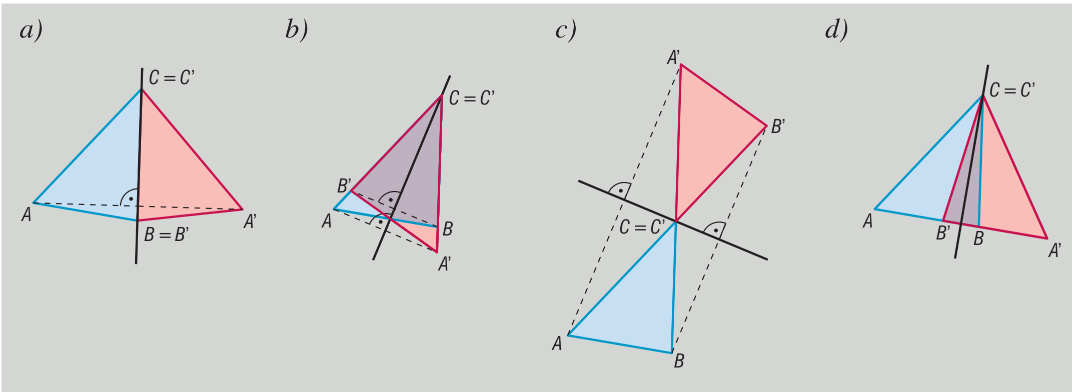
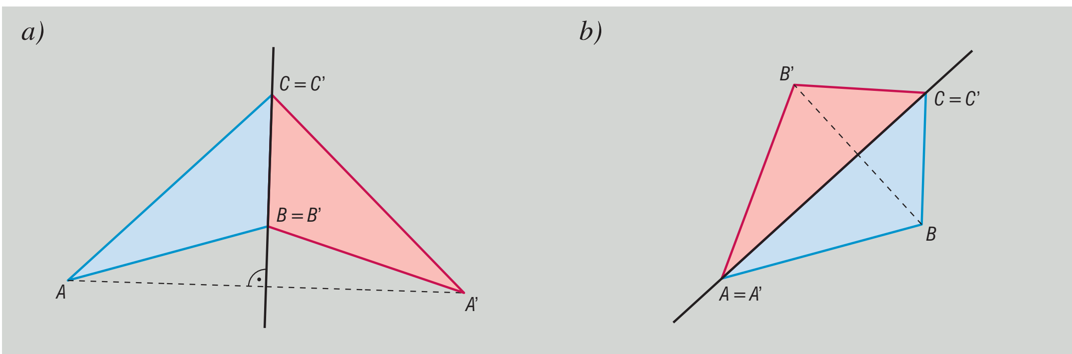
9.6. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Tengelyes tükrözés – megoldások

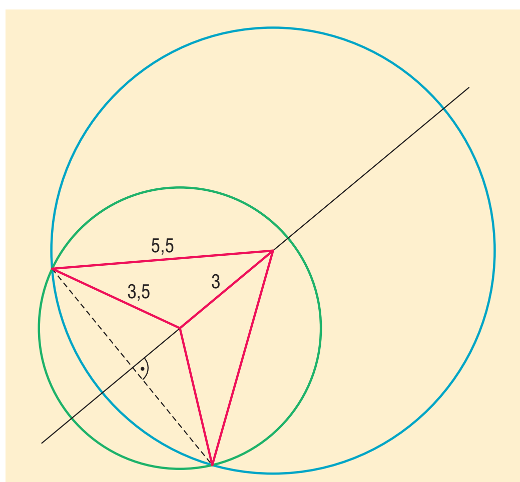
1571



1572 Az *a)* feladatban konkáv, a *b)* feladatban konvex deltoidot kapunk eredményül.



1573 A megoldás az ábrán látható. (➡)



1574 *a)* $A'(3; -1)$, $B'(-2; -5)$, $C'(-4; 2)$.

b) $A'(-3; 1)$, $B'(2; 5)$, $C'(4; -2)$.

1575 Az x tengelyre vonatkozó tükrözés után $A'(x; -y)$, majd az y tengelyre vonatkozó tükrözés után $A''(-x; -y)$. A két tengelyre vonatkozó tükrözés az origóra vonatkozó középpontos tükrözéssel helyettesíthető.

Általában is érvényes, hogy két merőleges egyenesre vonatkozó tükrözés egymás utáni elvégzése, a tengelyek metszéspontjára vonatkozó középpontos tükrözéssel egyenértékű transzformáció.

1576 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.
e) Hamis. *f)* Igaz. *g)* Igaz. *h)* Igaz.
i) Hamis. *j)* Hamis. *k)* Igaz. *l)* Hamis.
m) Hamis. *n)* Hamis. *o)* Igaz. *p)* Hamis.
q) Hamis. *r)* Hamis.

1577 A szerkesztés lépései:

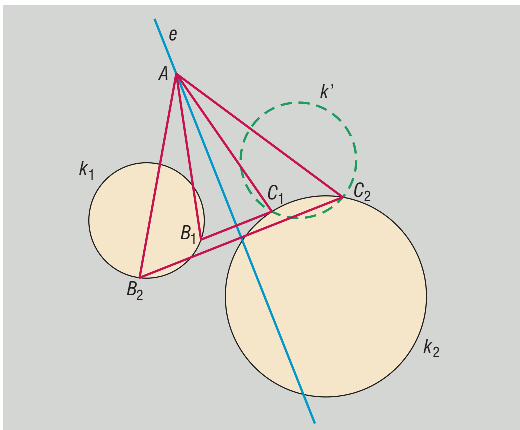
1. Tükrözzük az f egyenest az e egyenesre, a tükörképet jelöljük f_1-gyel, így kapjuk az f_1 és a g egyenesek B metszéspontját.
2. A B pontot tükrözzük az e egyenesre, így kapjuk az A pontot, amely f-re illeszkedik.
3. A szabályos ABC háromszög C csúcsát az A középpontú, B ponton átmenő kör metszi ki az e egyenesből (C_1; C_2).

A szerkeszthetőség feltétele: a g egyenes metssze az f egyenes e egyenesre vonatkozó f_1 tükörképét.

A megoldások száma attól függ, hogy van-e az f_1 és a g egyeneseknek metszéspontja. Ha a két egyenes nem metszi egymást, akkor nincs megoldása a feladatnak. Ha az f_1 és g egyenesek egybeesnek, akkor a B pont helyzete nem egyértelmű, így végtelen sok megoldása van a feladatnak. Ha az f_1 és a g egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor a feladatnak két megoldása van, amelyek az AB egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel egymásba vihetők.

1578 A szerkesztés lépései:

1. A k_1 kört tükrözzük az e egyenesre; a tükörkép k'. A k' és a k_2 körök metszéspontjai az ábrán C_1 és C_2.
2. A C_1 és C_2 pontok tükrözése az e egyenesre; a tükörképek B_1 és B_2, melyek illeszkednek k_1-re.
3. Az e egyenesen egy tetszőleges A pont szerkesztése.



A szerkesztés eredménye az AB_1C_1 és az AB_2C_2 háromszög.

A szerkeszthetőség feltétele: a k' és a k_2 körök metszéspontjainak vagy érintési pontjának létezése. A megoldások száma lehet 0, ha a két körnek nincs közös pontja, minden más esetben a feladatnak végtelen sok megoldása van, mivel az A pont az e egyenes tetszőleges pontja lehet.

1579 A szerkesztés lépései:

1. A szimmetriatengelyre illeszkedő két csúcson (A és C) átmenő t egyenes szerkesztése.
2. Az egyik kör t egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése.
3. A tükörképként kapott kör, valamint a másik kör metszéspontjainak megjelölése; a metszéspontok egyikét jelölje B.
4. A B pont t egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése; a kapott pont D.

A szerkesztés eredménye az $ABCD$ deltoid.

A szerkeszthetőség feltétele: a harmadik lépésben vett két körnek legyen legalább 1 közös pontja. A megoldások száma attól függ, hogy a két körnek hány közös pontja van. Ezek alapján a feladatnak lehet 0, 1, 2, esetleg végtelen sok megoldása.

1580 *a)* A szerkesztés lépései:

1. A szimmetriatengelyre illeszkedő két csúcson átmenő t egyenes szerkesztése.
2. Az adott szög megfelezése.
3. A megfelezett szög másolása a t egyenesre, a deltoid megfelelő csúcsához.
4. A deltoid adott oldalát körzőnyílásba vesszük, majd kört szerkesztünk, melynek középpontja a deltoid megfelelő csúcsa. A kör az átmásolt szög szárából kimetszi a deltoid harmadik csúcsát.
5. A kapott csúcs t egyenesre vonatkozó tükörképe a deltoid negyedik csúcsa.

b) A szerkesztés lépései:

1. A szimmetriatengelyre illeszkedő két csúcson átmenő t egyenes szerkesztése.
2. Az adott szög megfelezése.
3. A megfelezett szög másolása a t egyenesre, a deltoid megfelelő csúcsához, és a szögszár meghosszabbítása.
4. A deltoid adott oldalát körzőnyílásba vesszük, majd kört szerkesztünk, melynek középpontja a deltoid szintén adott, de a szóban forgó oldalegyenesre nem illeszkedő csúcsa.
5. A szerkesztett kör metszi ki a 3. pontban szerkesztett szögszárból a deltoid harmadik csúcsát.
6. A kapott csúcs t egyenesre vonatkozó tükörképe a deltoid negyedik csúcsa.

1581 A szerkesztés lépései:

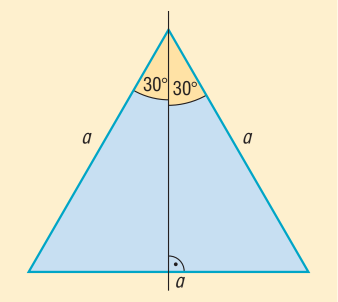
1. Az adott átló két végpontját összekötő szakasz, majd a szakasz felezőmerőlegesének szerkesztése.
2. Az adott szög megfelezése.
3. A megfelezett szög átmásolása az átlóra annak valamelyik végpontjában.
4. A szögszár kimetszi az átló felezőmerőlegeséből a rombusz harmadik csúcsát.
5. A kapott csúcs átlóra vonatkozó tükörképe a rombusz negyedik csúcsa.

1582 A szerkesztés lépései:

1. Az egyik kör adott egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése.
2. A tükörkép kör másik körrel való metszéspontjainak szerkesztése; a kapott pontokat összekötő szakasz a trapéz egyik szára.
3. A szerkesztett metszéspontok tükrözése az adott szimmetriatengelyre; a kapott pontok a trapéz másik szárának végpontjai.

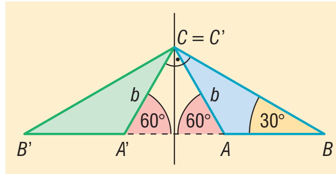
A megoldások száma attól függ, hogy az 1. pontban szerkesztett kör a másik körrel milyen helyzetű. Ha a két körnek nincs közös pontja, vagy érintő helyzetűek, akkor a feladatnak nincs megoldása. Ha a metszéspontok száma 2, akkor a feladatnak 1 megoldása van. Ha két kör egybeesik, akkor végtelen sok megoldás van.

1583 Tükrözzük a háromszöget a 30°-os szög melletti befogó egyenesére. A két háromszög egyesítése olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárszöge 60º, így a háromszög szabályos, oldalai a derékszögű háromszög a átfogójával egyenlőek. Mivel a tükörtengelyre merőleges oldalt a tengely felezi, ezért a derékszögű háromszög 30°-os szögével szemben valóban $\frac{a}{2}$ hosszúságú oldal van. (➡)



1584 Mindhárom szakasz hossza 6 cm.

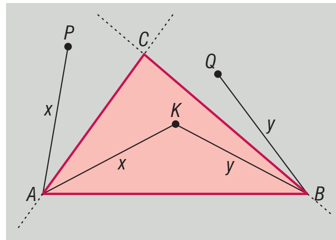
1585 A feltételek szerint $CA'A\sphericalangle = 60°$, továbbá a tükrözés tulajdonságai alapján $CA = CA'$. Ebből adódóan az $AA'C$ háromszög szabályos, és így $A'AC\sphericalangle = 60°$. Mivel $A'AC\sphericalangle$ az ABC háromszög külső szöge, így a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, amiből azonnal adódik, hogy $BCA\sphericalangle = 30°$. Ekkor az ABC háromszög két szöge egyenlő, ezért valóban egyenlő szárú háromszög.



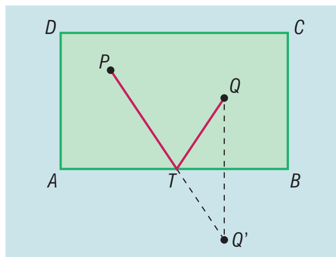
1586 A két téglalap közös része rombuszt alkot.

1587 Tegyük fel, hogy $AP = BQ$. A tükrözés távolságtartó tulajdonsága alapján $AP = AK = x$, továbbá $BK = BQ = y$. A feltételek szerint azonban $x = y$, ami azt is jelenti, hogy a K pont az A és B pontoktól ugyanolyan távol található. Ebből adódóan K valóban illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére.

Tegyük fel, hogy K illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére, azaz $AK = BK$. Ekkor tükörképeik, azaz AP és BQ is egyenlő hosszúak. Ezzel az állítást igazoltuk.



1588 A megfelelő T pontot a PQ' szakasz metszi ki az AB falból, ahol Q' a Q pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe.



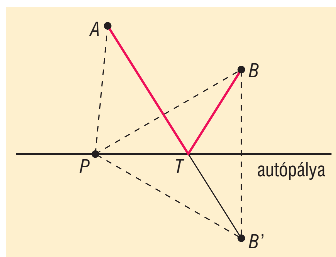
1589 A bevásárlóközpont T helyét az AB' egyenes metszi ki az autópályából, ahol B' a B pont tükörképe az autópálya egyenesére vonatkozóan. Valóban:

$$AT + TB = AT + TB' = AB',$$

továbbá ha P az autópálya mellett egy T-től különböző pont, akkor

$$AP + PB = AP + PB' > AB'.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség a háromszög-egyenlőtlenség közvetlen következménye az $AB'P$ háromszögben.



1590 Vegyük fel az A csúcshoz tartozó külső szögfelezőn (f) az A-tól különböző P pontot, majd tükrözzük f-re a C pontot, így kapjuk C'-t. Mivel a szögfelezőre vonatkozó tükrözés során a szögszárak egymásba mennek át, ezért a C' pont illeszkedik a BA félegyenesre, továbbá $AC' = AC = b$, illetve $PC' = PC$.

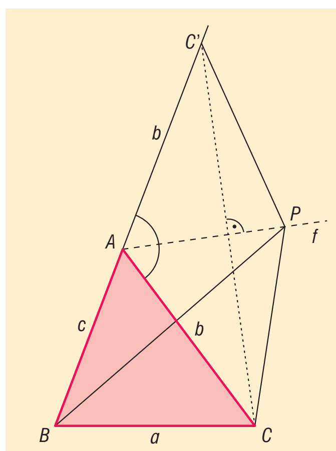
Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a $BC'P$ háromszög BC' oldalára:

$$BC' < PC' + PB,$$
$$c + b < PC + PB.$$

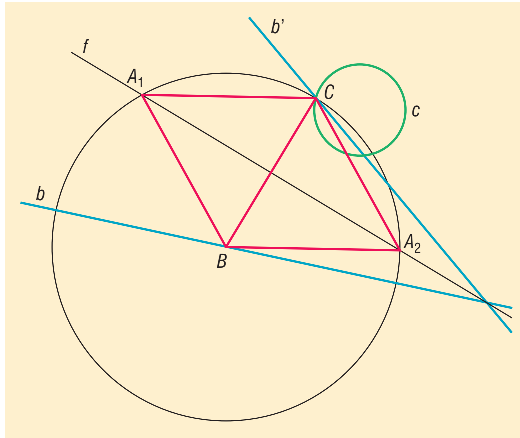
Mindkét oldalhoz az ABC háromszög $a = BC$ oldalát hozzáadva azt kapjuk, hogy

$$a + c + b < BC + PC + PB,$$

ami mutatja, hogy a PBC háromszög kerülete valóban nagyobb, mint az ABC háromszög kerülete.

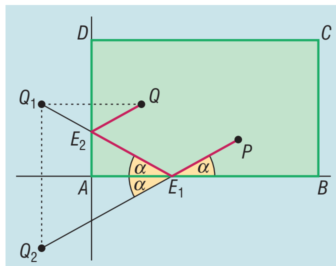


1591 Adottak az A csúcshoz tartozó belső szögfelező (f), továbbá a B csúcsot tartalmazó b egyenes és a C csúcsot tartalmazó c kör. A szerkesztendő háromszög tengelyesen szimmetrikus az f egyenesre vonatkozóan, ezért a B csúcs tükörképe illeszkedik a c körre. Ezt az észrevételt felhasználva, a szerkesztés lépései a következők:



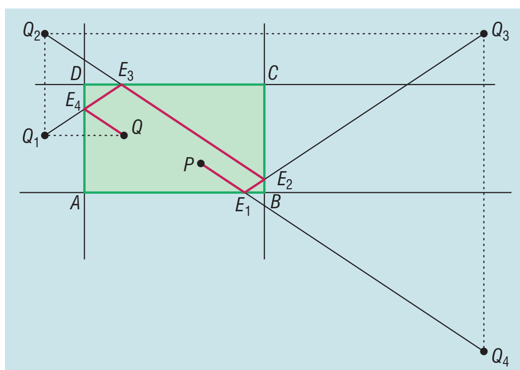
1. A b egyenest tükrözzük az f egyenesre, a tükörkép b'.
2. A b' egyenes és a c kör metszéspontjának (metszéspontjainak) szerkesztése, a metszéspont C. Az ábrán a jobb áttekinthetőség érdekében csak egy metszéspontot rajzoltunk be.
3. A C pont tükrözése az f egyenesre, a tükörkép B.
4. A B középpontú, C-t tartalmazó kör szerkesztése.
5. A kör és az f egyenes metszéspontjainak szerkesztése, a metszéspontok A_1 és A_2. Az A_1BC, A_2BC háromszögek szabályosak, és a feladat feltételeinek megfelelnek.

1592 *a)* Feltételezzük, hogy a falról visszapattanó golyó ugyanakkora szögben pattan vissza, mint amekkora szögben a falhoz érkezik, vagyis az ábrán azonos módon jelölt szögek megegyeznek. Ezt másként úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha a visszapattanó golyó útját a falra tükrözzük, akkor az egy egyenesbe esik a visszapattanás előtti útjával. Ezek alapján a golyó útját a következőképpen szerkeszthetjük meg. Tükrözzük a Q pontot az AD falra, a tükörképet jelöljük Q_1-gyel. A Q_1 pontot tovább tükrözzük, ezúttal az AB fal egyenesére, a tükörképet jelöljük Q_2-vel. A PQ_2 szakasz kimetszi a falból a keresett út első érintési pontját, amit az ábrán E_1-gyel jelöltünk. Az AD fallal való E_2 metszéspontot az E_1Q_1 szakasz metszi ki az AD falból.

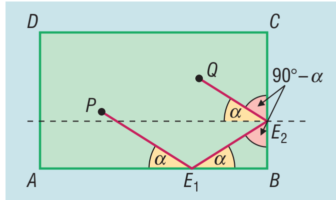


b) Az *a)* feladatban felhasznált módszert fejlesztjük tovább. Tükrözzük a Q pontot a DA egyenesre, a tükörképet Q_1-gyel jelöljük. Ezt a Q_1 pontot a CD egyenesre tükrözzük, így kapjuk a Q_2 pontot, amelynek BC egyenesre vonatkozó tükörképe Q_3. Végül a Q_3 pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe Q_4.

A golyót a PQ_4 szakasz mentén kell ellökni; a szakasz kimetszi az AB falból az első érintési pontot, E_1-et. Az E_1Q_3 szakasz kimetszi a BC falból a második érintési pontot, E_2-t. Az E_2Q_2 szakasz CD fallal való metszéspontja a harmadik érintési pont (E_3), végül E_4-et az E_3Q_1 szakasz és a DA oldal metszéspontjaként kapjuk meg.



1593 Ha a golyó az AB falat az E_1, a BC falat az E_2 pontban érinti, és az ábra jelöléseinek megfelelően $PE_1A\sphericalangle = \alpha$, akkor a golyó az AB fallal az első visszapattanás után is α szöget bezáró úton halad tovább, azaz $E_2E_1B\sphericalangle = \alpha$. Az E_1E_2B derékszögű háromszög mutatja, hogy a golyó



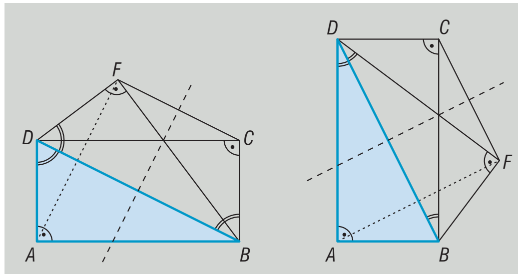
$90° - \alpha$ szögben érkezik a BC falhoz, és ezért onnan ugyanakkora szögben verődik vissza, azaz

$$QE_2C\sphericalangle = 90° - \alpha.$$

Ha párhuzamost húzunk az E_2 ponton át az AB oldallal, akkor könnyen látható, hogy az E_2Q szakasz a párhuzamossal α szöget zár be, ami igazolja, hogy PE_1 és E_2Q párhuzamos egymással.

1594 *a)* A BDA háromszög BD egyenesre vonatkozó tükörképe a BDF háromszög. A tengelyes tükrözés megtartja a szögeket, ezért $DFB\sphericalangle = DAB\sphericalangle = 90°$, így DF és BF valóban merőlegesek egymásra.

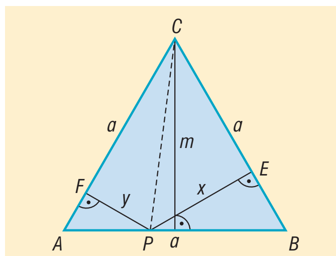
b) A B, F, C és D pontok az $ABCD$ téglalap oldalainak hosszától függően kétféle sorrendben alkothatnak szimmetrikus trapézt. A két esetet az ábrák szemléltetik. A bizonyítást az első ábra alapján végezzük el, a másik esetben értelemszerű módosításokkal juthatunk célhoz.



Vegyük észre, hogy az ábra azonos módon jelölt szögei megegyeznek! Ez részint abból következik, hogy az $ADB\sphericalangle$ BD egyenesre vonatkozó tükörképe az $FDB\sphericalangle$, részint pedig abból, hogy az $ADB\sphericalangle$ és a $CBD\sphericalangle$ váltószögpárt alkotnak. Ekkor viszont a BD szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tengelyes tükrözés során a D pont képe a B pont, míg $DF = BC$ miatt az F pont a C pontba megy át, vagyis a $BCFD$ négyszög szimmetrikus trapéz.

1595 **I. megoldás.** Jelöljük az ABC háromszög oldalának hosszát a-val, a P pont BC, valamint CA oldalalakra eső merőleges vetületét E-vel, valamint F-fel. Legyen továbbá $PE = x$, $PF = y$. Ekkor az ACP és BCP háromszögek területének összege megegyezik az ABC háromszög területével, azaz ha az ABC háromszög magasságát m-mel jelöljük, akkor

$$\frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot x}{2} = \frac{a \cdot m}{2}.$$

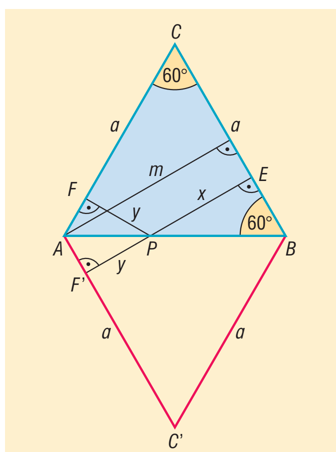


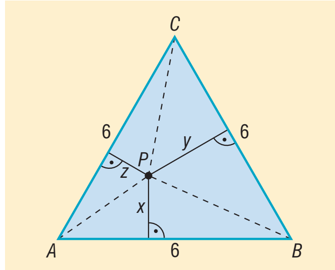
A lehetséges egyszerűsítések elvégzése után azt kapjuk, hogy $y + x = m$. Ez azt jelenti, hogy a P pontnak az AC és BC oldalaktól mért távolságösszege a P pont helyzetétől függetlenül megegyezik az ABC háromszög magasságával.

II. megoldás. Mivel $APF\sphericalangle = BPE\sphericalangle = 30°$, ezért ha a PF szakaszt tükrözzük az AB egyenesre, akkor E, P, valamint az F pont F' tükörképe egy egyenesre illeszkednek. Ha nemcsak a PF szakaszt, hanem az ABC háromszöget is tükrözzük, akkor az eredeti és a képháromszög egyesítése rombusz, melyben az EF' szakasz a magasság. A rombusz és az ABC háromszög magassága természetesen megegyezik, ezért

$$x + y = EP + PF = EP + PF' = EF' = m,$$

ami a P helyzetétől függetlenül valóban állandó.





1596 **I. megoldás.** Ha P pontnak a háromszög oldalaitól mért távolságát x, y, z jelöli, akkor az ABP, BCP és CAP háromszögek területének összege megegyezik az ABC háromszög területével, így

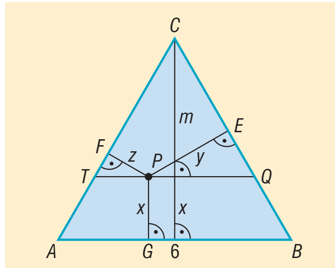
$$\frac{6\cdot x}{2}+\frac{6\cdot y}{2}+\frac{6\cdot z}{2}=\frac{6\cdot M}{2},$$

ahol M az ABC háromszög magassága. Az egyszerűsítések elvégzése után $x+y+z=M$ adódik.

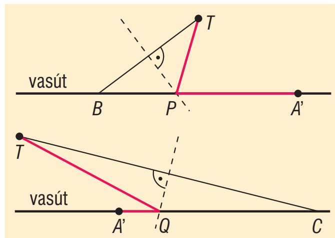
A szabályos háromszög magassága az oldalának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese, így $x+y+z=3\cdot\sqrt{3}\approx 5{,}2$ cm.

II. megoldás. Húzzunk a P ponton át párhuzamost az AB szakasszal; a párhuzamos az ábra jelöléseinek megfelelően a T és Q pontokban metssze az AC és BC oldalakat. A TQC háromszög minden szöge 60°-os, ezért a háromszög szabályos. A P pont a TQ oldal egy belső pontja, ezért az 1595. feladat eredményét alkalmazhatjuk a P pontra, valamint a TQC háromszögre. Így kapjuk, hogy $y+z=m$, ahol m a háromszög magassága.

Ekkor $x+y+z=x+m=M$, ahol M immár az ABC háromszög magassága (ld. ábra).



1597 Mérjünk fel a megépítendő út teljes 8 km-es hosszával megegyező távolságot a vasút mentén, az A' állomástól kiindulva. Az út végpontját jelöljük B-vel a bal oldali ábrának megfelelően. Mivel a BT szakasz szimmetriatengelyén lévő pontok ugyanolyan távolságra vannak a T településtől, mint a B ponttól. Ha P jelöli a szimmetriatengely és vasút metszéspontját, akkor $TP=BP$ miatt $TP+PA'=BP+PA'=8$ km, ezért a P pont megfelel az EU-s pályázatban foglalt feltételeknek.

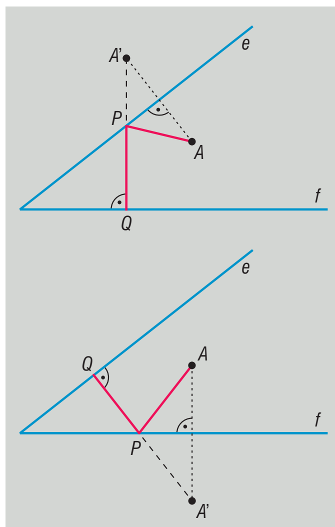


Ha a jobb oldali ábrának megfelelően a 8 km-es utat az állomástól kiindulva a másik irányba mérjük fel, akkor az így kapott C ponttal megismételhetjük a szerkesztést, és egy további, a feladat feltételeinek szintén megfelelő Q pontot kapunk eredményül.

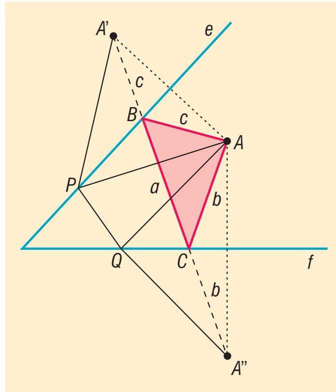
1598 A feladat nem rendelkezik arról, hogy a szerkesztendő APQ törött vonal milyen sorrendben érintse az adott szög szárait, ezért két lehetséges sorrendet is vizsgálnunk kell.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a P pont az e szögszárra illeszkedik. Tükrözzük az A pontot az e szögszárra, a tükörképet jelöljük A'-vel. Mivel a tengelyes tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért $AP=A'P$, így $AP+PQ=A'P+PQ$. A feladat tehát arra redukálódik, hogy szerkesszünk az A' pontból olyan utat az f szögszárig, amely metszi az e szögszárat, és hossza a lehető legrövidebb. Az ilyen út szerkesztéséhez elegendő az A' pontból merőlegest állítanunk az f szögszárra. A merőleges kimetszi az e szögszárból a megfelelő P pontot.

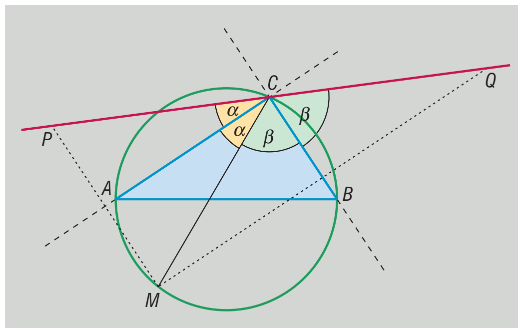
Ha a szerkesztendő törött vonal előbb az f szögszárat érinti, akkor az A pontot értelemszerűen az f-re kell tükrözni. A szerkesztés eredményét ebben az esetben az alsó ábra mutatja.



1599 Legyen P az e, Q az f szögszár egy-egy pontja, az A pont e-re, valamint f-re vonatkozó tükörképe A', valamint A''. A tükrözés távolságtartó tulajdonsága alapján az APQ háromszög kerületére teljesül, hogy $AP + PQ + QA = A'P + PQ + QA''$. Mivel A' és A'' a P és Q pontok helyzetétől függetlenül állandó, ezért feladatunk úgy is megfogalmazható, hogy szerkesszünk olyan $A'BCA''$ törött vonalat, amelynek B és C pontjai egy-egy szögszárra illeszkednek, továbbá a törött vonal hossza a lehető legrövidebb. Mivel a törött vonal hossza pontosan akkor lesz a legrövidebb, ha belső pontjai illeszkednek az $A'A''$ szakaszra, ezért a minimális hosszúságú vonal B és C pontjait az $A'A''$ szakasz metszi ki a szögszárakból. Az ABC háromszög kerülete megegyezik az $A'A''$ szakasz hosszával.



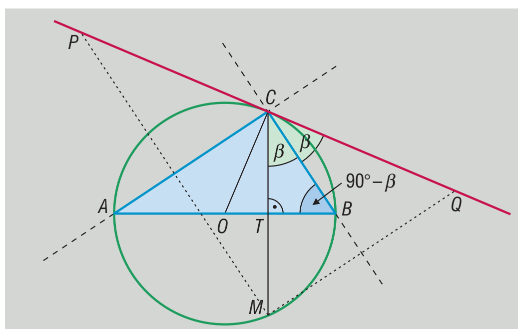
1600 *a)* Ha nemcsak az M pontot, hanem az MC szakaszt is tükrözzük, akkor a következő megállapításokat tehetjük. A C pont mindkét tükrözés után helyben marad, továbbá a szögtartó tulajdonság alapján $MCA\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \alpha$, valamint $MCB\sphericalangle = QCB\sphericalangle = \beta$. Ekkor persze $PCQ\sphericalangle = 2\cdot\alpha + 2\cdot\beta = 2\cdot(\alpha+\beta) = 180^\circ$, mivel az ABC háromszög derékszögű. A C csúcsnál kialakuló egyenesszög mutatja, hogy a P, C, Q pontok az M pont helyzetétől függetlenül egy egyenesre illeszkednek.



b) A tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonságából következik, hogy $MC = PC$, illetve $MC = QC$, aminek egyszerű következményeként $PQ = PC + QC = 2\cdot MC$ adódik. Ez azt is jelenti, hogy a PQ szakasz akkor a lehető legrövidebb, amikor az MC szakasz is ilyen tulajdonságú, ez pedig pontosan akkor következik be, amikor az M pont egybeesik az ABC háromszög rövidebb befogójának C-től különböző végpontjával (a fenti ábrán ez éppen a B pont). A minimális hosszúságú PQ szakasz kétszer olyan hosszú, mint az ABC háromszög rövidebb befogója. Megjegyezzük, hogy ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor az átfogó mindkét végpontjára minimálisnak adódik a PQ szakasz hossza.

Előző gondolatmenetünk egy másik következménye, hogy a PQ szakasz akkor a lehető leghosszabb, amikor M az ABC háromszög köré írt kör C-vel átellenes pontja. Ekkor a PQ szakasz hossza az AB átfogó hosszának kétszerese.

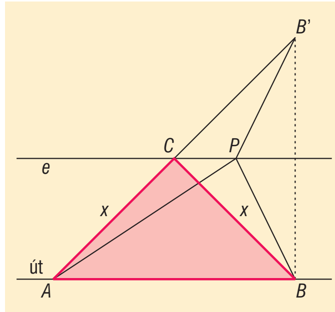
c) Ha az M pont egybeesik a C pont AB egyenesre vonatkozó tükörképével, akkor a CM szakasz éppen az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magasságának T talppontjában metszi az átfogót. Ha $MCB\sphericalangle = \beta$, akkor egyrészt a tükrözés miatt $BCQ\sphericalangle = \beta$, másrészt a CTB derékszögű háromszögből $CBT\sphericalangle = 90 - \beta$. Ha O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, akkor a BCO háromszög egyenlő szárú, így BC alapján fekvő szögei megegyeznek, azaz $OCB\sphericalangle = CBO\sphericalangle = CBT\sphericalangle = 90^\circ - \beta$.



Végül egyszerű szögszámolással láthatjuk, hogy $OCQ\sphericalangle = OCB\sphericalangle + BCQ\sphericalangle = (90^\circ - \beta) + \beta = 90^\circ$, vagyis OC és CQ merőlegesek egymásra. Ez csak úgy lehetséges, ha a CQ egyenes az ABC háromszög köré írt kör érintője.

1601 *a)* Jelöljük a birtok bekötőúttal határos szakaszának végpontjait A-val és B-vel. A feladat szerint olyan C pontot kell keresnünk, amelyre az ABC háromszög kerülete a lehető legkisebb.

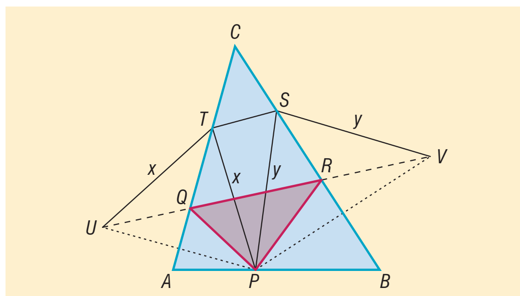
A szöveg alapján $AB = 200$ méter, továbbá a háromszög területe 1 hektár = 10 000 m^2. Az adatokból kiszámolható, hogy a háromszög AB oldalhoz tartozó magassága 100 méter, így a C pont az AB-vel párhuzamos, attól 100 méter távolságra haladó e egyenesen található.



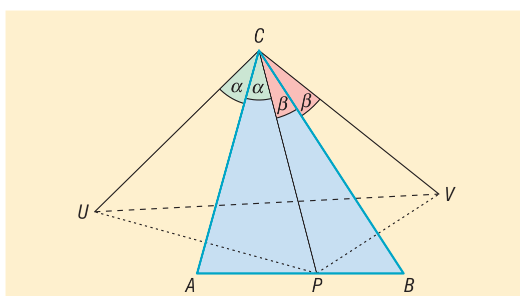
Tekintsük az e egyenes egy tetszőleges P pontját, majd tükrözzük a PB szakaszt az e egyenesre. A tükrözés során a P pont helyben marad, a B pont képe B', a távolságtartó tulajdonság miatt $PB = PB'$. Az ABP háromszög kerülete $200 + AP + PB = 200 + AP + PB'$. Mivel a B' pont helyzete független a P pont helyétől, ezért a kerület láthatóan akkor a lehető legkisebb, amikor az APB' törött vonal hossza minimális, ami akkor következik be, ha az A, P, B' pontok egy egyenesre illeszkednek. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a legkisebb kerületű háromszög C csúcsát az AB' szakasz metszi ki az e egyenesből.

b) Mivel $AB = BB' = 200$ méter, ezért az ABB' háromszög egyenlő szárú és derékszögű. A tükrözés tulajdonságai miatt a $BB'C$ háromszög is egyenlő szárú, melynek BB' alapján ezek szerint 45°-os szögei vannak. Ekkor viszont az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van, amiből következik, hogy az ABC háromszög is derékszögű és egyenlő szárú. Ha $AC = BC = x$, akkor Pitagorasz tétele alapján $x^2 + x^2 = 200^2$, amiből $x = 100 \cdot \sqrt{2}$ méter. Az ABC háromszög kerülete $200 + 200 \cdot \sqrt{2}$, így Géza bácsinak legalább $1{,}05 \cdot (200 + 200 \cdot \sqrt{2}) \approx 507$ méter kerítést kell vásárolnia.

1602 *a)* Legyen az AC oldal egy pontja T, a BC oldal egy pontja pedig S. Tükrözzük a PT szakaszt az AC, a PS szakaszt pedig a BC oldal egyenesére, a P pont tükörképeit pedig jelölje rendre U, V (ld. ábra). A tükrözés tulajdonságai miatt $PT = UT = x$ és $PS = VS = y$, amiből következik, hogy a PTS háromszög kerülete megegyezik az $UTSV$ törött vonal hosszával. Mivel az U és V pontok helyzete független a T és S pontok választásától, ezért a törött vonal hossza akkor lesz a legkisebb, amikor T és S illeszkedik az UV szakaszra. Az eddigi gondolatmenetünk alapján könnyen szerkeszthető a minimális kerületű beírt PQR háromszög, hiszen annak Q és R csúcsait az U és V pontokat összekötő szakasz metszi ki a háromszög megfelelő oldalaiból. A PQR háromszög kerülete természetesen megegyezik az UV szakasz hosszával.



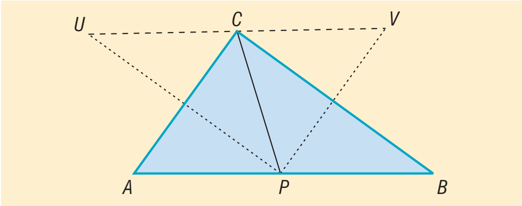
b) A feladat kérdése arra vonatkozik, hogy miként kell az AB oldal P pontját megválasztani, ha azt akarjuk, hogy a kapott PQR háromszög kerülete, azaz az UV szakasz hossza a lehető legkisebb legyen. Mivel a tükrözés megtartja a szögek nagyságát, ezért az ábrán azonos módon jelölt szögek egyenlők. Mivel a tükrözés a távolságot is megtartja, ezért $CU = CV = CP$. Eszerint az UVC háromszög a P pont tetszőleges



választása mellett egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárak által bezárt szög $2\cdot(\alpha+\beta)$, ahol $\alpha+\beta$ az ABC háromszög C csúcsnál lévő szögét jelöli.

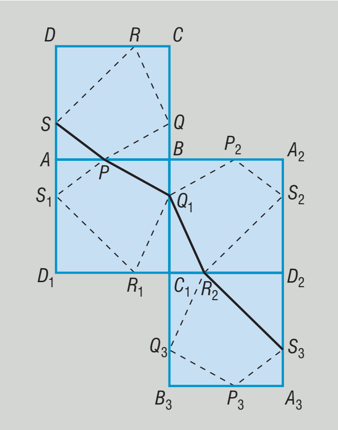
Az ilyen háromszögek UV alapja pontosan akkor minimális, amikor a háromszög szára, vagyis a CU szakasz, a lehető legkisebb. A $CU = CP$ szakasz pedig akkor a legkisebb, amikor P az ABC háromszög C csúcsból induló magasságvonalának talppontja. Gondolatmenetünk egy nem túl bonyolult következménye, hogy egy hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a lehető legkisebb.

c) Ha az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van, akkor $UCV\sphericalangle = 180^\circ$, ami azt jelenti, hogy a C pont illeszkedik az UV szakaszra. Ebben az esetben tehát UV nem belső pontokban metszi a háromszög AC és BC oldalait, így nem létezik minimális kerületű beírt háromszög sem.



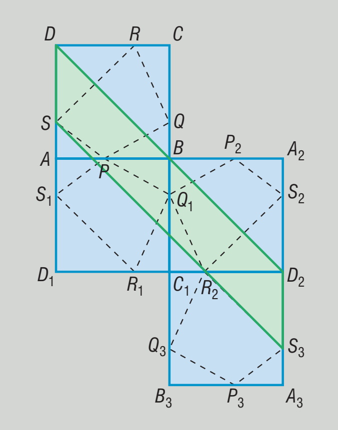
Hasonló a helyzet tompaszögű háromszög esetén is; ekkor az UV szakasz egyáltalán nem metszi a háromszög oldalait.

1603 *a)* Az $ABCD$ téglalapba az alábbi ábra szerint beírtuk a $PQRS$ négyszöget. Feladatunk a legkisebb kerületű négyszög szerkesztése. A továbbiakban „kiterítjük” a beírt négyszög oldalait egy törött vonalba. Tükrözzük a téglalapot a beírt sokszöggel együtt az AB egyenesre, az így kapott tükörképeket 1 indexszel láttuk el. További két tükrözéssel (az ábrán a k-adik tükrözés után kapott pontok k indexet kaptak) sikerül kiteríteni a $PQRS$ négyszög oldalait; a négyszög kerülete megegyezik az $SPQ_1R_2S_3$ törött vonal hosszával. Ennek hossza akkor minimális, amikor szakasszá fajul, ami azt jelenti, hogy a minimális kerületű beírt négyszög kerülete egyenlő az SS_3 szakasz hosszával.



Az SS_3 szakasz hossza látszólag függ az S pont választásától. A tükrözés távolságtartó voltából fakadóan azonban könnyen végiggondolhatjuk, hogy $SD = S_1D_1 = S_2D_2 = S_3D_2$, továbbá SD és S_3D_2 párhuzamosak, amiből következik, hogy a DSS_3D_2 négyszög paralelogramma, így az SS_3 szakasz hossza megegyezik a DD_2 szakasz hosszával, ami viszont épp az eredeti téglalap átlójának kétszerese.

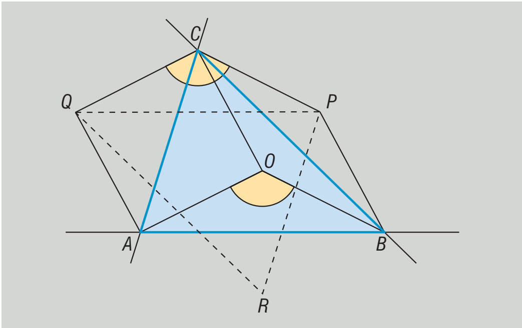
Ezzel igazoltuk, hogy a P pontot csúcsként tartalmazó, a téglalapba beírt négyszögek kerületének minimuma épp a téglalap átlójának kétszerese, ami valóban független a P pont helyzetétől.



b) A téglalap oldalainak ismeretében Pitagorasz tételével az átlóra 35 m adódik, ezért a telek elkerítéséhez 70 m kerítés szükséges.

c) Az előzőek alapján már nem túlságosan nehéz a minimális kerületű beírt négyszög szerkesztése. Húzzunk a DD_2 szakasszal párhuzamost a P ponton át. Ez a D_2A_3 szakaszból kimetszi a minimális kerületű beírt $PQRS$ négyszög S pontjának S_3 harmadik tükörképét, a C_1D_2 szakaszból kimetszi az R pont R_2 második tükörképét, míg a BC_1 szakaszból kimetszi a Q pont Q_1 első tükörképét. Ezáltal a $PQRS$ négyszög szerkeszthető.

1604 *a)* Ha az ABC háromszög köré írt kör középpontját O jelöli, akkor $AO = BO = CO$, hiszen mindhárom szakasz a körülírt kör sugara. A tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért az említett szakaszok tükörképei is, így például az ábrán szereplő AQ, CQ, CP, BP szakaszok mindegyike a körülírt kör sugarával egyenlő hosszú. Ekkor viszont az $AOCQ$ és $BOCP$ négyszögek rombuszok, ezért szemközti oldalaik párhuzamosak egymással, azaz CQ párhuzamos OA-val, CP párhuzamos OB-vel, amiből következik, hogy $QCP\sphericalangle = AOB\sphericalangle$. Eddigi eredményeink alapján a QPC és ABO háromszögek egybevágók (két oldal + közbezárt szög), ezért $QP = AB$. Hasonló gondolatmenettel láthatjuk be, hogy a PQR háromszög minden oldala egyenlő az ABC háromszög egy-egy oldalával, ezért a két háromszög valóban egybevágó egymással.



b) Az *a)* feladatban láttuk, hogy a QPC és ABO háromszögek egybevágóak, továbbá két-két oldaluk párhuzamos, amiből következik, hogy harmadik oldalaik, azaz QP és AB is párhuzamos egymással. Ugyanígy; PR és CA, valamint QR és CB is párhuzamos egymással. Mivel a QO egyenes merőleges az AC egyenesre, így merőleges a PR egyenesre is, így a QO egyenes a PRQ háromszög magasságvonala, O pedig a magasságpontja. Észrevételünket felhasználva az ABC háromszög szerkesztésének a lépései a következők lehetnek. Megszerkesztjük a PQR háromszög O magasságpontját. Ezután megszerkesztjük az OQ, OR, OP szakaszok felezőmerőlegeseit. A megszerkesztett egyenesek egyben az ABC háromszög oldalegyenesei is, ezért az ABC háromszög csúcsai már könnyen szerkeszthetők.

Középpontos tükrözés – megoldások

1605 A tükörképek az egyes esetekben:

a) $A'(-3; -1)$, $B'(2; -5)$, $C'(4; 2)$;

b) $A'(-3; 7)$, $B'(2; 3)$, $C'(4; 10)$;

c) $A'(-1; 1)$, $B'(4; -3)$, $C'(6; 4)$;

d) $A'(1; -3)$, $B'(6; -7)$, $C'(8; 0)$;

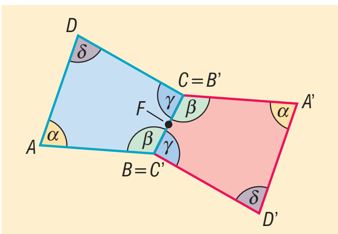
e) $A'(-5; -5)$, $B'(0; -9)$, $C'(2; -2)$;

f) $A'(-5; 13)$, $B'(0; 9)$, $C'(2; 16)$.

1606 A két háromszög egyesítése paralelogrammát határoz meg, mert a kapott négyszög középpontosan szimmetrikus.

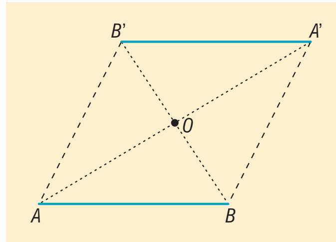
1607 A két trapéz egyesítése paralelogrammát határoz meg, mert a kapott négyszög középpontosan szimmetrikus.

1608 Ha az $ABCD$ négyszög BC oldalának F felezőpontjára tükrözünk, akkor a szokásos jelölések mellett az $ABD'A'CD$ hatszög szögei α, $\beta + \gamma$, δ, α, $\beta + \gamma$, δ. A középpontos tükrözés során a szakasz és tükörképe párhuzamos egymással, ezért a kapott hatszög szemközti oldalai valóban párhuzamosak.

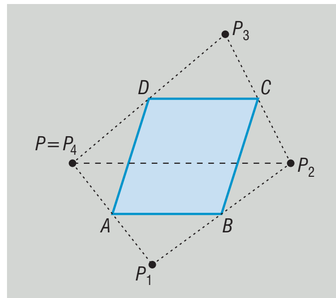


1609 Ha a két szakasz nem esik egy egyenesbe, akkor végpontjaik egy paralelogramma csúcsait alkotják. Ebben a paralelogrammában az átlók metszéspontjára vonatkozó tükrözés a szakaszokat egymásba viszi át.

Ha a két szakasz (*AB* és tükörképe *A'B'*) végpontjai egy egyenesre illeszkednek, akkor nem feszítenek ki paralelogrammát, de a tükrözés középpontja ebben az esetben is az *AA'* és a *BB'* szakaszok közös felezőpontja.

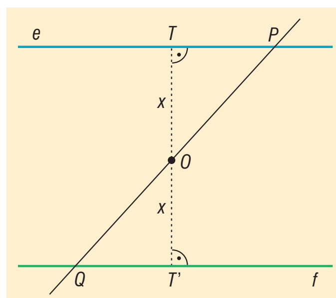


1610 A negyedik tükrözés után visszajutunk a kiindulásul vett pontba. Ha a *P* pontból indulunk ki, és a tükrözések eredményét rendre P_1, P_2, P_3 és P_4 jelöli, akkor ugyanis *AB* középvonal a PP_2P_1 háromszögben, amiből következik, hogy PP_2 párhuzamos *AB*-vel és hossza az *AB* hosszának kétszerese. Ugyanígy *DC* középvonal a $P_4P_2P_3$ háromszögben, amiből adódik, hogy P_4P_2 párhuzamos *DC*-vel és hossza a *DC* hosszának kétszerese. Mivel *ABCD* paralelogramma, ezért *AB* és *DC* párhuzamosak, illetve egyenlő hosszúak, így ugyanez érvényes PP_2-re és P_4P_2-re is. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha $P = P_4$.



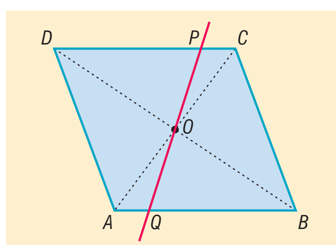
1611 A játékban Barnabásnak van nyerő stratégiája. Ehhez a következő szabály szerint érdemes játszania: az első pénzérmét úgy kell elhelyeznie, hogy középpontja egybeessen az asztal középpontjával. Ezek után nincs más dolga, csak ha András rakott, akkor a saját érméjét úgy helyezze el, hogy az asztal középpontjára vonatkozó tükörképe egybeessen az András által legutoljára elhelyezett pénzérmével. Ekkor a siker garantált, ha ugyanis András tud még rakni, akkor ez Barnabásnak is biztosan sikerülni fog.

1612 Az *O* pont *e*-re, illetve *f*-re vonatkozó merőleges vetületét az ábrán *T*-vel, illetve *T'*-vel jelöltük. A feltételek szerint $OT = OT' = x$. Vizsgáljuk az *O* pontra vonatkozó középpontos tükrözés tulajdonságait. A *T* pont képe *T'*, továbbá az *e* egyenes képe olyan egyenes, amely átmegy a *T'* ponton és párhuzamos *e*-vel. Ez az egyenes csakis az *f* egyenes lehet. Mivel a tükrözés *O* középpontja illeszkedik a *PQ* egyenesre, ezért a *P* pont képe illeszkedik a *PQ* egyenesre, továbbá illeszkedik az *e* egyenes *f* képére is, ezért csakis a két egyenes *Q* metszéspontja lehet. Pont és képe ugyanolyan távolságra van a tükrözés középpontjától, ezért $OP = OQ$.

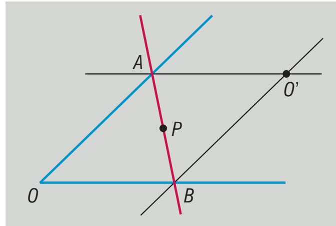


1613 Mindhárom négyszög tengelyesen szimmetrikus a négyszög egyik átlójának egyenesére, ezért mindhárom négyszög deltoid. A középen keletkező négyszög a négyzet középpontjára vonatkozó középpontos tükrözés során invariáns marad (képe önmaga), ezért paralelogramma. Mivel átlói illeszkednek a négyzet átlóira, ezért merőlegesek egymásra, így a középen keletkező négyszög rombusz.

1614 Az *O* pontra vonatkozó középpontos tükrözés során az *A* pont képe *C*, a *D* pont képe pedig *B*. Az 1612. feladat eredménye alapján $OP = OQ$, ezért a *P* és *Q* pontok egymás tükörképei.

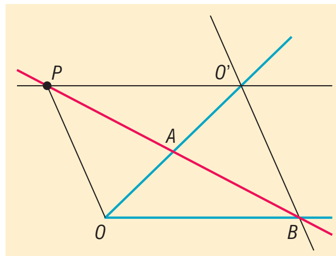


1615 A szerkesztés lépései:



1. Az adott szög O csúcsát tükrözzük az adott P pontra; a tükörképet O'-vel jelöltük.
2. Az O' ponton át párhuzamosokat szerkesztünk a szög száraival.
3. A párhuzamosok és a megfelelő szögszárak A és B metszéspontjainak szerkesztése.
4. Az AB egyenes szerkesztése. Az egyenes a kívánt tulajdonságokkal rendelkezik, hiszen az $OBO'A$ négyszög paralelogramma, ezért átlói felezik egymást, így $PA = PB$.

1616 A szerkesztés lépései:

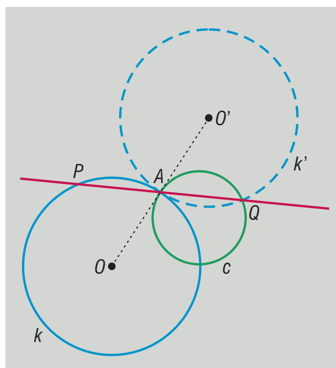


1. Az adott P ponton át a megfelelő szögszárral (amelyiket a szerkesztendő egyenes a P-től mérve távolabb metsz) párhuzamost szerkesztünk.
2. A párhuzamos és a másik szögszár O' metszéspontjának szerkesztése.
3. Az O' ponton keresztül párhuzamost szerkesztünk a PO szakasszal.
4. A szerkesztett párhuzamos másik szögszárral való B metszéspontjának szerkesztése.
5. A PB egyenes szerkesztése. Az egyenes a kívánt tulajdonságú lesz, hiszen a szerkesztés menete alapján az $OBO'P$ négyszög paralelogramma, amelyben az átlók felezik egymást.

1617

a) Igaz.	*b)* Igaz.	*c)* Hamis.
d) Hamis.	*e)* Hamis.	*f)* Igaz.
g) Igaz.	*h)* Igaz.	*i)* Igaz.
j) Hamis.	*k)* Hamis.	*l)* Igaz.
m) Hamis.	*n)* Hamis.	*o)* Igaz.

1618 Jelöljük a két kört k-val és c-vel, és tegyük fel, hogy az egyik metszéspontjukon (A) átmenő egyenes az A-tól különböző P és Q pontokban metszi a két kört (ld. ábra), valamint $AP = AQ$.



Ekkor az A pontra vonatkozó középpontos tükrözés a P pontot a Q pontba, az AP szakaszt pedig az AQ szakaszba viszi át. Ez a megállapítás lehetőséget ad a Q pont egyszerű szerkesztésére; a Q pontot a k kör A pontra vonatkozó k' tükörképe metszi ki a c körből. A P pontot megkaphatjuk, ha a Q pontot tükrözzük az A pontra.

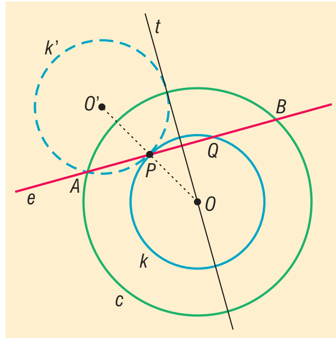
Mivel az így kapott AQ és AP szakaszok egy egyenesbe esnek, és a tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt hosszuk megegyezik, ezért a PQ egyenes megfelel a feladat minden feltételének.

A feltételekből következik, hogy a k' kör két pontban metszi a c kört, amelyek közül az egyik természetesen az A pont. Ebből adódóan a Q pont és így a P pont is egyértelműen szerkeszthető.

Újabb megoldást kapunk, ha a két kör másik metszéspontjára tükrözünk.

Vegyük végül észre, hogy a két metszésponton átmenő szelő nyilvánvalóan megfelel a feltételeknek, ezért a feladatnak három megoldása van!

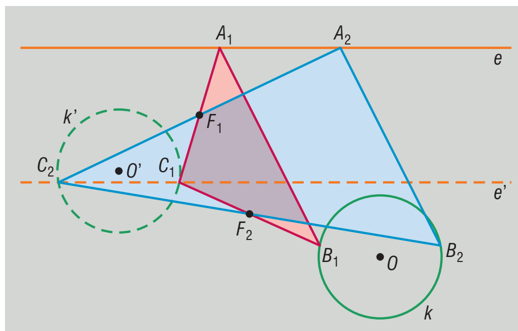
1619 A koncentrikus körök közül a belsőt k-val, a külsőt c-vel, a kisebb kör rögzített pontját P-vel jelöltük az ábrán. Tegyük fel, hogy az e egyenes a c kört A-ban és B-ben, a k kört P-ben és Q-ban metszi az ábrának megfelelően, továbbá $AP = PQ = QB$.



Ekkor a P pontra vonatkozó középpontos tükrözés során a Q pont az A pontba kerül, így a k kör képe olyan k' kör, amelynek a c körrel való egyik metszéspontja éppen A. Megállapításunk egyben eljárást ad az A pont szerkesztésére is. Az A és P pontok ismeretében az e egyenes már szerkeszthető. Nem kell aggódnunk amiatt sem, hogy esetleg QB nem lenne egyenlő AP-vel. Ugyanis ha $AP = PQ$, akkor $AP = QB$ is teljesül, amihez elegendő végiggondolnunk, hogy a PQ szakasz felezőmerőlegesére (az ábrán t jelöli) vonatkozó tengelyes tükrözés során a P pont képe Q, az A pont képe B, ezért $AP = QB$ valóban fennáll.

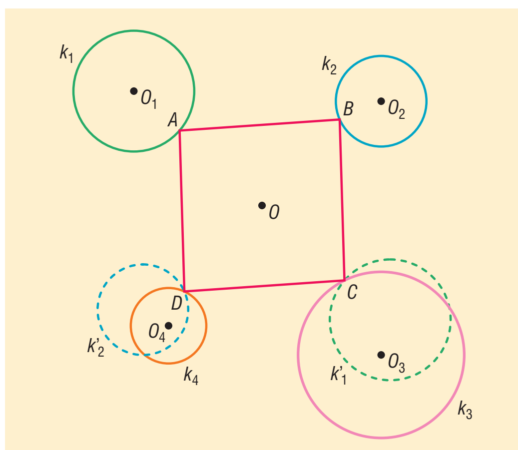
A szerkeszthetőség feltétele, hogy a k' kör és a c kör metssze egymást. Attól függően, hogy a két körnek hány metszéspontja van, a megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet. A két kör nem metszi egymást, ha a c kör sugara nagyobb, mint a k kör sugarának háromszorosa, egy metszéspont és így egy megoldás adódik, ha c kör sugara egyenlő a k kör sugarának háromszorosával, míg más esetekben két megoldást kapunk.

1620 A feltételek szerint az ABC háromszög A csúcsa illeszkedik az e egyenesre, továbbá F_1 az AC oldal felezőpontja, így a C csúcs illeszkedik az e egyenes F_1 pontra vonatkozó e' tükörképére. Hasonlóan; mivel a B csúcs illeszkedik a k körre, valamint F_2 a BC oldal felezőpontja, így a C csúcs illeszkedik a k kör F_2 pontra vonatkozó k' tükörképére. A tükrözött alakzatok metszéspontja eszerint épp a háromszög C csúcsával azonos. A hiányzó A, illetve B csúcsot megkapjuk, ha a C pontot tükrözzük az F_1, illetve F_2 pontra. A fent vázolt szerkesztés eredményét, valamint a megoldásul kapott $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögeket az ábrán láthatjuk.



A szerkeszthetőség feltétele, hogy az e' egyenes metssze a k' kört. A metszéspontok számától függően a feladatnak 0, 1 vagy 2 megoldása lehet.

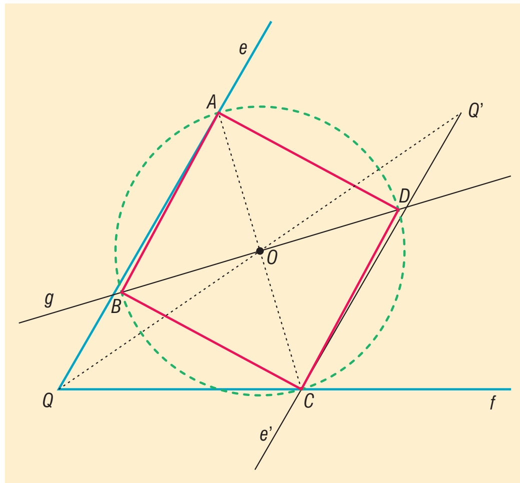
1621 Feladatunk olyan $ABCD$ paralelogramma szerkesztése, amelynek középpontja O, továbbá $A \in k_1$, $B \in k_2$, $C \in k_3$ és $D \in k_4$.



A szerkesztendő paralelogramma szimmetrikus az O pontra nézve, ezért középpontosan tükrözzük a k_1 kört az O pontra; a tükörképet jelölje k_1'. Világos, hogy a paralelogramma C csúcsa illeszkedik k_1'-re és k_3-ra, vagyis a C pont e két kör metszéspontjaként szerkeszthető. Az A pontot megkapjuk, ha a C pontot középpontosan tükrözzük az O pontra. A paralelogramma B és D csúcsainak szerkesztése ezzel analóg módon történhet, csak a k_2 és k_4 körökkel kell dolgoznunk.

A szerkeszthetőség feltételei, hogy a k_1' és a k_3, valamint a k_2' és a k_4 körök egyaránt metsszék egymást. Ha az említett körök közül valamelyik kettőnek nincs metszéspontja, akkor a feladatnak 0 megoldása van. A további estekben a megoldások száma a metszéspontok számától függ. Ennek értelmében a feladatnak lehet 1, 2, 4, esetleg végtelen sok megoldása. Ez utóbbi eset akkor következik be, ha k_1' kör a k_3 körrel, vagy a k_2' kör a k_4 körrel esik egybe.

1622 Jelöljük a szög szárait e-vel és f-fel, az adott pontot O-val. Ha az $ABCD$ négyzet A csúcsa illeszkedik az e szögszárra, valamint C csúcsa illeszkedik az f szögszárra (ld. ábra), akkor az A pont O pontra vonatkozó tükörképe, mely épp a C pont, illeszkedik az e szögszár O pontra vonatkozó tükörképére.

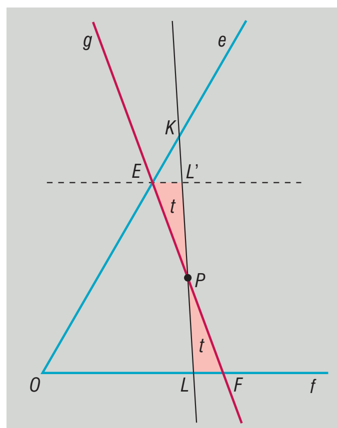


Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Középpontosan tükrözzük az e szögszárat az O pontra; így kapjuk e'-t.
2. Az e' félegyenes és az f szögszár metszéspontjának szerkesztése; a metszéspont C.
3. A C pont O pontra vonatkozó tükrözése; a tükörkép A.
4. Az AC szakaszfelező merőlegesének szerkesztése; a kapott egyenes g.
5. Az O középponttal, OC sugárral rajzolt kör szerkesztése.
6. A g egyenes és a szerkesztett kör metszéspontjainak szerkesztése; a keletkező metszéspontok B és D.

A feladatnak konvex szög esetén minden esetben egyetlen megoldása van.

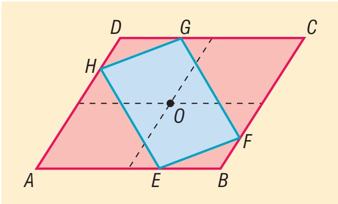
1623 A szögszárakból lemetszett háromszög területe akkor a legkisebb, ha az adott pont felezi a metsző egyenesnek a szög szárai közé eső szakaszát. Jelöljük a szögszárakat e-vel és f-fel, az adott pontot P-vel, továbbá g-vel azt az egyenest, amely átmegy a P ponton és a szögszárak közé eső szakaszát a P pont megfelezi. Ha a g egyenes az e szögszárat E-ben, az f szögszárat F-ben metszi, akkor $PE = PF$ (ld. ábra). Megmutatjuk, hogy ha egy g-től különböző egyenes átmegy a P ponton, továbbá a szögszárakat K-ban és L-ben metszi, akkor az OKL háromszög területe nagyobb, mint az OEF háromszög területe. Mivel PK és PL semmiképpen nem egyenlő, ezért feltehetjük, hogy $PK > PL$.



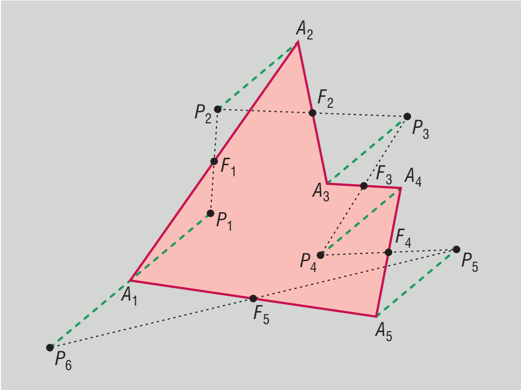
Tükrözzük a PLF háromszöget a P pontra. A tükrözés során a P pont helyben marad, az F pont képe E, mivel $PF = PE$, az L pont képe pedig a PK szakasz egy belső L' pontja. Az EL' és FL szakaszok párhuzamosak a középpontos tükrözés tulajdonságai alapján. Jelöljük a PLF és $PL'E$ háromszögek közös területét t-vel. Ekkor

$$T_{OEF} = T_{OEPL} + t < T_{OEPL} + t + T_{EL'K} = T_{OKL}$$

amit éppen bizonyítani akartunk. Az E és F pontok, valamint a g egyenes az 1622. feladatban ismertetett módon szerkeszthetők. Az ott alkalmazott jelölésekkel az EF szakasz egybeesik az $ABCD$ négyzet AC átlójával.



1624 Jelölje O az $ABCD$ paralelogrammába írt $EFGH$ paralelogramma középpontját (ld. ábra). Ekkor az O pontra vonatkozó tükrözés az E pontot a G pontba, az AB szakaszt vele párhuzamos szakaszba viszi át, hiszen a szakasz és tükör képe párhuzamos egymással. Mivel azonban a G pont illeszkedik CD szakaszra, így az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés az AB szakaszt csakis a CD egyenesre képezheti. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha az O pont egyenlő távolságra van az $ABCD$ paralelogramma AB és CD oldalaitól, amiből következik, hogy O illeszkedik az AB és a CD egyenesek középpárhuzamosára. Hasonlóan igazolhatjuk, hogy O az AD és a BC egyenesek középpárhuzamosára is illeszkedik, így O valóban megegyezik az $ABCD$ paralelogramma középpontjával.

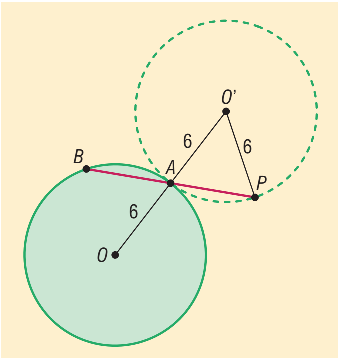


1625 *a)* Tekintsük az ábrán látható $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszöget, melynek oldalfelező pontjai F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, valamint a sík egy tetszőleges P_1 pontját. Tükrözzük a P_1A_1 szakaszt előbb az F_1, majd a kapott tükörképet az F_2 pontra, és így tovább. Az i-edik tükrözés után így a $P_{i+1}A_{i+1}$ szakaszhoz jutunk ($A_1 = A_6$). A tükrözés tulajdonságai alapján bármely (i, j) számpárra $(1 \le i, j \le 6)$ a P_iA_i és P_jA_j szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak, továbbá minden i-re P_iA_i és $P_{i+1}A_{i+1}$ $(1 \le i \le 5)$ ellentétes irányúak, hiszen a középpontos tükrözés megváltoztatja a körüljárási irányt. Az elmondottakból következik, hogy a P_1P_6 szakasznak A_1 a felezőpontja.

A fenti észrevételek alapján az ötszög könnyen szerkeszthető. Tükrözzük a sík egy tetszőleges P_1 pontját rendre az F_1, …, F_5 pontokra; így kapjuk a P_6 pontot. A P_1P_6 szakasz A_1 felezőpontját tükrözzük az F_1 pontra, így kapjuk A_2-t. Tükrözzük A_2-t az F_2 pontra; így kapjuk az A_3 pontot, és így tovább.

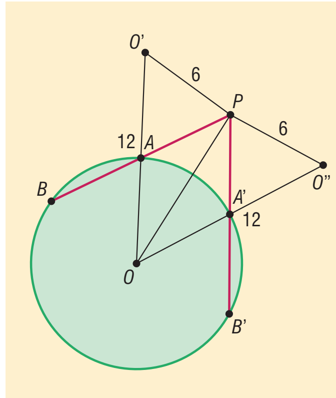
A feladatnak minden esetben egyértelmű megoldása van, bár előfordulhat, hogy a kapott ötszög hurkolt vagy elfajuló. A feladat fent vázolt megoldása minden páratlan n-re általánosítható.

b) Ha n páros, úgy a P_1A_1 és $P_{n+1}A_1$ szakaszok továbbra is párhuzamosak és egyenlők, csak ezúttal megegyező irányúak. Ebből következően a P_1 és P_{n+1} pontok egybeesnek, így ebben az esetben a feladat határozatlan.



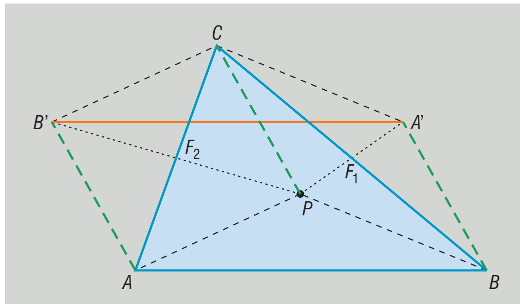
1626 *a)* Jelöljük az erdő középpontját O-val, a falut P-vel. Olyan szelőt kell szerkesztenünk a P ponton át, amelynek a körrel való első metszéspontja (az ábrán A) felezi a hosszabb szelőszakaszt, azaz PB-t. Természetesen ekkor az A pontra vonatkozó középpontos tükrözés a P pontot a B pontba viszi át, csak kisebb kellemetlenséget okoz, hogy az A pont helyét nem ismerjük. Ha viszont egy pillanatra feltételezzük, hogy az A pont ismert, és a Kerekerdőt tükrözzük az A pontra, akkor eredményül olyan O' középpontú kört kapunk, amelynek sugara 6 km, továbbá átmegy a P ponton, és az A pontban érinti a Kerekerdőt modellező kört. Az O' pont ezek szerint a P ponttól 6, az O ponttól 12 km távolságra található, így a P és O pontok ismeretében megszerkeszthető. Az OO'szakasz kimetszi Kerekerdőből a keresett szelő A pontját, majd a P pont A-ra vonatkozó tükörképe megadja a B pont helyét.

b) A feladat megoldása az OPO' háromszög szerkeszthetőségén alapul. Mivel a háromszög oldalai $OP = 10$ km, $OO' = 12$ km, $O'P = 6$ km, és $OO' + O'P > OP$, ezért az O középpontú 12 km sugarú, valamint a P középpontú 6 km sugarú kör két pontban metszi egymást (az ábrán O' és O''), így a feladatnak két megoldása van. A két út egymás tükörképe az OP egyenesre vonatkozóan.



c) A feladatnak $x \le 6$ esetén nincs megoldása, hiszen ebben az esetben a falu a Kerekerdő belsejében vagy határán helyezkedik el. Ha $6 < x < 18$, akkor a feladatnak két megoldása, $x = 18$ esetén egy megoldása van. Utóbbi esetben O' és O'' megegyezik, valamint illeszkedik az OP szakaszra. A feladatnak $x > 18$ esetén nem adódik megoldása.

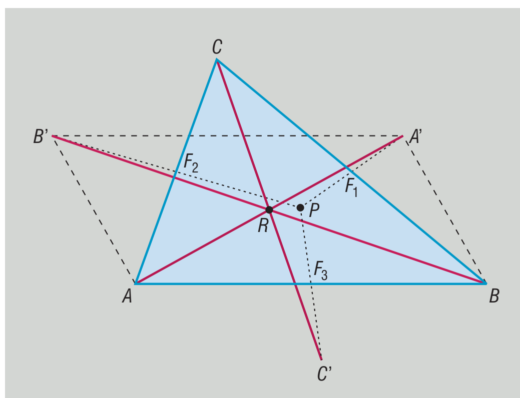
1627 *a)* Megmutatjuk, hogy a $B'A'$ szakasz hossza a P pont helyzetétől függetlenül megegyezik az AB oldal hosszával.



A tükrözésből következően az $APCB'$ négyszög paralelogramma (középpontosan szimmetrikus az AC oldal F_2 felezőpontjára vonatkozóan), ezért AB' párhuzamos PC-vel, továbbá $AB' = PC$. Ugyanilyen megfontolásból paralelogramma a $CPBA'$ négyszög is, ezért BA' párhuzamos PC-vel, továbbá $BA' = PC$. Azt kapjuk tehát, hogy AB' és BA' ugyanazzal a PC szakasszal párhuzamos, ezért a két szakasz egymással is párhuzamos. Természetesen $AB' = BA' = PC$ is teljesül. Ekkor viszont az $ABA'B'$ négyszögben két szemközti oldal párhuzamos és ugyanolyan hosszúságú, így $ABA'B'$ paralelogramma, amiből azonnal következik, hogy $B'A' = AB$, amit bizonyítani kívántunk.

Hasonlóan igazolható, hogy $A'C'$ az ABC háromszög CA, és $B'C'$ a CB oldalával egyenlő hosszúságú.

b) Az *a)* feladatban igazoltuk, hogy az $ABA'B'$ négyszög paralelogramma. Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért ha az AA' és BB' szakaszok egymást az R pontban metszik, akkor az R pont egybeesik mindkét szakasz felezőpontjával.



Természetesen ugyanígy paralelogramma az $AC'A'C$ négyszög is, ezért AA' és CC' is felezik egymást. Ezt másként is megfogalmazhatjuk: a CC' szakasz az AA' szakaszt annak R felezőpontjában metszi. Ezzel igazoltuk, hogy az AA', BB' és CC' szakaszok valóban egy pontban, a közös felezőpontjukban metszik egymást.

Háromszögek, négyszögek néhány nevezetes vonala (súlyvonal, magasságvonal, középvonal) – megoldások

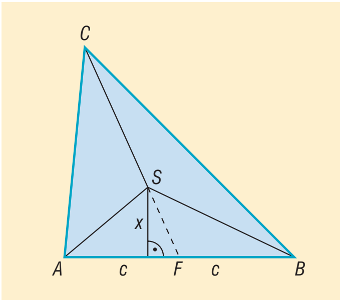
1628 *a)* A háromszög középvonalának hossza a végpontjait nem tartalmazó oldal hosszának felével egyenlő.
b) A paralelogramma középvonalának hossza a végpontjait nem tartalmazó oldal hosszával egyenlő.
c) A trapéz szárainak felezőpontjait összekötő középvonalának hossza az alapok hosszának számtani közepével egyenlő.

1629 Az eredeti háromszög kerülete 28,5 cm.

1630 A vadásznak összesen 97,5 perc szükséges az út megtételéhez.

1631 A háromszög súlyvonala a háromszöget két olyan háromszögre bontja, amelyeknek egy-egy oldala megegyezik, valamint az ezekhez tartozó magasságuk is egyenlő. Ebből adódóan a két háromszög területe is egyenlő.

1632 Az ABC háromszög súlypontját S-sel, az AB oldal felezőpontját F-fel, az $AF = FB$ szakasz hosszát c-vel jelöltük. Az előző feladat eredménye alapján $T_{AFC} = T_{FBC}$. Ugyanakkor az AFS és FBS háromszögekben egy-egy oldal egyenlő ($AF = FB = c$), a hozzájuk tartozó magasság pedig közös (x), ezért területük is megegyezik, így $T_{AFS} = T_{FBS}$. Ha egyenlő területű síkidomokból egyenlő területűeket veszünk el, akkor a visszamaradó síkidomok területe is megegyezik, azaz $T_{AFC} - T_{AFS} = T_{FBC} - T_{FBS}$, amiből azt kapjuk, hogy $T_{ASC} = T_{SBC}$. Hasonló gondolatmenettel láthatjuk, hogy $T_{SBC} = T_{ASB}$ is teljesül, amivel a feladat állítását igazoltuk.



1633 Megoldás lehet, ha a tortát a középvonalak mentén vágjuk fel. Mivel a keletkező négy tortaszeletben az oldalak páronként megegyeznek, ezért a területük is egyenlő.

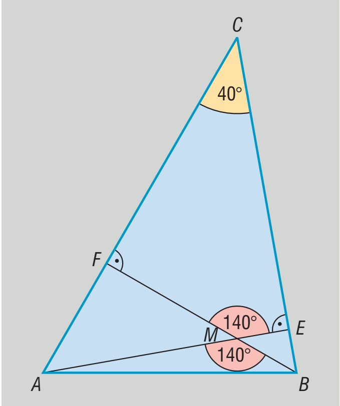
Szintén igazságos daraboláshoz jutunk, ha a háromszög egyik oldalát négy egyenlő részre osztjuk, majd az osztópontokat az oldallal szemközti csúcsokkal összekötjük. A négy keletkező háromszög egy-egy oldala egyenlő hosszúságú, az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságok pedig közösek, így a háromszögek területe valóban egyenlő.

1634 Az ilyen tulajdonságú pontok a rögzített oldallal párhuzamos középvonalon találhatók. A középvonal minden pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

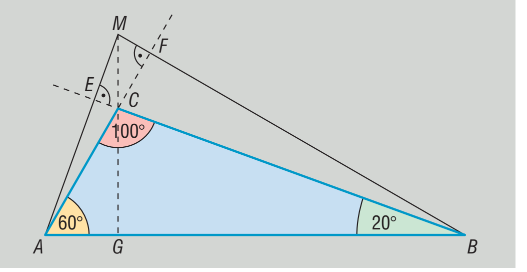
1635 *a)* A háromszög szabályos, így minden oldala 120°-os szögben látszik a magasságpontból.
b) Az ábra jelöléseivel $CAB\sphericalangle = 60°$, $CBA\sphericalangle = 80°$ így $ACB\sphericalangle = 40°$. A $CFME$ négyszögben ismert három szög nagysága, valamint az E és F csúcsoknál derékszögek vannak, ezért:

$$FME\sphericalangle = 180° - 40° = 140°.$$

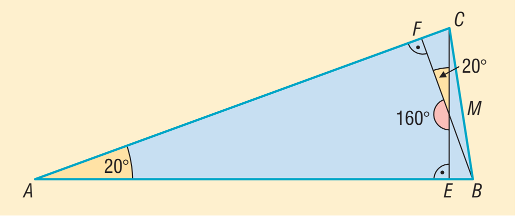
Mivel az $AMB\sphericalangle$ és $FME\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért egyenlők, így $AMB\sphericalangle = 140°$, és az AB oldal a magasságpontból 140°-os szög alatt látszik. Ugyanilyen gondolatmenettel számolható, hogy a BC oldal a magasságpontból 120°-os, míg az AC oldal 100°-os szög alatt látszik.



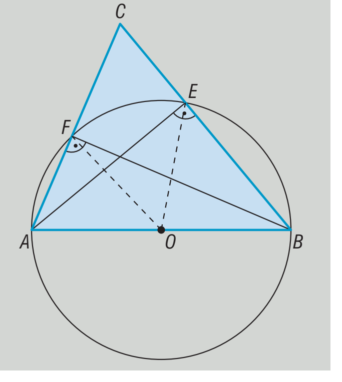
c) A háromszög ebben az esetben tompaszögű, ezért magasságpontja a háromszögön kívül található. Az *ECFM* négyszögben a *C* csúcsnál 100°-os, az *E* és *F* csúcsoknál 90°-os szögek vannak, ezért $EMF\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 80°$, azaz az *AB* oldal a magasságpontból 80°-os szög alatt látszik. Az $AMG\sphericalangle$, valamint az $EBA\sphericalangle$ merőleges szárú szögpárt alkot, és mivel mindkettő hegyesszög, ezért megegyeznek, tehát az *AC* oldal a magasságpontból 20°-os szög alatt látszik. A *BC* oldal 60°-os szögben látható az *M* magasságpontból.



1636 Ha a *BF* és *CE* magasságvonalak 20°-os szögben metszik egymást, és *M* a háromszög magasságpontja, akkor az *AEMF* négyszögben az *E*, valamint *F* csúcsoknál 90°-os, az *M* csúcsnál 160°-os szögek vannak. Ebből adódóan az *ABC* háromszög *A* csúcsánál lévő szög 20°-os.

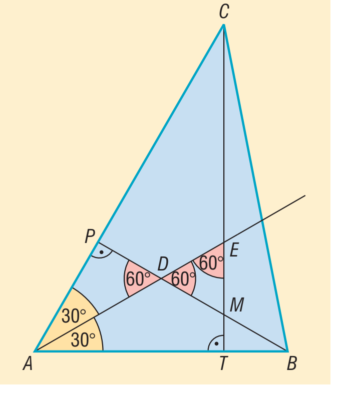


1637 Az *ABC* háromszög *BF* és *CE* magasságai két derékszögű háromszöget is kialakítanak a háromszögben; az *ABF* és *ABE* háromszögekben az átfogó közös, éppen az *AB* oldallal egyezik meg. Thalész tételének megfordítása alapján a derékszögű csúcsok, azaz *F* és *E* illeszkednek az *AB* átmérőjű körre. A kör középpontja egybeesik az *AB* oldal *O* felezőpontjával. Ekkor viszont *OF* és *OE* egy-egy sugár a körben, ezért hosszuk megegyezik.



1638 Ha a *B*-ből induló magasságvonal talppontját *P*, a *C*-ből indulóét *T* jelöli, akkor az *ADP* derékszögű háromszögben az *A* csúcsnál 30°-os, így a *D* csúcsnál 60°-os szög van. Az *EDM* háromszög *D* csúcsánál lévő szög szintén 60°-os, hiszen az előbbi szög csúcsszöge. Az *AET* derékszögű háromszögben az *A* csúcsnál 30°-os, ezért az *E* csúcsnál 60°-os szög van. Ezzel beláttuk, hogy az *EDM* háromszög két szöge is 60°-os, és így a háromszög valóban szabályos.

Megjegyezzük, hogy amennyiben az *ABC* háromszög szabályos, úgy az *E*, *D*, *M* pontok egybeesnek, ezért az *EDM* háromszög nem jön létre. Ha az *ABC* háromszög tompaszögű, akkor a bizonyítás a hegyesszögű esethez hasonlóan végezhető el.



1639 A feladatnak két megoldása van. Ha Peti a paralelogrammát a 12 cm-es oldallal párhuzamos középvonala mentén vágta szét, akkor a másik oldal hossza 13 cm. Ha szétvágás nem a 12 cm-es oldallal párhuzamos középvonal mentén történt, akkor a paralelogramma másik oldalának hossza 12,5 cm.

1640 A paralelogramma kerülete 60 cm.

1641 A paralelogrammát bármely középvonala, illetve bármely átlója két egyenlő területű részre vágja szét. Az 1614. feladat eredménye alapján bármely olyan egyenes, amely átmegy a paralelogramma középpontján, szintén egyenlő területű részekre bontja a paralelogrammát.

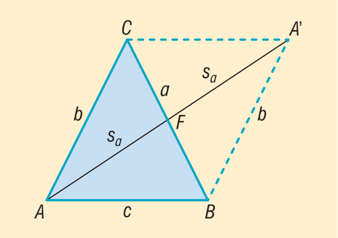
1642 A trapéz alapjait $2 \cdot x$, illetve $3 \cdot x$ alakban kereshetjük. A feltételek alapján

$$\frac{2 \cdot x + 3 \cdot x}{2} = 15 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

A trapéz alapjai tehát 12 cm, illetve 18 cm hosszúak.

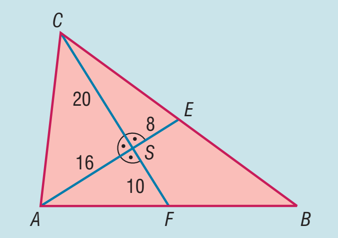
1643 A szárakat összekötő középvonal 9 cm hosszúságú. A keletkező két trapéz középvonalainak hossza 7 cm, illetve 11 cm.

1644 *a)* Tegyük fel, hogy az *ABC* háromszög *A* csúcsánál hegyesszög van. Tükrözzük középpontosan a háromszöget az *a* oldal *F* felezőpontjára. Eredményül az *ABA'C* paralelogrammát kapjuk (ld. ábra). A paralelogramma egyik átlója az *ABC* háromszög *a* oldalával, másik átlója, vagyis az *AA'* szakasz pedig az *a* oldalhoz tartozó súlyvonalának kétszeresével egyenlő hosszúságú. A feltételek szerint az *ABC* háromszögben az *A* csúcsnál hegyesszög van, amiből következik, hogy az *AA'B* háromszögben a *B* csúcsnál tompaszög van. Ennek belátásához elegendő emlékeznünk arra, hogy a paralelogramma egy oldalán fekvő szögeinek összege 180º. Az említett két háromszögben két-két oldal egyenlő, hiszen az *AB* oldal közös bennük, továbbá $AC = BA'$ a tükrözés tulajdonságai alapján. A két háromszög harmadik oldalai közül nyilvánvalóan az a nagyobb, amelyik a tompaszöggel szemközt van, azaz $2 \cdot s_a > a$, ami egyenértékű a bizonyítandó állítással.



b) A feladat állítása az *a)* feladatban bemutatott bizonyítás értelemszerű változtatásával igazolható.

1645 *a)* Legyenek a telek csúcsai *A*, *B* és *C*, a *BC* oldal felezőpontja *E*, az *AB* oldalé *F*. Tegyük fel továbbá, hogy $AE = 24$ méter, $CF = 30$ méter. Ha a két súlyvonal metszéspontja *S*, akkor lévén a súlypont $2:1$ arányban osztja fel a súlyvonalakat, azt kapjuk, hogy $AS = 16$, illetve $SE = 8$ méter, továbbá $CS = 20$, illetve $SF = 10$ méter. A feltételek alapján az *ACS*, *ECS* és *AFS* háromszögek mind derékszögűek, így azokban rendre alkalmazva Pitagorasz tételét az átfogókat kiszámolhatjuk. Nem túl bonyolult számolásokkal a megfelelő kerekítések után $AC = 25{,}6$ méter, $EC = 21{,}5$ méter, végül $AF = 18{,}9$ méter. A telek oldalai tehát 25,6 méter, 43 méter, 37,8 méter.



b) A telek körbekerítéséhez $25{,}6 + 43 + 37{,}8 = 106{,}4$ méter kerítést kell Béla bácsinak vennie.

c) Sajnos Béla bácsit váratlan meglepetések érhetik, ha a *b)* feladatban kiszámolt hosszúságú kerítéssel próbálja körbekeríteni a telkét. Ha ugyanis a számolásokat nem egy tizedes pontossággal végezzük, akkor láthatjuk, hogy

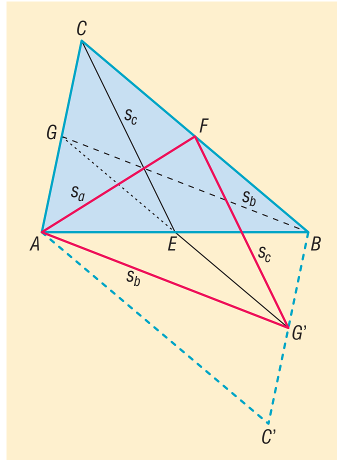
$$AC = \sqrt{656} > 25{,}61 \text{ m}; \quad EC = \sqrt{464} > 21{,}54 \text{ m}; \quad AF = \sqrt{356} > 18{,}86 \text{ m}.$$

A kapott egyenlőtlenségek felhasználásával a telek kerületére egy alsó becslést kaphatunk:

$$K_{ABC} > 25{,}61 + 2 \cdot 21{,}54 + 2 \cdot 18{,}86 = 106{,}41 \text{ méter},$$

ami mutatja, hogy a *b)* feladatban kapott 106,4 méter hosszú kerítés nem elegendő a körbekerítéshez. Béla bácsi szerencsésebben járt volna, ha a számításoknál ezúttal nem a kerekítés szabályait követte volna, hanem minden lépésben felfelé kerekít. Így elkerülhető az a rendkívül bosszantó helyzet, hogy a vásárolt kerítés pár centiméterrel rövidebb, mint a telek kerülete.

1646 Jelölje az ABC háromszög oldalainak felezőpontját E, F, G, súlyvonalait s_a, s_b, s_c az ábrának megfelelően. Tükrözzük az ABC háromszöget, valamint a G pontot az E pontra. A tükrözés során a B és A pontok „helyet cserélnek”, a C pont képe C', továbbá a G pont képe a BC' szakasz G' felezőpontja. Az elmondottakból adódóan a $BG = s_b$ súlyvonal az AG' szakaszba megy át.

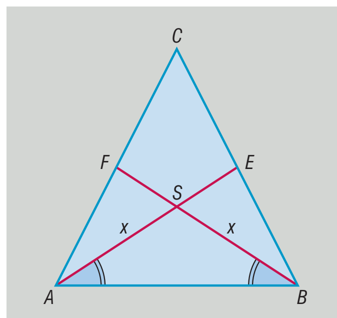


A továbbiakban megmutatjuk, hogy a $CEG'F$ négyszög paralelogramma. A középpontos tükrözés megtartja a szakaszok hosszát, ezért $EG = EG'$, továbbá természetesen E, G, G' egy egyenesre illeszkednek. Mivel EG az ABC háromszög egyik középvonala, ezért párhuzamos a megfelelő oldallal, azaz BC-vel, továbbá EG hossza BC hosszának fele, azaz $EG = CF$. Ezek szerint EG' és CF is megegyezik EG-vel, amiből persze azonnal következik, hogy $EG' = CF$. Természetesen CF nemcsak EG-vel, hanem a tartalmazó egyenesével is, így EG'-vel is párhuzamos. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $CEG'F$ négyszögben két szemközti oldal egyenlő, valamint párhuzamos, ezért valóban paralelogramma. De ha négyszögünk paralelogramma, akkor a másik két oldala is párhuzamos és egyenlő, így $G'F = CE = s_c$.

Tekintsük végül az $AG'F$ háromszöget. A háromszög oldalai: $AG' = s_b$, $G'F = s_c$, $FA = s_a$, ami szépen mutatja, hogy a háromszög súlyvonalaiból valóban lehet háromszöget szerkeszteni.

1647 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben az AE és BF súlyvonalakra $AE = BF = x$. Ha S a háromszög súlypontja, akkor S mindkét súlyvonalat 2 : 1 arányban osztja fel, ezért:

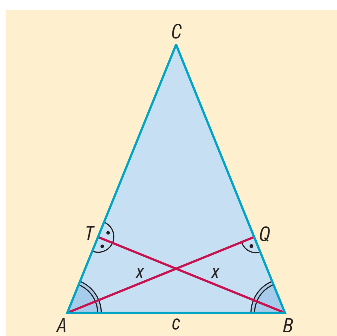
$$AS = BS = \frac{2}{3} \cdot x,$$



amiből azt kapjuk, hogy az ABS háromszög egyenlő szárú. Az egyenlő szárú háromszögekben az alapon fekvő szögek megegyeznek, így $SAB\sphericalangle = SBA\sphericalangle$. Ekkor az ABE és BAF háromszögekben két-két oldal, valamint az általuk bezárt szög megegyezik, ezért a két háromszög egybevágó, amiből persze következik, hogy $AF = BE$. Vegyük figyelembe, hogy E és F oldalfelező pontok, ezért $AC = BC$, azaz az ABC háromszög is egyenlő szárú. Azt kaptuk tehát, hogy ha egy háromszögben két súlyvonal egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Az iménti megállapításból azonnal következik, hogy ha egy háromszög mindhárom súlyvonala ugyanakkora, akkor a háromszög bármely két oldala megegyezik, azaz a háromszög valóban szabályos. Tehát csak a szabályos háromszögben egyezik meg a három súlyvonal hossza.

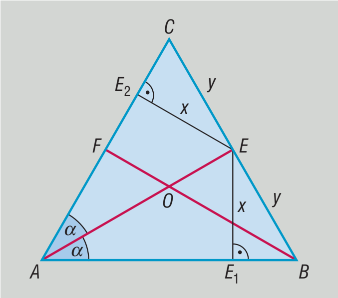
1648 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben az AQ és BT magasságokra $AQ = BT = x$. Ekkor az ABQ és BAT háromszögek derékszögűek, így bennük két-két oldal, valamint a nagyobbal szemközti szög megegyezik. A két háromszög tehát egybevágó, ezért a megfelelő befogóikkal szemközti hegyesszögeik is egyenlők, azaz $TAB\sphericalangle = QBA\sphericalangle$.



Megállapításunkból azonnal adódik, hogy az ABC háromszög AB oldalán fekvő szögei egyenlők, ezért az ABC háromszög egyenlő szárú és $AC = BC$. Azt kaptuk tehát, hogy ha egy háromszögben két magasság ugyanolyan hosszúságú, akkor azok az oldalak is megegyeznek, amelyekhez a magasságok tartoznak.

Ebből persze az is következik, hogy ha mindhárom magasság egyenlő, akkor mindhárom oldal is megegyezik, azaz a háromszög szabályos. Tehát csak a szabályos háromszögekben egyezik meg a három magasság hossza.

1649 Ha az ABC háromszögben a beírt kör O középpontja egyben súlypont is, akkor az AO szögfelező a BC oldalt az E felezőpontban metszi (ld. ábra), azaz $BE = CE$. Állítsunk merőlegest az E pontból az AB és az AC oldalakra, a talppontokat jelöljük E_1-gyel, illetve E_2-vel. Mivel az E pont az A csúcsból induló szögfelező egy pontja, ezért a szögszáraktól egyenlő távolságra van, azaz $EE_1 = EE_2$. Ekkor viszont az EE_1B és EE_2C derékszögű háromszögekben két-két oldal megegyezik, ezért pl. Pitagorasz tételének alkalmazásával belátható, hogy a harmadik oldalak is megegyeznek, azaz $BE_1 = CE_2$.

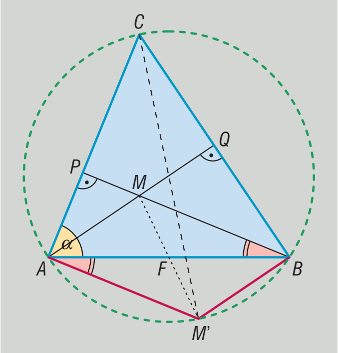


Ugyanezzel a gondolatmenettel belátható, hogy $AE_1 = AE_2$ is teljesül. Eredményeinket összefoglalva azt kapjuk, hogy $AB = AE_1 + BE_1 = AE_2 + CE_2 = AC$, azaz az ABC háromszög egyenlő szárú. Ha most abból indulnánk ki, hogy az O pont a B csúcsból induló szögfelezőnek is pontja, akkor azt kapnánk, hogy $AB = BC$, ami előző eredménnyel együtt mutatja, hogy az ABC háromszög szabályos.

1650 *a)* Jelöljük a B és A csúcsokhoz tartozó magasságvonalak talppontjait P-vel és Q-val. Mivel az F pontra vonatkozó tükrözés során az $MBA\sphericalangle$ képe az $M'AB\sphericalangle$, ezért $MBA\sphericalangle = M'AB\sphericalangle$. Az $AM'BC$ négyszög A csúcsánál lévő szög

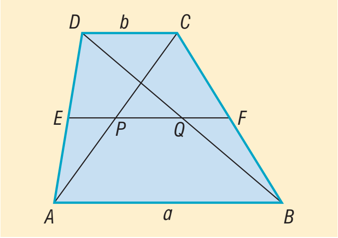
$$M'AC\sphericalangle = \alpha + M'AB\sphericalangle = \alpha + MBA\sphericalangle = 90°,$$

hiszen az utolsó egyenlőség bal oldalán álló szögek az ABP derékszögű háromszög hegyesszögei. Hasonló gondolatmenettel mutatható meg, hogy a B csúcsnál lévő szög szintén derékszög.



b) Az *a)* feladat eredményét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a CM' szakasz mind az A, mind a B pontból 90°-os szög alatt látszik. Thalész tételének megfordítása alapján ezért A és B rajta van a CM' szakaszon, mint átmérő fölé emelt körön. Ebből azonnal következik, hogy az M' pont az ABC háromszög köré írt körön található.

1651 Húzzuk meg az $ABCD$ trapéz szárainak felezőpontját összekötő EF középvonalát az ábrának megfelelően. Tegyük fel, hogy a középvonal az átlókat a P és Q pontokban metszi. A trapéz szárakat összekötő középvonala párhuzamos az alapokkal, ezért elegendő igazolnunk, hogy P az AC, Q a BD átló felezőpontja. Mivel azonban EP párhuzamos a DC alappal és E az AD oldal felezőpontja, ezért EP szükségképpen a CDA háromszög CD-vel párhuzamos középvonala, így P az AC szakasz felezőpontja. Hasonlóan igazolható, hogy Q a BD átló felezőpontja.



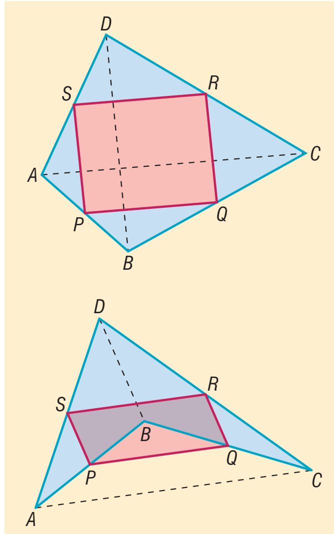
Kiszámítjuk a PQ szakasz hosszát. A trapéz megfelelő középvonalára $EF = \frac{a+b}{2}$, továbbá a CDA és CDB háromszögek EP és QF középvonalaira $EP = QF = \frac{b}{2}$. Innen PQ hossza már könnyen számolható, hiszen

$$PQ = EF - (EP + QF) = \frac{a+b}{2} - 2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} \quad (a > b).$$

1652 *a)* Az $ABCD$ konvex négyszög oldalfelező pontjai az ábra jelöléseinek megfelelően legyenek P, Q, R, S.

Az SR szakasz középvonala az ACD háromszögnek, ezért SR párhuzamos AC-vel, és hossza AC hosszának fele. Hasonlóan; a PQ szakasz középvonal az ACB háromszögben, ezért PQ is párhuzamos AC-vel, és PQ hossza is AC hosszának fele. Mivel SR és PQ ugyanazzal a szakasszal párhuzamosak, ezért SR és PQ párhuzamosak, és nyilván hosszuk is megegyezik. Azt kaptuk tehát, hogy a $PQRS$ négyszögben a szemközti oldalak párhuzamosak és egyenlők, ezért a négyszög paralelogramma, vagyis valóban középpontosan szimmetrikus.

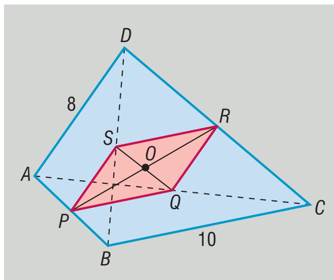
Hasonló állítás érvényes konkáv négyszögekben is. A bizonyítás ugyanúgy végezhető, mint a konvex esetben.



b) Az $ABCD$ négyszög középvonalai a $PQRS$ paralelogramma átlói, amelyekről közismert, hogy felezik egymást. Ezért a négyszög középvonalai is felezik egymást.

1653 *a)* A PS szakasz középvonal az ADB háromszögben, illetve a QR szakasz középvonal az ADC háromszögben, ezért mind PS, mind QR párhuzamos az AD oldallal, hosszuk pedig az AD oldal hosszának fele, azaz 4 cm. Hasonlóan láthatjuk be, hogy PQ és SR párhuzamos a BC oldallal, hosszuk a BC oldal hosszának fele, azaz 5 cm.

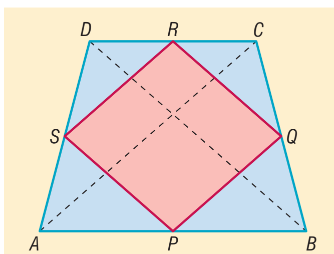
Az elmondottakból következik, hogy a $PQRS$ négyszög paralelogramma.



b) A $PQRS$ négyszög kerülete 18 cm.

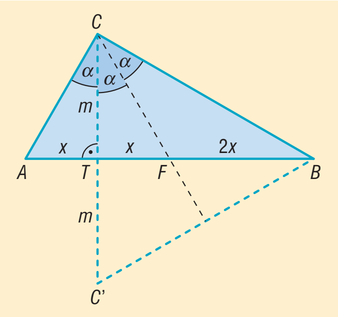
c) Az 1652. feladat eredményei alapján tudjuk, hogy a négyszög középvonalai felezik egymást, ezért az $ABCD$ négyszög középvonalainak metszéspontja éppen a PR középvonal O felezőpontja. Másrészt a $PQRS$ paralelogramma átlói is felezik egymást, ezért az O pont egyben e paralelogramma átlóinak a metszéspontja is.

1654 Az 1652. feladat alapján a $PQRS$ négyszög paralelogramma, amelynek oldalai feleakkorák, mint az $ABCD$ négyszög megfelelő átlói. Mivel a szimmetrikus trapézban az átlók egyenlő hosszúak, ezért a $PQRS$ paralelogramma oldalai is egyenlők, azaz $PQRS$ rombusz. A négy pont akkor alkot négyzetet, ha az $ABCD$ trapéz átlói merőlegesek egymásra.



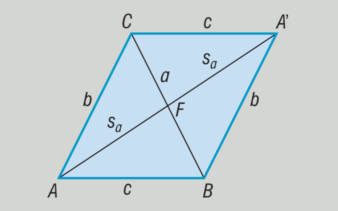
1655 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben a C csúcsból induló CT magasság, valamint a CF súlyvonal a C csúcsnál lévő szöget három egyenlő részre osztja. A CT szakasz az AFC háromszögben is magasság, ráadásul megfelezi az $ACF\sphericalangle$-et, ezért a háromszög egyenlő szárú, így az AF alaphoz tartozó magassága megfelezi az alapot is, azaz $AT = TF = x$. Mivel F az AB szakasz felezőpontja, ezért $FB = 2 \cdot x$.

Tükrözzük a TBC háromszöget a TB egyenesre; a C pont képét jelöljük C'-vel. A $C'CB$ háromszög nyilvánvalóan egyenlő szárú ($CB = C'B$), így BT a háromszög egy súlyvonala és szögfelezője is egyben. Vegyük észre, hogy az F pont a BT súlyvonalat éppen $2:1$ arányban osztja (a csúcstól számítva), amiből következik, hogy F a $C'CB$ háromszög súlypontja! Mivel a CF súlyvonal a C csúcsnál lévő szöget megfelezi, ezért CF szintén szögfelezője a háromszögnek.



Összefoglalva; a $C'CB$ háromszögben F súlypont és a szögfelezők metszéspontja, azaz a beírt kör középpontja is egyben. Az 1649. feladat állítása alapján a $C'CB$ háromszög szabályos, amiből $2 \cdot \alpha = 60°$, $\alpha = 30°$ adódik. Az ABC háromszög szögei már könnyen számolhatók: 60°, 90°, 30°.

1656 Tükrözzük az ABC háromszöget a BC oldal F felezőpontjára. A kapott háromszög az eredetivel együtt az $ABA'C$ paralelogrammát alkotja, amelynek oldalai b és c, átlói $AA' = 2 \cdot s_a$, $BC = a$ (ld. ábra).



A *Háromszögek, négyszögek, sokszögek* című fejezet 1355. feladatában igazoltuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével.

Alkalmazva ezt a tételt az $ABA'C$ paralelogrammára, azt kapjuk, hogy

$$a^2 + (2 \cdot s_a)^2 = 2 \cdot (b^2 + c^2),$$

amiből az a oldalhoz tartozó súlyvonal négyzetét kifejezve adódik, hogy

$$s_a^2 = \frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Ehhez hasonlóan a háromszög másik két oldalának súlyvonalára felírhatjuk, hogy

$$s_b^2 = \frac{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2}{4} \quad \text{és} \quad s_c^2 = \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

A kapott egyenlőségek megfelelő oldalait összeadva, majd jobb oldalon a kijelölt műveleteket, illetve lehetséges összevonásokat elvégezve

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}{4},$$

amit éppen bizonyítani kellett.

1657 *a)* Az 1656. feladatban kifejeztük a háromszög súlyvonalait az oldalak segítségével. Az ott bebizonyított összefüggéseket felhasználva:

$$s_a^2 + s_b^2 = 5 \cdot s_c^2,$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2}{4} = 5 \cdot \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

Mindkét oldalt 4-gyel megszorozva, majd a műveleteket elvégezve azt kapjuk, hogy

$$a^2 + b^2 + 4 \cdot c^2 = 10 \cdot a^2 + 10 \cdot b^2 - 5 \cdot c^2,$$
$$9 \cdot c^2 = 9 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2,$$
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Átalakításaink ekvivalensek voltak, így Pitagorasz tétele alapján a súlyvonalakra vonatkozó feltétel valóban akkor és csak akkor teljesül, ha a háromszög derékszögű.

b) Az ABC háromszög s_a és s_b súlyvonalai pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha az ASB derékszögű háromszög oldalai eleget tesznek a Pitagorasz-tétel feltételének, azaz

$$\left(\frac{2}{3}\cdot s_a\right)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot s_b\right)^2=c^2.$$

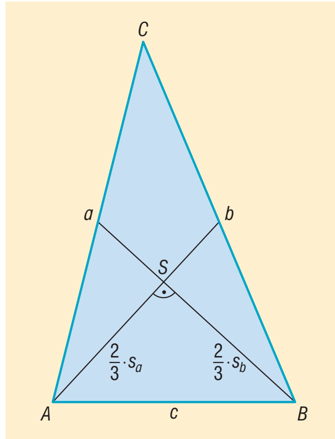
Mindkét oldalt 9-cel megszorozva, majd a súlyvonalak négyzete helyett az 1656. feladatban bizonyított összefüggéseket beírva azt kapjuk, hogy

$$2\cdot(b^2+c^2)-a^2+2\cdot(a^2+c^2)-b^2=9\cdot c^2.$$

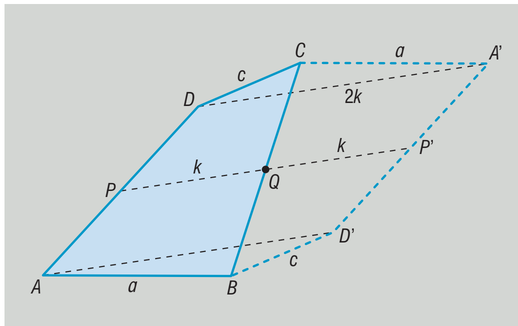
Az egynemű tagok összevonása után adódik, hogy

$$a^2+b^2=5\cdot c^2.$$

Átalakításaink ekvivalensek voltak, így a feladat állítását igazoltuk.



1658 *a)* A Q pontot tartalmazó középvonal másik végpontját P, a Q pontra vonatkozó tükörképét P', a PQ középvonal hosszát k jelöli az ábrán. A keletkező $ABD'A'CD$ hatszög származtatásából eredően középpontosan szimmetrikus és középpontja a Q pont. A középpontos tükrözés a szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át, ezért a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak, a távolságtartó tulajdonság miatt pedig egymással egyenlő hosszúak.

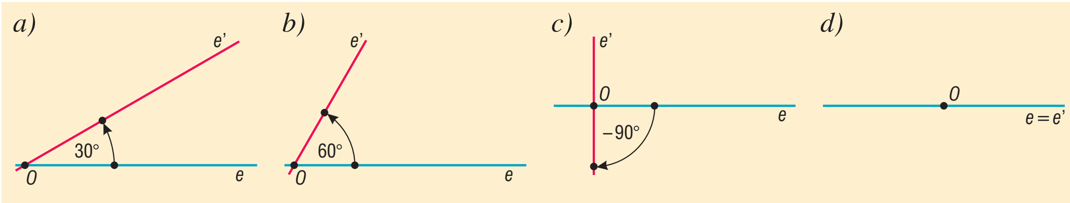


b) Tekintsük a $PP'A'D$ négyszöget. A négyszög PD és $P'A'$ oldalai párhuzamosak, és mindkettő feleakkora, mint az $ABCD$ négyszög AD oldala. Az elmondottakból adódóan a $PP'A'D'$ négyszög paralelogramma, ezért PP' és DA' is párhuzamos, valamint ugyanakkora hosszúságú. Mivel a középpontos tükrözésnél pont, annak képe, valamint a tükrözés középpontja egy egyenesre illeszkednek, ezért a PP' egyenes tartalmazza a Q pontot, amiből következik, hogy $PP'=2\cdot PQ=2\cdot k$, így végül $DA'=2\cdot k$ is teljesül. Ugyanilyen gondolatmenettel bebizonyítható, hogy $AD'=2\cdot k$. Eszerint az $ABD'A'CD$ hatszög AD' és DA' átlója is kétszer olyan hosszú, mint a PQ középvonal. Megjegyezzük, hogy többet mutattunk meg a feladat állításánál; a két átló nemcsak kétszer olyan hosszú, mint PQ, hanem párhuzamos is a középvonallal.

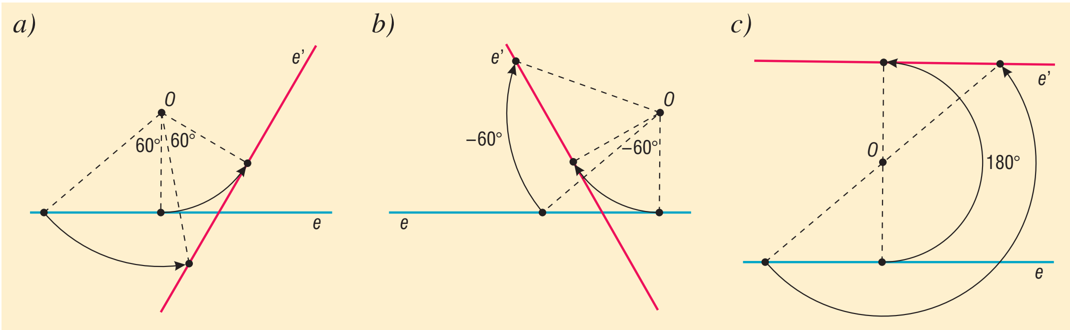
c) Ha alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget a $DA'C$ háromszögben, akkor azt kapjuk, hogy $2\cdot k\le a+c$, ahol a és c az $ABCD$ négyszög PQ középvonalának végpontjait nem tartalmazó oldalainak a hosszát jelöli. A felírt egyenlőtlenség mutatja, hogy a PQ középvonal hossza valóban nem lehet nagyobb a megfelelő oldalak számtani közepénél. Megjegyezzük, hogy egyenlőség esetében a $DA'C$ háromszög egy szakasszá fajul. Ez akkor fordul elő, ha AB, illetve CD párhuzamosak, azaz az $ABCD$ négyszög trapéz.

Forgatás – megoldások

1659

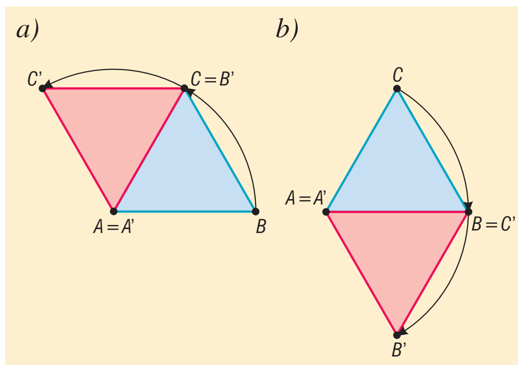


1660

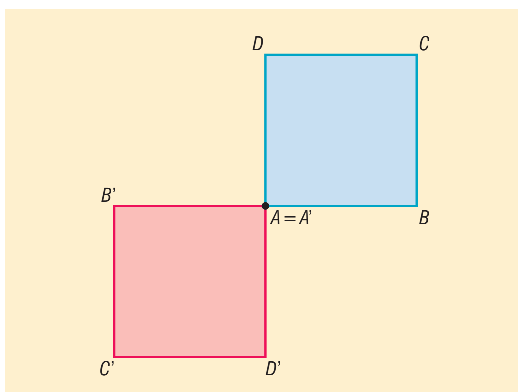


d) Mivel $300° = 360° - 60°$, és a $360°$-os forgatás a helybenhagyással egyenértékű transzformáció, ezért a forgatás szöge $-60°$, így a feladat megoldása megegyezik a *b)* feladatéval.

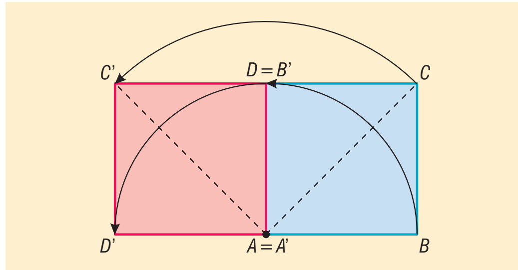
1661 A két háromszög egyesítése mindkét esetben rombuszt alkot, amelynek hegyesszöge 60°-os, tompaszöge 120°-os. Az ábrák az A csúcs körüli forgatások eredményét szemléltetik.



1662 *a)* $-1980° = 5 \cdot (-360°) - 180°$, ezért a forgatás szöge $-180°$-kal helyettesíthető. A szög mértéke mutatja, hogy gyakorlatilag az A csúcsra vonatkozó középpontos tükrözésről van szó.



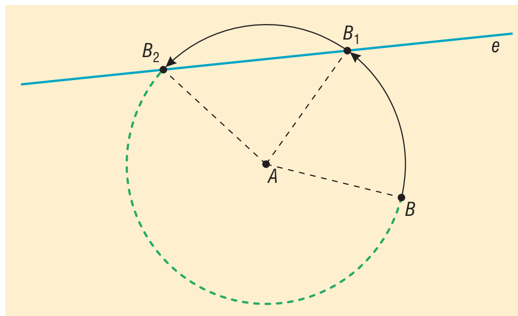
b) $4410° = 12 \cdot 360° + 90°$, ezért a forgatás szöge 90°-kal helyettesíthető. Az ábra az A csúcs körüli forgatás eredményét mutatja.



1663 *a)* $A'(-1; 3)$, $B'(-5; -2)$, $C'(2; -4)$; *b)* $A'(1; -3)$, $B'(5; 2)$, $C'(-2; 4)$;
c) $A'(-3; -1)$, $B'(2; -5)$, $C'(4; 2)$; *d)* $A'(-3; -1)$, $B'(2; -5)$, $C'(4; 2)$;
e) $A'(1; -3)$, $B'(5; 2)$, $C'(-2; 4)$; *f)* $A'(-1; 3)$, $B'(-5; -2)$, $C'(2; -4)$.

1664 A sík végtelen sok pontja tesz eleget a feltételeknek. A megfelelő pontok a két adott pont közti szakasz felezőmerőlegesének pontjai.

1665 A B pont képét az A középpontú, B ponton átmenő kör metszi ki az e egyenesből. Attól függően, hogy a kör és az egyenes milyen helyzetűek, 2, 1 vagy 0 olyan pont létezik az egyenesen, amelybe a B pont forgatással átvihető (ezeket az ábrán B_1 és B_2 jelöli). (➡)



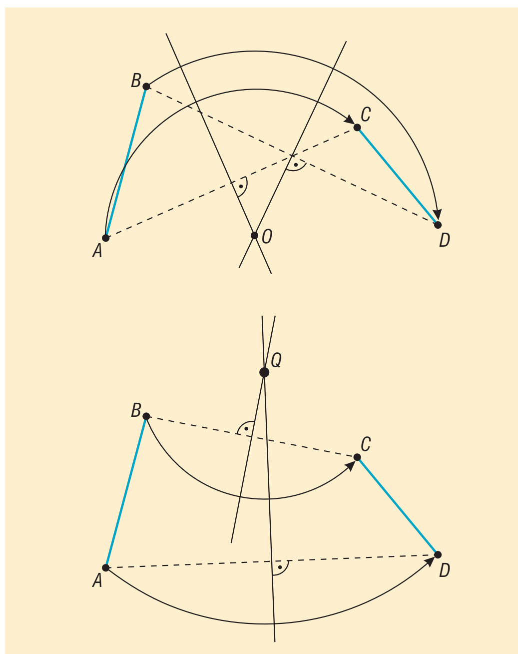
1666 Az A középpontú, B ponton átmenő kör kimetszi az e egyenesből azokat a pontokat, amelyek forgatással átvihetők a B pontba. A pontok ismeretében a forgatás szöge meghatározható.

Megjegyzés: A feladat nem hajtható végre, ha B közelebb van A-hoz, mint e.

1667 A két egyenlő hosszúságú szakaszt jelöljük AB-vel és CD-vel. A megfelelő forgatás középpontja egyenlő távolságra van az egymásnak megfelelő pontoktól, ezért pl. az AC és a BD szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontjaként kaphatjuk (a felső ábrán O-val jelöltük).

Szintén egy megfelelő forgatás középpontja a BC és az AD szakaszok felezőmerőlegesének Q metszéspontja (alsó ábra).

Az ismertetett szerkesztési eljárások nem adnak helyes megoldást, ha pl. a BC és AD szakaszok párhuzamosak egymással, hiszen ebben az esetben felezőmerőlegeseik egybeesnek. Ez akkor fordul elő, ha az $ABCD$ négyszög húrtrapéz. Ebben az esetben az egyik forgatás középpontja a négyszög köré írható kör középpontja, a másik forgatás középpontja pedig a keletkező húrtrapéz szárait tartalmazó egyenesek metszéspontja.



1668 Az ilyen forgatás középpontja az A és B pontoktól egyenlő távolságra van, ezért illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére. Ugyanakkor a forgatás középpontjából az AB szakasz 90º-os szög alatt látszik, ezért illeszkedik az AB szakasz fölé emelt Thalész-körre is. A forgatás középpontját tehát a Thalész-kör és a szakaszfelező merőleges metszéspontjaként szerkeszthetjük. Látható, hogy a feladat feltételeinek két pont is eleget tesz.

1669 *a)* A szabályos háromszöget a körülírt körének középpontja körüli, $k \cdot 120^\circ$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatások hagyják helyben.

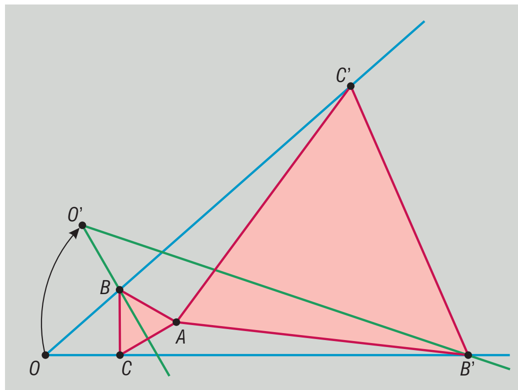
b) A négyzetet a középpontja körüli $k \cdot 90^\circ$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatások hagyják helyben.

c) A szabályos n szöget a középpontja körüli $k \cdot \dfrac{360^\circ}{n}$ szögű forgatások hagyják helyben, ahol k egész számot jelöl.

1670 A szerkesztés lépései:

1. Az O csúcsú szöget az A pont körül elforgatjuk -60°-kal (vagy akár 60°-kal).
2. A szög elforgatott képe kimetszi az eredeti szög megfelelő száraiból a B és B' pontokat.
3. A B és B' pontokat az A pont körül 60°-kal (-60°-kal) elforgatjuk. A képpontok C és C'. Ekkor az ABC és $AB'C'$ háromszögek szabályosak.

Megjegyzés: A szerkeszthetőség feltétele, hogy az elforgatott szög valamely szára metssze az eredeti szög másik szárát.



1671 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Igaz. *d)* Hamis. *e)* Hamis. *f)* Igaz. *g)* Hamis. *h)* Igaz. *i)* Igaz. *j)* Igaz. *k)* Hamis. *l)* Hamis. *m)* Igaz.

1672 *a)* $\dfrac{\pi}{12}$; *b)* $\dfrac{\pi}{6}$; *c)* $\dfrac{\pi}{4}$; *d)* $\dfrac{\pi}{3}$; *e)* $\dfrac{\pi}{2}$; *f)* π; *g)* $\dfrac{4 \cdot \pi}{3}$; *h)* $\dfrac{125 \cdot \pi}{18}$; *i)* $42 \cdot \pi$.

1673 *a)* $\dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$; *b)* $3 \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 171{,}9^\circ$; *c)* 15°; *d)* 36°; *e)* 30°; *f)* 270°; *g)* 240°; *h)* $13\,680^\circ$; *i)* $120\,000^\circ$.

1674 *a)* Az óra nagymutatójának végpontja 20 perc alatt $\dfrac{5 \cdot \pi}{3} \approx 5{,}24$ cm utat tesz meg. Ezalatt a mutató körülbelül 6,54 cm^2 területet súrol.

b) Fél óra alatt a nagymutató végpontja $\dfrac{5 \cdot \pi}{2} \approx 7{,}85$ cm utat tesz meg, és a mutató által súrolt terület körülbelül 9,82 cm^2.

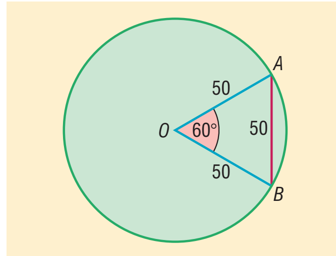
c) A mutató végpontja $\dfrac{35 \cdot \pi}{12} \approx 9{,}16$ cm utat tesz meg. A súrolt terület 11,45 cm^2.

d) A mutató végpontja $\dfrac{15 \cdot \pi}{4} \approx 11{,}78$ cm utat tesz meg. A súrolt terület 14,73 cm^2.

1675 Az ábra jelölései szerint az ABO háromszög szabályos, oldala 50 méter, ezért területe 1082,53 m^2. A rövidebb AB körívhez tartozó körcikk középponti szöge 60°-os, ezért területe a kör területének hatodrésze, azaz 1309 m^2. A kisebb körszelet területe ebből kifolyólag:

$$1309 - 1082{,}53 = 226{,}47 \text{ m}^2.$$

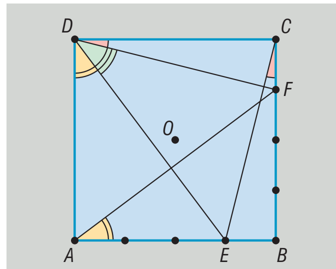
A nagyobb rész területe 7627,51 m^2.



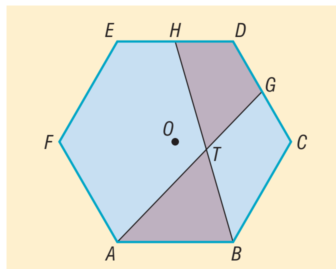
1676 A kör kerülete $8 \cdot \pi$ cm.

A körívek hossza $\dfrac{8 \cdot \pi}{5} \approx 5{,}03$ cm, $\dfrac{8 \cdot \pi}{3} \approx 8{,}38$ cm, illetve $\dfrac{56 \cdot \pi}{15} \approx 11{,}73$ cm.

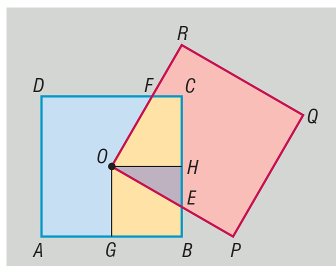
1677 A négyzet O középpontja körüli 90°-os forgatása CEB háromszöget a DFC háromszögbe viszi át, így $ECB\sphericalangle = FDC\sphericalangle$. Az O középpont körüli –90°-os forgatás az FAB háromszöget EDA háromszögbe viszi át, ezért $FAB\sphericalangle = EDA\sphericalangle$. A két forgatás után a három megjelölt szög összege éppen a négyzet egyik szögét adja, ami igazolja, hogy a szögek összege 90°.



1678 A hatszög O középpontja körüli 60°-os forgatás az $ABCG$ négyszöget a $BCDH$ négyszögbe viszi át, ezért a két négyszög területe megegyezik, azaz $T_{ABCG} = T_{BCDH}$. Ha a két négyszögből a közös részüket, vagyis a $BCGT$ négyszöget elvesszük, akkor a visszamaradó síkidomok területe is nyilvánvaló módon megegyezik, azaz $T_{ABT} = T_{GDHT}$.



1679 Jelöljük az OP és BC szakaszok metszéspontját E-vel, OR és CD metszéspontját F-fel, továbbá G-vel, illetve H-val az AB, illetve BC oldalak felezőpontját. Ezután forgassuk el az $OFCH$ négyszöget az O pont körül –90°-kal. A forgatás után a négyszög képe az $OEBG$ négyszög, melynek területe így megegyezik az $OFCH$ négyszög területével. Azt kaptuk tehát, hogy az $ABCD$ és $OPQR$ négyzetek közös részének, vagyis az $OECF$ négyszögnek a területe ugyanakkora, mint az $OEBG$ és az OEH síkidomok területének összege. Az ábráról azonnal leolvasható, hogy a területösszeg az $ABCD$ négyzet területének negyede: $\dfrac{a^2}{4}$.



1680 Az adott pontot A-val, a párhuzamos egyeneseket e-vel, illetve f-fel jelölve, a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Forgassuk el az e egyenest az A pont körül 60°-kal, az elforgatott egyenest jelöljük e'-vel.
2. Szerkesszük meg az e' és az f egyenes B metszéspontját.
3. Forgassuk el a B pontot az A pont körül –60°-kal; a keletkezett pontot jelöljük C-vel.

Az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek. Ha az 1. és 3. lépésben a forgatások szögének nagyságát nem, de irányát megváltoztatjuk, akkor egy újabb megoldást kapunk. Az ABC háromszög az adatok tetszőleges felvétele esetén szerkeszthető. Minden esetben két háromszöget kapunk eredményül.

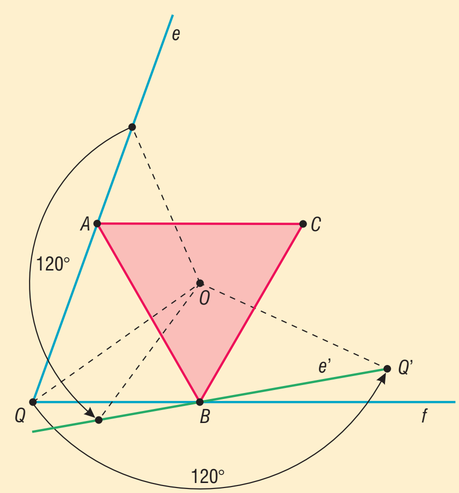
1681 Az adott pontot A-val, az egyenest e-vel, a kört k-val jelöljük. Ha a szabályos ABC háromszög B csúcsa illeszkedik a k körre, akkor a C csúcs illeszkedik a k kör A pont körüli 60°-kal (megfelelő irányban történő) elforgatott képére. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

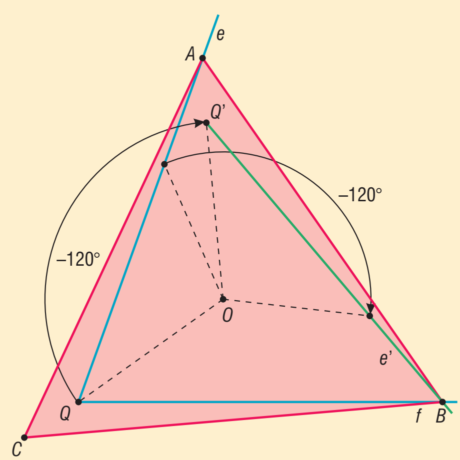
1. Forgassuk el az A pont körül 60°-kal a k kört; az eredmény a k' kör.
2. Szerkesszük meg a k' kör és az e egyenes metszéspontját vagy metszéspontjait. A metszéspontok egyikét jelöljük C-vel.
3. Forgassuk el a C pontot az A pont körül –60°-kal; a kapott pont B.

Az ABC háromszög megfelel a feladat minden feltételének. További megoldásokat kaphatunk, ha az 1. és 3. lépésben a forgatás irányát megváltoztatjuk. A szerkeszthetőség feltétele, hogy a k kör 60°-kal vagy –60°-kal elforgatott képének legalább egy közös pontja legyen az e egyenessel. A feladatnak 0, 1, 2, 3, 4 megoldása lehet.

1682 *a)* A szabályos háromszöget a középpontja körüli 120°-os forgatás önmagába viszi át, ezért ugyanez a forgatás az adott szög megfelelő szögszárát olyan félegyenesbe viszi, amelyik a háromszög egyik csúcsában fogja metszeni a másik szögszárat. A szögszárakat e-vel, f-fel, az adott pontot O-val jelölve, a szerkesztés lépései ezek alapján a következők lehetnek (bal oldali ábra):

1. Forgassuk el az e szögszárat az O pont körül 120°-kal, a kapott félegyenest jelöljük e'-vel.
2. Szerkesszük meg az e' és f félegyenesek B metszéspontját.
3. Forgassuk el a B pontot az O pont körül –120°-kal, a kapott pont A.
4. Forgassuk el a B pontot az O pont körül 120°-kal, a kapott pont C.





Az ABC háromszög a feladat feltételeinek megfelel.

Ha a forgatások szögének nagyságát nem, de irányát megváltoztatjuk, akkor egy újabb megoldást kapunk. Ezt a megoldást a jobb oldali ábra szemlélteti. Megjegyezzük, hogy a szerkeszthetőség feltétele, hogy az e' félegyenes metssze az f szögszárat.

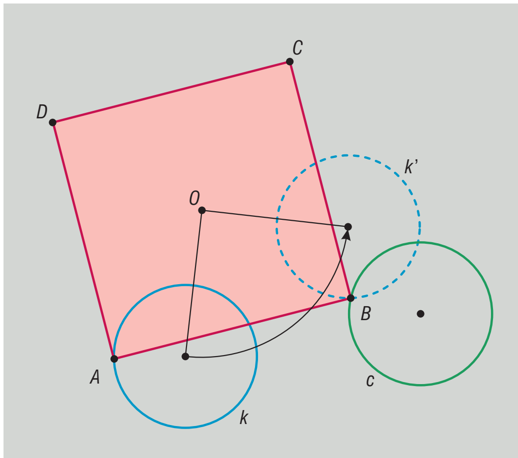
b) A szerkesztés lépései:

1. Forgassuk el az e szögszárat az O pont körül 90°-kal, az így kapott félegyenest jelöljük e'-vel.
2. Szerkesszük meg az e' és f félegyenesek B metszéspontját.
3. Forgassuk el a B pontot az O pont körül $-90°$-kal, a kapott pont A.
4. Tükrözzük a B pontot az O pontra, a tükörkép legyen D.
5. Tükrözzük az A pontot az O pontra, a tükörkép legyen C.

Az $ABCD$ négyszög négyzet, amely a feladat minden feltételének eleget tesz.

Az *a)* ponthoz hasonlóan itt is újabb megoldást kaphatunk, ha a forgatások irányát megváltoztatjuk.

1683 Az adott pontot O-val, a köröket k-val, illetve c-vel jelöljük. Ha az $ABCD$ négyzet középpontja O, továbbá az A csúcs a k kör, B a c kör egy pontja, akkor a szerkesztés lehetséges lépései a következők.



1. Forgassuk el a k kört az O pont körül 90°-kal, a kapott kör legyen k'.
2. Szerkesszük meg a k' és c körök egyik metszéspontját, B-t.
3. Forgassuk el a B pontot az O pont körül $-90°$-kal, így kapjuk az A csúcsot.
4. Tükrözzük a B pontot az O pontra, az eredmény D.
5. Tükrözzük az A pontot az O pontra, így kapjuk a C pontot.

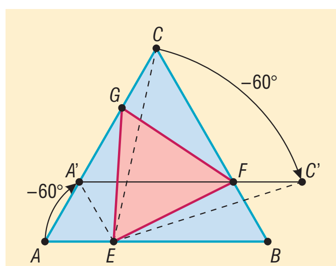
Az $ABCD$ négyzet a feltételek mindegyikének eleget tesz.

Előfordulhat, hogy a feladatnak több megoldása is van, hiszen a k' és a c körök eleve két metszésponttal is rendelkezhetnek.

A feladat további megoldásait kaphatjuk, ha a forgatások irányát megváltoztatjuk.

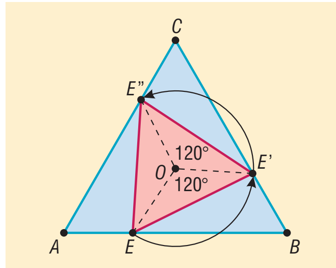
Kialakítható ugyanakkor egy elég speciális adatfelvétel, amikor a feladatnak végtelen sok négyzet is eleget tesz. Ez úgy lehetséges, ha a k kör elforgatott képe egybeesik a c körrel, ekkor ugyanis a B pont a c kör tetszőleges pontja lehet.

1684 *a)* Tegyük fel, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárási iránnyal rendelkezik, azaz a B pontot az A pont körüli $+60°$-os forgatással lehet a C pontba átvinni. Forgassuk el az E pont körül az AC szakaszt $-60°$-kal. A szerkesztendő szabályos háromszög megfelelő csúcsa (F) illeszkedik a kapott $A'C'$ szakaszra, valamint a BC oldalra is, ezért a két szakasz metszéspontjaként szerkeszthető. A háromszög hiányzó G csúcsa az F pont E pont körüli 60°-os elforgatásával szerkeszthető.



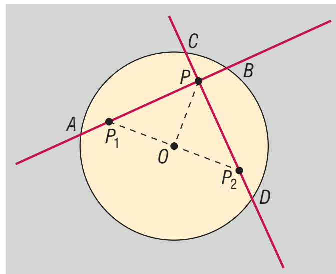
A feladat megoldásainak száma attól függ, hogy az $A'C'$ milyen helyzetű a BC szakaszhoz viszonyítva. Mivel a két szakasznak pontosan egy metszéspontja van, ezért bármely E pontból indulunk is ki, minden esetben egy megoldást kapunk.

b) Tegyük fel, hogy az EFG szabályos háromszög E csúcsa az ABC szabályos háromszög AB, F csúcsa a BC, G csúcsa a CA oldalra illeszkedik. Jelölje O az ABC háromszög középpontját. Forgassuk el az E pontot az O pont körül 120º-kal. Eredményül olyan E' pontot kapunk, amely a háromszög BC oldalára illeszkedik. Ha a kapott E' pontot tovább forgatjuk az O pont körül 120º-kal, akkor a CA oldal egy E'' pontjához jutunk. A pontok származtatásából azonnal következik, hogy az $EE'E''$ háromszög szabályos, amelynek természetesen az O pont a középpontja.



Az *a)* feladatban megmutattuk, hogy az E ponthoz egyetlen olyan szabályos háromszög tartozik, amelynek további csúcsai is az ABC háromszög oldalaira illeszkednek, ezért $E' = F$, $E'' = G$. Ezzel megmutattuk, hogy az O pont az EFG háromszög középpontja is egyben.

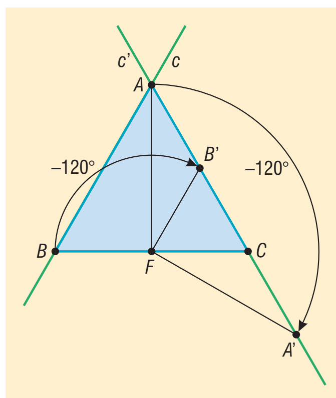
1685 A feladat megoldásához felhasználhatjuk, hogy ha a körben két húr egyenlő hosszúságú, akkor a kör középpontjától ugyanolyan távolságra haladnak, amiből pedig következik, hogy a kör középpontja körüli forgatással egymásba vihetők. Ha a két húr ráadásul merőleges egymásra, akkor a forgatás szöge 90º. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek.



1. Forgassuk el az adott P pontot a kör O középpontja körül 90º-kal mindkét irányba. A forgatások eredményeként az ábrán P_1-gyel és P_2-vel jelölt pontokat kapjuk.
2. Szerkesszük meg a P_1P, illetve a P_2P egyeneseket.
3. Szerkesszük meg a P_1P és a P_2P egyenesek körrel való metszéspontjait. A kapott metszéspontok megadják a keresett húrok végpontjait (ld. ábra).

A kívánt tulajdonságú húrok minden esetben szerkeszthetők. Ha a P pont és a kör O középpontja egybeesik, akkor végtelen sok megoldás van, mivel bármely két, egymásra merőleges átmérő megfelel a feltételeknek. Más esetekben a feladatnak egy megoldása van.

1686 A szerkesztések elvégzése után láthatjuk, hogy az F pont körüli –120º-os forgatás az A és B pontokat olyan A', illetve B' pontokba viszi át, amelyek illeszkednek az AC egyenesre (ld. ábra). Az ábra alaposabb elemzése után észrevehetjük, hogy a B' pont egybeesik az AC oldal felezőpontjával, valamint az A' pont egybeesik a B' pont C-re vonatkozó tükörképével. A fenti sejtések könnyen igazolhatók. Valóban, ha B' jelöli az AC szakasz felezőpontját, akkor az $FB'C$ háromszög szabályos, és ezért $FB' = FC = FB$, továbbá $BFB'\sphericalangle = 120º$, ami igazolja, hogy a B' pont egybeesik a B pont F pont körüli –120º-kal elforgatott képével.



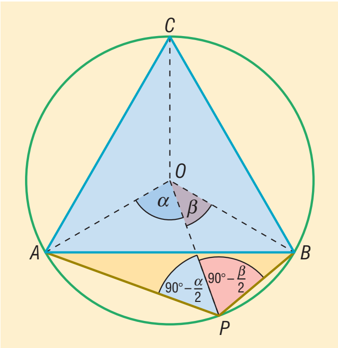
Megmutatjuk, hogy ha A' jelöli a B' pont C-re vonatkozó tükörképét, akkor A' egybeesik az A pont F körüli –120º-kal elforgatott képével. Valóban, hiszen B' a B pont elforgatott képe, továbbá $B'A' = BA$, valamint $FB'A'\sphericalangle = FBA\sphericalangle = 60º$, ezért a BA szakaszt a forgatás csakis a $B'A'$ szakaszba viheti át, így az A pont képe A'.

Fenti eredményeinket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az ABC szabályos háromszögben a BC oldal felezőpontja körüli –120º-os forgatás során az AB oldalegyenes az AC oldalegyenesbe megy át. E megállapítás alapján a szerkesztési feladat megoldása már nem túlságosan nehéz.

Ha adott az F felezőpont, továbbá a P és Q pontok, melyek közül P az AB, míg Q a BC oldalegyenesre illeszkedik, akkor az ABC háromszög szerkesztése a következőképpen végezhető el.

1. Forgassuk el a P pontot az F pont körül –120º-kal.
2. Fektessünk egyenest a P_1 képponton, valamint a Q ponton át. A kapott egyenes éppen az AC egyenessel egyezik meg.
3. Az ABC háromszög A csúcsát ezután az AC egyenes „visszaforgatott” (az F pont körül 120º-kal elforgatott) képe metszi ki az AC egyenesből.
4. A hiányzó háromszögcsúcsokat az AF szakaszra F-ben emelt merőleges egyenes metszi ki az oldalegyenesekből.

1687 *a)* Ha az ABC háromszög köré írt kör középpontját O jelöli, akkor az APO és BPO háromszögek egyenlő szárúak (AO, PO, BO a kör egy-egy sugara), ezért ha $AOP\sphericalangle = \alpha$, illetve $POB\sphericalangle = \beta$, akkor



$$APO\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \text{illetve} \quad OPB\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

így

$$APB\sphericalangle = APO\sphericalangle + OPB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

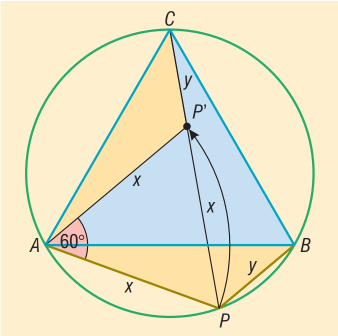
Az ABC háromszög szabályos, ezért az O pont nemcsak a körülírt kör középpontja, hanem egyben a belső szögfelezők metszéspontja is, ezért az ACO, illetve BCO egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei 30º-osak. Ebből azonnal következik, hogy $AOC\sphericalangle = BOC\sphericalangle = 120^\circ$, majd

$$\alpha + \beta = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ,$$

amit az $APB\sphericalangle$-re kapott összefüggésbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$APB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 120^\circ.$$

b) Forgassuk el az APB háromszöget az A pont körül 60º-kal. A forgatás során az A pont helyben marad, a B pont képe a C pont, a P pont képe P'.



Vizsgáljuk meg a keletkező APP' háromszöget. A forgatás távolságtartó tulajdonsága miatt $AP = AP' = x$, ezért a háromszög egyenlő szárú. Mivel a forgatás szöge 60º, ezért $P'AP\sphericalangle = 60^\circ$, így az APP' háromszög egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárak egymással 60º-os szöget zárnak be. Egy ilyen háromszögben az alapon fekvő szögek összege 120º, ezért a háromszög szükségképpen szabályos is, így $P'P = x$, továbbá $AP'P\sphericalangle = 60^\circ$.

A forgatás szögtartó tulajdonsága miatt $CP'A\sphericalangle = BPA\sphericalangle = 120^\circ$, amint azt az *a)* feladatban megmutattuk. Ekkor viszont egyszerű szögszámolás mutatja, hogy

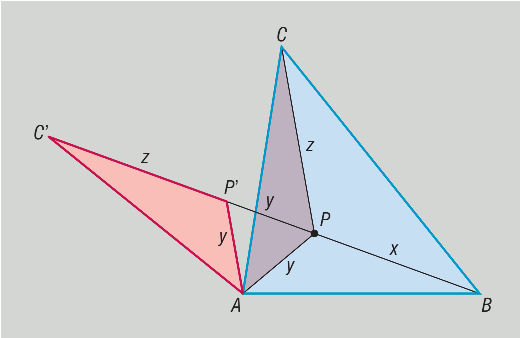
$$CP'P\sphericalangle = CP'A\sphericalangle + AP'P\sphericalangle = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

amiből azonnal következik, hogy a C, P', P pontok egy egyenesre illeszkednek. Ismét a forgatás távolságtartó tulajdonsága miatt $CP' = BP = y$, ezért

$$PA + PB = x + y = PP' + P'C = PC,$$

amit éppen bizonyítani kívántunk.

1688 Vegyünk fel az ABC hegyesszögű háromszög belsejében egy P pontot, melyre $PA = y$, $PB = x$, $PC = z$ az ábra szerint. Feladatunk az $x + y + z$ összeg minimalizálása.

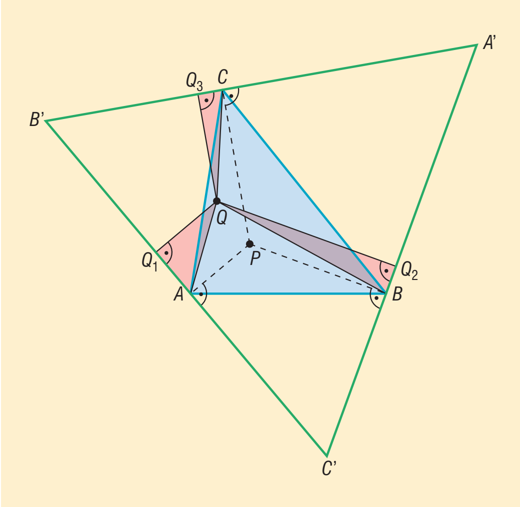


Az ilyenkor szokásos eljárást követjük; megpróbáljuk „kiteríteni" a három szakaszt egymás mellé. Ennek érdekében forgassuk el az ACP háromszöget az A pont körül 60º-kal. Az A pont helyben marad, a C pont képét C', a P pont képét P' jelöli az ábrán. A forgatás tulajdonságai miatt $AP' = AP = y$, továbbá $P'AP\sphericalangle = 60º$, ezért az APP' háromszög egyenlő szárú, melyben a szárak egymással 60º-os szöget zárnak be, így a háromszög szükségképpen szabályos is, amiből azt kapjuk, hogy $PP' = y$. A forgatás eredményeként tehát a $BPP'C'$ törött vonal hossza éppen a minimalizálni kívánt $x + y + z$ összeggel egyenlő. Mivel a C' pont helyzete a P pont választásától független, ezért a törött vonal hossza akkor a lehető legkisebb, ha a P' és P pontok illeszkednek a BC' szakaszra. Ez akkor következik be, ha a $CPA\sphericalangle = C'P'A\sphericalangle = 120º$, valamint a $BPA\sphericalangle = 120º$ összefüggések teljesülnek. Másként fogalmazva; a P pontnak a háromszög csúcsaitól mért távolságösszege akkor a lehető legkisebb, ha a P pontból a háromszög mindhárom oldala 120º-os szögben látszik. (A szóban forgó P pontot a háromszög izogonális pontjának nevezik.)

A keresett pont szerkesztésére a következő eljárást adhatjuk.

1. Forgassuk el a C pontot az A pont körül 60º-kal; így kapjuk a C' pontot.
2. Forgassuk el a B pontot a C pont körül szintén 60º-kal; így a B' ponthoz jutunk.
3. Szerkesszük meg a BC' szakaszt.
4. Szerkesszük meg az AB' szakaszt.
5. A BC' és az AB' szakaszok metszéspontja a háromszög keresett pontja.

Bemutatunk egy másik bizonyítást is arra vonatkozóan, hogy a $PA + PB + PC$ összeg valóban arra a P pontra minimális, amelyből az ABC háromszög oldalai 120º-os szögben látszanak.



Ehhez állítsunk az A csúcsban merőlegest a PA szakaszra, a B csúcsban a PB szakaszra, végül a C csúcsban a PC szakaszra. Ha a kapott egyenesek metszéspontjai az $A'B'C'$ háromszöget alkotják az ábra szerint, akkor egyszerű szögszámolás mutatja, hogy az $A'B'C'$ háromszög szabályos. Valóban, hiszen például az $APBC'$ négyszögben a P csúcsnál 120º-os, az A és B csúcsoknál pedig 90º-os szögek vannak, ezért

$$AC'B\sphericalangle = 360º - (120º + 90º + 90º) = 60º.$$

Hasonlóan igazolhatjuk, hogy a háromszög másik két szöge is 60º-os.

Az 1596. feladat eredménye alapján az $A'B'C'$ háromszög belsejében választott tetszőleges pontnak a háromszög oldalaitól mért távolságösszege ugyanakkora, éppen a háromszög magasságával egyenlő. Ezek szerint a $PA + PB + PC$ összeg megegyezik az $A'B'C'$ háromszög magasságának hosszával.

Válasszunk ezután az ABC háromszög belsejében egy P-től különböző Q pontot. Megmutatjuk, hogy

$$QA + QB + QC > PA + PB + PC.$$

Ha a Q pontnak az $A'B'C'$ háromszög oldalaira eső merőleges vetületeit Q_1, Q_2, Q_3 jelöli az ábrának megfelelően, akkor

$$QQ_1 < QA, \quad QQ_2 < QB \quad \text{és} \quad QQ_3 < QC.$$

Ennek igazolásához elegendő az ábrán satírozással megjelölt háromszögekre hivatkoznunk; például QQ_1 befogó, QA átfogó az AQQ_1 háromszögben, ami mutatja, hogy $QQ_1 < QA$ valóban teljesül. A felírt egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$QA + QB + QC > QQ_1 + QQ_2 + QQ_3.$$

Vegyük észre, hogy a QQ_1, QQ_2, QQ_3 szakaszok hossza éppen a Q pontnak az $A'B'C'$ háromszög oldalaitól mért távolságaival egyenlők, ezért korábbi megjegyzésünk alapján összegük éppúgy a háromszög magasságával egyenlő, mint a $PA + PB + PC$ összeg, vagyis

$$QQ_1 + QQ_2 + QQ_3 = PA + PB + PC.$$

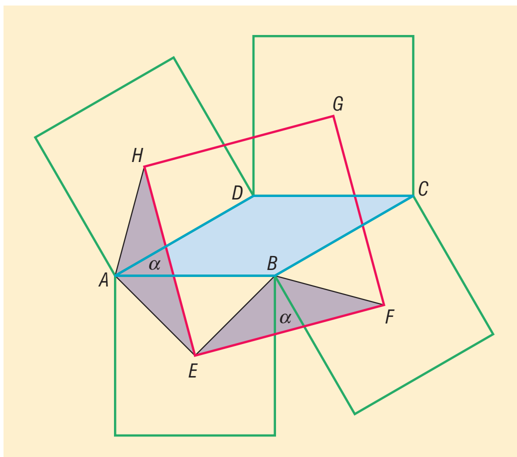
Ekkor viszont

$$QA + QB + QC > PA + PB + PC.$$

Ezzel igazoltuk, hogy bárhogyan is választjuk meg az ABC háromszög belsejében a P-től különböző Q pontot, annak a csúcsoktól mért távolságösszege nagyobb, mint a P pontnak a csúcsoktól mért távolságösszege.

Megjegyzés: Igaz a feladat állítása olyan tompaszögű háromszögben is, amelynek nincs 120°-nál nagyobb szöge.

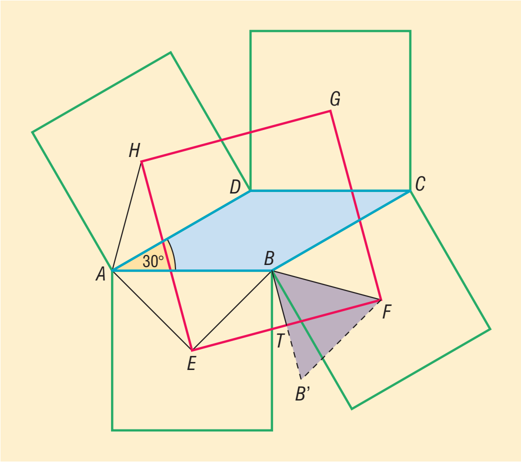
1689 *a)* Tegyük fel, hogy az $ABCD$ paralelogramma oldalaira kifelé rajzolt négyzetek középpontjai az ábra szerint az $EFGH$ négyszöget alkotják. Feladatunk annak igazolása, hogy az $EFGH$ négyszög négyzet.



Ennek érdekében forgassuk el az AEH háromszöget az E pont körül –90°-kal. A forgatás során az E pont természetesen helyben marad, az A pont képe pedig a B pont, mivel az AB oldalra rajzolt négyzetben $AE = BE$, és a két szakasz merőleges egymásra. Ezután megmutatjuk, hogy a H pont az F pontba kerül át. Először is gondoljuk végig, hogy az ábrán α-val jelölt szögek merőleges szárú szögpárt alkotnak, hiszen a B csúcsnál találkozó szögszárak közül az egyik merőleges AB-re, a másik pedig BC-re, így a vele párhuzamos AD-re is. A merőleges szárú szögek vagy megegyeznek, vagy egymást 180°-ra egészítik ki, de mivel mindkét szóban forgó szög szemlátomást hegyesszög, ezért csakis egyenlők lehetnek. Vegyük végül észre, hogy $EAH\sphericalangle = EBF\sphericalangle$, mert a négyzet átlója minden esetben 45°-os szöget zár be a négyzet oldalával, így mindkét szög nagysága $90° + \alpha$. A szögek egyenlősége mellett $AH = BF$ is teljesül, hiszen mindkét szakasz egy-egy ugyanakkora oldalú négyzetben az átló felével egyenlő. Eddigi eredményeink mutatják, hogy a forgatás a H pontot valóban az F pontba viszi át.

Ekkor viszont az EH szakaszt az E pont körüli –90°-os forgatással az EF szakaszba lehet átvinni, ezért $EH = EF$, továbbá a két szakasz egymásra merőleges. Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy az $EFGH$ négyszög bármely két szomszédos oldala egyenlő hosszú és 90°-os szöget zár be egymással, ezért a négyszög valóban négyzet.

b) Amennyiben az $ABCD$ rombusz, és az A csúcsnál 30º-os szög van, akkor az *a)* feladat eredményei alapján az EFB egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt szög 120º. Ha T jelöli az EF alap felezőpontját, akkor a BTF derékszögű háromszögben a B csúcsnál lévő szög 60º-os, így egy „félszabályos” háromszögről van szó.



Az ilyenkor szokásos módszer szerint, ha tükrözzük a B pontot az EF egyenesre, akkor a kapott $BB'F$ háromszög szabályos, amelyben FT a magasság. Ezek után már könnyen számolhatjuk az EF oldal hosszát. Mivel a rombusz oldala a feltételek szerint 10 cm, ezért a BC oldalra rajzolt négyzet átlója $10 \cdot \sqrt{2}$ cm, így $BF = 5 \cdot \sqrt{2}$ cm.

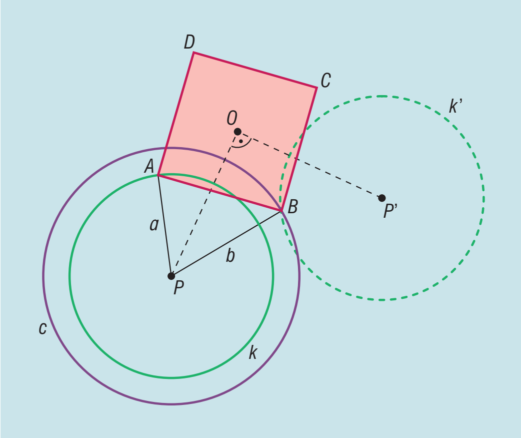
A $BB'F$ szabályos háromszög magasságára adódik:

$$FT = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{2} \text{ cm.}$$

Végül az $EFGH$ négyzet kerülete:

$$K = 8 \cdot FT = 20 \cdot \sqrt{6} \approx 48{,}99 \text{ cm.}$$

1690 Tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyzet csúcsaira $PA = a$, $PB = b$ teljesül. Ekkor az A csúcs illeszkedik a P középpontú, a sugarú k körre, míg a B csúcs illeszkedik a szintén P középpontú, b sugarú c körre (ld. ábra). Másrészt az O középpontú 90º-os forgatás az A pontot a B pontba viszi át, ezért ha a k kört is forgatjuk, akkor eredményül olyan k' kört kapunk, amely tartalmazza a B pontot. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő lehet.



1. Megszerkesztjük a P középpontú, a sugarú k kört.
2. Megszerkesztjük a P középpontú, b sugarú c kört.
3. Elforgatjuk 90º-kal az O pont körül a k kört, így a k' kört kapjuk.
4. A négyzet B csúcsát a k' és a c körök metszéspontjaként szerkeszthetjük.
5. A B pontot az O pont körül –90º-kal elforgatva az A pontot kapjuk.
6. A B pontot az O pont körül 90º-kal elforgatva a C pontot kapjuk.
7. A D pontot a C pont O körüli 90º-kal történő elforgatásával kaphatjuk.

A megoldások száma a k' és c körök egymáshoz viszonyított helyzetétől függ. Megjegyezzük, hogy ha a k kört ellentétes irányba forgatjuk, majd az összes további forgatás irányát is megváltoztatjuk, akkor további megoldásokat is kapunk. Ha az OP távolságot x ($x > 0$) jelöli, akkor $PP' = x \cdot \sqrt{2}$, így a megoldások száma a következőképpen alakul ($b \geq a$ esetén).

Ha $x \cdot \sqrt{2} > a + b$, akkor k' és c köröknek nincs közös pontjuk, ezért nincs megoldás.

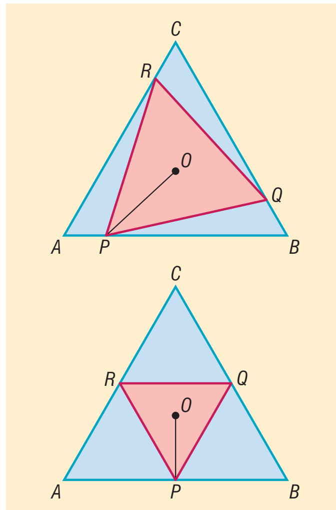
Ha $x \cdot \sqrt{2} = a + b$, akkor k' és c érintik egymást, ezért összesen 2 megoldást kapunk.

Ha $a + b > x \cdot \sqrt{2} > b - a$, akkor összesen 4 megoldást kapunk.

Ha $x \cdot \sqrt{2} = b - a$, akkor ismét 2 megoldás adódik, más esetekben nincs megoldás.

Ha az O és P pontok egybeesnek, akkor $a = b$ esetén végtelen sok megoldást kapunk, ha a és b különbözőek, akkor pedig nem adódik megoldás.

1691 *a)* Ha az ABC szabályos háromszögbe a PQR szintén szabályos háromszöget írjuk, akkor az 1684. feladat eredményei alapján a két háromszög középpontja egybeesik; a közös középpontot az ábrán O-val jelöltük. A szabályos háromszög középpontja egyben magasság- és súlypont is, ezért a PO szakasz $\frac{2}{3}$-szorosa a PQR háromszög magasságának (felső ábra).



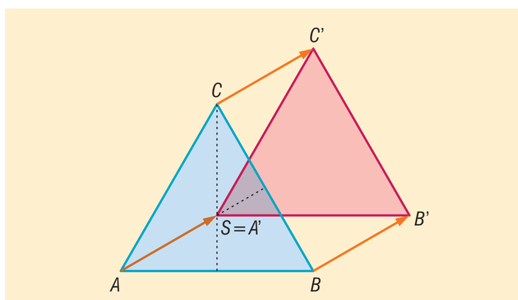
Béla bácsi végrendelete szerint a minimális területű PQR háromszöget keressük. Mivel a szabályos háromszög oldala és magassága egymással egyenesen arányos, ezért területe akkor a lehető legkisebb, ha magassága minimális, ami pontosan akkor következik be, ha a PO szakasz a lehető legrövidebb. A PO szakasz pedig akkor minimális, ha PO merőleges az AB szakaszra, azaz amikor P az AB szakasz felezőpontja. Ebben az esetben Q és R is felezőpontok a megfelelő oldalakon (alsó ábra). A minimális területű beírt szabályos háromszög oldalai tehát az ABC háromszög középvonalai egyben. Mivel a középvonalak négy egybevágó háromszögre bontják az ABC háromszöget, ezért a legkisebb területű beírt szabályos háromszög területe negyedrésze az ABC háromszög területének.

b) Az *a)* feladat eredményei alapján a PQR háromszög területe akkor a lehető legnagyobb, ha a PO szakasz hossza maximális. Az AB oldal belső pontjai között azonban nincsen olyan, amely legtávolabb lenne az O ponttól, azért valóban nem létezik maximális területű beírt szabályos háromszög, így minden valamirevaló bíróságnak el kell utasítania az örökös keresetét.

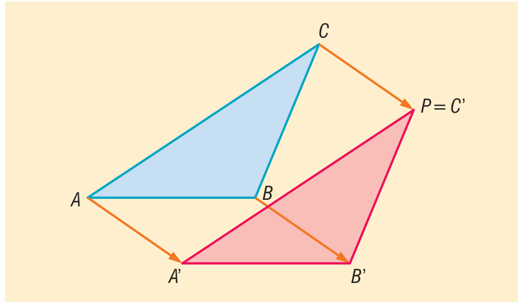
Megjegyezzük, hogy a beírt háromszög területe a $\left[\frac{T}{4}; T\right[$ intervallumban változik, ahol T az ABC háromszög területét jelöli.

Eltolás – megoldások

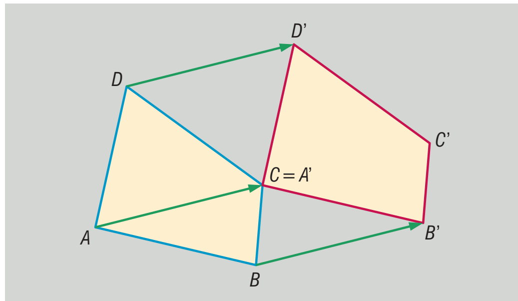
1692 A megfelelő eltolás az ábrán látható.



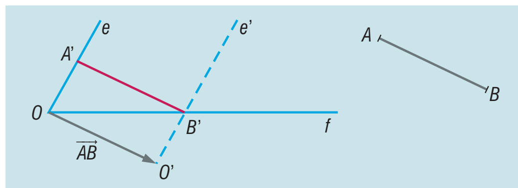
1693 A megfelelő eltolás az ábrán látható.



1694 Az $ABB'C$ négyszög paralelogramma.

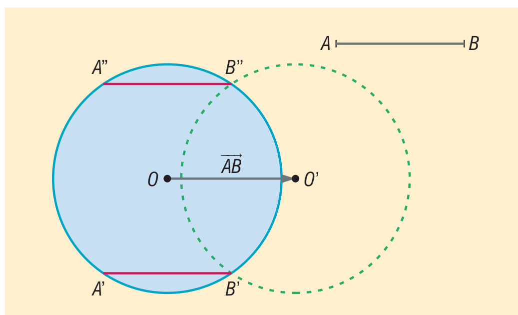


1695 Toljuk el az adott szög egyik (az ábrán e-vel jelölt) szárát az adott $\overrightarrow{AB}$-ral. Az eltolt e' félegyenes a szög másik (f-fel jelölt) szárából kimetszi a B' pontot. A B' pontot $\overrightarrow{BA}$-ral eltolva az e félegyenesen olyan A' pontot kapunk, amellyel az $A'B'$ szakasz megfelel a feltételeknek.



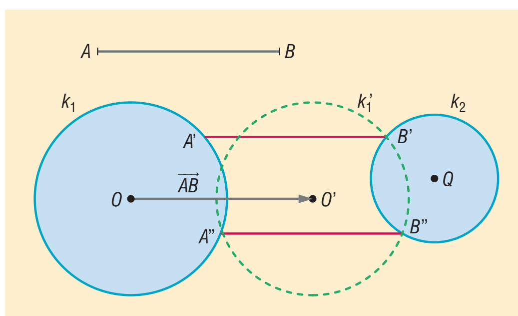
1696 Az adott kört toljuk el az adott $\overrightarrow{AB}$-ral. A kör eltolt képe kimetszi az eredeti körből a B' és B'' pontokat. A B' és B'' pontokat $\overrightarrow{BA}$-ral eltolva megkapjuk a feltételeknek megfelelő $A'B'$ és $A''B''$ szakaszok másik végpontját.

Ha az AB szakasz hossza kisebb, mint a kör átmérője, akkor a feladatnak két megoldása van. Ha az AB szakasz hossza éppen a kör átmérőjével egyenlő, akkor csak egy megoldás van, más esetekben a feladatnak nincsen megoldása.



1697 Toljuk el az adott k_1 kört az adott $\overrightarrow{AB}$-ral. A kör eltolt képe (k_1') a szintén adott k_2 körből kimetszi a B' és B'' pontokat, amelyeket a $\overrightarrow{BA}$-ral eltolva a k_1 kör olyan A' és A'' pontjait kapjuk, amelyekre az $A'B'$ és $A''B''$ szakaszok a feladat feltételeinek megfelelnek.

A feladatnak attól függően 0, 1, 2 vagy végtelen sok megoldása lehet, hogy a k_1 kör eltolt képe milyen helyzetű a k_2 körrel. Az utóbbi esetben az eltolt kör egybeesik a k_2 körrel.



1698 A feladat az 1697. feladat egy átfogalmazása. Az ott használt jelölésekkel az *AA'B'B* és az *AA''B''B* négyszögek paralelogrammák.

1699 *a)* $A'(4; 4)$, $B'(-1; 8)$, $C'(-3; 1)$;

b) $A'(1; 6)$, $B'(-4; 10)$, $C'(-6; 3)$;

c) $A'(-1; -2)$, $B'(-6; 2)$, $C'(-8; -5)$.

1700 *a)* $A(3; -2)$, $B(-2; 2)$, $C(-4; -5)$;

b) $A(5; -6)$, $B(0; -2)$, $C(-2; -9)$;

c) $A(7; 4)$, $B(2; 8)$, $C(0; 1)$.

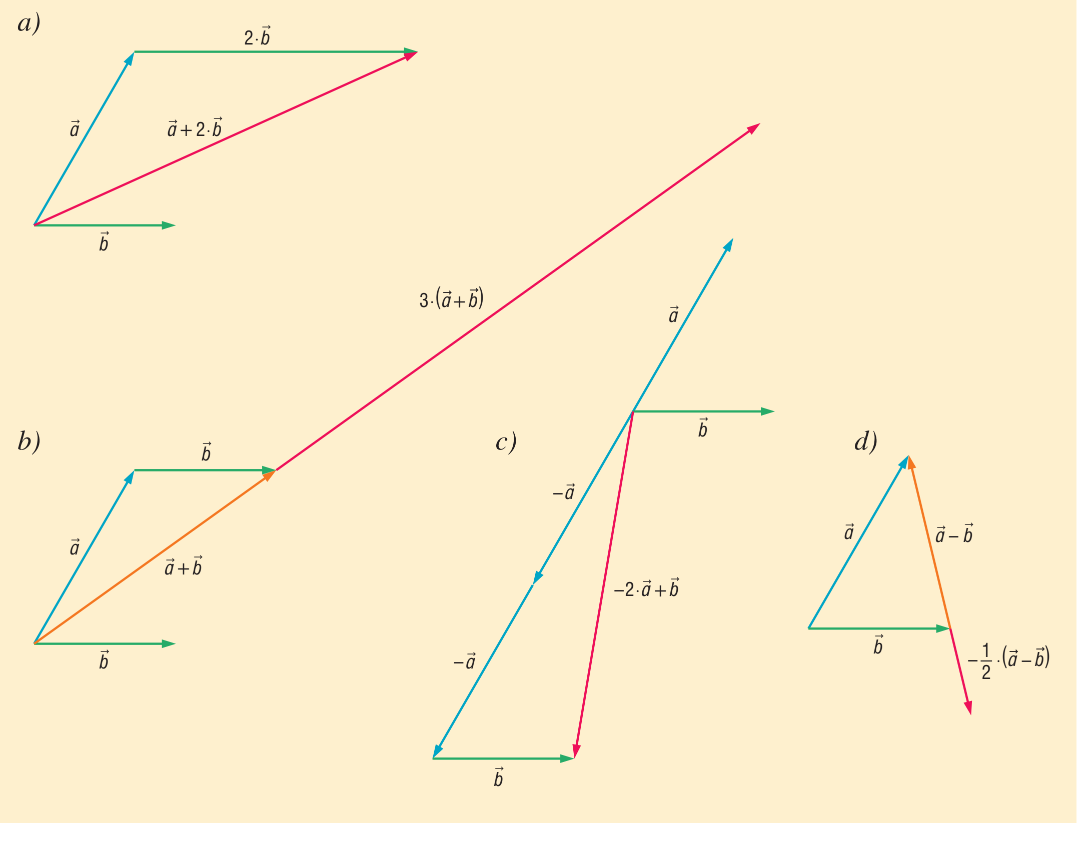
1701 *a)* $A''(-2; -1)$, $B''(4; 4)$, $C''(0; 9)$.

b) Ha az eltolásokat fordított sorrendben alkalmazzuk, akkor az első eltolás után a következő pontokhoz jutunk: $(-4; -5)$, $(2; 0)$, $(-2; 5)$. Ha a kapott pontokra alkalmazzuk a $(2; 4)$ koordinátájú vektorral történő eltolást, akkor a $(-2; -1)$, $(4; 4)$, $(0; 9)$ koordinátájú pontokhoz jutunk. Ugyanazokat a pontokat kaptuk, mint az *a)* feladatban, ami igazolja a két eltolás sorrendjének felcserélhetőségét.

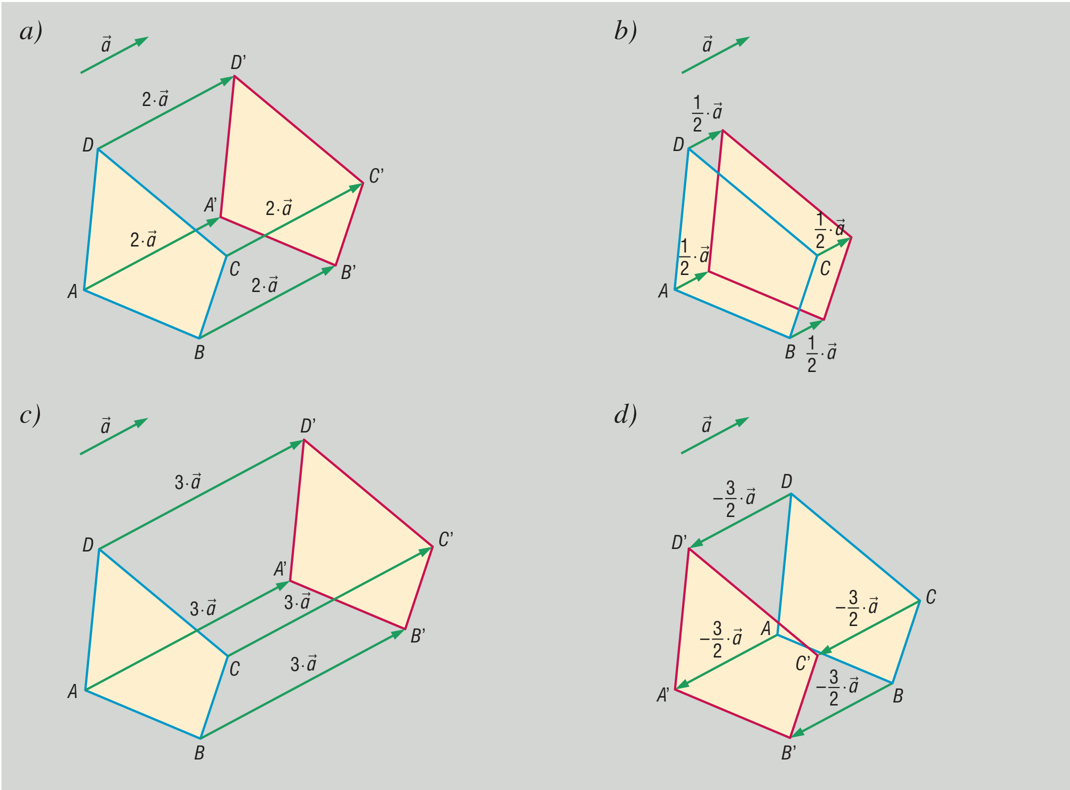
c) A két eltolás egymás utáni elvégzése a $(-1; 2)$ koordinátájú vektorral történő eltolással helyettesíthető.

1702 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis.
e) Igaz. *f)* Hamis. *g)* Igaz.

1703



1704



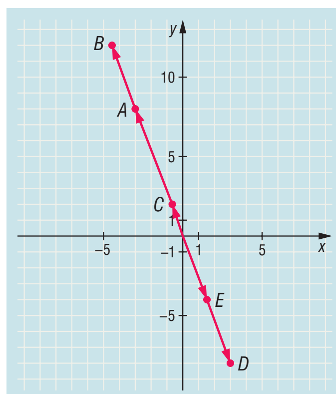
1705 *a)* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}(-3; 8)$;

b) $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\cdot\vec{a}\left(-\frac{9}{2}; 12\right)$;

c) $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\cdot\vec{a}\left(-\frac{3}{4}; 2\right)$;

d) $\overrightarrow{OD} = -\vec{a}(3; -8)$;

e) $\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\left(\frac{3}{2}; -4\right)$.



1706 *a)* $\vec{a} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC}$; *b)* $\vec{b} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO}$;
c) $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$; *d)* $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FA}$.

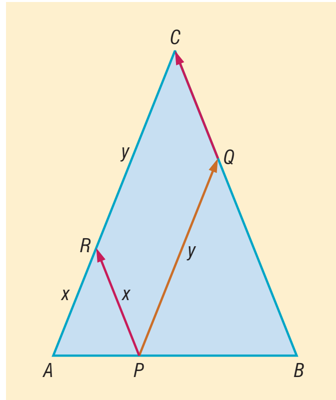
1707 *a)* $\overrightarrow{AO} = \vec{b}$; *b)* $\overrightarrow{AD} = 2\cdot\vec{b}$; *c)* $\overrightarrow{EO} = \vec{a} - \vec{b}$;
d) $\overrightarrow{BE} = 2\cdot(\vec{b} - \vec{a})$; *e)* $\overrightarrow{FD} = \vec{a} + \vec{b}$; *f)* $\overrightarrow{FC} = 2\cdot\vec{a}$;
g) $\overrightarrow{FB} = 2\cdot\vec{a} - \vec{b}$; *h)* $\overrightarrow{EA} = \vec{a} - 2\cdot\vec{b}$.

1708 *a)* $\overrightarrow{EF} = -\vec{a}$; *b)* $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; *c)* $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;
d) $\overrightarrow{FG} = -\vec{b}$; *e)* $\overrightarrow{FH} = -(\vec{b} + \vec{c})$; *f)* $\overrightarrow{GE} = \vec{b} + \vec{a}$.

1709 **I. megoldás.** Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának egy tetszőleges pontját P-vel jelöltük. Ha a megfelelő párhuzamosok a háromszög szárait az ábrának megfelelően Q-ban, illetve R-ben metszik, akkor az APR háromszög szintén egyenlő szárú, ezért $AR = PR = x$. A PQ szakaszt a $\overrightarrow{PR}$ mentén történő eltolással az RC szakaszba lehet átvinni, ezért $PQ = RC = y$. A párhuzamosokból a háromszög oldalai által kimetszett szakaszok összege ezek szerint:

$$PR + PQ = x + y = AC,$$

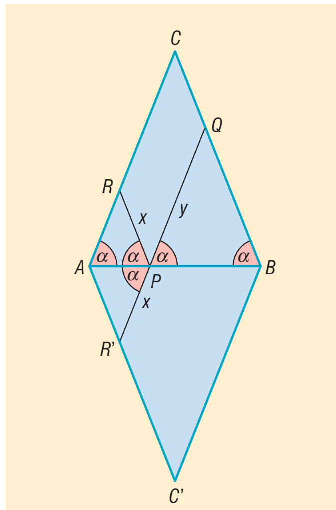
a P pont választásától függetlenül a háromszög szárával egyezik meg. Megjegyezzük, hogy az eltolás helyett elegendő lett volna arra hivatkoznunk, hogy a $PQCR$ négyszög paralelogramma.



II. megoldás. Tükrözzük az ABC háromszöget, valamint a PR szakaszt az AB egyenesre. A tükrözés után az $AC'BC$ rombuszt, valamint a PR' szakaszt kapjuk. Az ábrán azonos módon megjelölt szögek egyenlőségéből következik, hogy a Q, P, R' pontok egy egyenesre illeszkednek, ami mutatja, hogy

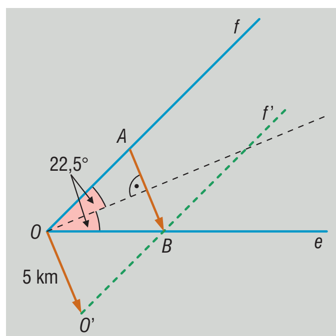
$$PR + PQ = PR' + PQ = R'Q,$$

ami a P pont helyzetétől függetlenül párhuzamos az $AC'BC$ rombusz AC oldalával, ezért hosszuk is megegyezik.

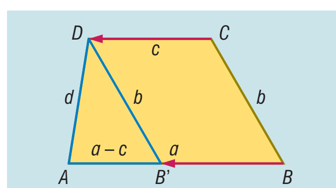


1710 A település központját O-val, a megépítendő útszakaszon kialakuló két új kereszteződést A-val és B-vel jelöltük. A feltételek szerint az ABO háromszög egyenlő szárú, ezért az AB alap merőleges az O csúcsból kiinduló szögfelezőre.

A fenti észrevétel alapján az AB út szerkesztése a következőképpen történhet. Először megszerkesztjük a már meglévő két út szögfelezőjét, majd az egyik utat (az ábrán az f-fel jelöltet) eltoljuk a szögfelezőre merőleges, 5 km hosszú vektorral. Az út eltolt képe (f') kimetszi a másik útból (e) a szerkesztendő B útkereszteződést. A B ponton át a szögfelezőre emelt merőleges kimetszi az f útból az A kereszteződést.



1711 Tekintsük az $ABCD$ trapézt, melynek alapjai a és c ($a > c$), szárai b és d. Toljuk el a BC szárat a $\overrightarrow{CD}$-ral. Ekkor a C pont átmegy a D pontba, a B pont átmegy az AB alap egy belső B' pontjába. Mivel a $B'BCD$ négyszög paralelogramma, ezért $B'B = c$, amiből következik, hogy $AB' = a - c$, és így az $AB'D$ háromszög oldalai: $a - c$, b, illetve d.

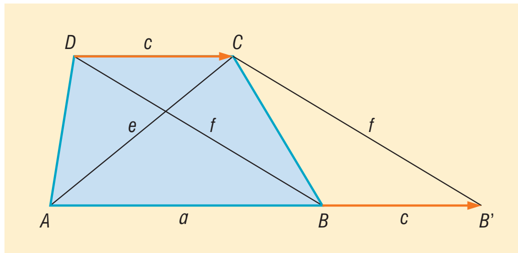


Látható, hogy a háromszög a trapéz oldalainak ismeretében szerkeszthető. Ezek alapján a szerkesztés lehetséges lépései:

1. Megszerkesztjük az $AB'D$ háromszöget, amelynek mindhárom oldala ismert.
2. Megszerkesztjük a $\overrightarrow{DC}$-t, amely párhuzamos az AB' oldallal, egyállású az $\overrightarrow{AB'}$-ral, nagysága a trapéz rövidebb alapjának hosszával egyenlő.
3. Eltoljuk a $B'D$ szakaszt a $\overrightarrow{DC}$-ral, az eltolt szakasz végpontjaiként kapjuk a B és C pontokat.

A szerkeszthetőség feltétele, hogy az $AB'D$ háromszög szerkeszthető legyen. A háromszög pontosan akkor szerkeszthető, ha oldalaira a háromszög-egyenlőtlenség teljesül, vagyis ha az $a-c$, b, d szakaszok közül bármely kettő hosszának összege nagyobb a harmadik hosszánál. Ha a háromszög szerkeszthető, akkor a feladatnak – egybevágóságtól eltekintve – egy megoldása van, más esetekben a trapéz nem szerkeszthető.

1712 Ha az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = a$, $CD = c$, átlói pedig e és f (ld. ábra), akkor toljuk el a BD átlót a $\overrightarrow{DC}$-ral. Az eltolás után a D végpont átmegy a C pontba, a B pont képe az AB alap B-n túli meghosszabbításán található B' pont, amelyre $BB' = c$ teljesül. Ekkor az $AB'C$ háromszög oldalai $a + c$, e, f, azaz a háromszög szerkeszthető.

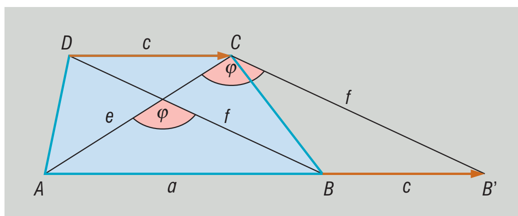


A trapéz szerkesztésének lépései ennek megfelelően a következők lehetnek:

1. Megszerkesztjük az $AB'C$ háromszöget, amelynek mindhárom oldala ismert.
2. Megszerkesztjük a B pontot, amelyet az AB' oldalból a B' középpontú, c sugarú kör metsz ki.
3. A trapéz hiányzó D csúcsát úgy kapjuk, hogy a C pontot eltoljuk a $\overrightarrow{B'B}$-ral.

A szerkesztés pontosan akkor végezhető el, ha az $a + c$, e, f oldalakból háromszög szerkeszthető, vagyis a három szakasz kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Ebben az esetben a feladatnak (egybevágóságtól eltekintve) egyetlen megoldása van, más esetekben a trapéz nem szerkeszthető.

1713 Toljuk el az $ABCD$ trapéz (az alapok AB és CD, $CD < AB$) BD átlóját a $\overrightarrow{DC}$-ral. Ekkor a D pont a C pontba kerül, a B pont B' képe az AB alap B-n túli meghosszabbításán található, továbbá $BB' = CD = c$. Mivel az eltolás a szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át, ezért $B'C$ párhuzamos BD-vel, így az ábrán azonos módon jelölt szögek egyenlők egymással (φ az átlók által bezárt szög kiegészítő szöge). Az $AB'C$ háromszögben ezért két oldal ($AC = e$, $B'C = f$), valamint az általuk bezárt szög ismert, amiből a háromszög már könnyen szerkeszthető.

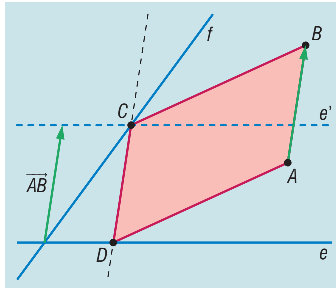


A trapéz szerkesztésének lépései a következők:

1. Megszerkesztjük az $AB'C$ háromszöget két oldalából, valamint az általuk bezárt szögből.
2. Az AB' oldalon megszerkesztjük a B pontot, amelyet a B' középpontú, c sugarú kör metsz ki az AB' szakaszból.
3. A trapéz hiányzó D csúcsát úgy kapjuk, hogy a C pontot eltoljuk a $\overrightarrow{B'B}$-ral.

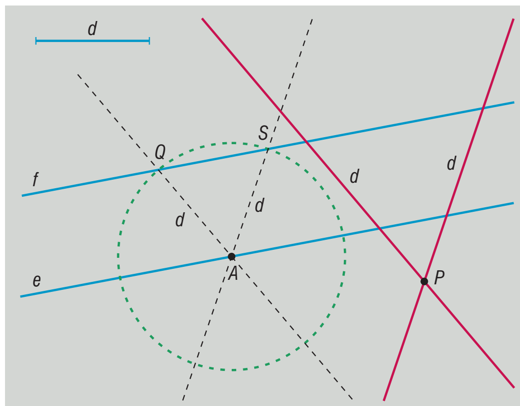
A szerkeszthetőség feltétele, hogy az $AB'C$ háromszög AB' oldala hosszabb legyen a trapéz rövidebb alapjának kétszeresénél.

1714 Ha az $ABCD$ paralelogramma C csúcsa az f, D csúcsa az e egyenesre illeszkedik, akkor az e egyenes $\overrightarrow{AB}$-ral eltolt e' képe tartalmazza a paralelogramma C csúcsát, így az szerkeszthető az f és e' egyenesek metszéspontjaként. A paralelogramma C csúcsának ismeretében a D csúcs is szerkeszthető, például azáltal, hogy a C ponton át párhuzamost szerkesztünk az $\overrightarrow{AB}$-ral, majd a párhuzamos kimetszi az e egyenesből a keresett D csúcsot (ld. ábra). Ehhez hasonló szerkesztéssel kaphatjuk meg azt a paralelogrammát, amelyben a C csúcs az e, míg a D csúcs az f egyenesre illeszkedik; ebben az esetben az e egyenest a $\overrightarrow{BA}$-ral kell eltolni, és előbb a D pont szerkesztése történik.



A feladatnak általában két megoldása van, ezek közül esetleg egyik elfajulhat szakasszá. Ha a két adott egyenes párhuzamos, és pl. az $\overrightarrow{AB}$-ral való eltolás az e egyenest átviszi az f egyenesbe, akkor a C pont helyzete nem egyértelmű, így a feladatnak végtelen sok megoldása is lehet. Megjegyezzük, hogy ha a két egyenes párhuzamos, akkor akár az is elképzelhető, hogy nincsen a feltételeknek eleget tevő paralelogramma. Ez akkor következik be, ha az e egyenes egyik eltolt képe sem esik egybe az f egyenessel.

1715 A két párhuzamost az ábrán e és f, az adott pontot P jelöli. A feladat megoldása előtt érdemes észrevenni, hogy a szerkesztendő egyenessel akárhogyan is húzunk párhuzamost, annak a párhuzamosok közé eső szakasza szintén d hosszúságú lesz. Ezt könnyen beláthatjuk, ha arra gondolunk, hogy a két párhuzamos az e és f egyenesekből egy paralelogrammát metsz ki, amelynek szemközti oldalai valóban megegyeznek.



Észrevételünk alapján a szerkesztési feladat megoldása a következő:

1. Az e egyenes egy tetszőleges A pontja, mint középpont körül d sugarú kört szerkesztünk.
2. Megjelöljük a kör és az f egyenes metszéspontjait (az ábrán Q és S).
3. Meghúzzuk az AQ, illetve AS egyeneseket.
4. Az AQ, illetve AS egyeneseket eltoljuk úgy, hogy azok a P ponton átmenjenek (AQ-val és AS-sel párhuzamosokat szerkesztünk a P ponton át). A szerkesztett egyenesek a feladat minden feltételének megfelelnek.

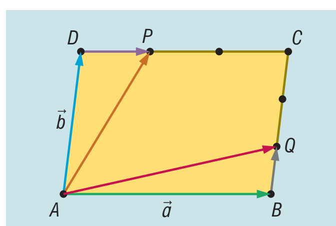
A szerkeszthetőség attól függ, hogy az A középpontú kör és az f egyenes milyen helyzetűek, vagyis az e és f egyenesek távolsága ne legyen nagyobb, mint d. Ha a két párhuzamos távolsága éppen d, akkor 1, ha d-nél kisebb, akkor 2 megoldást kapunk. Más esetben a feladatnak nincsen megoldása.

1716 *a)* Felhasználva, hogy P és Q harmadolópontok, azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{a},$$

illetve

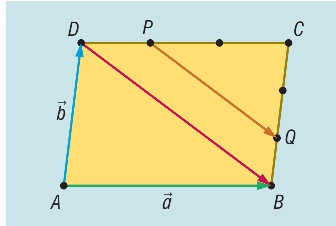
$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b}.$$



b) Az *a)* feladat eredménye alapján

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \left(\vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\vec{b}\right) - \left(\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\vec{a} - \vec{b}\right).$$

Mivel $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$, ezért $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{DB}$, ami mutatja, hogy a két vektor párhuzamos.



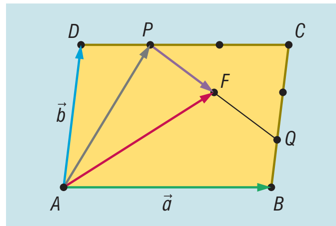
c) A *b)* feladat alapján: $\dfrac{PQ}{DB} = \dfrac{2}{3}.$

d) Jelöljük a PQ szakasz felezőpontját F-fel, majd bontsuk fel az $\overrightarrow{AF}$-t a következőképpen: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PF}$. Az $\overrightarrow{AP}$-t az *a)*, a $\overrightarrow{PQ}$-t a *b)* feladatban már kiszámoltuk, ezek alapján

$$\overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a} - \vec{b}\right),$$

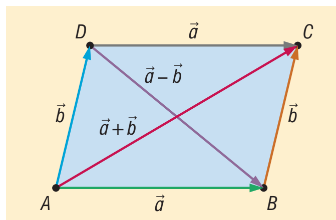
és

$$\overrightarrow{AF} = \left(\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$



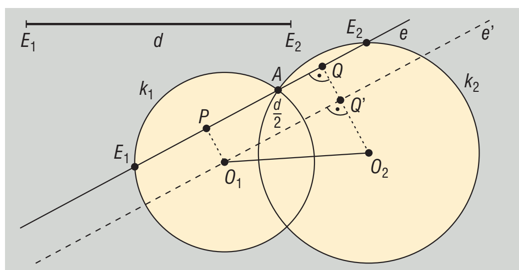
e) Az $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$, ami mutatja, hogy AF és AC valóban párhuzamos egymással.

1717 Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok párhuzamosak, akkor mindkét állítás egyszerűen következik a vektorműveletek értelmezéséből. Amennyiben a két vektor ráadásul egyirányú is, akkor az *a)*, míg ellentétes irányú vektorok esetén a *b)* feladat állításában teljesül egyenlőség.



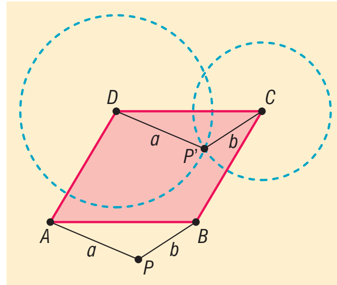
Ha a két vektor nem párhuzamos egymással, akkor indítsuk azokat közös kezdőpontból, majd szerkesszük meg az $\vec{a} + \vec{b}$ és $\vec{a} - \vec{b}$ vektorokat. A két vektor az $ABCD$ paralelogramma egy-egy átlóvektora (ld. ábra), azaz $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ és $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Ha alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az ABC, illetve az ABD háromszögekben, akkor éppen az *a)*, illetve a *b)* feladatok állítását kapjuk. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben egyik egyenlőtlenségben sem teljesülhet egyenlőség.

1718 Ha a k_1 és k_2 körök egyik metszéspontja A, továbbá az A ponton áthaladó e egyenes olyan E_1E_2 szakaszt metsz ki a körökből, amelynek hossza megegyezik az adott szakasz d hosszával, akkor az E_1A, ill. az AE_2 szakaszok P és Q felezőpontja közötti szakasz hossza $\frac{d}{2}$ (ld. ábra).



Tegyük fel, hogy a feladatot már megoldottuk, majd toljuk el az e egyenest úgy, hogy eltolt e' képe átmenjen a k_1 kör O_1 középpontján. Megmutatjuk, hogy az e' egyenes az adatokból megszerkeszthető. Ha az eltolás a Q pontot a Q' pontba viszi, akkor a $PO_1Q'Q$ négyszög paralelogramma, sőt téglalap, és így $PQ = O_1Q' = \frac{d}{2}$. Másrészt, az O_2Q szakasz merőleges az e és e' egyenesekre, amiből következik, hogy a Q' pont illeszkedik az O_1O_2 szakasz Thalész körére. A Q' pontot ezek alapján az O_1 középpontú $\frac{d}{2}$ sugarú kör metszi ki az említett Thalész-körből. Az e' egyenest ezután már könnyen szerkeszthetjük, hiszen két pontja már ismert. Az e' egyenes ismeretében az e egyenest úgy kaphatjuk, hogy az A ponton át párhuzamost szerkesztünk e'-vel.

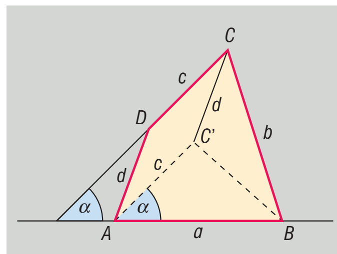
1719 Tegyük fel, hogy a feladatot sikerült megoldani, majd toljuk el az APB háromszöget az $ABCD$ paralelogramma $\overrightarrow{AD}$ oldalvektora mentén. Ekkor az A csúcs a D csúcsba, a B csúcs a C csúcsba, míg a P pont a P' pontba kerül át. Mivel az $APP'D$ és a $PBCP'$ négyszögek paralelogrammák, ezért $PA = P'D$ és $PB = P'C$. Minthogy a $PA = a$ és $PB = b$ szakaszok hossza adott, csakúgy mint a C és D pontok, ezért a $DP'C$ háromszög szerkeszthető; a P' pont a D középpontú a sugarú, és a C középpontú b sugarú körök metszéspontja (ld. ábra). Az $ABCD$ paralelogramma hiányzó A és B csúcsait a D és C pontok $\overrightarrow{P'P}$ vektorral eltolt képe adja meg.



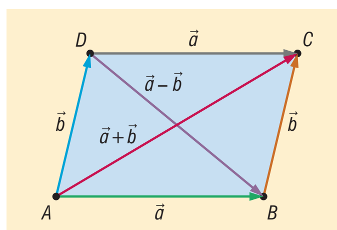
A szerkesztés diszkussziója elég nehéznek bizonyul. A megoldások száma a két kör egymáshoz viszonyított helyzetétől, valamint a P és P' pontok kölcsönös helyzetétől függ. Ha ugyanis a két kör valamelyik metszéspontja ugyanolyan távolságra van a DC egyenestől, mint a P pont, akkor a megfelelő $\overrightarrow{P'P}$ párhuzamos a DC oldallal, így a D és C pontok eltolt képe illeszkedik a DC egyenesre, ami azt jelenti, hogy az egyik megoldásul kapott paralelogramma szakasszá fajul el.

Amennyiben a P pont és a körök érintési pontja vagy metszéspontjai különböző távolságra van(nak) a CD egyenestől, úgy a metszéspontok száma a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésétől függően a következőképpen alakul. Ha $a > b$ és $DC > a + b$, akkor 0, ha $DC = a + b$, akkor 1, ha $a - b < DC < a + b$, akkor 2, ha $DC = a - b$, akkor megint 1, végül ha $DC < a - b$, akkor ismét 0 megoldás adódik.

1720 Az ábrán a szerkesztendő $ABCD$ négyszög oldalait adott sorrendben $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ és $DA = d$, az AB és CD egyenesek hajlásszögét α jelöli. Tegyük fel, hogy a feladatot sikerült megoldani, és elemezzük a kész ábrát. Toljuk el a négyszög CD oldalát úgy, hogy a D pont az A pontba kerüljön. Ha a C pont képét C' jelöli, akkor az $AC'CD$ négyszög paralelogramma, ezért $AC' = DC = c$, továbbá az AC' szakasz és a DC egyenes párhuzamossága miatt $C'AB\sphericalangle = \alpha$. Észrevételünk lehetőséget ad a C' pont szerkesztésére, hiszen az ABC' háromszögben két oldal, valamint az általuk bezárt szög adott. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő lehet. Felvesszük az AB szakaszt, majd az A csúcshoz átmásoljuk az adott α szöget. A szerkesztett szögszárra rámérve a szintén adott c távolságot, megkapjuk a C' pontot. A következő lépésben a C pontot szerkeszthetjük, hiszen egyrészt $C'C = d$ miatt C illeszkedik a C' középpontú, d sugarú körre, másrészt $BC = b$ miatt C illeszkedik a B középpontú b sugarú körre, így a két kör metszéspontjaként a C pont valóban szerkeszthető. A négyszög hiányzó D csúcsa az A pont $\overrightarrow{C'C}$-ral történő eltolásával szerkeszthető. Megjegyezzük, hogy a feladatnak – egybevágóságtól eltekintve – legfeljebb két megoldása lehet. Az adatok felvételétől függően előfordulhat, hogy a kapott $ABCD$ négyszög konkáv, esetleg hurkolt.



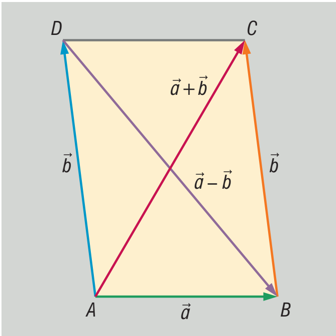
1721 Ha a két vektor közül valamelyik a nullvektorral egyenlő, akkor az $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ egyenlőség nyilvánvalóan teljesül. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok merőlegesek egymásra, hiszen a nullvektort bármely vektorra merőlegesnek tekintjük.



Ha a két vektor párhuzamos egymással és egyik sem a nullvektor, akkor egyirányú vektorok esetén $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$, ellentétes irányú vektorok esetén pedig $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$, ezért egyenlőség nem teljesülhet.

Más esetekben az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$ vektorok az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma egy-egy átlóvektorai (ld. ábra), ezért a hosszuk akkor és csak akkor egyezik meg, ha az *ABCD* paralelogramma átlói ugyanolyan hosszúak. Mivel az *ABC* és *ABD* háromszögekben két-két oldal megegyezik, ezért harmadik oldalaik akkor és csak akkor egyenlők, ha a két háromszög egybevágó. A két háromszög egybevágóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a paralelogramma *A* és *B* csúcsánál lévő belső szögei megegyezzenek. Mivel a két szög összege 180º, ezért csak úgy lehetnek egyenlők, ha mindkettő 90º-os, azaz a paralelogramma téglalap. Azt kaptuk tehát, hogy $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ teljesülésének szükséges és elegendő feltétele, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egymásra merőlegesek legyenek.

1722 Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok valamelyike nullvektor, akkor természetesen $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$. Ha a két vektor egyirányú, akkor $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$, ha viszont ellentétes irányúak a vektorok, akkor $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$.



Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem párhuzamosak és közös kezdőpontból indítva az *ABCD* paralelogrammát feszítik ki (ld. ábra), akkor $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, valamint $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$. Az *ABC* és *ABD* háromszögekben két-két oldal megegyezik, mivel $BC=AD$, valamint az *AB* oldal közös. A harmadik oldalak közül az a rövidebb, amellyel szemben kisebb szög van, ezért $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$ pontosan akkor teljesül, ha $ABC\sphericalangle < BAD\sphericalangle$. Mivel a két szög az *ABCD* paralelogramma *AB* oldalán nyugszik, ezért összegük 180º, ezért $ABC\sphericalangle < BAD\sphericalangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha az $ABC\sphericalangle$ hegyesszög és $BAD\sphericalangle$ tompaszög.

Eredményeinket összefoglalva azt kapjuk, hogy az $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$ összefüggés akkor és csak akkor teljesül, ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok tompaszöget vagy egyenesszöget zárnak be egymással.

Geometriai transzformációk – megoldások

1723 *a)* A két háromszög nem feltétlenül egybevágó.
b) A két háromszög nem feltétlenül egybevágó.
c) A két háromszög egybevágó.
d) A két háromszög egybevágó.

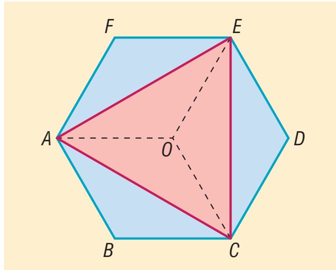
1724 *a)* A két téglalap egybevágó.
b) A két téglalap egybevágó.
c) A két téglalap egybevágó.
d) A két téglalap nem feltétlenül egybevágó.

1725 *a)* A két paralelogramma nem feltétlenül egybevágó.
b) A két paralelogramma nem feltétlenül egybevágó.
c) A két paralelogramma egybevágó.
d) A két paralelogramma egybevágó.

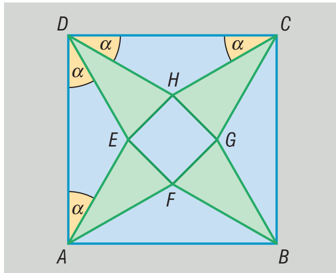
1726 *a)* A két rombusz nem feltétlenül egybevágó.
b) A két rombusz egybevágó.
c) A két rombusz egybevágó.
d) A két rombusz egybevágó.

1727 *a)* Az AEF, ECD, CAB háromszögek egybevágók egymással (az O középpont körüli forgatással vihetők egymásba). Ebből adódóan $AE = EC = AC$, azaz az AEC háromszög szabályos.

b) Az AEC háromszög, valamint az $ABCDEF$ hatszög területének aránya $1:2$. Ez azonnal belátható, ha behúzzuk az OA, OC, OE szakaszokat. Ezzel a hatszöget három egybevágó rombuszra osztottuk. Az AEC háromszög oldalai átlók egy-egy ilyen rombuszban, így megfelezik a rombuszok területét.



1728 *a)* Mivel az ADE, DCH, CBG, BAF háromszögek egybevágók és egyenlő szárúak, ezért száraik megegyeznek, ami igazolja, hogy a kialakuló EHD, GHC, FGB, EFA háromszögek szintén egyenlő szárúak. Mivel az utóbbi háromszögekben a szárszög $90° - 2 \cdot \alpha$, ezért e háromszögek páronként egybevágók.



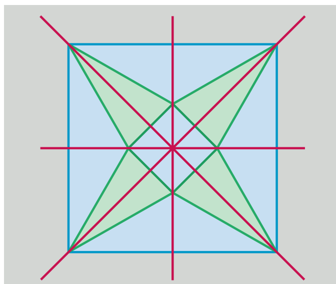
Megmutatjuk, hogy az $EHGF$ négyszög négyzet. Az eddigiekből már következik, hogy a négyszög oldalai megegyeznek. Jelöljük az $ABCD$ négyzet oldalaira emelt egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögeit α-val. Ekkor egyszerű szögszámolás mutatja, hogy az egyenlő szárú EHD háromszögben $EDH\sphericalangle = 90° - 2 \cdot \alpha$ és $DEH\sphericalangle = 45° + \alpha$. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $AEF\sphericalangle = 45° + \alpha$ szintén teljesül. Végül az ADE egyenlő szárú háromszögben $DEA\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \alpha$. Számoljuk ki az $EHGF$ négyszög E csúcsánál kialakuló szöget:

$$HEF\sphericalangle = 360° - 2 \cdot (45° + \alpha) - (180° - 2 \cdot \alpha) = 90°.$$

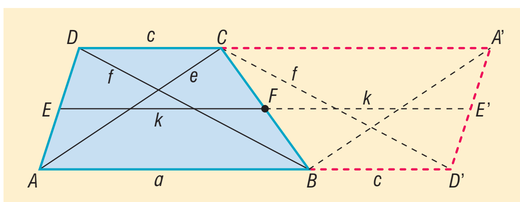
Természetesen ugyanilyen módszerrel megmutatható, hogy a négyszög többi szöge is 90°-os, ezért az $EHGF$ négyszög valóban négyzet.

b) Az ábrán bejelölt egyenesek az ábra tükörtengelyei, így összesen 4 ilyen egyenes van.

c) Az ábrán szereplő két négyzet közös középpontja körüli $k \cdot 90°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatások az ábrán szereplő alakzatot önmagába viszik át.



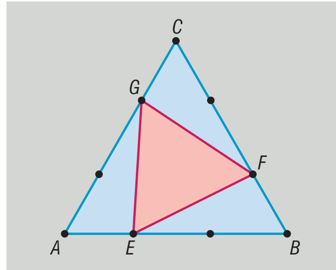
1729 Tükrözzük az $ABCD$ trapézt BC szárának F felezőpontjára. A tükrözés során a B és C csúcsok „helyet cserélnek”, a BD átló átmegy a CD' szakaszba. Az ábra jelöléseit használva láthatjuk, hogy az $AD'C$ háromszög oldalaira $AD' = a + c$, $AC = e$ (a trapéz egyik átlója), $D'C = f$ (a trapéz másik átlója).



A háromszögben bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal, ezért $AC + D'C > AD'$, azaz $e + f > a + c$. Tekintettel arra, hogy a trapéz középvonalának hossza az alapok hosszának számtani közepével egyenlő, adódik, hogy $e + f > 2 \cdot k$, amiből valóban azt kapjuk, hogy

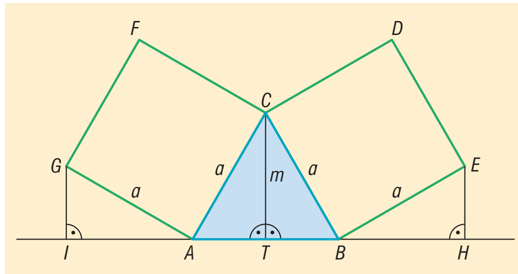
$$k < \frac{e + f}{2}.$$

1730 Az ábra jelöléseit használva beláthatjuk, hogy az AEG, BFE, CGF háromszögek egybevágók egymással. Ehhez csak annyit kell észrevennünk, hogy a háromszögekben két-két oldal (pl. $AE = BF$, $AG = BE$), valamint az általuk bezárt szög megegyezik (ez utóbbi mindhárom esetben 60º). Az egybevágóságból következik, hogy a háromszögek harmadik oldala is megegyezik, ami igazolja, hogy az EFG háromszög szabályos.



1731 *a)* Az ABC háromszög CT magassága két egybevágó, derékszögű háromszögre bontja a háromszöget. Megmutatjuk, hogy az AGI és BEH háromszögek egybevágóak a keletkező háromszögekkel.

Az ACT háromszög átfogója egyenlő az ABC háromszög a oldalával, továbbá hegyesszögei 60º, illetve 30º-osak. Az AGI és BEH háromszögek átfogója szintén a hosszúságú, továbbá az A, illetve a B csúcsoknál lévő hegyesszögeik 180º – 90º – 60º = 30º-osak, ezért a két háromszög valóban egybevágó az ACT háromszöggel.

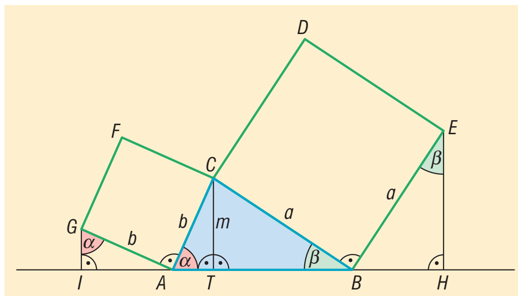


Az egybevágóságból következik, hogy a további megfelelő oldalaik is megegyeznek, azaz

$$AI = CT = m, \quad \text{illetve} \quad BH = CT = m.$$

b) Az ABC háromszög köré írt kör középpontja illeszkedik az AB oldal felezőmerőlegesére. Mivel $TH = TB + BH = TB + m$, valamint $TI = TA + AI = TA + m$, továbbá $TB = TA$, ezért a T pont nemcsak az AB, hanem a HI szakasz felezőpontja is egyben. Ekkor azonban az AB szakasz, valamint a HI szakasz felezőmerőlegese egybeesik, így az ABC háromszög köré írt kör középpontja valóban illeszkedik a HI szakasz felezőmerőlegesére.

c) Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor az AIG háromszög egybevágó a CTA háromszöggel, továbbá a BEH háromszög egybevágó a CBT háromszöggel. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $AG = CA$, mindkét háromszög derékszögű, $IGA\sphericalangle = TAC\sphericalangle = \alpha$, mivel a szögek szárai páronként merőlegesek egymásra, és mindkettő hegyesszög (merőleges szárú szögpár). Összefoglalva azt kaptuk, hogy az AIG és a CTA háromszögekben két-két szög egyenlő, továbbá a nagyobbal szemközti oldalak is megegyeznek, tehát a két háromszög valóban egybevágó egymással.



Ekkor viszont a további megfelelő oldalaik is megegyeznek, azaz $AI = CT = m$, és éppen ezt kellett bizonyítani. Értelemszerű módosításokkal igazolható, hogy $BH = CT = m$ szintén teljesül.

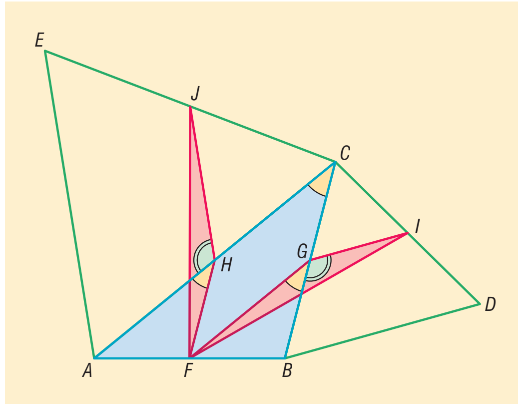
A *b)* feladat állításának igazolásához elegendő arra hivatkoznunk, hogy az AB szakasz felezőpontja ugyanolyan távolságra van az I ponttól, mint a H ponttól, mivel $AI = BH$. Ebből következik, hogy az AB szakasz és az IH szakasz felezőmerőlegese ezúttal is egybeesik, és így az ABC háromszög köré írható kör középpontja illeszkedik az IH szakasz felezőmerőlegesére is.

1732 *a)* Az FH szakasz középvonal a BCA háromszögben, ezért

$$FH = \frac{BC}{2}.$$

A GI szakasz középvonal a BDC háromszögben, így

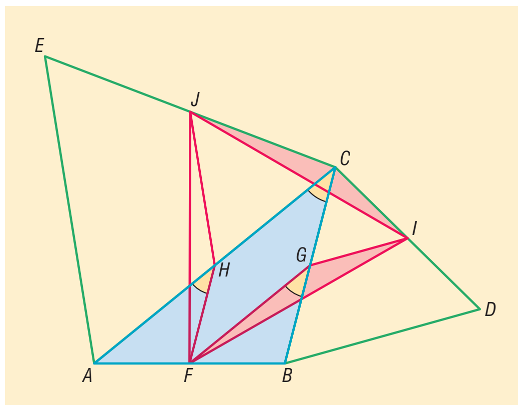
$$GI = \frac{BD}{2}.$$



A BDC háromszög szabályos, ezért $BD = BC$, amiből következik, hogy $FH = GI$. Hasonlóan látható be, hogy $JH = GF$. Láthatjuk, hogy az FHJ és FGI háromszögekben két-két oldal megegyezik. Megmutatjuk, hogy az egyenlő oldalak által közrefogott szögek is megegyeznek, amiből azonnal következik, hogy a két háromszög egybevágó. Használjuk fel, hogy az ABC háromszög HF középvonala párhuzamos a BC oldallal, amiből következik, hogy $AHF\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \gamma$ (egyállású szögpár). Hasonló mondható a háromszög GF középvonaláról és AC oldaláról, ezért $FGB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \gamma$ is teljesül. Vegyük észre, hogy az $AHJE$ és a $BDIG$ négyszögek trapézok, hiszen JH és GI középvonalak a megfelelő szabályos háromszögekben. A trapéz szárán fekvő szögei 180º-ra egészítik ki egymást, és mivel mindkét trapézban a hosszabb alapon fekvő szögek 60º-osak, ezért $AHJ\sphericalangle = BGI\sphericalangle = 120º$. Ekkor $JHF\sphericalangle = 120º + \gamma = FGI\sphericalangle$, amit bizonyítani akartunk. Megjegyezzük, hogy ha $\gamma = 60º$, akkor $JHF\sphericalangle = FGI\sphericalangle = 180º$, ami mutatja, hogy ebben az esetben mindkét háromszög szakasszá fajul.

b) Az *a)* feladatban bizonyítottak alapján az FHJ és FGI háromszögek egybevágók, amiből azonnal következik, hogy az FIJ háromszög egyenlő szárú, és $FJ = FI$. Tekintsük a CJI háromszöget. Mivel J az EC oldal felezőpontja, ezért $JC = HC = GF$, és hasonlóan $CI = GI$. Egyszerű szögszámolás mutatja, hogy

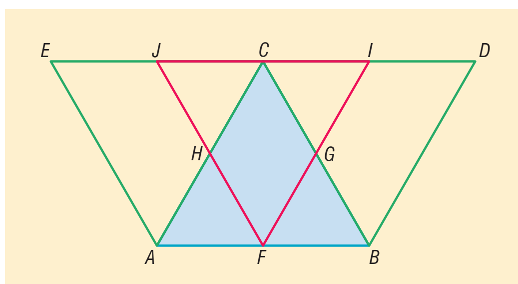
$$JCI\sphericalangle = 60° + \gamma + 60° = 120° + \gamma.$$



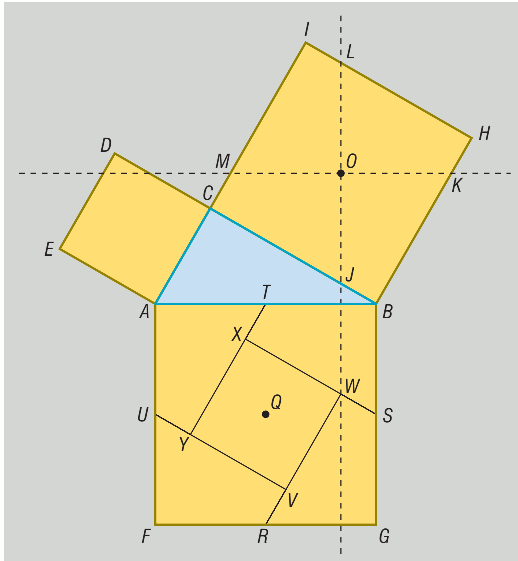
Korábbi eredményünk alapján $JCI\sphericalangle = FGI\sphericalangle$, ezért a JCI és az FGI háromszögekben két-két oldal, valamint az általuk közrezárt szögek megegyeznek, és ebből adódóan a két háromszög egybevágó egymással. A háromszögekben ekkor a harmadik oldalak is megegyeznek, azaz $JI = FI = FJ$, tehát az FIJ háromszög valóban szabályos.

c) Amennyiben az ABC háromszög szabályos, úgy az FIJ háromszög egybevágó az ABC háromszöggel, amint azt az ábra is mutatja. Ebben az esetben az FI oldal is a hosszúságú, így például Pitagorasz tételével kiszámolható az FIJ háromszög magassága, majd a magasságból a területe:

$$m = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}, \quad T = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$



1733 *a)* A feladat Pitagorasz tételének egy kevésbé gyakori, geometriai transzformációkkal dolgozó bizonyítását kéri. Az ábra jelöléseit használva megmutatjuk, hogy a befogókra rajzolt négyzetek részeiből átfedés nélkül, hézagmentesen kitölthető az átfogóra rajzolt négyzet.



Az átfedéshez eltolásokat használunk fel; az $IMOL$ négyszöget a $WRGS$ négyszögbe, az $MCJO$ négyszöget a $TXSB$ négyszögbe, az $OJBK$ négyszöget az $AUYT$ négyszögbe, az $LOKH$ négyszöget az $UFRV$ négyszögbe, és végül az $EACD$ négyzetet az $YVWX$ négyzetbe visszük át.

Vizsgáljuk először a BC befogóra rajzolt négyzetet. Az O pont körüli 90º-os forgatás a négyzetet önmagába viszi át, az O-n átmenő két merőleges egyenest pedig egymásba. Ebből következik, hogy a két egymásra merőleges „vágás” négy egybevágó részre bontja a négyzetet.

Ezután toljuk el az $IMOL$ négyszöget a $WRGS$ négyszögbe. Mivel MO és OL merőlegesek egymásra, ezért az eltolás megvalósítható; az R pont az FG, az S pont a GB oldalra illeszkedik. Toljuk most az $LOKH$ négyszöget az $UFRV$ négyszögbe. Ez pontosan akkor tehető meg, ha $MO + OK = AB$. Ez azonban teljesül, hiszen az $ABKM$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, így ez a négyszög paralelogramma. Ebből következően $MO + OK = AB$, vagyis a két szakasz hosszának összege valóban kiadja a háromszög átfogójának hosszát. Mivel IM és HK párhuzamosak, ezért eltolt képeik is párhuzamosak, ami igazolja, hogy a V pont illeszkedik az RW szakaszra, azaz az R pontnál sem hézag, sem átfedés nem alakul ki.

Ezután toljuk az $MCJO$ négyszöget a $TXSB$ négyszögbe. Ahhoz, hogy ez megtehető, meg kell mutatnunk, hogy $LJ = LO + OJ = AB$. Említettük, hogy az O körüli 90º-os forgatás az O-n átmenő merőlegeseket egymásba viszi át, amiből azonban az is következik, hogy LJ elforgatott képe MK, ezért $LJ = MK$. Már láttuk, hogy $MK = AB$, így $LJ = AB$ is teljesül. Megjegyezzük, hogy az S pontnál ugyanúgy nem alakul ki sem átfedés, sem hézag, mint ahogy azt már az R pontnál láttuk.

Az eddigiekből már az is következik, hogy az $OJBK$ négyszöget az $AUYT$ négyszögbe tudjuk tolni úgy, hogy az $ABGF$ négyszög oldalai mentén sehol nem alakul ki átfedés és hézag.

Azt kell még megmutatnunk, hogy az $EACD$ négyzetet az $YVWX$ négyszögbe lehet tolni. Láttuk, hogy az $ABKM$ négyszög paralelogramma, és így $BK = AM$, amiből egyszerűen adódik, hogy

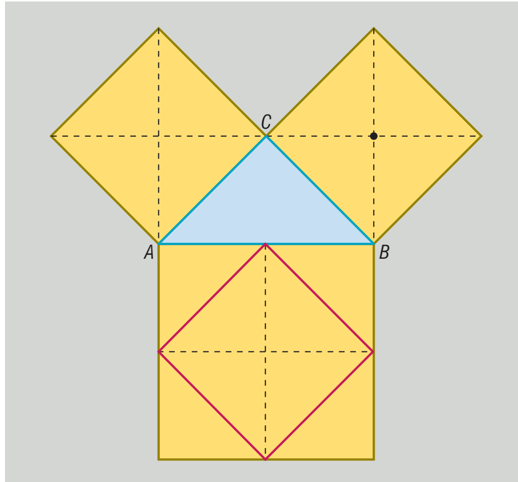
$$BK - MC = AM - MC = AC.$$

Mivel a már ismertetett eltolások a BK szakaszt az YT szakaszba, az MC szakaszt pedig az XT szakaszba viszik át, ezért

$$YX = YT - XT = BK - MC = AC.$$

Hasonlóan látható, hogy az $XYVW$ négyszög többi oldala is AC-vel egyenlő, ezért rombusz. Másrészt az eltolás minden szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át, így az YT és az UV szakaszok hajlásszöge megegyezik a BK és LH szakaszok hajlásszögével. Ez utóbbi kettő szakasz viszont a BC oldalú négyzet két szomszédos oldalára illeszkedik, így merőlegesek egymásra. Ez bizonyítja, hogy az $XYVW$ rombusz négyzet, amely egybevágó az $EACD$ négyzettel.

b) Jóval egyszerűbb az egyenlő szárú derékszögű háromszög esete. Ekkor a *BC* befogóra rajzolt négyzet nem négyszögekre, hanem egyenlő szárú derékszögű háromszögekre esik szét. Az átdarabolás természetesen ebben az esetben is működik, amit az alábbi ábrán megjelenített segédvonalak szépen szemléltetnek.



Vegyes feladatok – megoldások

1734 *a)* Szögeinek nagysága szerint három ilyen deltoid létezik. A szögek az egyes esetekben:

I. megoldás: 80°, 80°, 30°, 170°;

II. megoldás: 30°, 30°, 80°, 220°;

III. megoldás: 125°, 125°, 80°, 30°.

b) Szögeinek nagysága szerint két ilyen deltoid létezik. A szögek az egyes esetekben:

I. megoldás: 100°, 100°, 40°, 120°;

II. megoldás: 110°, 110°, 100°, 40°.

Ha a szimmetriatengely két oldalán 40°-os szögek vannak, akkor nem kapunk deltoidot, mivel a negyedik szögre 180° adódna.

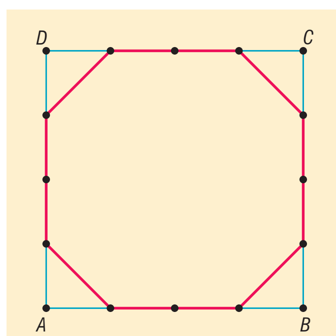
1735 A négyszög szögei: 30°, 30°, 150°, illetve 150°.

1736 Mivel $288° = 12 \cdot 24°$, ezért az állítás igaz.

1737 *a)* igen; *b)* nem; *c)* igen; *d)* igen; *e)* igen.

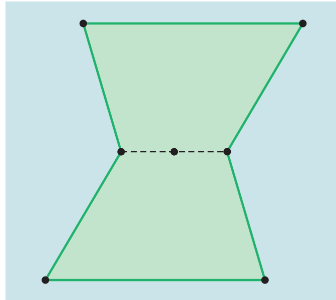
1738 A téglalapok, illetve a rombuszok.

1739 Van ilyen nyolcszög. Az ábrán egy négyzet oldalainak negyedelőpontjait kötöttük össze. A kapott nyolcszög természetesen nem szabályos, ugyanakkor a négyzet középpontja körüli 90°-os forgatás önmagába viszi át.



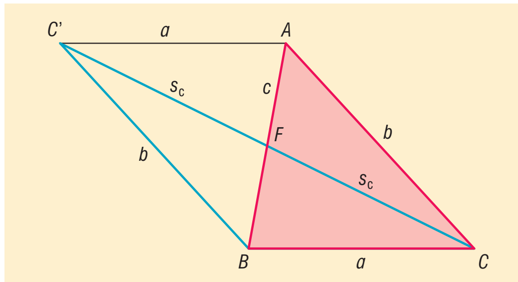
1740 *a)* Középpontosan szimmetrikus konkáv négyszög nem létezik, mivel egy ilyen négyszögnek szükségképpen két konkáv szöge is lenne, így a belső szögeinek összege nem lehetne 360°.

b) Középpontosan szimmetrikus konkáv hatszög létezik. Ilyet kapunk például, ha az ábrán is látható módon egy trapézt középpontosan tükrözünk rövidebb alapjának felezőpontjára.



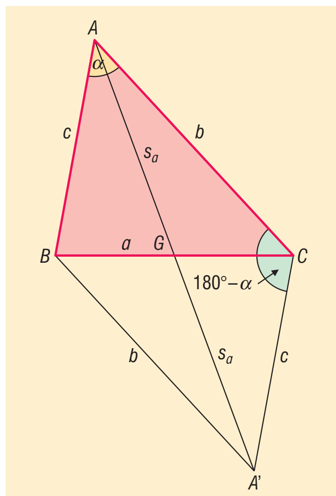
1741 *a)* Ha az ABC háromszöget tükrözzük AB oldalának F felezőpontjára, akkor a kapott $BCAC'$ paralelogramma oldalai a és b, egyik átlója $2 \cdot s_c$ hosszúságú. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők:

1. Megszerkesztjük a BCC' háromszöget, melynek oldalai ismertek: a, b és $2 \cdot s_c$.
2. Megszerkesztjük a CC' szakasz F felezőpontját.
3. Tükrözzük a B pontot az F pontra, így kapjuk az ABC háromszög hiányzó A csúcsát.



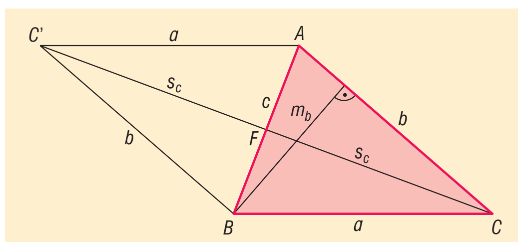
b) Ha tükrözzük az A pontot a BC oldal G felezőpontjára, akkor az $AA'C$ háromszög két oldala és egy szöge ismert, hiszen az $ABA'C$ négyszög paralelogramma, amiből következik, hogy $ACA'\sphericalangle = 180° - \alpha$. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő.

1. Az adott $AC = b$ szakasz C végpontjához felmérjük a $180° - \alpha$ nagyságú szöget.
2. Az A pont – mint középpont körül – $2 \cdot s_a$ sugarú kört szerkesztünk.
3. A kör az 1. lépésben szerkesztett szögszárból kimetszi az A' pontot.
4. Megszerkesztjük az AA' szakasz G felezőpontját.
5. Az ABC háromszög hiányzó B csúcsát a C pont G-re vonatkozó tükrözésével kapjuk.



c) Az adott m_b szakasz nemcsak az ABC háromszögnek, hanem az $AC'BC$ paralelogrammának is magassága, ahol C' a C pontnak az AB szakasz F felezőpontjára vonatkozó tükörképe. A szerkesztés menete ezek alapján:

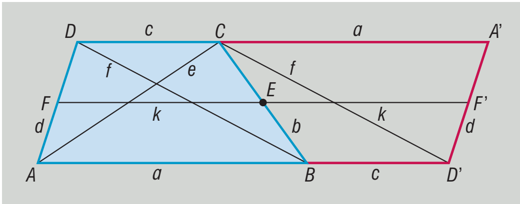
1. Az adott $AC = b$ szakasszal, attól m_b távolságra, párhuzamost szerkesztünk. A párhuzamos tartalmazza a B és C' pontokat.
2. A C' pontot a C középpontú, $2s_c$ sugarú kör metszi ki az 1. pontban szerkesztett párhuzamosból.
3. Megszerkesztjük a CC' szakasz F felezőpontját.
4. A B pontot úgy kapjuk, hogy az A pontot tükrözzük az F pontra.



d) A *c)* feladat ábrájának jelöléseit használva a szerkesztés lépései a következők:

1. Felvesszük a BC egyenest, majd kijelölünk rajta egy tetszőleges B pontot.
2. A BC egyenessel, attól m_a távolságra, párhuzamost szerkesztünk (e), amely tartalmazza az A és C' pontokat.
3. Megszerkesztjük a B középpontú, b sugarú k kört.
4. Az e egyenes és a k kör metszéspontjaként megjelöljük a C' pontot.
5. Megszerkesztjük a C' középpontú, $2 \cdot s_c$ sugarú c kört.
6. Megjelöljük a c kör és a BC egyenes C metszéspontját.
7. Megszerkesztjük a CC' szakasz F felezőpontját.
8. A hiányzó A csúcsot úgy kapjuk, hogy a B pontot tükrözzük az F pontra.

1742 Ha az $ABCD$ trapézt BC szárának E felezőpontjára tükrözzük, akkor az ábra szerinti $AD'A'D$ paralelogrammát kapjuk, amelynek AD' oldala az adott középvonal hosszának kétszerese. Ezt az észrevételt felhasználva a szerkesztés könnyen elvégezhető. A szerkesztési lépések leírása során az ábra jelöléseit használjuk.



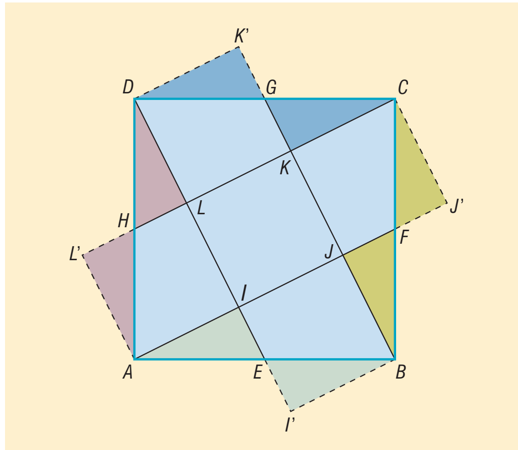
a) 1. Megszerkesztjük az $AD' = 2 \cdot k$ hosszúságú szakaszt.
2. Párhuzamost szerkesztünk az AD' szakasszal, attól az adott magassággal egyenlő távolságra.
3. A trapéz D csúcsát az A középpontú, d sugarú kör metszi ki a 2. lépésben szerkesztett párhuzamosból.
4. Megszerkesztjük a DD' szakasz E felezőpontját.
5. A trapéz B csúcsát az E középpontú $\frac{b}{2}$ sugarú kör metszi ki az AD' szakaszból.
6. A trapéz hiányzó C csúcsát a BE egyenes, valamint a 2. lépésben szerkesztett párhuzamos metszéspontjaként szerkeszthetjük meg.

b) 1. Megszerkesztjük az $AD' = 2 \cdot k$ hosszúságú szakaszt.
2. Párhuzamost szerkesztünk az AD' szakasszal, attól az adott magassággal egyenlő távolságra.
3. Az AD' szakasz A végpontjában felmérjük az AD és AB oldalak által bezárt szöget.
4. A 3. lépésben szerkesztett szögszár kimetszi az AD' egyenessel párhuzamos egyenesből a D pontot.
5. Megszerkesztjük a DD' szakasz E felezőpontját.
6. Az E ponton át olyan egyenest szerkesztünk, amely a BC és BA oldalak ismert szögét zárja be a BA oldallal.
7. A 6. lépésben szerkesztett egyenes kimetszi az AD' szakaszból a B csúcsot, az AD'-vel párhuzamos egyenesből a C csúcsot.

c) 1. Megszerkesztjük az $AD'C$ háromszöget, melynek oldalai ismertek: AD' a középvonal kétszerese, másik két oldala az $ABCD$ trapéz egy-egy átlója.
2. A B csúcsot a C középpontú, b sugarú kör metszi ki az AD' szakaszból.
3. Megszerkesztjük a BC szakasz E felezőpontját.
4. A D csúcsot a D' pont E középpontra való tükrözésével kapjuk.

1743 Az ábra, és így a „belső” hatszög is forgásszimmetrikus az eredeti hatszög középpontja körüli $k \cdot 60°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatásokra nézve, ezért a kialakuló „belső” hatszög is szabályos.

1744 *a)* Az ábra, és így a középen kialakuló négyszög is forgásszimmetriát mutat a négyzet középpontja körüli $k \cdot 90°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatásokra nézve, ami csak úgy lehetséges, hogy a „belső” négyszög is négyzet. Mivel szakasz és elforgatott képe egymással a forgatás szögét zárják be, ezért például DE merőleges CH-ra, továbbá CH merőleges GB-re, amiből az is következik, hogy DE és GB párhuzamosak. Ekkor viszont a $DLKG$ négyszögben DL és GK párhuzamosak, ezért a négyszög trapéz, amelyben az LK szár merőleges az alapokra. Hasonlóan látható be, hogy a $CKJF$, $BJIE$, $AILH$ négyszögek is ugyanilyen tulajdonságúak.

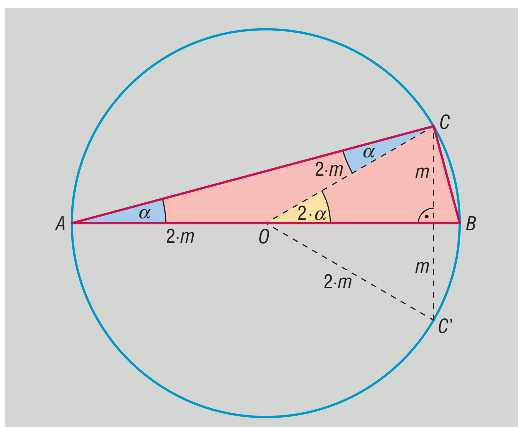


b) Forgassuk el a H pont körül a DHL derékszögű háromszöget 180°-kal; ekkor a H pont helyben marad, D képe A, L képe L' (ld. ábra). Megmutatjuk, hogy az $L'LIA$ négyszög négyzet.

Ehhez először is vegyük észre, hogy a HL szakasz párhuzamos az AI szakasszal, továbbá H a DA oldal felezőpontja, ezért HL egyben az AID háromszög középvonala is, így HL hossza az AI hosszának fele. Az elmondottakból következik továbbá, hogy $L'L = AI$, valamint $L'A = LD = LI$, ezért az $L'LIA$ négyszög szemközti oldalai egyenlő hosszúak, így $L'LIA$ paralelogramma. Másrészt a négyszög L' csúcsánál 90°-os szög van, így természetesen téglalap is egyben.

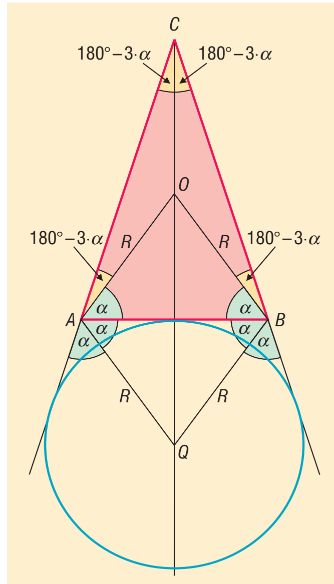
Végül vegyük észre, hogy az $ABCD$ négyzet középpontja körüli 90°-os forgatás a DL szakaszt az AI szakaszba viszi át, ezért $DL = AI$, másrészt $DL = L'A$, amiből $L'A = AI$ következik. Ez azt mutatja, hogy az $L'LIA$ téglalap két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú, ezért valóban négyzet. Ha ehhez hasonlóan az AEI, BFJ, CGK háromszögeket is 180°-kal elforgatjuk a megfelelő oldalfelező pontok körül, akkor ezzel az $ABCD$ négyzetet öt egybevágó négyzetté daraboljuk át. Ez viszont azt jelenti, hogy az $IJKL$ és az $ABCD$ négyzetek területének aránya $1:5$.

1745 Thalész tételének megfordítása alapján az ABC derékszögű háromszög C csúcsa az AB átfogó fölé rajzolt körön található, amiből az következik, hogy az AOC háromszög egyenlő szárú ($OA = OC$, mindkettő a Thalész-kör sugara). Az egyenlő szárú háromszög alapján ugyanakkora nagyságú szögek találhatók, emiatt $CAO\sphericalangle = ACO\sphericalangle = \alpha$, ebből következően az AOC háromszög külső szögére $COB\sphericalangle = 2 \cdot \alpha$ teljesül. Ha az ABC háromszög AB átfogójához tartozó magasságát m jelöli, akkor $AB = 4 \cdot m$ miatt $AO = CO = 2 \cdot m$.



Tükrözzük a C pontot az AB egyenesre. A kapott $CC'O$ háromszög minden oldala $2 \cdot m$ hosszúságú, ezért a háromszög szabályos. A CO és a $C'O$ oldalak a tükrözés AB tengelyével ugyanakkora szöget zárnak be, ezért $2 \cdot \alpha = 30°$, amiből az ABC háromszög hegyesszögei már könnyen számolhatók: 15°, illetve 75°.

1746 A háromszög alapjához írt kör középpontja (Q) a háromszög csúcsából induló belső szögfelezőre, továbbá a másik két külső szögének szögfelezőire is illeszkedik. Ha a Q pontnak az alap egyenesére vonatkozó tükörképe egybeesik a háromszög köré írt kör O középpontjával, akkor az AQ, BQ, AO, BO szakaszok mindegyike a háromszög köré írt kör sugarával egyenlő hosszúságú, így az $AQBO$ négyszög rombusz. A rombusz szögeit az átlók megfelezik, ezért $OAB\sphericalangle = BAQ\sphericalangle = \alpha$. Mivel a Q pont az ABC háromszög A csúcsánál lévő külső szög felezőjének egy pontja, ezért a külső szög nagysága $2 \cdot \alpha$, így az ABC háromszög alapon fekvő szögei $180° - 2 \cdot \alpha$ nagyságúak. Egyszerű szögszámolás mutatja, hogy a háromszög szárszögére:



$$ACB\sphericalangle = 180° - 2 \cdot (180° - 2 \cdot \alpha) = 4 \cdot \alpha - 180°.$$

Vegyük észre ugyanakkor, hogy $CAO\sphericalangle = 180° - 3 \cdot \alpha$, és mivel az ACO háromszög is egyenlő szárú, ezért

$$ACO\sphericalangle = CAO\sphericalangle = 180° - 3 \cdot \alpha.$$

Ebből a háromszög szárszögét kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$ACB\sphericalangle = 2 \cdot (180° - 3 \cdot \alpha) = 360° - 6 \cdot \alpha.$$

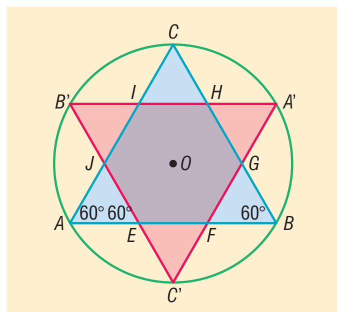
Az ABC háromszög szárszögére kapott két eredmény összehasonlításából adódik:

$$4 \cdot \alpha - 180° = 360° - 6 \cdot \alpha,$$
$$\alpha = 54°.$$

A háromszög szögei ennek megfelelően:

$$CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72° \quad \text{és} \quad ACB\sphericalangle = 36°.$$

1747 A két háromszög közös része szabályos hatszög. Ehhez előbb megmutatjuk, hogy szögei megegyeznek, majd utána hogy oldalai is egyenlők.



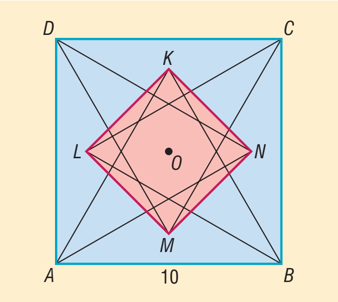
Mivel a tükrözés során szakasz és képe párhuzamos egymással, ezért $B'C'$ és BC egyaránt 60°-os szöget zár be az ABC szabályos háromszög AB oldalával (ld. ábra). Ebből következően a keletkező $EFGHIJ$ hatszög E csúcsnál lévő belső szöge 120°-os. Hasonlóan belátható, hogy a hatszög minden szöge 120°-os.

Az $EFGHIJ$ hatszög nyilvánvalóan középpontosan szimmetrikus, középpontja az ABC háromszög köré írt kör O középpontja. A szimmetriából következik, hogy szemközti oldalai megegyeznek, azaz $EJ = HG$, $EF = IH$, $FG = IJ$. Ugyanakkor a CC' egyenes közös szimmetriatengelye a hatszögnek, továbbá az ABC és $A'B'C'$ háromszögeknek. A tengelyes szimmetria következményeként $EJ = FG$. A BB' egyenes is szimmetriatengely, így $EJ = HI$. Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a hatszög oldalai is megegyeznek. Ebből adódóan a hatszög szabályos.

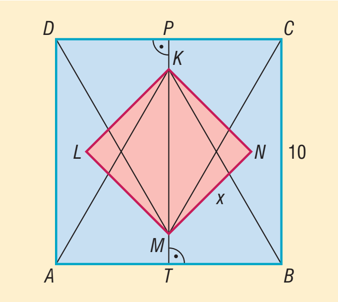
1748 Ha a háromszög magasságai $m_a = 5$ cm, $m_b = 10$ cm, $m_c = 15$ cm, akkor a háromszög területét háromféleképpen kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$\frac{a \cdot 5}{2} = \frac{b \cdot 10}{2} = \frac{c \cdot 15}{2} \quad \text{és} \quad a = 2 \cdot b = 3 \cdot c.$$

Ekkor $b + c = \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot a = \frac{5}{6} \cdot a < a$, így nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ezért ilyen háromszög nem létezik.



1749 *a)* Az $ABCD$ négyzet O középpontja körüli 90°-os forgatás az ABK háromszöget a BCL háromszögbe, a BCL háromszöget a CDM háromszögbe, a CDM háromszöget a DAN háromszögbe, míg a DAN háromszöget az ABK háromszögbe viszi át. Ebből következik, hogy a $KLMN$ négyszög forgásszimmetrikus az O pont körüli 90°-os forgatásra nézve. Egyetlen ilyen tulajdonságú négyszög van, a négyzet.



b) Jelöljük x-szel a $KLMN$ négyzet oldalának hosszát. Ekkor a négyzet átlójára

$$KM = x \cdot \sqrt{2}.$$

Ha a KM egyenes az $ABCD$ négyzet AB és CD oldalát a T és P pontokban metszi (ld. ábra), akkor a KT szakasz az ABK szabályos háromszög magassága, ezért

$$KT = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3},$$

amiből

$$PK = 10 - KT = 10 - 5 \cdot \sqrt{3}.$$

A PT szakasz ugyanolyan hosszú, mint az $ABCD$ négyzet oldala, továbbá

$$PT = PK + KM + MT = 2 \cdot PK + x \cdot \sqrt{2}.$$

Felhasználva, hogy az imént PK-t már kiszámoltuk, valamint hogy az $ABCD$ négyzet oldala 10 cm, azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot \left(10 - 5 \cdot \sqrt{3}\right) + x \cdot \sqrt{2} = 10,$$

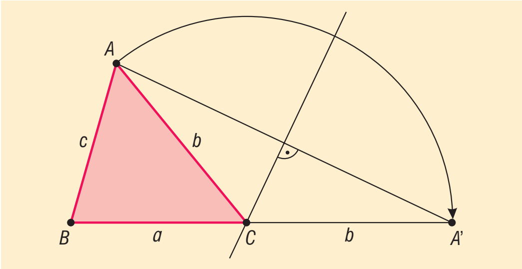
$$x \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{3} - 10,$$

$$x = \frac{10 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{2}}$$

$$x = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 5{,}18.$$

A $KLMN$ négyzet oldala tehát körülbelül 5,18 cm hosszúságú.

1750 A feladatok megoldásához hasznosak lehetnek a következő észrevételek. Ha az ABC háromszög A csúcsát a C pont körül elforgatjuk úgy, hogy a kapott A' pont illeszkedjen a BC oldal C-n túli meghosszabbítására, akkor a kapott $BA'A$ háromszögben $BA' = a + b$, továbbá az $AA'C$ háromszög egyenlő szárú, amelynek ebből kifolyólag C csúcsa illeszkedik az AA' szakasz felezőmerőlegesére.

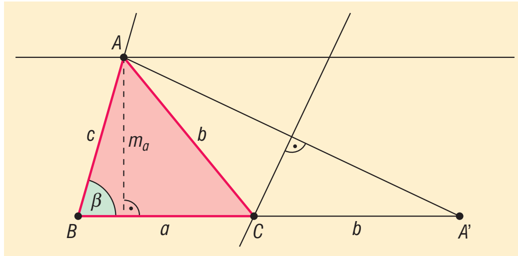


Vegyük még észre, hogy az $AA'C$ egyenlő szárú háromszögben a C csúcsnál lévő külső szög a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, amiből következik, hogy

$$AA'C\sphericalangle = A'AC\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}.$$

A megoldás minden esetben a $BA'A$ háromszög szerkeszthetőségén alapul.

a) A szerkesztés lépései:



1. Az adott $a+b$ hosszúságú BA' szakasztól m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk.
2. A B csúcsban a BA' szakaszra átmásoljuk az adott β szöget.
3. A kapott szögszár a BA'-vel párhuzamos egyenesből kimetszi a szerkesztendő háromszög A csúcsát.
4. Az AA' szakasz felezőmerőlegese kimetszi a BA' szakaszból a hiányzó C csúcsot.

A kapott ABC háromszög a feladat feltételeinek megfelel. A feladatnak minden esetben egy megoldása van.

Ezzel egybevágó megoldást kapunk, ha a párhuzamost, valamint a β szöget a BA' szakasz másik partján is megszerkesztjük. A két háromszög a BA' egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel vihető át egymásba.

b) A szerkesztés lépései:

1. Az adott $a+b$ hosszúságú BA' szakasztól m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk.
2. B középponttal, c sugárral kört szerkesztünk.
3. A kör kimetszi a BA'-vel párhuzamos egyenesből a háromszög A csúcsát.
4. Az AA' szakasz felezőmerőlegese kimetszi a BA' szakaszból a hiányzó C csúcsot.

A feladatnak 0, 1, 2 megoldása lehet, attól függően, hogy a B középpontú kör milyen helyzetű a BA'-vel párhuzamos egyenessel.

További megoldások adódnak, ha a metszéspontokat a BA' szakasz másik oldalán is megszerkesztjük. Az így adódó megoldások a korábban megkapott megoldások BA' egyenesre vonatkozó tükörképei.

c) A szerkesztés lépései:

1. Az adott $a+b$ hosszúságú BA' szakasztól m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk.
2. Az A' csúcsban a BA' szakasszal $\frac{\gamma}{2}$ nagyságú szöget bezáró félegyenest szerkesztünk.
3. A kapott félegyenes kimetszi a BA'-vel párhuzamos egyenesből az A csúcsot.
4. A háromszög hiányzó C csúcsát az AA' szakasz felezőmerőlegese metszi ki a BA' szakaszból.

A feladatnak minden esetben 1 megoldása van.

A kapott megoldás BA' egyenesre vonatkozó tükörképét megkaphatjuk, ha a párhuzamost, valamint a szöget a BA' szakasz másik oldalán is megszerkesztjük.

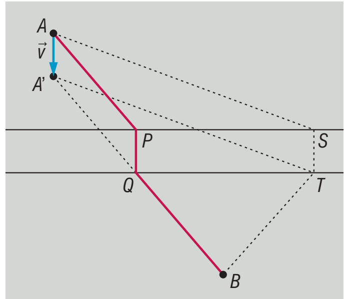
d) A szerkesztés lépései:

1. Az adott $a+b$ hosszúságú BA' szakasz B csúcsához átmásoljuk a β nagyságú szöget.
2. Az A' csúcsban a BA' szakasszal $\frac{\gamma}{2}$ nagyságú szöget bezáró félegyenest szerkesztünk.
3. A két szerkesztett szögszár metszéspontjaként megkapjuk a háromszög A csúcsát.
4. A háromszög hiányzó C csúcsát az AA' szakasz felezőmerőlegese metszi ki a BA' szakaszból.

A feladatnak 1 megoldása van.

A megoldás BA' egyenesre vonatkozó tükörképét megkaphatjuk, ha a szögszárakat a BA' szakasz másik oldalán szerkesztjük meg.

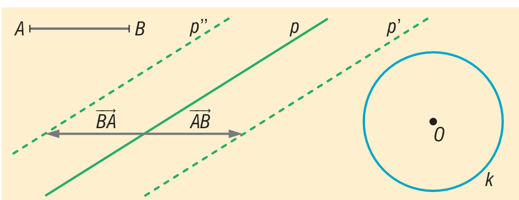
1751 Jelöljük a két települést A-val és B-vel, továbbá legyen $ASTB$ egy olyan út a két település között, amelynek ST darabja az autópályára merőleges (ld. ábra). Toljuk el az A pontot az $\overrightarrow{ST} = \vec{v}$ vektorral. Ha az eltolt pont A', akkor az $AA'TS$ négyszög paralelogramma, ezért az $ASTB$ törött vonal hossza megegyezik az $AA'TB$ törött vonal hosszával, így a feltételek szerint ennek hosszát kell a lehető legrövidebbnek választanunk. Mivel a szóban forgó törött vonalban az AA' szakasz az S pont helyzetétől függetlenül mindig ugyanakkora, ezért elegendő az $A'TB$ törött vonal hosszát minimalizálnunk, ahol a T pont az autópálya B-hez közelebbi határvonalán változik. Tegyük fel, hogy a határvonalból az $A'B$ szakasz a Q pontot metszi ki. Ekkor $A'Q + QB = A'B < A'T + TB$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, ami mutatja, hogy az $A'QB$ „törött vonal” hossza soha nem lehet nagyobb, mint az $A'TB$ törött vonal hossza, akárhol is vesszük fel a T pontot (Q és T persze különbözőek). Utóbbi észrevételünk lehetőséget ad a szerkesztés elvégzésére.



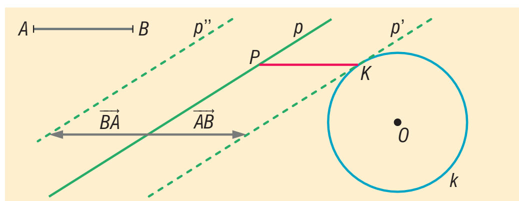
1. Toljuk el az A pontot a $\vec{v}$ vektorral, jelöljük az eltolt pontot A'-vel.
2. Jelöljük meg az $A'B$ szakasz és az autópálya B-hez közelebbi határvonalának Q metszéspontját.
3. Állítsunk merőlegest a Q ponton át az autópálya határvonalaira.
4. Az iménti merőleges kimetszi az A-hoz közelebbi autópálya határvonalából a P pontot.
5. Az $APQB$ törött vonal megfelel a feladat feltételeinek.

1752 A megoldáshoz toljuk el a p egyenest az $\overrightarrow{AB}$-ral, majd a megfelelő K pontot vagy pontokat a kapott p' egyenes és a k kör metszéspontja(i)ként szerkeszthetjük. A K pont(ok) ismeretében a PK szakasz másik végpontja a K pont $\overrightarrow{BA}$-ral történő eltolásával szerkeszthető. További megoldást vagy megoldásokat kaphatunk, ha a p egyenest nemcsak az $\overrightarrow{AB}$, hanem a $\overrightarrow{BA}$ vektor mentén is eltoljuk. Az így kapott egyenest az ábrákon p'' jelöli.

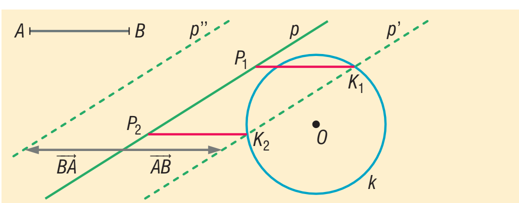
Ezúttal a megoldások számának elemzése okozza a legtöbb nehézséget.



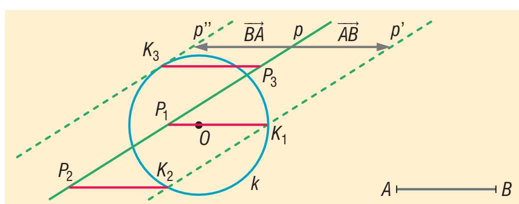
Ha az eltolt egyenesek egyike sem metszi a k kört, akkor a feladatnak nincsen megoldása.



Ha az egyik eltolt egyenes érinti a k kört, a másik elkerüli, akkor 1 megoldást kapunk.



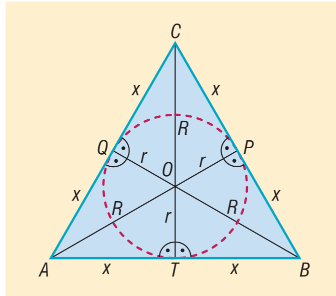
Ha az egyik eltolt egyenes két pontban metszi a k kört, a másik elkerüli, akkor két megoldást kapunk. Szintén 2 megoldás adódik, ha mindkét eltolt egyenes érinti a k kört.



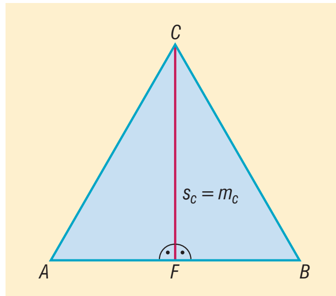
Ha az egyik eltolt egyenes 2 pontban metszi, a másik érinti a k kört, akkor három megoldás adódik.

Végül négy megoldást kapunk, ha mindkét eltolt egyenes 2 pontban metszi a kört.

1753 *a)* A beírt és körülírt körök középpontja csak a szabályos háromszögben esik egybe. Jelöljük az ABC háromszög beírt és körülírt körének közös középpontját O-val, beírt körének sugarát r-rel, körülírt körének sugarát R-rel. Ha a beírt kör a háromszög oldalait az ábra szerint a T, P, Q pontokban érinti, akkor az AOT, BOT, BOP, COP, COQ háromszögek mind egybevágóak egymással, hiszen mindegyik derékszögű, átfogójuk hossza R, egyik befogójuk hossza r. Ezek alapján az ABC háromszög oldalaira eső befogóik is megegyeznek; ennek hosszát az ábrán x-szel jelöltük. Láthatjuk, hogy az ABC háromszög minden oldala egyenlő hosszúságú, így a háromszög valóban szabályos.

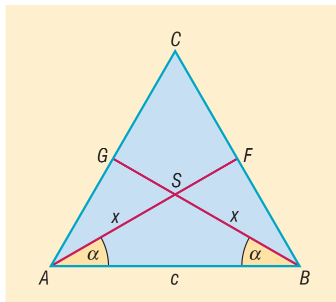


b) A súlypont és a magasságpont csak a szabályos háromszögben esik egybe. Ha ugyanis a háromszög súlypontja és magasságpontja azonos, akkor a súlyvonalak egyben a megfelelő oldalhoz tartozó magasságvonalak is, amiből következik, hogy bármely magasságvonal megfelezi a háromszög megfelelő oldalát. Ha viszont az ABC háromszög CF magasságvonala megfelezi az AB oldalt, akkor az AFC és BFC derékszögű háromszögekben a befogók megegyeznek, így a két háromszög egybevágó, amiből azonnal adódik, hogy $AC = BC$, vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú. Mivel bármely magasságvonalat kiválasztva azt kapjuk, hogy a magasságvonalat közrefogó oldalak megegyeznek, ezért a háromszög valóban szabályos.



c) Ha az ABC háromszögben a súlypont egybeesik a körülírt kör középpontjával, akkor a háromszög szabályos. Ugyanis ha S súlypont és a körülírt kör középpontja is egyben, akkor $AS = BS$, hiszen mindkettő a körülírt kör sugarával egyenlő. Az ABS háromszögben így két oldal egyenlő, tehát a háromszög egyenlő szárú, amiből $SAB\sphericalangle = SBA\sphericalangle = \alpha$.

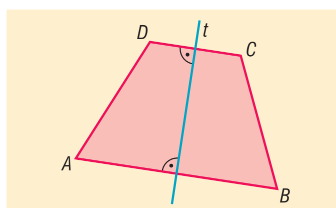
Az $AS = BS$ egyenlőségnek egy további következményeként az AF és BG súlyvonalak is megegyeznek, hiszen a súlypont a súlyvonalat $2:1$ arányban osztja, ezért mindkét szakasz másfélszerese a körülírt kör sugarának. Ekkor a BFA és AGB háromszögekben két-két oldal megegyezik ($AF = BG$ és AB közös oldal), továbbá az egyenlő oldalak által bezárt szög is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó egymással. Ez azt is jelenti, hogy $AG = BF$, amiből $AC = BC$ következik, azaz az ABC háromszög egyenlő szárú.



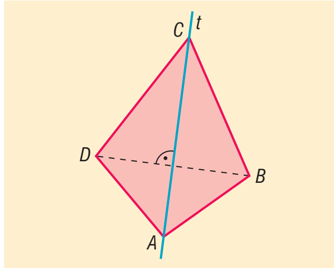
Mivel háromszögünkben bármely két súlyvonal egyenlő hosszúságú, ezért ugyanez érvényes az oldalakra is, amiből tényleg következik, hogy a háromszög szabályos.

1754 Tegyük fel, hogy az $ABCD$ konvex négyszög tengelyesen szimmetrikus. Mivel a tengelyre vonatkozó tükrözés során a négyszög minden csúcsa a négyszög valamely csúcsába megy át, ezért két eset lehetséges; a tengely a négyszögnek 0 vagy 2 csúcsát tartalmazza.

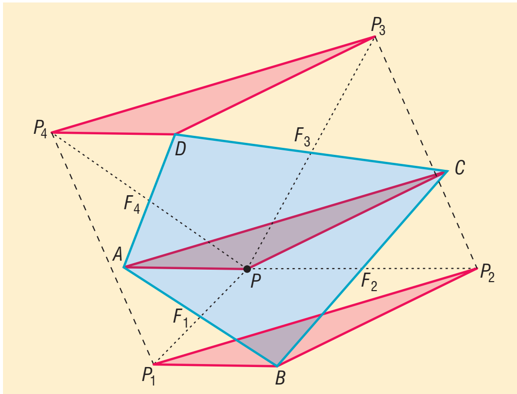
Ha a négyszög egyetlen csúcsa sem illeszkedik a t tengelyre, akkor a t mindkét partján a négyszög két-két csúcsa helyezkedik el. Ekkor a t egyenesre vonatkozó tükrözés az A csúcsot a B, a D csúcsot a C pontba viszi át. A tükrözés tulajdonságai alapján pont és képe közti szakasz merőleges a tükörtengelyre, ezért DC és AB egyaránt merőleges a t egyenesre, és így egymással párhuzamosak. Az $ABCD$ négyszög tehát szimmetrikus trapéz.



Ha a t tengely a négyszög két csúcsát, A-t és C-t tartalmazza, akkor a tengely szükségképpen szétválasztja a négyszög másik két csúcsát, B-t és D-t. A t egyenesre vonatkozó tükrözés során az AB szakasz képe AD, a CB szakasz képe CD, ezért a távolságtartó tulajdonság alapján $AB = AD$, továbbá $CB = CD$. Az $ABCD$ négyszögben $AB + CD = AD + CB$, azaz a szemközti oldalak összege megegyezik. Mivel a feltételek alapján az $ABCD$ négyszög konvex, ezért az érintőnégyszögek tételének megfordításából következik, hogy az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.



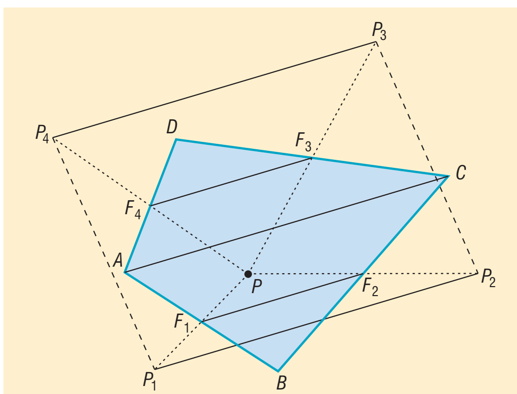
1755 *a)* Az ábra jelöléseit használva megmutatjuk, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszögben P_1P_2 és P_4P_3 párhuzamosak és egyenlő hosszúak, így a négyszög valóban paralelogramma.



Az AP szakasznak az F_1 felezőpontra vonatkozó tükörképe P_1B, így AP és P_1B párhuzamos egymással, továbbá hosszuk megegyezik. Ehhez hasonlóan a PC szakasznak az F_2 felezőpontra vonatkozó tükörképe P_2B, így PC és P_2B párhuzamos egymással, és ugyanolyan hosszúak. Tekintsük ezután az APC és P_1BP_2 háromszögeket. Láttuk, hogy a két háromszögben két-két oldal párhuzamos egymással, amiből következik, hogy $APC\sphericalangle = P_1BP_2\sphericalangle$ (egyállású szögpár). Mivel a két háromszögben a két-két párhuzamos oldal hossza is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó egymással. Az egybevágóság következményeként $AC = P_1P_2$, és e két oldal is párhuzamos egymással.

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel azt is beláthatjuk, hogy az APC és P_4DP_3 háromszögek is egybevágók, csak ezúttal az F_4, illetve F_3 pontokra vonatkozó középpontos tükrözés tulajdonságait kell felhasználni. Az egybevágóságból adódik, hogy $AC = P_4P_3$, továbbá a két szakasz párhuzamos is egymással.

Eredményeinket összefoglalva elmondhatjuk, hogy a P_1P_2 és P_4P_3 szakaszok párhuzamosak az $ABCD$ négyszög AC átlójával, továbbá $P_1P_2 = P_4P_3 = AC$. Ezzel beláttuk, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög paralelogramma, amelynek két-két oldala az $ABCD$ négyszög egy-egy átlójával egyenlő, és azzal párhuzamos.

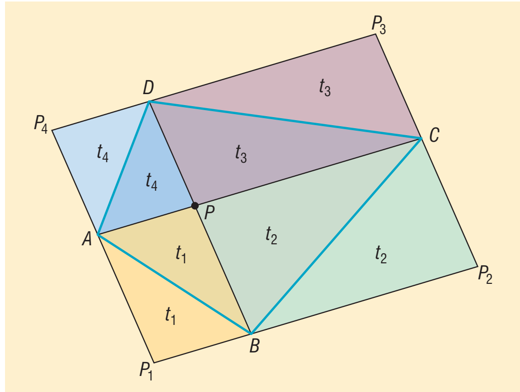


A háromszög középvonalára vonatkozó ismeretekkel a P_1P_2 és P_4P_3 szakaszok párhuzamossága, valamint egyenlősége a következő módszerrel igazolható. Az F_1F_2 szakasz középvonal a P_1P_2P és az ACB háromszögekben, ezért P_1P_2 és AC is párhuzamos F_1F_2-vel, amiből adódóan a két szakasz persze egymással is párhuzamos. Mivel a háromszög oldala kétszer olyan hosszú, mint a párhuzamos középvonala, ezért $AC = P_1P_2 = 2 \cdot F_1F_2$.

Hasonlóan; F_4F_3 középvonal az ACD és a P_4P_3P háromszögekben is, ezért $P_4P_3 = AC$, és a két szakasz párhuzamos is egymással.

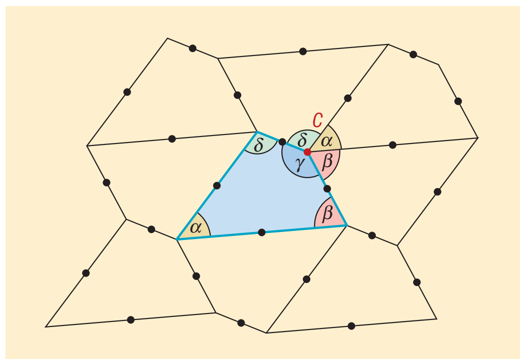
Az eredményeket összefoglalva azt kapjuk, hogy $P_4P_3 = P_1P_2$, továbbá mindkettő párhuzamos AC-vel, ami bizonyítja, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög paralelogramma.

b) Láttuk, hogy a P pont helyzetétől függetlenül a $P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma két-két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő az $ABCD$ négyszög átlóival. Ebből adódóan a $P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma területe független a P ponttól. Érdemes ezért egy olyan P pontot választani, amelyből kiindulva a kapott $P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma területe könnyen kifejezhető az $ABCD$ négyszög területével. Ilyen pontnak tűnik az átlók metszéspontja (ld. ábra). Ebben az esetben a $P_1P_2P_3P_4$ paralelogrammát az AC és BD átlók négy kisebb paralelogrammára bontják, melyekben az $ABCD$ négyszög oldalai egy-egy átlót alkotnak. Az átló a paralelogramma területét megfelezi, ezért az ábrán azonos módon megjelölt területrészek egyenlők. Ebből következően a $P_1P_2P_3P_4$, valamint az $ABCD$ négyszögek területaránya 2.



c) A bizonyítás során sehol nem használtuk fel, hogy a P az $ABCD$ négyszög belső pontja, ezért következtetéseink külső pontra is érvényesek.

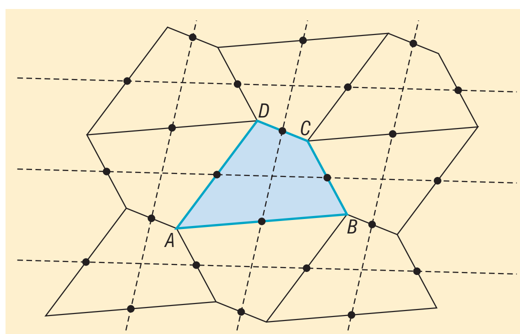
1756 *a)* A hézagmentes, átfedés nélküli parkettázáshoz be kell látnunk, hogy például a C csúcsnál keletkező szögek összegben pontosan 360°-ot tesznek ki. Ez azonban könnyen igazolható, hiszen a tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt, a keletkező szögek megegyeznek az eredeti négyszög belső szögeivel, amelyeknek összege valóban 360°. Az ábrán az eredeti négyszög szögeit, valamint a C csúcsnál kialakuló szögeket tüntettük fel, ugyanakkor az áttekinthetőség érdekében a pontok címkéjét már nem jelenítettük meg.



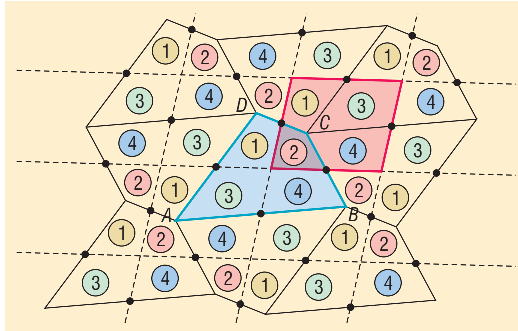
Szintén szükséges, hogy a négyszögrácsban szomszédos négyszögek érintkező oldalai ugyanakkorák legyenek. Ez is teljesül, mivel az érintkező négyszögoldalak minden esetben egymás tükörképei, és a tükrözés a szakaszok hosszát megtartja. Megjegyezzük, hogy gondolatmenetünk konkáv négyszögre is érvényes, így a sík azokkal is kiparkettázható.

A bizonyításon túl érdemes megvizsgálni, hogy milyen transzformációval vihetők egymásba a négyszögrács különböző elemei! Például a közös oldallal rendelkező négyszögeket középpontos tükrözéssel, a csúccsal érintkezőket eltolással tudjuk egymásba vinni. Az ábráról leolvasható, hogy két középpontos tükrözés egymás utáni elvégzése egy eltolással helyettesíthető.

b) Ha egy négyszög középvonalát valamelyik végpontjára tükrözzük, akkor a tükörkép, valamint a kiindulásul vett középvonal természetesen egy egyenesre illeszkednek. Ha a középvonalat a nem illeszkedő oldalak felezőpontjára tükrözzük, akkor a tükörkép és a középvonal a tükrözés tulajdonságai miatt párhuzamos egyenesekre illeszkednek. Ebből következik, hogy a középvonalak tartóegyenesei paralelogrammarácsot alkotnak (az ábrán szaggatott vonallal jelölve).



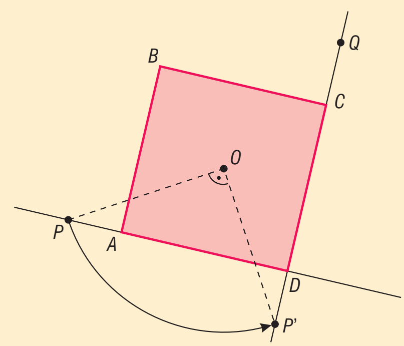
c) A középvonalakra illeszkedő egyenesek a parkettázásban szereplő minden négyszöget négy részre vágnak szét. Az ábrán nyomon követhető, hogy az $ABCD$ négyszög egyes részei a tükrözések során mely négyszögekbe mennek át; az azonos számmal jelölt négyszögek egymással egybevágók. Láthatjuk, hogy az $ABCD$ négyszög részeiből valóban átfedés nélkül, hézagmentesen kirakható a paralelogrammarács paralelogrammája (az ábrán piros színnel jelölve).

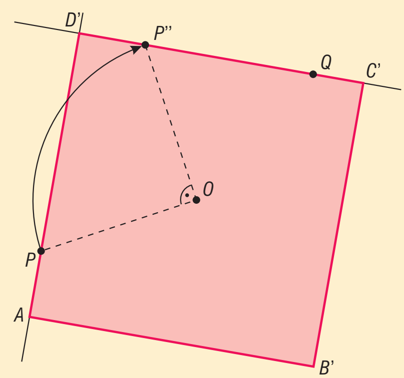


1757 *a)* A négyzet O középpontja körüli 90°-os (vagy –90°-os) forgatás az AD oldalegyenest a CD oldalegyenesbe viszi át, ezért ha a P pontot az O pont körül 90°-kal (vagy –90°-kal) elforgatjuk, akkor a keletkező P' pont illeszkedik a CD egyenesre. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Elforgatjuk a P pontot az O pont körül 90°-kal, így kapjuk a P' pontot.
2. Megszerkesztjük a QP' egyenest.
3. A P ponton át merőlegest állítunk a QP' egyenesre.
4. A merőleges és a QP' egyenes metszéspontja a szerkesztendő négyzet D csúcsa.
5. A D pontot az O pont körül 90°-kal elforgatva megkapjuk a négyzet C csúcsát.
6. A C pontot az O pont körül 90°-kal elforgatva megkapjuk a négyzet B csúcsát.
7. A B pontot az O pont körül 90°-kal elforgatva megkapjuk a négyzet A csúcsát.

Ha a P pontot az 1. lépésben –90°-kal forgatjuk, és a többi forgatás irányát is megváltoztatjuk, akkor egy újabb, a feltételeknek szintén megfelelő négyzetet kapunk eredményül (alsó ábra).





b) Mint az *a)* feladatban láttuk, általában két megoldást kapunk. Ez alól a következő esetek jelentenek kivételt.

Ha a P vagy a Q pont valamelyike egybeesik az O ponttal, akkor értelemszerűen a feladatnak nincs megoldása.

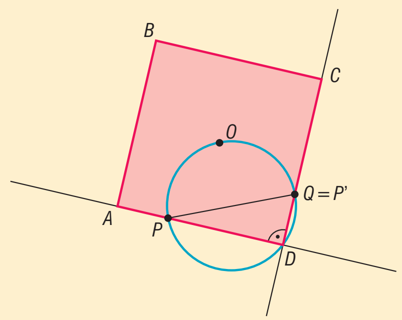
A két ellentétes irányú forgatás ugyanahhoz a négyzethez vezet azokban az esetekben, ha a P és a Q pontok egybeesnek, vagy ha a PQ szakasz felezőpontja az O pont. Az előbbi esetben a P pont megegyezik a négyzet D csúcsával. Az utóbbi esetben $P = A$ és $Q = C$. Ezekben az esetekben tehát a feladatnak csak 1 megoldása van.

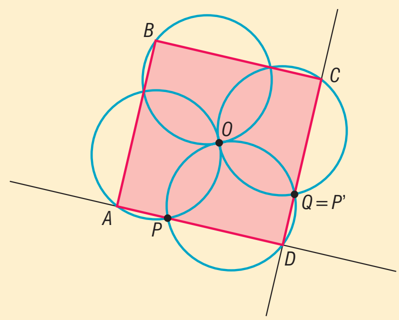
A feladat határozatlan, ha a 2. lépésben megadott QP' egyenes nem szerkeszthető. Ez akkor következik be, ha az O pont körüli 90°-os vagy –90°-os forgatás a P pontot a Q pontba viszi át. Ezt az esetet a *c)* feladatban tárgyaljuk.

c) Tegyük fel, hogy az O pont körüli 90°-os forgatás a P pontot a Q pontba viszi át. Ekkor a QP' egyenes nem szerkeszthető egyértelműen, hiszen $P' = Q$. Ha felveszünk a Q ponton át egy tetszőleges egyenest (kivéve OQ-t), akkor a szerkesztés további lépései minden gond nélkül végrehajthatóak, és eredményül egy, a feltételeknek megfelelő négyzetet kapunk. Az elmondottakból következik, hogy a Q ponton átmenő minden egyes egyeneshez (kivéve természetesen az OQ egyenest) egy megoldás tartozik, azaz a feladat feltételeinek végtelen sok négyzet tesz eleget.

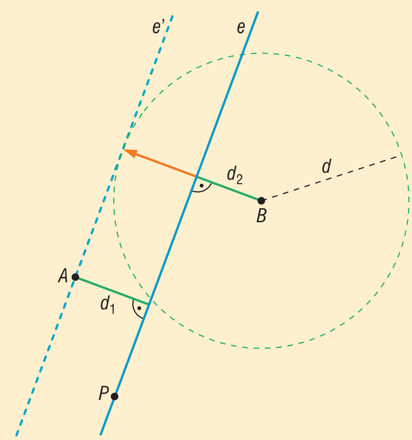
d) A PQD háromszögben a P és Q pontok rögzítettek, továbbá P az AD, Q a CD oldalegyenes egy-egy pontja, ezért $PDQ\sphericalangle = 90°$. Thalész tételének megfordítása alapján a D pont tehát illeszkedik a PQ szakaszra mint átmérő fölé emelt körre (ld. bal oldali ábra). E kör minden O-tól különböző pontja egy alkalmas négyzet D csúcsával egyezik meg.

A négyzet további csúcsai is egy-egy megfelelő Thalész-körre illeszkednek (ld. jobb oldali ábra). Ezeket a köröket úgy kapjuk, hogy a PQ szakasz fölé írt kört az O pont körül 90°-kal, 180°-kal, illetve 270°-kal elforgatjuk. Megjegyezzük, hogy például a B pont a P és Q pontok O középpontra vonatkozó tükörképei fölé emelt körre illeszkedik. A Thalész-körök közös O metszéspontja egyetlen négyzetnek sem lehet csúcspontja.

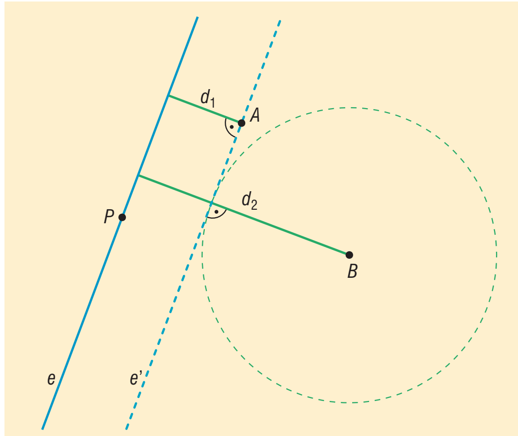




1758 Jelöljük a két tereptárgyat A-val, illetve B-vel, a falut P-vel. A feladat szerint a P ponton át olyan, az A és B pontokat szétválasztó e egyenest kell szerkesztenünk, amelynek az A és B pontoktól mért távolságösszege éppen az adott d hosszúsággal egyenlő (az ábrán $d_1 + d_2 = d$). Vegyük észre, hogy ha az e egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy az eltolt e' kép átmenjen az A ponton, akkor a B pont e' egyenestől mért távolsága éppen d, így lehetőségünk nyílik e' egyenes szerkesztésére; az e' egyenes ugyanis érinti a B középpontú d sugarú kört. Az e' egyenes ismeretében az e egyenes szerkesztése már nem okoz nehézséget, csak annyi dolgunk marad, hogy párhuzamost húzzunk a P ponton át az e' egyenessel.



Az út megépíthetőségének vizsgálata jóval nehezebb feladat, mint a tervezése. Ha az A pont a B középpontú d sugarú körnek belső pontja, akkor természetesen sem az e' egyenes, sem pedig a feltételeknek megfelelő út nem szerkeszthető.

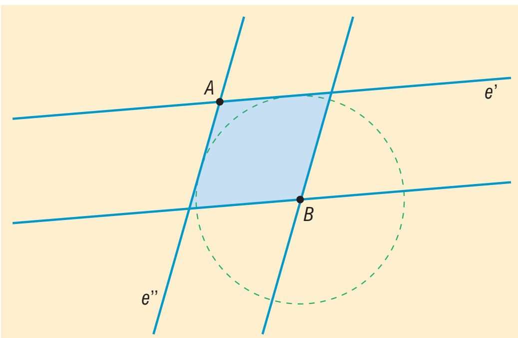


Ha az A pont a körnek külső pontja, akkor az A ponton keresztül két érintő is szerkeszthető a körhöz. A két érintő mindegyikéből elvileg egy-egy megfelelő utat is kapunk, amelyekből azonban nem feltétlenül mindegyik, sőt esetleg egyik sem tesz eleget a feladat feltételeinek.

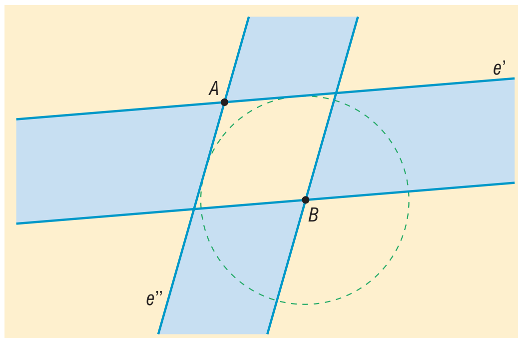
Ha ugyanis például az e' érintő szétválasztja a B és P pontokat (az ábra egy ilyen esetet mutat), akkor a megfelelő e egyenesnek éppen a B és az A pontoktól mért távolságkülönbsége lesz egyenlő d-vel ($d_2 - d_1 = d$).

Hasonló helyzet áll elő akkor is, ha a B ponton keresztül e'-vel párhuzamosan húzott egyenes választja szét az A és P pontokat, csak akkor az A és B pontoktól mért távolságok különbsége egyenlő d-vel, azaz $d_1 - d_2 = d$.

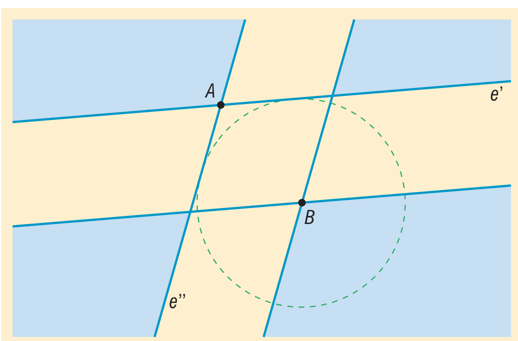
Fenti észrevételeink alapján a lehetséges megoldások:



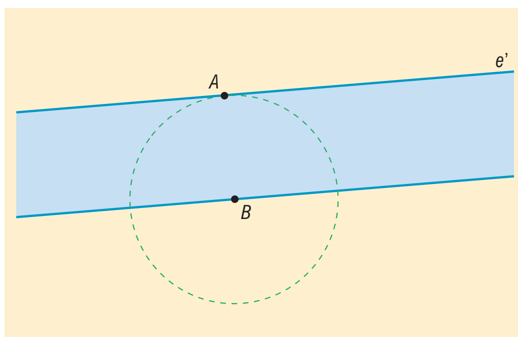
Az ábrán azt a tartományt jelöltük meg, amelyből kikerülő P pontokra mindkét út megfelel a feladat feltételeinek.



Az ábrán megjelölt tartomány pontjaira a feladatnak egy megoldása van.

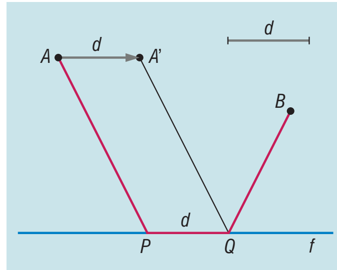


Az ábrán megjelölt pontok esetén egyetlen megoldást sem kapunk.



Az A pont illeszkedik a B középpontú d sugarú körre. Ekkor az A ponton át egyetlen érintő szerkeszthető a körhöz. Ha a P pont az ábrán megjelölt sávba esik, akkor a feladatnak egy megoldása van, más esetben a feladatnak nincs megoldása.

1759 A folyót f-fel, a két turistacsalogató látványosságot A-val és B-vel jelöltük az ábrán. Feladatunk az f egyenesen olyan P és Q pontok szerkesztése, amelyre az $APQB$ törött vonal hossza a lehető legkisebb, továbbá $PQ = d$, az előre adott távolság. Toljuk el az A pontot az f egyenessel párhuzamosan a B pont „irányába” d hosszúságú vektorral (ld. ábra). Ha a kapott pontot A' jelöli, akkor az $APQA'$ paralelogrammában $AP = A'Q$, $AA' = PQ$. Ekkor az $APQB$ törött vonal hosszára teljesül, hogy:



$$AP + PQ + QB = A'Q + AA' + QB = d + A'Q + QB,$$

amelyben a d hosszúságú rész a P és Q pontok helyzetétől függetlenül szerepel, ezért elegendő az $A'QB$ törött vonal hosszát minimalizálni. Ezzel a feladatot visszavezettük a következő, jól ismert problémára: adottak az f egyenes ugyanazon partján az A' és a B pontok. Szerkesszük meg az f egyenesen azt a Q pontot, amelyre az $A'Q$ és a QB szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb.

Az átfogalmazott problémát az 1589. feladatban már megoldottuk. A megoldáshoz tükrözzük a B pontot az f egyenesre, majd a kapott B' pontot kössük össze A' ponttal. Az $A'B'$ szakasz az f egyenesből kimetszi a keresett Q pontot. Visszatérve az eredeti feladathoz, a Q pont ismeretében a P pont már könnyen szerkeszthető; nincs más dolgunk, csak a Q pontot el kell tolnunk az $\overrightarrow{A'A}$-ral.