biztos esemény valószínűségéből (1-ből) a komplementer valószínűségét.

**2796** *a)* Minden színből 8 van a csomagban. Ha visszatevés nélkül húzunk, akkor minden húzás után eggyel csökken a csomag elemszáma, és vele együtt az egyes színek száma is. Ne feledjük, még a 3, 2, 2 azonos színű lapok lehetséges sorrendjeit is figyelembe kell vennünk. A megoldás:

$$P=\frac{\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 8\cdot 7\cdot 8\cdot 7}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}\approx 0{,}013.$$

*b)* Ha a kivett lapokat visszatesszük, akkor az új húzásnál nem csökken a választási lehetőségek száma:

$$P=\frac{\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 8^3\cdot 8^2\cdot 8^2}{32^7}\approx 0{,}0128.$$

*Megjegyzés:* Az *a)* részfeladatban a csökkenő szorzatokat felírhattuk volna például a következő formában is:

$$\frac{32!}{(32-7)!}.$$

**2797** *a)* Kombinatorikából ismert a feladat: tegyünk sorba több dolgot, melyek között azonosak is vannak (az előző példában is alkalmaznunk kellett). A megoldás:

$$\frac{14!}{8!\cdot 4!\cdot 2!}=45\,045.$$

*b)* A feladat által megadott pillanatban az összes esetek száma 8, a kedvező (rózsaszín) esetek száma 2, így:

$$P=\frac{2}{8}=0,25.$$

*c)* Két megoldást is adunk. A bonyolultabb szerint, ha csak egy lilát nem vettünk ki eddig, akkor a kivett 13 golyót $\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}$-féleképp tehetjük sorba. Az egyes színekből 8!, 4!, 2!-féleképp húzhatunk golyókat. A nevezőben gyakorlatilag 14! szerepel – a végére elvileg nem írhatjuk oda az egyest (ahogy a 4! végére sem), de értékét ez nem befolyásolja:

$$P=\frac{\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}\cdot 8!\cdot 4!\cdot 2!}{14!}\approx 0,286.$$

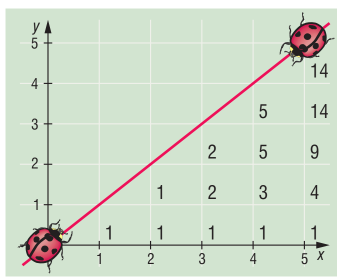
Az egyszerűbb megoldás csak az utolsó golyóra koncentrál: a 14 golyó között 4 lila van, így az utolsó $P=\frac{4}{14}\approx 0,286$ valószínűséggel lesz lila. Természetesen megfelelő egyszerűsítések után a bonyolultabból is megkapjuk az egyszerűbbet.

*d)* A három szín 3!-féleképp követheti egymást, azokon belül a szokásos 8!, 4!, 2!-féleképp következhetnek az egyes golyók. Az összes esetek száma 14!, így:

$$P=\frac{3!\cdot 8!\cdot 4!\cdot 2!}{14!}=0,000\,133.$$

**2798** *a)* Bármerre megy, 5-ször kell felfelé, és 5-ször jobbra lépnie. Összesen 10 lépés, ami 10 perc.

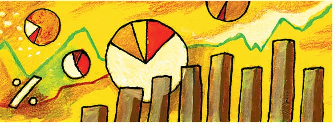
*b)* Össze kell számolnunk az összes lehetséges útvonalat. Ezt megtehetjük úgy, hogy a lehetséges 5 jobbra és 5 felfelé lépés összes sorrendjét összeszámoljuk: $\frac{10!}{5!\cdot 5!}=252.$ Ez azonban nem ad útmutatást a kérdezett $y=x$ egyenes alatt haladó esetekre.




Az biztos, hogy a járkálás első (és utolsó) néhány lépése meghatározott: az origóból csak (1; 0)-n, majd (2; 0)-n át vezet az út, ugyanis nem érinthetjük az $y=x$ egyenest. Jegyezzük fel magunknak a pontok mellé, hányféleképpen juthattunk el odáig. Így az $x$ tengely minden pontjához 1-est kell írni. A (3; 1)-hez viszont már 2-t, hiszen (3; 0)-n és (2; 1)-n át is odajuthatunk, azokba a pontokba viszont csak 1-1 útvonalon. Azaz minden pontban összeadhatjuk a hozzájuk vezető pontok útvonalait. Így már ki is tudjuk tölteni az ábrát. A kérdéses útvonalak száma 14. Ellenőrzésképpen írjuk fel az előbb kiszámolt összes eseteket is. Újra 252-t kapunk. Így a keresett valószínűség:

$$P=\frac{14}{252}\approx 0,0556.$$

*c)* Az $y=x$ egyenesre szimmetrikus az előző és ez az eset, így valószínűségeik is egyenlők.

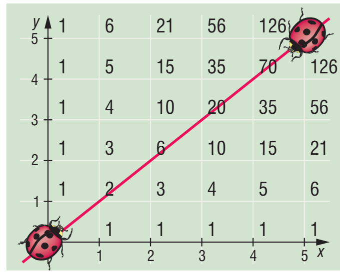


*d)* Észrevehetjük, hogy *b)* és *c)* esetekben éppen a kérdezett esemény komplementerét számoltuk össze. Ezért:

$$P = \frac{252-(14+14)}{252} = 1 - 2\cdot\frac{14}{252} \approx 0{,}889.$$

*Megjegyzések:* A feladat több általánosítási, bővítési lehetőséget tartalmaz.

Az egyik lehetőség, ha úgy értelmezzük a feladatot, hogy az $y = x$ egyenest csak átlépni nem szabad útközben, hozzáérni igen. Oldjuk meg így is a feladatot!




Másik lehetőség, ha nem az (5; 5), hanem például a (9; 6) pontba tart a katica. Természetesen ekkor az $y = \frac{2}{3}\cdot x$ egyenes alatti és feletti részeket kérdezzük. Vigyázzunk, ekkor már nem lesz szimmetrikus az egyenes alatti és feletti lépegetés!

Akár azon is gondolkodhatunk, hogy az általában $(n; k)$ pontba tartó katicabogárra feltett hasonló kérdéseket hogyan válaszolhatnánk meg. Mi lenne ekkor a vízválasztó egyenes?

Az összes eseteknél kapott ábrát figyelmesen szemlélve, esetleg ismerős alakzatot fedezhetünk fel a számok rengetegében. 135°-ban, negatív irányban elfordítva *Pascal-háromszöget* kapunk. Jobban belegondolva, teljesen egyértelmű, hogy ezt kell látnunk, hiszen kétoldalt 1-esek állnak, a közöttük levő számokat pedig a háromszög képzési szabályának megfelelően állítjuk elő.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

**2799** A kockákat különböztessük meg, és tegyük sorba (pl. sorszámozzuk őket). Két megoldást is adunk az egyes lehetőségekre:

**Pár, I. megoldás.** Az egy párt tekinthetjük úgy, hogy kettő azonos és három azonos. Az utóbbiak a feladat szempontjából egy csoportot alkotnak „különbözőségükben”. Talán furcsán hangzik, de nézzük tovább: szabad hely négy van, ugyanis csak a második ismétlődő helye rögzített. Az első szabad helyre 6, a másodikra 5, aztán 4 és végül 3 lehetőségünk van, egy rögzített. A pár valószínűsége:

$$P_{\text{pár}} = \frac{\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^5} \approx 0{,}463.$$

**Pár, II. (III.) megoldás.** Írjuk össze, hány lehetőség van a pár kialakítására. A kockák sorszámaival adjuk meg az azonos értéket mutatókat: (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5), (4; 5).

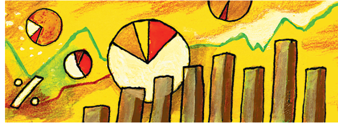
Még jobban látszik, ha táblázatba gyűjtjük az azonosakat.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1. kocka** | x | x | x | x | | | | | | |
| **2. kocka** | x | | | | x | x | x | | | |
| **3. kocka** | | x | | | x | | | x | x | |
| **4. kocka** | | | x | | | x | | x | | x |
| **5. kocka** | | | | x | | | x | | x | x |

Ez tíz lehetőség. Az első kockán 6-félét, utána a szabad helyeken 5-, 4-, 3-félét dobhatunk. A második $x$ helyén viszont csak egyet, hiszen annak meg kell egyeznie az első $x$-szel.

Természetesen az eredmény nem változik:

$$P_{\text{pár}} = \frac{10\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^5} \approx 0{,}463.$$



**Drill, I. megoldás.** A helyzet nem változik a párhoz képest, csak itt három és két egyformát keresünk (az utóbbi kettő játssza a különböző számok szerepét). Illetve annyiban változik, hogy – mivel a szabad helyek száma eggyel csökken – $6 \cdot 5 \cdot 4$-gyel szorozzuk:

$$P_{\text{drill}} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}154.$$

**Drill, II. megoldás.** Alkalmazzuk a pár második megoldásánál bemutatott táblázatot, ezzel ismét 10 lehetőségig jutunk. Most azonban az $x$-ek jelentik a különböző számokat, az üres helyeken vannak az azonos dobások. Mivel eggyel kevesebb szabad helyünk van, ezért a szorzótényező végéről lemarad a hármas:

$$P_{\text{drill}} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}154.$$

**Full, I. megoldás.** Itt már tényleg kettő és három azonos értéket kell sorba raknunk. Azonban csak két szabad helyünk van (a többit meghatározzák), így:

$$P_{\text{full}} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 6 \cdot 5}{6^5} \approx 0{,}0386.$$

**Full, II. megoldás.** Bármilyen furcsa, táblázatunk még mindig a korábban látott, csak képzeljünk az üres helyekre például $y$-t. Így:

$$P_{\text{full}} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5}{6^5} \approx 0{,}0386.$$

**Két pár, I. megoldás.** Ebben az esetben kettő-kettő azonos, és egy ezektől is különböző dobásunk van, sorrendjükre $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}$-t kapunk. Azonban a sorrendek között nem számít különbözőnek, ha a két pár szerepét felcseréljük (5-5-6-6-2 ugyanaz, mint 6-6-5-5-2), így ezt még $2!$-sal osztani kell. A három szabad helyre $6 \cdot 5 \cdot 4$-félét dobhatunk. A keresett valószínűség:

$$P_{\text{két pár}} = \frac{\frac{\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}}{2!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}231.$$

**Két pár, II. megoldás.** Vegyük a korábbi táblázatot, csak most $x$-$x$ és $y$-$y$ jelölje a két párt.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1. kocka** | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | | | | |
| **2. kocka** | $x$ | $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | | | | | |
| **3. kocka** | $y$ | $y$ | | $x$ | $x$ | $x$ | … | | | |
| **4. kocka** | $y$ | | $y$ | $y$ | | $y$ | | | | |
| **5. kocka** | | $y$ | $y$ | | $y$ | $y$ | | | | |

Láthatjuk, hogy a párhoz képest minden $x$-$x$ eset háromszor fordul elő az $y$-ok elhelyezkedése miatt. Így nem 10, hanem 30 lehetőségünk lesz a párok helyét kijelölni. Azonban $x$ és $y$ szerepe is felcserélhető (végeredményben nem különböztetjük meg az $x$-$x$-$z$-$y$-$y$ és $y$-$y$-$z$-$x$-$x$ dobásokat), ezért 2-vel osztanunk kell a lehetséges sorrendek számát, ami 15. A szabad helyek száma eggyel csökkent a párhoz képest $(6 \cdot 5 \cdot 4)$. A keresett valószínűség:

$$P_{\text{két pár}} = \frac{15 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}231.$$

Végül álljon itt a kérdésre adandó válasz: pár, két pár, drill, full.

**2800** *a)* Eredetileg annak az esélye, hogy Balázs felel:

$$P_1 = \frac{1}{30} \approx 0{,}0333.$$

A strigula után a szoftver úgy veszi, mintha Balláb úr kétszer lenne a naplóba írva. Ezzel eggyel növekszik az összes esetek és eggyel a „kedvező” esetek száma is:

$$P_2 = \frac{2}{31} \approx 0{,}0645.$$

A növekedési szorzó a kettő hányadosa, $\frac{60}{31} \approx 1{,}935$-szeres. Százalékban kifejezve a növekedés 93,5%-os, illetve egy strigula (feltéve, hogy a többieknek még nincs ilyen) után a felelés valószínűsége 93,5%-kal nagyobb.

*b)* Tegyük fel, hogy Balázsnak $n$ strigulája van (a többieknek még nincs). Ekkor a felelés valószínűsége:

$$P = \frac{1+n}{30+n}.$$

A következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán:

$$\frac{1+n}{30+n} > 0{,}5.$$

Innen:

$$n > 28.$$

*c)* Legyen Balázsnak $n$, Borisznak $m$ strigulája (másnak nincs, $n$, $m$ pozitív egészek). Ekkor:

$$P_{\text{Balázs}} = \frac{1+n}{30+n+m}, \quad P_{\text{Borisz}} = \frac{1+m}{30+n+m}.$$

A feltétel szerint azt akarjuk, hogy:

$$\frac{1+n}{30+n+m} > 0{,}2 \quad \text{és} \quad \frac{1+m}{30+n+m} > 0{,}3.$$

Átalakítva mindkét egyenlőtlenséget és megszabadulva a tizedes törtektől, ezt kapjuk:

$$4n - m > 25 \quad \text{és} \quad 7m - 3n > 80.$$

Mit kezdhetünk két egyenlőtlenséggel? Alapvetően két választási lehetőségünk van: próbálkozunk vagy rajzolunk. Kezdjük a próbálkozással! Segít, ha $m$-et két $n$-es kifejezés közé szorítjuk:

$$4n - 25 > m > \frac{80+3n}{7}.$$

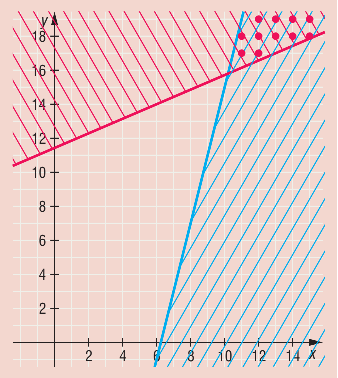
Az első egyenlőtlenség miatt $n > 6$. Azonban $n = 7, 8, 9, 10$-re sem kapunk megfelelő megoldást, mert a harmadik kifejezés nem kisebb az elsőnél. Végre $n = 11$-re megkapjuk az első két megoldást, $m = 17$ és $18$. Készítsünk egy kis táblázatot a lehetséges $n$, $m$ párokról. Az adott $n$-hez megtalált összes $m$ értéket nem soroljuk fel, csak a legkisebbet és a legnagyobbat.

| $n$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_{\text{min.}}$ | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | … |
| $m_{\text{max.}}$ | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 62 | 66 | 70 | 74 | 78 | 82 | 86 | 90 | |

Ennyi felírásból már megfogalmazhatunk két szabályszerűséget is: ha $n$ egyesével növekszik, akkor $m_{\text{min.}}$ váltakozva 3-2-2-es csoportokban teszi ugyanezt, $m_{\text{max.}}$ pedig $n$ minden ugrását négyesével követi.

A másik lehetőség, ha külön-külön a két egyenlőtlenségre mint két lineáris függvényre gondolunk, és ábrázoljuk őket a koordináta-rendszerben ($n$ helyére $x$ kerül, $m$ szerepét pedig $y$ veszi át).

$$y = 4x - 25 \quad \text{és} \quad y = \frac{3}{7} \cdot x + \frac{80}{7}.$$




Satírozzuk be az egyenlőtlenségeknek megfelelő tartományokat. Mivel $n$ és $m$ csak egész értékek lehetnek, a közös részben található egész koordinátájú pontok, az ún. *rácspontok* adják a megoldást.

Akárhogyan is oldjuk meg a feladatot, végtelen sok megoldást kapunk Balázs és Borisz strigulái számára, a megadott határokon belül.

*Megjegyzés:* Oldjuk meg úgy is a feladatot, ha azt keressük, hogy mikor kisebb a fiúk felelésének valószínűsége a megadott 0,2 és 0,3 értékeknél.

*d)* Jelölje $N$ a Jolán osztálytársainak kiosztott strigulákat. Ekkor az ő felelésének valószínűsége:

$$P = \frac{1}{30 + N}.$$

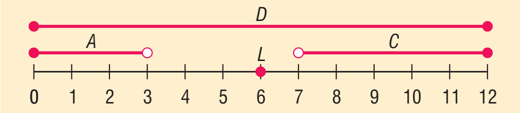
Ezt szeretnénk 0,01 alá csökkenteni:

$$\frac{1}{30 + N} < 0{,}01.$$

Egyszerű átalakításokkal: $N > 70$.

## Vegyes feladatok – megoldások

**2801** *a)* és *b)* esetén a számegyenes és a megadott események ábrázolása a rajzon látható.




*c)* Biztos esemény: $D$, lehetetlen esemény: $B$.

**2802** *a)* Hatos dobások száma: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

*b)* A dobott számok összege: $\{5; 6; 7; \ldots, 30\}$.

*c)* $A$: lehetetlen (hatos), $B$: biztos (mindkettő), $C$: lehetetlen (dobott összeg), $D$: biztos (hatos).

**2803** *a)* $C$ és $D$.

*b)* $\overline{A}$ = {legalább 16-ot dobunk}; $\overline{B}$ = {páratlant dobunk}; $\overline{C}$ = {prímet vagy 1-est dobunk}; $\overline{D}$ = {összetett számot vagy 1-est dobunk}.

*c)* $A + \overline{D} = \{1; 2; 3; \ldots; 14; 15; 16; 18; 20\}$;

$\overline{A} \cdot B \cdot C = \{16; 18; 20\}$;

$\overline{B + C} = \{1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$.

*d)* $\overline{C} \cdot \overline{D} = \overline{C + D}$.

**2804** *a)* Bármely kettő kizárja egymást.

*b)* $\overline{A \cdot B \cdot C}$ = biztos esemény; $A \cdot B + C = C$; $A \cdot (B + C)$ = lehetetlen esemény.

*c)* A pirossal jelölt esemény = $\overline{A + B + C}$.

**2805** –

**2806** *a)* 3 éve: 0,17; 2 éve: 0,19; tavaly: 0,18; *b)* még 64-et.

**2807** $\frac{8}{20}=0,4.$

**2808** $\frac{5}{45}=0,\dot{1}.$

**2809** $\frac{3!}{5!}=0,05.$

**2810** *a)* $\frac{29}{134}\approx 0,216;$ *b)* $\frac{29\cdot 28}{134\cdot 133}\approx 0,04556;$ *c)* $\frac{29^2}{134^2}\approx 0,0468.$

**2811** *a)* 1; *b)* $\frac{10}{35}\approx 0,29.$

**2812** *a)* $\frac{1}{6}\approx 0,167;$ *b)* $\frac{5\cdot 1}{6^2}\approx 0,1389;$ *c)* $\frac{5^{n-1}\cdot 1}{6^n}.$

**2813** *a)* $\frac{2}{25}=0,08;$ *b)* $\frac{51}{54}\approx 0,944.$

**2814** *a)* $1-\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=0,5;$ *b)* $\frac{6}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\approx 0,000198.$