





**1301** Tegyük fel, hogy  $x$  perc múlva a két mutató elfordulása 12 órához képest egyenlő. Az 1300. feladat alapján a  $(240 + x) \cdot 0,5 = x \cdot 6$  egyenletet kell megoldanunk. Ebből:

$$x = \frac{240}{11} \approx 21,82.$$

Tehát  $\frac{240}{11}$  perccel 4 után fedik egymást a mutatók.

**1302** A 9 pont  $3 \cdot 6 + 2 = 20$  egyenest határoz meg.

**1303** a) Metszéspontok száma:  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ .

b) Az 5 páronként nem párhuzamos egyenes egymással  $\frac{5 \cdot 4}{2}$  metszéspontot hoz létre, illetve az 5 egyenes mindegyike minden párhuzamos egyenest metsz. Így a metszéspontok száma:  $\frac{5 \cdot 4}{2} + 5 \cdot 3 = 25$ .

c) Metszéspontok száma:  $\frac{4 \cdot 3}{2} + 4 \cdot 4 = 22$ .

d) Metszéspontok száma:  $\frac{3 \cdot 2}{2} + 3 \cdot 5 = 18$ .

**1304** a) Páronként párhuzamosak az egyenesek.

b) Egy ponton haladnak át az egyenesek, vagy kettő párhuzamos egyenes metsz egy harmadikat.

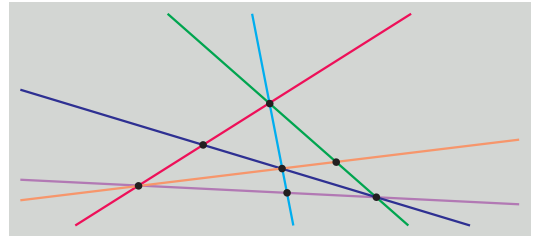
c) A három egyenes három különböző pontban metszi egymást.

**1305** Hét óra után először  $x$  perc múlva zárjon be a két mutató ugyanakkora szöveget a vízszintessel. Ekkor a kismutató vízszintessel bezárt szöge  $60^\circ - x \cdot 0,5^\circ$ , a nagymutató vízszintessel bezárt szöge pedig  $90^\circ - x \cdot 6^\circ$ . A két szög egyenlőségéből:

$$60 - x \cdot 0,5 = 90 - x \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{60}{11} = 5 \frac{5}{11} \approx 5,45.$$

Kati 7 óra után  $5 \frac{5}{11}$  perccel indul az iskolába.

**1306** Az ábrán látható 6 egyenes és metszéspontjaik megfelelnek a feladat feltételeinek.



**1307** Legyen  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OC = c$ . Az egyenlőség bal oldala:

$$OM \cdot AB + ON \cdot BC = \frac{a+b}{2} \cdot (b-a) + \frac{b+c}{2} \cdot (c-b) = \frac{c^2 - a^2}{2}.$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$OP \cdot AC = \frac{c+a}{2} \cdot (c-a) = \frac{c^2 - a^2}{2}.$$

Az egyenlőség jobb és bal oldala egyenlő, tehát az egyenlőség igaz.



**1308** Tekintsük az egyenest egy számegyenesnek, a szakaszok végpontjait a számegyenesen egy-egy valós számnak. Az intervallumok bal végpontjainak megfelelő valós számok közül a legnagyobb legyen  $a$ , jobb végpontjainak megfelelő valós számok közül a legkisebb pedig  $b$ . (Véges sok intervallum van, tehát  $a$  és  $b$  létezik.) Mivel bármely két intervallumnak van közös pontja, teljesül, hogy  $a \leq b$ . Ha  $a = b$ , akkor a közös pont  $a$ , egyébként minden  $a$  és  $b$  közötti pont közös pont.

## Háromszögek oldalai, szögei – megoldások

**1309** A helyesen kitöltött táblázat:

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$
$20^\circ$	$40^\circ$	$120^\circ$	$160^\circ$	$140^\circ$	$60^\circ$
$70^\circ$	$80^\circ$	$30^\circ$	$110^\circ$	$100^\circ$	$150^\circ$
$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$150^\circ$	$120^\circ$	$90^\circ$

**1320** A háromszög hiányzó szögei:  $82^\circ 33'$  és  $55^\circ 2'$ .

**1311** a) Derékszögű a háromszög.

b) Hegyszögű a háromszög.

c) Tompaszögű a háromszög.

**1312** A háromszög szögei lehetnek:  $78^\circ$ ,  $78^\circ$ ,  $24^\circ$ ; vagy  $78^\circ$ ,  $51^\circ$ ,  $51^\circ$ .

**1313** Az  $ABE$  szabályos háromszög  $EBA$  szöge  $60^\circ$ .

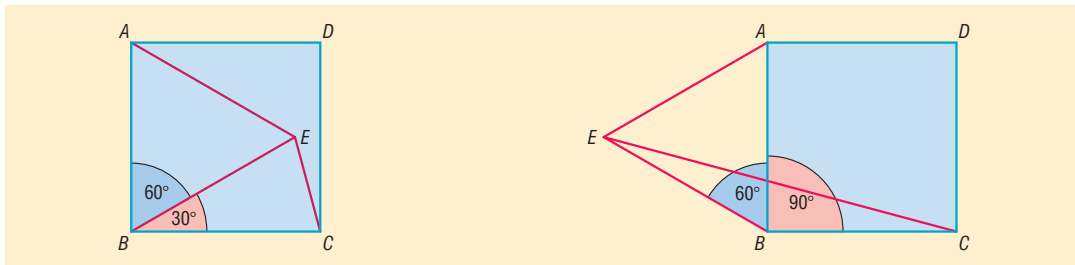
Ha az  $E$  pont a háromszögön belül van, akkor az  $EBC$  egyenlő szárú háromszög  $B$ -nél lévő szöge  $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , így a

$$\angle BEC = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Ha az  $E$  pont a háromszögön kívül van, akkor a  $BEC$  egyenlő szárú háromszög  $B$ -nél lévő szöge  $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ , így a

$$\angle BEC = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

A  $BEC$  szög tehát lehet  $75^\circ$  vagy  $15^\circ$ .

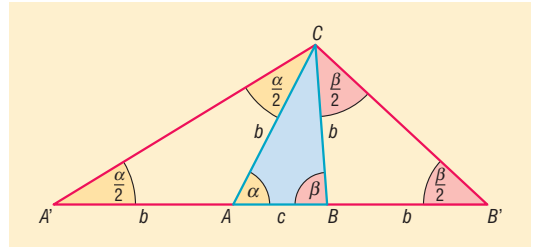


**1314** a) Az  $AA'C$  háromszög egyenlő szárú, így az  $A$ -nél lévő belső szög az  $A$ -nál lévő külső szög fele, vagyis  $\angle AA'C = 20^\circ$ . Ugyanígy  $\angle BB'C = 35^\circ$ .

A háromszög szögei:  $20^\circ$ ,  $35^\circ$ , és  $125^\circ$ .

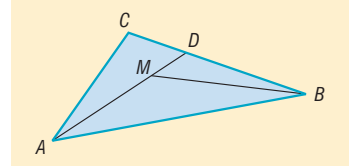


b) Az a) részben levezetettek alapján az  $AA'C$  háromszögben az  $A'$ -nél lévő belső szög az  $A$ -nál lévő külső szög fele, tehát  $\angle AA'C = \frac{\alpha}{2}$ .  
 Ugyanígy  $\angle BB'C = \frac{\beta}{2}$ .  
 A háromszög szögei:  $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$ .



**1315** Az  $AM$  egyenese a  $BC$  oldalt  $D$  pontban metszi. Ismert, hogy egy háromszög külső szöge mindig nagyobb, mint a nem mellette lévő valamelyik belső szög.

Az  $ADC$  háromszög külső szöge  $\angle MDB$ , tehát  $\angle ACB < \angle MDB$ .  
 Az  $MBD$  háromszög külső szöge  $\angle AMB$ , tehát  $\angle MDB < \angle AMB$ .  
 Összevetve:  $\angle ACB < \angle MDB < \angle AMB$ , vagyis igaz a feladat állítása.



**1316** A háromszög-egyenlőtlenség alapján:

- a) létezik ilyen háromszög;
- b) nem létezik ilyen háromszög;
- c) nem létezik ilyen háromszög.

**1317** A harmadik oldal 10 vagy 4 cm. Ha a harmadik oldal 4 cm lenne, akkor nem teljesülne a háromszög-egyenlőtlenség. A harmadik oldal 10 cm. (Ilyen háromszög létezik.)

**1318** A háromszög-egyenlőtlenségek alapján a harmadik oldal nagyobb, mint  $10 - 6 = 4$  cm, és kisebb, mint  $10 + 6 = 16$  cm. A harmadik oldal tehát lehet 5, 6, ..., 15 cm. Tehát 11 ilyen háromszög van.

**1319** A feltétel szerint:  $2a = a + a \geq b + c$ . A háromszög-egyenlőtlenség nem teljesül a  $2a, b$ , és  $c$  hosszúságú szakaszokra, így nem létezik ilyen háromszög.

**1320** A  $BP$  egyenese az  $AC$  oldalt egy belső  $D$  pontban metszi. Az  $ABD$  háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$AB + AD > BD = BP + PD.$$

A  $PDC$  háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$PD + DC > PC.$$

A két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, hogy:

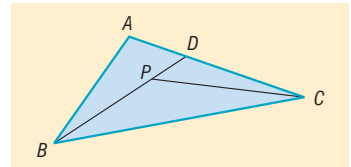
$$(AB + AD) + (PD + DC) > (BP + PD) + PC.$$

Mivel

$$AD + DC = AC \Rightarrow AB + PD + AC > BP + PD + PC.$$

Innen már adódik az állítás:

$$AB + AC > PB + PC.$$



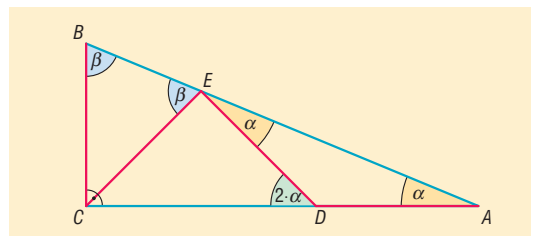
**1321** Legyen az ábra szerinti  $ABC$  derékszögű háromszög  $A$  csúcsánál lévő szöge  $\alpha$ ,  $B$  csúcsánál lévő pedig  $\beta$ .

Az  $ADE$  háromszög egyenlő szárú, tehát

$$\angle DEA = \alpha.$$

A  $BCE$  háromszög egyenlő szárú, tehát

$$\angle BEC = \beta.$$





Mivel  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , az  $E$  pontnál csak akkor lehet egyenes szög, ha  $CED \sphericalangle = 90^\circ$ . Tehát a  $CED$  háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, és  $CDE \sphericalangle = 45^\circ$ .

A  $CDE$  szög viszont  $EDA$  háromszög külső szöge, ami egyenlő a nem mellette lévő két belső szög összegével:

$$CDE \sphericalangle = 2 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 22,5^\circ.$$

A háromszög hegyesszögei:  $22,5^\circ$  és  $67,5^\circ$ .

**1322** a) Az  $AOC$  egyenlő szárú háromszögben  $AOC$  szög  $180^\circ \frac{3}{5}$  része:

$$AOC \sphericalangle = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ \text{ és } CAO \sphericalangle = ACO \sphericalangle = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

A  $DOC$  egyenlő szárú háromszögben  $DOC$  szög  $180^\circ \frac{1}{5}$  része:

$$DOC \sphericalangle = \frac{1}{5} \cdot 180^\circ = 36^\circ \text{ és } DCO \sphericalangle = ODC \sphericalangle = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

A  $DMC$  háromszögben

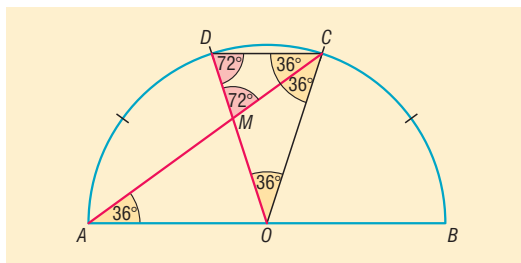
$$DCM \sphericalangle = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ \text{ és } DMC \sphericalangle = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

b) Az előbbiek alapján  $DMC$  háromszög egyenlő szárú, mert szögei  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  és  $36^\circ$ . A háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, tehát  $MC = DC = 10$  cm.

Az  $OMC$  háromszög is egyenlő szárú, mert  $MOC \sphericalangle = MCO \sphericalangle = 36^\circ$ , ezért

$$OM = MC = 10 \text{ cm.}$$

Tehát  $OM = 10$  cm.



**1323** Nem. A háromszög-egyenlőtlenség alapján az egyik  $e$  átlóra teljesülnie kell:

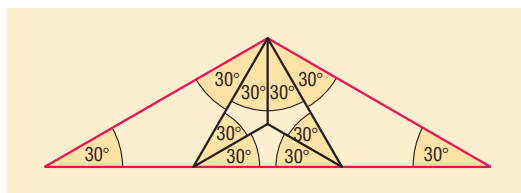
$$e < 7 + 8 = 15 \text{ és } e < 11 + 9 = 20.$$

Tehát az egyik átlónak 15 cm-nél kisebbnek kell lennie. A másik  $f$  átlóra szintén teljesülnie kell, hogy

$$f < 8 + 11 = 19 \text{ és } f < 9 + 7 = 16.$$

Tehát a másik átlónak 16 cm-nél kisebbnek kell lennie.

**1324** Az ábrán látható felosztás megfelel a feladat feltételeinek.



**1325** Az  $ABCD$  négyszögben az átlók metszéspontja legyen  $M$ . Az  $ABM$ , illetve  $CDM$  háromszögben a háromszög-egyenlőtlenségek:

$$AM + BM > AB, \text{ illetve } CM + DM > CD.$$

Innen az állítás közvetlen adódik, hiszen  $AM + BM + CM + DM$  éppen az átlók összege.



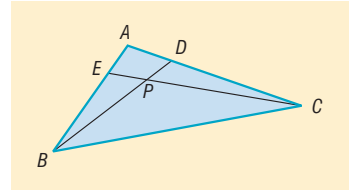
**1326** Az  $ABD$  háromszögben az  $A$ -nál levő szög nem hegyesszög, tehát  $BD$  a háromszög legnagyobb oldala:  $BD > BA$ . Hasonlóan az  $AEC$  háromszög legnagyobb oldala  $CE$ , tehát  $CE > AC$ .

A két egyenlőtlenségből adódik:

$$BD + CE > BA + AC = (BE + EA) + (AD + DC) = BE + DC + (EA + AD).$$

Az  $AED$  háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség:  $EA + AD > ED$ . Tehát

$$BD + CE > BE + DC + ED.$$



**1327** Az ábrán látható  $ABC$  háromszögben az oldalak a szokásos jelöléssel  $a$ ,  $b$  és  $c$ .

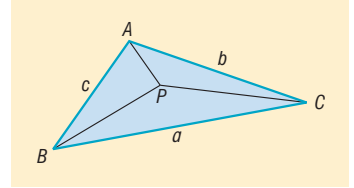
Az  $APB$ ,  $APC$ , illetve  $BPC$  háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$PA + PB > c, \quad PC + PB > a \quad \text{és} \quad PA + PC > b.$$

Ezekből következik, hogy:

$$2PA + 2PB + 2PC > a + b + c,$$

$$PA + PB + PC > \frac{a + b + c}{2}.$$



A  $P$  pontnak a csúcsoktól vett távolságösszege a háromszög félkerületénél nagyobb. Mivel  $P$  pont a háromszög egy belső pontja, az 1320. feladat alapján teljesül, hogy

$$PA + PB < a + b, \quad PC + PB < c + b \quad \text{és} \quad PA + PC < a + c.$$

Ezekből következik, hogy:

$$2PA + 2PB + 2PC < 2a + 2b + 2c,$$

$$PA + PB + PC < a + b + c.$$

A  $P$  pontnak a csúcsoktól vett távolságösszege a háromszög kerületénél kisebb.

## Pitagorasz-tétel – megoldások

**1328** A megadott adatokból a következő táblázatot kapjuk ( $\Rightarrow$ ):

Egyik befogó	Másik befogó	Átfogó
12 cm	5 cm	13 cm
65 cm	7,2 dm	970 mm
$\sqrt{3} \cdot a$	$a$	$2a$
$b$	$b$	$\sqrt{2} \cdot b$

- 1329** a) Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.
- b) Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.
- c) Nem lehetnek derékszögű háromszög oldalai.
- d) Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

**1330** A Pitagorasz-tétel alapján nem lehet, mert a két páratlan befogó négyzetösszege páros, ami nem lehet a páratlan átfogó négyzete.

**1331** A két ferde rúd hossza együtt  $2 \cdot \sqrt{150^2 + 100^2} \approx 360,56$  cm.

**1332** Az alaphoz tartozó magasság 6 cm.

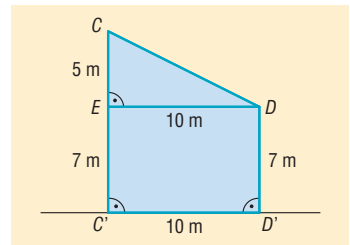
**1333** Az ellensúly a tartóoszlop lábától 41 méterre, a darugém vége a tartóoszlop lábától 44 méterre van.

1334 A monitor képátmérője 17”.

1335 Az ábrán a két fát jelölje  $CC'$  és  $DD'$  szakasz. A  $CDE$  derékszögű háromszögben  $DC$  szakasz hosszát kell kiszámítani.

$$DC = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5 \cdot \sqrt{5} \approx 11,18,$$

tehát a két fa csúcsa megközelítőleg 11,18 m távol van egymástól.



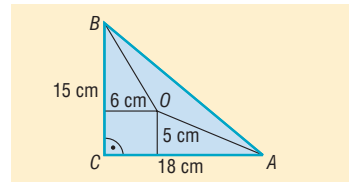
1336 a) Az  $OBC$  háromszög területe az  $ABC$  derékszögű háromszög területének harmadrésze. Mivel a két háromszög  $BC$  oldala közös, az  $OBC$  háromszög  $BC$  oldalhoz tartozó magassága az  $AC$  befogó harmada, vagyis  $\frac{18}{3} = 6$  cm.

Hasonlóan az  $OAC$  háromszög területe az  $ABC$  derékszögű háromszög területének harmadrésze, így az  $OAC$  háromszög  $AC$  oldalhoz tartozó magassága a  $BC$  befogó harmada, vagyis  $\frac{15}{3} = 5$  cm.

Az  $O$  pontnak a befogóktól vett távolsága tehát 6 és 5 cm.

b) Az előzőek alapján  $OC$  egy 6 és 5 cm oldalú téglalap átlója. Pitagorasz tétele alapján

$$OC = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} \approx 7,81 \text{ cm.}$$



1337 A háromszög területe egy  $b$  oldalú szabályos háromszög területével egyenlő:

$$T = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

1338 A küzdőtér legyen egy 8 m oldalú  $ABCD$  négyzet. Tegyük fel, hogy a sportoló az  $AC$  átló  $A$ -hoz közelebbi  $P$  harmadoló-pontjában tartózkodik.

A  $P$  pontnak az  $A$  csúctól vett távolsága az átló harmada:

$$AP = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \approx 3,77 \text{ m.}$$

A  $P$  pontnak a  $C$  csúctól vett távolsága az átló kétharmada:

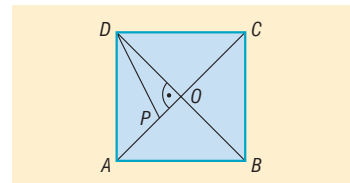
$$CP = \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \approx 7,54 \text{ m.}$$

A négyzet átlóinak metszéspontja legyen  $O$ . Mivel a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást, a  $DOP$  háromszög derékszögű, és a  $DO$  szakasz a négyzet átlójának a fele:

$$DO = 4 \cdot \sqrt{2}.$$

A  $PO$  szakasz a négyzet átlójának a hatoda:

$$PO = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}.$$





A  $DOP$  háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt adódik, hogy

$$PD = \sqrt{PO^2 + OD^2} = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{5} \approx 5,96 \text{ m.}$$

Hasonlóan:

$$PB = 5,96 \text{ m.}$$

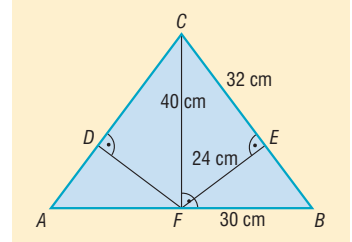
A sportoló a küzdőtér négy sarkától 3,77, 5,96, 7,54 és 5,96 m távolságra van.

- 1339** A  $CFB$  derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel számítható  $BC$  oldal:  $BC = 50 \text{ cm}$ .

A  $CFB$  háromszögben  $FE$  a  $CB$  oldalhoz tartozó magasság, így a háromszög területét kétféleképpen felírva  $FE$ -re adódik:

$$\frac{50 \cdot FE}{2} = \frac{40 \cdot 30}{2},$$

$$FE = 24 \text{ cm.}$$



A  $CFE$  derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételt felírva:

$$CE = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32 \text{ cm.}$$

A  $CEFD$  négyszög kerülete  $FE$  és  $CE$  szakaszok összegének a kétszerese:

$$2 \cdot (24 + 32) = 112 \text{ cm.}$$

A  $CEFD$  négyszög területe az  $EFC$  derékszögű háromszög területének kétszerese:

$$2 \cdot \frac{24 \cdot 32}{2} = 768 \text{ cm}^2.$$

- 1340** Legyen az indulási pont  $A$ , az érkezési pont  $B$ , a gömb középpontja  $O$ .

a) A bolygó felszínén megtett út a főkör kerületének a negyed része:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} = \pi \approx 3,14 \text{ km.}$$

b) Az alagút hossza az  $AOB$  egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója. Mivel a háromszög befogója 2 km, Pitagorasz-tétel alapján:

$$AB = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,82 \text{ km.}$$

Az alagút hossza tehát 2,82 km.

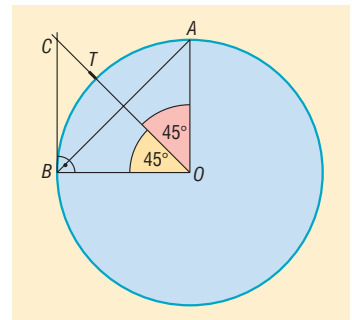
c) A  $B$  érkezési pontból akkor nem láthatjuk a tornyot, ha a torony  $T$  ponttal jelölt teteje a főkörhöz  $B$ -ben húzott érintő egyenesének arra az oldalára esik, amelyik oldalon a kör van.

A  $T$  pont az  $AOB$  szög szögfelezőjén  $O$ -tól  $2 + 0,1 = 2,1 \text{ km}$ -re van.

A szögfelező és az érintő metszéspontja legyen  $C$ . Az  $OBC$  egyenlő szárú derékszögű háromszögben a befogó 2 km, így

$$OC = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,82 \text{ km.}$$

Mivel  $OC > OT$ , a tornyot a kis herceg nem láthatja.



**1341** Legyen  $AC = b$  és  $BC = a$ . Az  $O$  pont  $AC$ -re, illetve  $BC$ -re eső merőleges vetülete legyen  $A'$ , illetve  $B'$ .

Az 1336. feladat gondolatmenete alapján a területekből következik, hogy

$$OA' = \frac{a}{3} \quad \text{és} \quad OB' = \frac{b}{3}.$$

Az  $OB'CA'$  téglalap átlójára felírva Pitagorasz tételét:

$$OC^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{9}.$$

Mivel  $AA' = \frac{2b}{3}$ , az  $AOA'$  derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele:

$$OA^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2.$$

Mivel  $BB' = \frac{2a}{3}$ , a  $BOB'$  derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele:

$$OB^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2.$$

Az előbbieket felhasználva:

$$OA^2 + OB^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{9}\right) = 5 \cdot OC^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

**1342** Ha a derékszögű háromszög másik befogója  $b$ , és az átfogója  $c$ , akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$\begin{aligned} 225 + b^2 &= c^2, \\ c^2 - b^2 &= 225, \\ (c - b) \cdot (c + b) &= 225. \end{aligned}$$

Mivel  $c - b$  kisebb, mint  $c + b$ , 225 lehetséges szorzattá alakításai a tényezők sorrendjét is figyelembe véve:  $1 \cdot 225 = 3 \cdot 75 = 5 \cdot 45 = 9 \cdot 25$ .

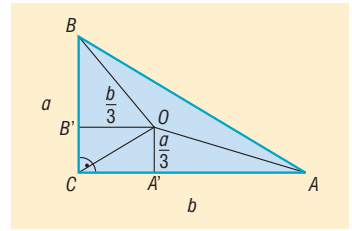
Ha  $a - b = 1$  és  $a + b = 225$ , akkor  $a = 113$  és  $b = 112$ .

Ha  $a - b = 3$  és  $a + b = 75$ , akkor  $a = 39$  és  $b = 36$ .

Ha  $a - b = 5$  és  $a + b = 45$ , akkor  $a = 25$  és  $b = 20$ .

Ha  $a - b = 9$  és  $a + b = 25$ , akkor  $a = 17$  és  $b = 8$ .

Tehát négy ilyen háromszög van.



## Négyszögek – megoldások

**1343** A konvex négyszögnek lehet, hogy:

- nincs hegyesszöge, például téglalap;
- egy hegyesszöge van, például egy deltoid, melynek szögei  $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 90^\circ$ ;
- két hegyesszöge van, például egy trapéz, melynek szögei  $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ ;
- három hegyesszöge van, például egy deltoid, melynek szögei  $60^\circ, 80^\circ, 60^\circ, 160^\circ$ .

Négy hegyesszöge nem lehet, mert ekkor nem teljesülne, hogy a belső szögek összege  $360^\circ$ .



1344 Hamisak:  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$ ,  $e)$ ,  $f)$ ,  $g)$ . Igazak:  $d)$ ,  $h)$ .

1345 A háromszög oldalait Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$AE = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4 \cdot \sqrt{10} \approx 12,65,$$

$$EF = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

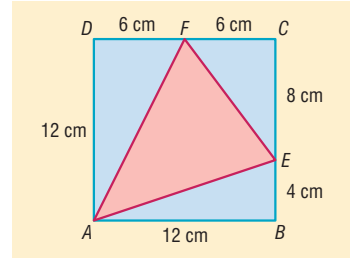
$$AF = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6 \cdot \sqrt{5} \approx 13,42.$$

Az  $AEF$  háromszög kerülete:

$$AE + EF + AF = 36,07 \text{ cm.}$$

Az  $AEF$  háromszög területét megkaphatjuk úgy, hogy a négyzet területéből kivonjuk az  $ABE$ ,  $EFC$  és  $AFD$  háromszögek területét:

$$12^2 - \frac{12 \cdot 4}{2} - \frac{8 \cdot 6}{2} - \frac{12 \cdot 6}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$



1346 Legyen  $ABCD$  a 6 cm oldalú négyzet. Az  $A$  csúcson áthaladó, a területet harmadoló egyenesek közül az egyik a  $DC$  oldalt  $E$ -ben, a másik a  $BC$  oldalt  $F$ -ben metszi.

Az  $ADE$  háromszög területe a négyzet területének harmada, tehát  $12 \text{ cm}^2$ .

$$\frac{6 \cdot DE}{2} = 12 \Rightarrow DE = 4 \text{ cm.}$$

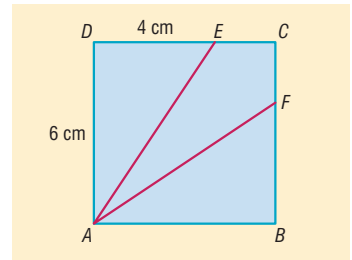
Pitagorasz-tételt használva az  $ADE$  háromszögben:

$$AE = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7,21 \text{ cm.}$$

Ugyanígy:

$$AF = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7,21 \text{ cm.}$$

Tehát a két egyenesnek a négyzet belsejébe eső szakasza  $7,21 \text{ cm}$ .



1347 Tekintsük az  $ABCD$  négyzetet. Az  $AC$  átlójára mérjük fel a négyzet oldalának a hosszát  $A$ -ból kiindulva, így az  $E$  pontot kapjuk.

Mivel a négyzet átlói az oldalakkal  $45^\circ$ -os szöveget zárnak be, az  $ABE$  egyenlő szárú háromszög szárszöge  $45^\circ$ , az alapon lévő szögei:

$$\frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ.$$

Ennek a szögnek a külső szöge  $112,5^\circ$ .

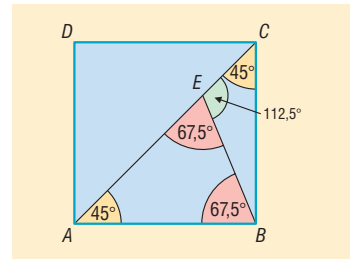
Az  $EBC$  háromszög  $EC$  oldalán fekvő szögek:  $112,5^\circ$  és  $45^\circ$ .

Ezek alapján a szerkesztést az  $EBC$  háromszöggel kezdjük, mert adott az  $EC$  oldala, és ismerjük a rajta fekvő két szöget. Az  $EBC$  háromszögnek a  $BC$  oldala a négyzet oldala, aminek ismeretében a négyzet már szerkeszthető.

A feladatnak mindig van megoldása.

1348 A téglalap átlói az oldalakkal:

a)  $35^\circ$  és  $55^\circ$ ;      b)  $\frac{\varphi}{2}$  és  $90^\circ - \frac{\varphi}{2}$  nagyságú szöveget zárnak be.





1349 A rombusz szögei  $48^\circ$  és  $132^\circ$ .

1350 A rombusz szögei  $30^\circ$  és  $150^\circ$ .

1351 Három eset lehetséges:

a)  $102^\circ$ ,  $109^\circ$ ,  $40^\circ$  és  $109^\circ$ ;    b)  $40^\circ$ ,  $102^\circ$ ,  $116^\circ$  és  $102^\circ$ ;    c)  $102^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $178^\circ$  és  $40^\circ$ .

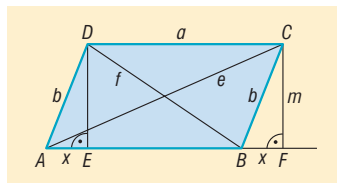
1352 A hosszabbik átló a 10 cm-es átlót két egyenlő részre osztja. A hosszabbik átló szeletei az arányból adódóan 15 cm és 9 cm. Pitagorasz tétele alapján az oldalak:

$$a = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106} \approx 10,30 \text{ cm} \quad \text{és} \quad b = \sqrt{5^2 + 15^2} = 5 \cdot \sqrt{10} \approx 15,81 \text{ cm}.$$

1353 A paralelogramma belső szögei  $80^\circ$ ,  $100^\circ$ .

1354 A paralelogramma belső szögei  $108^\circ$  és  $72^\circ$ .

1355 Az  $ABCD$  paralelogrammának az  $A$  csúcánál levő szöge legyen hegyesszög. A paralelogramma oldalai  $AB = a$  és  $BC = b$ , átlói  $AC = e$  és  $BD = f$ , az  $AB$  oldalhoz tartozó magassága  $m$ .



Húzzunk merőlegest a  $C$  és a  $D$  csúcsokból az  $AB$  oldal egyenesére. A merőlegesek talppontjai legyenek  $F$  és  $E$ . Az  $F$  pont az  $AB$  oldalon kívül, az  $E$  pont az oldalon van.

Jelölje az  $AE$  és a  $BF$  egyenlő szakaszok hosszúságait  $x$ .

A  $BFC$  derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$b^2 = m^2 + x^2.$$

Az  $AFC$  derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$e^2 = m^2 + (a + x)^2.$$

A  $BED$  derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$f^2 = m^2 + (a - x)^2.$$

Ezeket felhasználva az átlók négyzetösszege:

$$\begin{aligned} e^2 + f^2 &= 2m^2 + (a + x)^2 + (a - x)^2 = 2m^2 + 2x^2 + 2a^2 = \\ &= 2 \cdot (m^2 + x^2) + 2a^2 = 2b^2 + 2a^2. \end{aligned}$$

Ha a paralelogrammának az  $A$  csúcánál levő szöge tompaszög, a bizonyítás hasonló módon történik.

Ha a paralelogramma téglalap, akkor is az átlók négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő.

1356 Mivel a paralelogramma köré kör írható, átlói egyenlő hosszúak, tehát téglalap.

A téglalap átlójának hossza Pitagorasz-tétellel számítható:

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}.$$

A téglalap köré írható kör sugara az átló fele, vagyis 6,5 cm.

1357 Nincs konkáv trapéz, mert a trapéz egy száron nyugvó belső szögeinek összege  $180^\circ$ .

1358 Mivel a két adott szög összege nem  $180^\circ$ , ezért ezek a szögek nem lehetnek egy száron nyugvó szögek. A trapéz másik két szöge:  $180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$  és  $180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$ .

1359 Két megoldás lehetséges, amelyek a következő táblázatból olvashatók ki. Felhasználtuk az oldal-hosszak kiszámításánál, hogy ha egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója  $a$ , akkor az átfogója  $a \cdot \sqrt{2}$ .

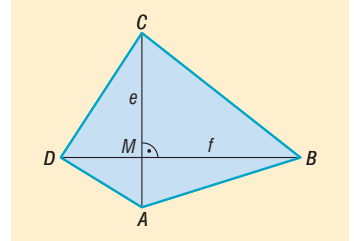
Derékszögű szár	Másik szár	Rövidebb alap	Hosszabb alap
6 cm	$6 \cdot \sqrt{2}$ cm	10 cm	16 cm
6 cm	$6 \cdot \sqrt{2}$ cm	16 cm	22 cm



**1360** Az  $ABCD$  konvex négyszögben az átlók metszéspontja legyen  $M$ . A négyszöget az átlói négy derékszögű háromszögre bontják.

A négyszög területét a négy derékszögű háromszög területének összegeként számíthatjuk:

$$\begin{aligned} T &= \frac{AM \cdot BM}{2} + \frac{BM \cdot CM}{2} + \frac{CM \cdot DM}{2} + \frac{DM \cdot AM}{2} = \\ &= \frac{BM}{2} \cdot (AM + CM) + \frac{DM}{2} \cdot (CM + AM) = \\ &= \frac{(AM + CM) \cdot (BM + DM)}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2}. \end{aligned}$$



Tehát a négyszög területe  $\frac{e \cdot f}{2}$ .

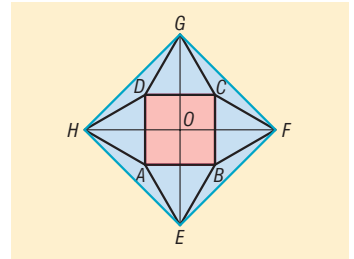
A feladat állítása akkor is igaz, ha a négyszög nem konvex.

**1361** Tekintsük az ábrán látható jelöléseket.

Az  $EFGH$  négyszög négyzet, mert átlói egyenlő hosszúak, illetve merőlegesek egymásra.

Az  $EFGH$  négyzetben a  $HF$  átló az  $ABCD$  négyzet oldalának és két 18 cm oldalú szabályos háromszög magasságának az összege:

$$HF = 18 + 2 \cdot \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{2} = 18 \cdot (1 + \sqrt{3}).$$



Az  $EFGH$  négyzet területe az átlók szorzatának a fele:

$$T_{EFGH \text{ négyzet}} = \frac{HF^2}{2} \approx 1209,18 \text{ cm}^2.$$

Az  $EFGH$  négyzet  $EF$  oldala az  $EOF$  egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója. Ennek a háromszögnek a befogója:

$$OF = \frac{HF}{2} = 9 \cdot (1 + \sqrt{3}).$$

Az  $EOF$  egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója a befogó  $\sqrt{2}$ -szerese,

$$EF = OF \cdot \sqrt{2} \approx 34,77 \text{ cm}.$$

Az  $EFGH$  négyzet kerülete:

$$K_{EFGH \text{ négyzet}} = 4 \cdot EF \approx 4 \cdot 34,77 = 139,08 \text{ cm}.$$

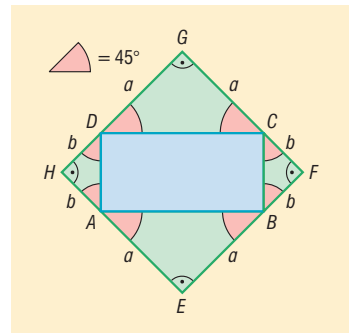
**1362** Az ábrán látható  $ABCD$  téglalap oldalaira rajzolt egyenlő szárú derékszögű háromszögek csúcsai  $E, F, G$  és  $H$ .

Mivel az egyenlő szárú derékszögű háromszög alapon fekvő szögei  $45^\circ$ -osak,  $F, C$  és  $G$  pontok egy egyenesbe esnek. Hasonlóan igaz ez a többi ponthármas esetében is.

A téglalap és a háromszögek négyszöget határoznak meg.

Ennek az  $EFGH$  négyszögnek minden szöge derékszög, tehát téglalap.

Az ábra jelöléseit használva az  $EFGH$  téglalap minden oldala  $a + b$  hosszúságú, tehát négyzet.





**1363** Az  $ABCD$  négyszög oldalainak felezőpontjai az ábra jelöléseit használva  $E, F, G$  és  $H$ . A szemben levő oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok metszéspontja  $M$ .

Az  $AME$  és a  $BME$  háromszögek területe egyenlő, mivel  $AE$ , illetve  $BE$  oldalai egyenlő hosszúak, valamint ezen oldalakhoz tartozó magasságok megegyeznek.

A többi háromszög esetében is ezt végiggondolva adódik, hogy:

$$t_{MEBF} \text{ négyszög} + t_{MGDH} \text{ négyszög} = t_{MFCG} \text{ négyszög} + t_{MHAE} \text{ négyszög}$$

A feladatban három négyszög területét adták meg, így a hiányzó negyedik négyszög területére a következő összefüggések valamelyike érvényes:

$$15 + 20 = 25 + x \Rightarrow x = 10 \Rightarrow t_{ABCD} \text{ négyszög} = 70 \text{ cm}^2,$$

$$15 + 25 = 20 + y \Rightarrow y = 20 \Rightarrow t_{ABCD} \text{ négyszög} = 80 \text{ cm}^2,$$

$$25 + 20 = 15 + z \Rightarrow z = 30 \Rightarrow t_{ABCD} \text{ négyszög} = 90 \text{ cm}^2.$$

A négyszög területe lehet 70, 80 vagy 90  $\text{cm}^2$ .

**1364** Az átlók metszéspontja a megfelelő pont.

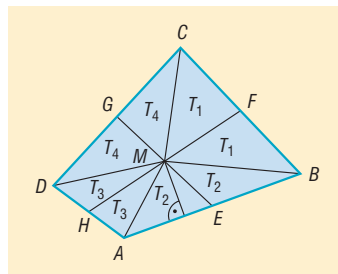
A négyszög csúcsai legyenek  $A, B, C$  és  $D$ . A sík egy  $P$  pontjára igaz, hogy  $PA + PC \geq AC$ , és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha  $P$  pont rajta van az  $AC$  átlón;

Hasonlóan  $PB + PD \geq BD$ , és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha  $P$  pont rajta van a  $BD$  átlón.

Ebből következik, hogy

$$PA + PC + PB + PD \geq AC + BD.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha  $P$  rajta van az  $AC$ , illetve a  $BD$  átlók mindegyikén, vagyis  $P$  pont éppen az átlók metszéspontja.



## Sokszögek – megoldások

**1365** A helyesen kitöltött táblázat:

A sokszög oldalainak száma	A sokszög egyik csúcsából kiinduló átlóinak a száma	A sokszög belső szögeinek összege
10	7	1440°
18	15	2880°
24	21	3960°
$n$	$n - 3$	$(n - 2) \cdot 180^\circ$
$a + 3$	$a$	$(a + 1) \cdot 180^\circ$
$\frac{\varphi}{180^\circ} + 2$	$\frac{\varphi}{180^\circ} - 1$	$\varphi$

**1366** Egy  $n$  oldalú konvex sokszög egy külső szöge mindig kisebb, mint  $180^\circ$ , és a belső szögeinek összege  $180^\circ$  egész számú többszöröse:  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

Mivel  $2283^\circ = 12 \cdot 180^\circ + 123^\circ = (14 - 2) \cdot 180^\circ + 123^\circ$ , a külső szög csak  $123^\circ$  lehet, és a sokszög 14 oldalú.

**1367** Az  $a)$  és  $c)$  igaz, a  $b)$  és  $d)$  hamis.



1368 A helyesen kitöltött táblázat:

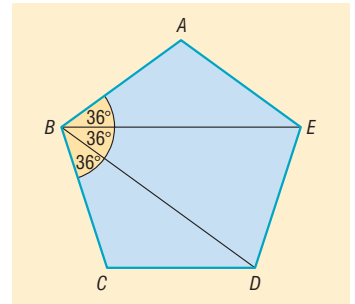
A szabályos sokszög oldalainak száma	A szabályos sokszög egy belső szöge	A szabályos sokszög egy külső szöge
20	$162^\circ$	$18^\circ$
10	$144^\circ$	$36^\circ$
9	$140^\circ$	$40^\circ$
$n$	$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$	$\frac{360^\circ}{n}$
$\frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$	$\alpha$	$180^\circ - \alpha$
$\frac{360^\circ}{\beta}$	$180^\circ - \beta$	$\beta$

1369 Egy konvex hatszög átlóinak legfeljebb 15 darab csúcsoktól különböző metszéspontja lehet.

1370 Egy szabályos hatszög átlóinak pontosan 13 darab csúcsoktól különböző metszéspontja van.

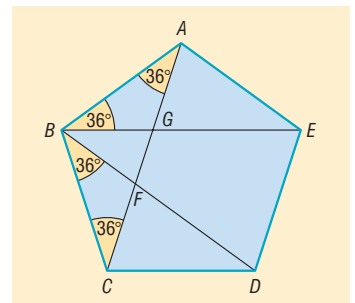
1371 A legrövidebb átló és a szabályos hatszög két oldala olyan egyenlő szárú háromszöget határoz meg, amelynek szárszöge  $120^\circ$ . Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1372 A szabályos ötszög egy csúcsából kiinduló átlói  $36^\circ$ -os szöget zárnak be.



1373 Az 1372. feladat alapján  $\angle ABG = \angle GAB = 36^\circ$ . A  $\triangle BGF$  a  $\triangle BGA$  háromszög külső szöge, tehát  $36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$ . Ugyanígy megmutatható, hogy  $\angle GFB = 72^\circ$ .

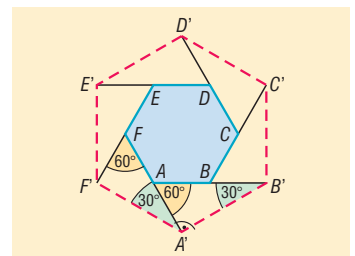
Tehát a  $\triangle BGF$  háromszög szögei:  $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ .



1374 a) Az  $ABCDEF$  szabályos hatszög egy külső szöge  $\angle F'FA = 60^\circ$  és  $FA = 2FF'$ . Ebből következik, hogy az  $\triangle F'FA$  háromszög fél szabályos háromszög, amelynek az  $A'$ -nél lévő szöge  $30^\circ$ .

Ugyanígy az  $\triangle A'AB'$  háromszög is fél szabályos háromszög, és az  $A'$ -nél lévő szöge  $90^\circ$ . Ez azt jelenti, hogy az  $A'B'C'D'E'F'$  hatszögnek az  $A'$ -nél lévő szöge  $30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ -os.

A hatszög többi szögéről hasonló módon belátható, hogy szintén  $120^\circ$ -os.





b) A keletkezett hatszög minden oldala egy 24 cm oldalú szabályos háromszög magassága, vagyis

$$24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \sqrt{3} \text{ cm.}$$

Az  $AB'C'D'E'F'$  hatszög minden szöge és minden oldala egyenlő, tehát szabályos. Így a kerület:

$$K_{AB'C'D'E'F' \text{ hatszög}} = 6 \cdot 12 \cdot \sqrt{3} \approx 124,71 \text{ cm.}$$

c) Az  $AB'C'D'E'F'$  hatszög területe 6 darab  $12 \cdot \sqrt{3}$  cm oldalú szabályos háromszög területének az összege:

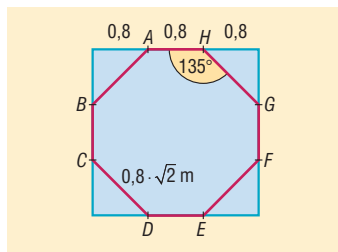
$$T_{AB'C'D'E'F' \text{ hatszög}} = 6 \cdot \frac{(12 \cdot \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 648 \cdot \sqrt{3} \approx 1122,37 \text{ cm}^2.$$

**1375** a) A nyolcszög minden szöge  $135^\circ$ .

b) Nem szabályos a nyolcszög, mert oldalai nem egyenlő hosszúak. Ugyanis  $BC$  a négyzet oldalának harmadrésze,  $AB$  pedig a harmadrész  $\sqrt{2}$ -szöröse.

c) A kerület:

$$K_{\text{nyolcszög}} = 4 \cdot 0,8 \cdot (1 + \sqrt{2}) \approx 7,73 \text{ m.}$$



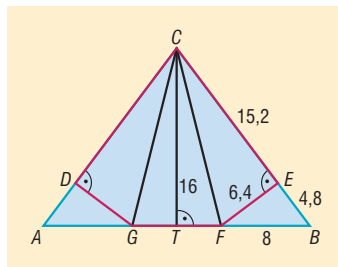
d) A nyolcszög területét megkapjuk úgy, hogy az eredeti négyzet területéből kivonjuk két  $0,8$  m oldalú négyzet területét.

$$T_{\text{nyolcszög}} = 2,4^2 - 2 \cdot 0,8^2 = 4,48 \text{ m}^2.$$

**1376** Legyen  $T$  az  $AB$  alap felezéspontja. A Pitagorasz-tétel alapján a  $BCT$  derékszögű háromszögből  $BC = 20$  cm.

Az  $FBC$  háromszög  $FB$  oldala  $8$  cm, a hozzá tartozó  $CT$  magasság  $16$  cm. Az  $FBC$  háromszög  $BC$  oldala  $20$  cm, a hozzá tartozó magassága  $FE$ . Ennek a háromszögnek a területe kétféleképpen számolható:

$$\frac{8 \cdot 16}{2} = \frac{FE \cdot 20}{2} \Rightarrow FE = 6,4 \text{ cm.}$$



A  $BEF$  derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$EB = \sqrt{8^2 - 6,4^2} = 4,8 \Rightarrow CE = 15,2 \text{ cm.}$$

Hasonlóan  $DG = 6,4$  cm és  $DC = 15,2$  cm.

A  $CEFGD$  ötszög területe a  $GDC$ ,  $FEC$  és  $FGC$  háromszögek területének összege:

$$T_{CEFGD \text{ ötszög}} = \frac{8 \cdot 16}{2} + 2 \cdot \frac{6,4 \cdot 15,2}{2} = 161,28 \text{ cm}^2.$$

A  $CEFGD$  ötszög kerülete:

$$K_{CEFGD \text{ ötszög}} = GF + 2 \cdot (FE + CE) = 51,2 \text{ cm.}$$

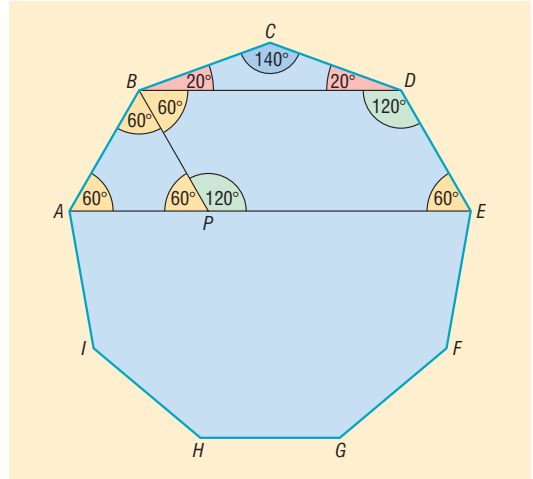
**1377** A 25 háromszög belső szögeinek összege  $25 \cdot 180^\circ$ . Az ötszög belsejében lévő egy háromszög-csúcsnál a szögek összege  $360^\circ$ . Ha  $n$  csúcs esik az ötszögön belül, akkor a háromszög belső szögeinek összegét úgy is számolhatjuk, hogy  $360^\circ$   $n$ -szereséhez hozzáadjuk az ötszög belső szögeinek összegét. Így  $n$ -re a következő egyenlethez jutunk:

$$25 \cdot 180^\circ = n \cdot 360^\circ + 540^\circ \Rightarrow n = 11.$$

Az ötszög belsejébe 11 háromszög-csúcs esik.



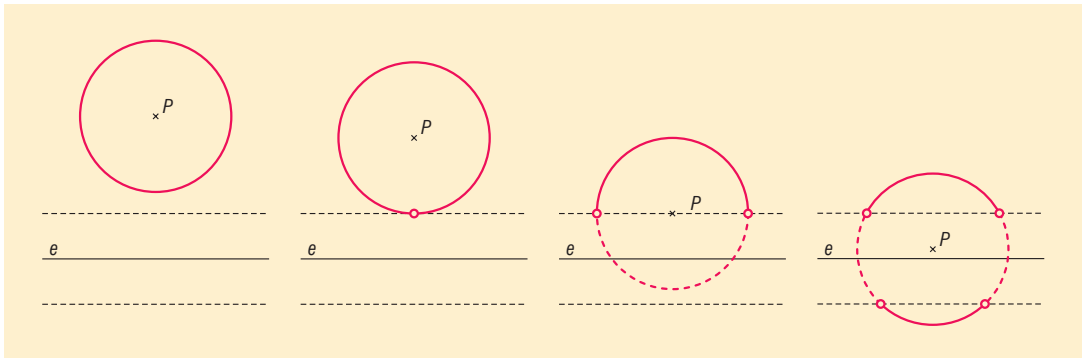
**1378** Az ábrán látható  $ABCDEFGHI$  szabályos kilencszög egy belső szöge  $140^\circ$ . Egyik legrövidebb átlója  $BD$ , egyik leghosszabb átlója pedig  $AE$ . A  $BCD$  egyenlő szárú háromszög szárszöge egyúttal a szabályos kilencszög egyik belső szöge is, tehát  $140^\circ$ . Továbbá:  $\angle BDC = \angle CBD = 20^\circ$ , valamint  $\angle BDE = \angle DBA = 140^\circ - 20^\circ = 120^\circ$ . A szabályos kilencszög  $C$  csúcsán áthaladó szimmetriatengelyére merőleges a sokszög  $BD$  és  $AE$  átlója, tehát az  $ABDE$  négyszög olyan húrtrapéz, amelynek belső szögei  $60^\circ$ , illetve  $120^\circ$ . Legyen az  $AE$  leghosszabb átlónak  $P$  egy olyan belső pontja, amelyre igaz, hogy a  $BDEP$  négyszög paralelogramma. A szögekből adódóan az  $APB$  háromszög szabályos, és az oldala éppen a kilencszög egy oldala.



Mivel a paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak,  $EP$  a legrövidebb átlóval egyenlő hosszú, és a szabályos háromszögből adódóan  $PA$  a szabályos kilencszög oldala. Mivel  $AE = AP + PE$ , az állításunk igaz.

## Nevezetes ponthalmazok – megoldások

**1379** Legyen az adott pont  $P$ , az adott egyenes  $e$ .



Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm-nél nagyobb, akkor az adott tulajdonságú pontok a  $P$  körül írt 5 cm sugarú körvonal pontjai.

Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a  $P$  körül írt 5 cm sugarú körvonal pontjai, kivéve a kör  $e$ -hez legközelebbi pontját.

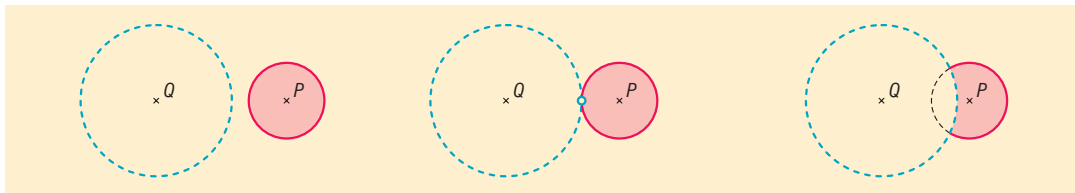
Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm-nél kisebb, de 2 cm-nél nem kisebb, akkor az adott tulajdonságú pontok a  $P$  körül írt 5 cm sugarú körvonal egy nyílt ívének pontjai.

Ha a pont és egyenes távolsága 2 cm-nél kisebb, akkor az adott tulajdonságú pontok a  $P$  körül írt 5 cm sugarú körvonal két nyílt ívének pontjai.

**1380** A pontok halmaza az a körvonal, amelynek középpontja a két koncentrikus kör közös középpontja, sugara a két kör sugarának számtani közepe.

**1381** Ha  $P$  és  $Q$  távolsága nagyobb, mint 10 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a  $P$  körül írt 4 cm sugarú zárt körlap pontjai.

Ha  $P$  és  $Q$  távolsága 10 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a  $P$  körül írt 4 cm sugarú zárt körlap pontjai, kivéve a körlap  $Q$ -hoz legközelebb eső pontját.



Ha  $P$  és  $Q$  távolsága kisebb, mint 10 cm, de nagyobb, mint 2 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a  $P$  körül írt 4 cm sugarú zárt körlapnak az ábrán látható pontjai.

Ha  $P$  és  $Q$  távolsága 2 cm-nél kisebb vagy egyenlő, nincs ilyen pont.

**1382** Egy szakasz mint alap fölé emelt egyenlő szárú háromszög harmadik csúcsa, egyenlő távol van az alap két végpontjától, így a harmadik csúcs az alap felezőmerőlegesén van.

Ha a két szakasz nem párhuzamos, akkor a két szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja az egyenlő szárú háromszögek közös pontja.

Ha a két szakasz párhuzamos, és felezőmerőlegeseik egybeesnek, akkor a közös felezőmerőleges minden pontja megfelel a közös csúcsnak, kivéve a két szakasz felezőpontja.

Ha a két szakasz párhuzamos, és felezőmerőlegeseik párhuzamosak, de nem esnek egybe, akkor nem lehet ilyen háromszögeket szerkeszteni.

**1383** Egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így a szerkesztendő kör középpontja rajta van az egyenesre  $E$ -ben állított merőlegesén.

Ismert, hogy egy kör hújának felezőmerőlegese tartalmazza a kör középpontját, így a  $PE$  szakasz felezőmerőlegese tartalmazza a szerkesztendő kör középpontját.

Ezek alapján a szerkesztés menete:

1. az adott egyenesre  $E$ -ben merőlegest állítunk;
2. megszerkesztjük a  $PE$  szakasz felezőmerőlegesét;
3. a két egyenes metszéspontja lesz a kör középpontja, sugara a középpont és  $E$  távolsága;
4. ez alapján a körvonal megrajzolható.

A feladatnak mindig egy megoldása van.

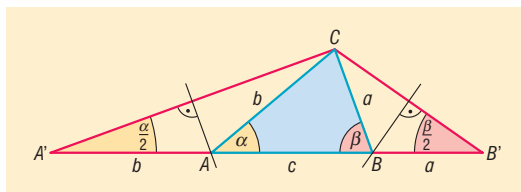
**1384** Az 1314. feladat alapján történhet a szerkesztés.

Mivel az  $A'AC$  háromszög egyenlő szárú, így az  $A$  csúcs rajta van az  $AC$  szakasz felezőmerőlegesén. Hasonlóan a  $B$  csúcs rajta van a  $B'C$  szakasz felezőmerőlegesén.

A szerkesztés menete:

1. Szerkesztjük meg azt az  $A'B'C$  háromszöget, amelynek az  $A'B'$  oldala a kerülettel egyenlő hosszú, és az  $A'$ -nél lévő szöge  $\frac{\alpha}{2}$ , a  $B'$ -nél lévő szöge  $\frac{\beta}{2}$ .
2. Az  $AC$  szakasz felezőmerőlegesének az  $A'B'$ -vel való metszéspontja adja  $A$  pontot.
3. A  $B'C$  szakasz felezőmerőlegesének az  $A'B'$ -vel való metszéspontja adja  $B$  pontot.

A feladatnak mindig van megoldása, ha a két megadott szög összege  $180^\circ$ -nál kisebb.

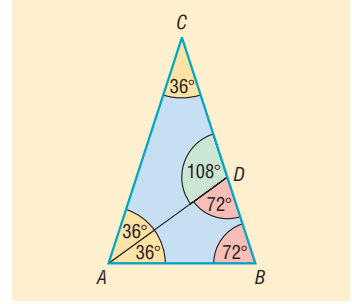




**1385** Kettő olyan pont van, amelyik mind a három egyenestől egyenlő távol van.

**1386** Az  $AD$  átfogójú fél szabályos háromszögből adódóan  $AD = 10$  cm.

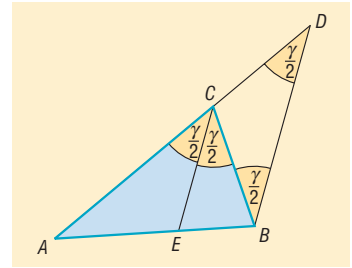
**1387** Ha a szárszög  $36^\circ$ , akkor az alapon fekvő szögek  $72^\circ$ -osak. Az alapon lévő egyik szög szögfelezője az ábrán látható módon két egyenlő szárú háromszögre bontja az eredeti háromszöget.



**1388** Mivel  $CE$  párhuzamos  $BD$ -vel, párhuzamos szárú szögek keletkeznek. A  $CBD$  szög és a  $CDB$  szög is a  $C$  csúcsnál lévő szög fele, vagyis a  $BCD$  háromszög egyenlő szárú. ( $\Rightarrow$ )

Egy háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, tehát  $DC = BC$ .

**1389** A négyzet átfogóra eső csúcsa egyenlő távol van a két befogótól, így rajta van a derékszögű csúcs szögfelezőjén. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.



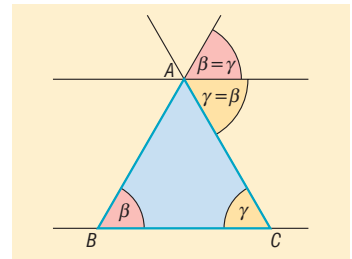
**1390** A félkör középpontja, amely a háromszög egyik oldalára esik, egyenlő távol van a másik két oldaltól, így a félkör középpontja rajta van a másik két oldal által bezárt belső szög szögfelezőjén. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

**1391** Tekintsük az ábra jelöléseit. ( $\Rightarrow$ )

A párhuzamosságból következik, hogy az  $A$ -nál lévő külső szög éppen a  $B$ -nél, illetve a  $C$ -nél lévő belső szögeknek is kétszerese. Ebből adódik, hogy a  $B$ -nél és  $C$ -nél levő belső szögek egyenlők.

Az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú és  $AB = AC$ .

**1392** A szögfelezők által bezárt szög  $57^\circ$ .



**1393** a) A másik két belső szög szögfelezőinek hajlásszöge  $66^\circ$ .

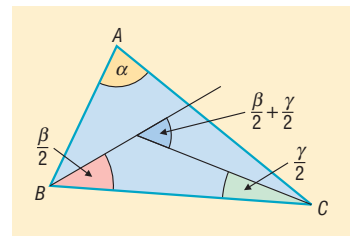
b) Az  $ABC$  háromszög szögei a szokásos jelölésekkel legyen  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$ . A  $\beta$  és  $\gamma$  szögek szögfelezőinek metszéspontját jelölje  $O$ .

Az  $OBC$  háromszög  $B$ -nél és  $C$ -nél lévő belső szöge  $\frac{\beta}{2}$  és  $\frac{\gamma}{2}$ .

Ennek a háromszögnek az  $O$  csúcsnál levő külső szöge  $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ , ami éppen a két szögfelező hajlásszöge.

Mivel az  $ABC$  háromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$ , a két szögfelező hajlásszöge:

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$



**1394** A külső szögek rendre  $132^\circ$ ,  $106^\circ$ , illetve  $122^\circ$ . A külső szögfelezők által meghatározott háromszög belső szögei ezek felének páronként vett összegét egészítik ki  $180^\circ$ -ra. Így a szögek:

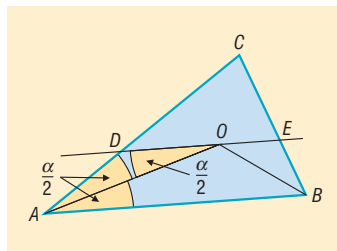
$$180^\circ - \frac{132^\circ + 106^\circ}{2} = 61^\circ, \quad 180^\circ - \frac{132^\circ + 122^\circ}{2} = 53^\circ, \quad 180^\circ - \frac{122^\circ + 106^\circ}{2} = 66^\circ.$$

**1395** Az  $ABC$  háromszög  $A$  és  $B$  csúcsnál lévő belső szögfelezők metszéspontja legyen  $O$ . Mivel  $DE$  párhuzamos  $AB$ -vel, a  $DOA$  és az  $OAB$  szögek váltószögek:

$$\angle DOA = \angle OAB = \angle DAO = \frac{\alpha}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az  $ADO$  háromszög egyenlő szárú. Egy háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, ezért  $DO = DA = 5$  cm. Ugyanígy adódik, hogy  $OE = EB = 4$  cm.

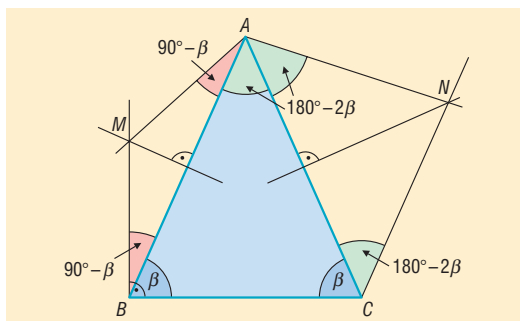
Tehát a  $DE$  szakasz hossza 9 cm.



**1396** Ha az ábrán látható  $ABC$  háromszögben az  $\angle ABC = \angle ACB = \beta$ , akkor a  $\angle BAC = 180^\circ - 2 \cdot \beta$ . Mivel az  $MB$  merőleges a háromszög  $BC$  oldalára,  $\angle ABM = 90^\circ - \beta$ .

Az  $M$  pont rajta van az  $AB$  szakasz felezőmerőlegesén, tehát az  $AMB$  háromszög egyenlő szárú:  $\angle MBA = \angle BAM = 90^\circ - \beta$ .

Az  $NC$  párhuzamos  $AB$ -vel, tehát az  $ACN$  és a  $BAC$  szögek váltószögek:  $\angle BAC = \angle ACN = 180^\circ - 2 \cdot \beta$ .



Az  $N$  pont rajta van az  $AC$  szakasz felezőmerőlegesén, tehát az  $ACN$  háromszög is egyenlő szárú:  $\angle ACN = \angle CAN = 180^\circ - 2 \cdot \beta$ .

Az  $A$  csúcsnál lévő szögek összege  $2 \cdot (180^\circ - 2 \cdot \beta) + 90^\circ - \beta = 450^\circ - 5 \cdot \beta$ , ami éppen  $120^\circ$  a feladat feltétele szerint. Ebből  $\beta = 66^\circ$ .

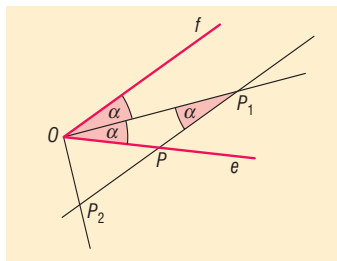
A háromszög szögei:  $66^\circ$ ,  $66^\circ$ ,  $48^\circ$ .

**1397** A szög csúcsa legyen  $O$ , a szögcsák pedig  $e$ , illetve  $f$  félegyenesek. A  $P$  pont az  $e$  szögcsák egy tetszőleges pontja.

Legyen  $P_1$  a szögtartományban az a pont, amelyre  $PP_1$  párhuzamos az  $f$  szögcsákkal és  $PP_1 = OP$ .

Az  $OPP_1$  háromszög egyenlő szárú, és az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak:  $\angle P_1OP = \angle P_1PO = \alpha$ .

A párhuzamosság miatt az  $f$  szögcsák az  $OP_1$  egyenesével, szintén  $\alpha$  nagyságú szöget zár be, tehát  $P_1$  pont rajta van a szögfelezőn.



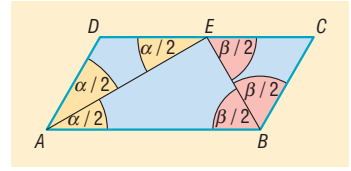
Tekintsük a szögfelező egy tetszőleges  $Q$  pontját. Húzzunk párhuzamost  $Q$ -n keresztül az  $f$  szögcsákkal, és vegyük a párhuzamos és  $e$  egyenes metszéspontját. A metszéspontból kiindulva, a feladat utasításait követve éppen a  $Q$  ponthoz jutunk. Tehát a szögfelező minden pontja hozzá tartozik az adott tulajdonságú pontok halmazához.

Legyen  $P_2$  a szögtartományon kívül az a pont, amelyre  $PP_2$  párhuzamos az  $f$  szögcsákkal és  $PP_2 = OP$ . Belátható, hogy a  $P_2$  pontok halmaza az adott szög mellékszögének szögfelezője.

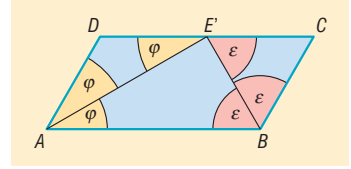
A feladatban szereplő pontok halmaza a szögtartomány szögfelezője és a mellékszögének szögfelezője. (A szög és mellékszög közös szögcsákra tartalmazza  $P$ -t.)



**1398** Ha a szögfelezők a  $DC$  oldal  $E$  felezőpontjában metszik egymást, akkor a szögfelezés miatt  $\angle BAE = \angle EAD = \frac{\alpha}{2}$ . Mivel a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, a  $BAE$  és a  $DEA$  szögek váltószögek, tehát  $\angle BAE = \angle DEA = \frac{\alpha}{2}$ . Ez azt jelenti,



hogy az  $AED$  háromszög egyenlő szárú, vagyis  $DE = AD$ . Ugyanígy  $BC = CE$ , tehát  $DC = 2BC$ . Ha  $DC = 2BC$ , és  $E'$  pont a  $DC$  felezőpontja, akkor  $AD = DE'$ , vagyis az  $ADE'$  háromszög egyenlő szárú. A háromszögben az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, tehát  $\angle DAE' = \angle DE'A = \varphi$ . Mivel  $AB$  párhuzamos  $DC$ -vel,  $\angle DE'A$  és  $\angle E'AB$  szögek váltószögek, tehát  $\angle DE'A = \angle E'AB = \varphi$ . Hasonlóan  $\angle ABE' = \angle E'BC = \varepsilon$ .



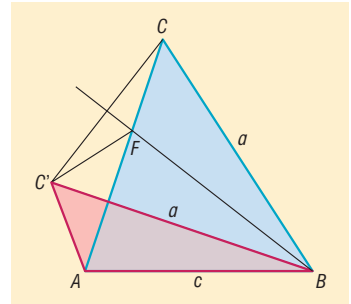
Tehát  $AE'$  a  $\angle BAD$ , és  $BE'$  az  $\angle ABC$  szög szögfelezője, vagyis az  $\angle ABC$  és  $\angle BAD$  szögek szögfelezői  $DC$  felezőpontjában,  $E'$ -ben metszik egymást.

**1399** Az  $ABC$ , illetve az  $ABC'$  háromszögekben  $BC = BC'$ . A két háromszög közül az elsőben legyen nagyobb a  $B$ -nél lévő szög, mint a másodikban. Bizonyítandó, hogy  $AC' < AC$ .

A  $BC'C$  szög felezője az  $ABC'$  háromszögon kívül halad, és messe az  $AC$  oldalt egy  $F$  pontban. Ekkor igaz, hogy  $CF = C'F$ . Az  $AC'F$  háromszögben felírva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$AC' < AF + FC' = AF + FC = AC.$$

Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

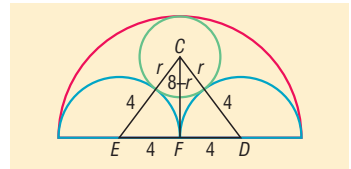


**1400** Használjuk a következő ábra jelöléseit.

A kis kör sugara legyen  $r$ .

A kisebbik félkörök sugara 4 cm, tehát  $FE = FD = 4$  cm.

A kis kör belülről érinti a nagy félkört, ezért középpontjaik távolsága:  $CF = 8 - r$ .



A kis kör kívülről érinti a kisebbik félköröket, ezért középpontjaik távolsága:  $CE = CD = 4 + r$ .

A  $CFE$  derékszögű háromszögben felírva Pitagorasz tételét:

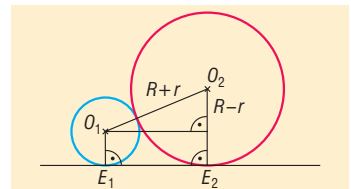
$$(4 + r)^2 = (8 - r)^2 + 4^2 \Rightarrow r = \frac{8}{3}$$

A legkisebb kör sugara  $\frac{8}{3}$  cm.

**1401** a) Az  $r = 4$  cm sugarú kör középpontja  $O_1$ , az egyenessel vett érintési pontja  $E_1$ .

Az  $R = 9$  cm sugarú kör középpontja  $O_2$ , az egyenessel vett érintési pontja  $E_2$ .

Az  $O_1O_2E_2E_1$  négyszög derékszögű trapéz, alapjai  $r$  és  $R$ . A nem derékszögű szár hossza  $r + R$ .



A derékszögű szárat az ábra alapján Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$E_1E_2 = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = \sqrt{4 \cdot R \cdot r} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} \Rightarrow E_1E_2 = 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 9} = 12 \text{ cm.}$$

Az érintési pontok távolsága 12 cm.



b) Ha két  $r$  és  $R$  sugarú kör érint egy egyenest és érintik egymást is, akkor az előző gondolatmenet alapján az érintési pontok távolsága:

$$E_1E_2 = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}.$$

Ha a keresett kör  $x$  sugara kisebb mind a két kör sugaránál, és az egyenessel vett érintési pontja  $E_3$ , akkor az előzőek alapján:

$$E_1E_3 = 2 \cdot \sqrt{4x} = 4 \cdot \sqrt{x}, \quad E_3E_2 = 2 \cdot \sqrt{9x} = 6 \cdot \sqrt{x}, \quad E_1E_2 = 12.$$

Így:

$$E_1E_3 + E_3E_2 = E_1E_2 \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{x} + 6 \cdot \sqrt{x} = 12 \Rightarrow x = 1,44 \text{ cm}.$$

A kisebb keresett kör sugara 1,44 cm.

Ha a keresett kör  $y$  sugara nagyobb mind a két kör sugaránál, és az egyenessel vett érintési pontja  $E_4$ , akkor az előzőek alapján:

$$E_4E_1 = 2 \cdot \sqrt{4y} = 4 \cdot \sqrt{y},$$

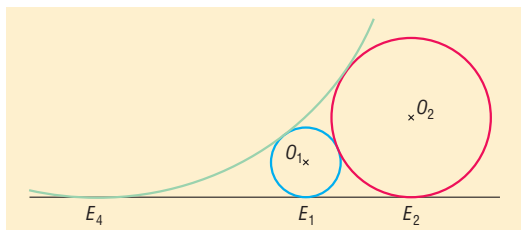
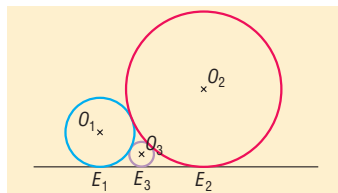
$$E_4E_2 = 2 \cdot \sqrt{9y} = 6 \cdot \sqrt{y},$$

$$E_1E_2 = 12.$$

Így:

$$E_4E_2 - E_4E_1 = E_1E_2 \Rightarrow 6 \cdot \sqrt{y} - 4 \cdot \sqrt{y} = 12 \Rightarrow y = 36 \text{ cm}.$$

A nagyobb keresett kör sugara 36 cm.



## Háromszög beírt és köré írt köre – megoldások

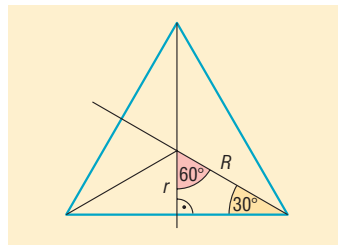
**1402** A beírt kör középpontját a belső szögfelezők metszéspontja, a körülírt kör középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontja adja.

**1403** a) A szerkesztés elvégezhető, ha figyelembe vesszük, hogy ha a körülírt kör középpontját összekötjük a csúcsokkal, akkor ezek a sugarak  $120^\circ$ -os szöveget zárnak be egymással.

b) A szerkesztés elvégezhető, ha figyelembe vesszük, hogy ha a beírt kör középpontját összekötjük az oldalakkal vett érintési pontokkal, akkor ezek a sugarak  $120^\circ$ -os szöveget zárnak be egymással.

**1404** A szabályos háromszög oldalfelező merőlegesei és belső szögfelezői egybeesnek, így a háromszög beírt és köré írt körének középpontja is ugyanaz a pont. Ez a pont a háromszög két csúcsával egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek szárszöge  $120^\circ$ . Ezt a háromszöget az alaphoz tartozó magassága két fél szabályos háromszögre bontja, amelyről tudjuk, hogy a rövidebb befogója fele az átfogónak.

Mivel az átfogó éppen a körülírt kör sugara, a befogó a beírt kör sugara, a feladat állítása igaz.



**1405** Az 1404. feladatból következik, hogy az  $a$  oldalú szabályos háromszög magassága éppen a beírt és körülírt kör sugarának összege, és hosszuk aránya  $1 : 2$ .

Tehát a beírt kör sugara:  $\frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$ , a körülírt kör sugara:  $\frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$ .



**1406** Ha egy háromszög köré írt körének sugara  $R$ , középpontja  $O$ , egy oldala  $a$ , akkor az  $O$  pontnak az  $a$  oldaltól vett  $d$  távolságát Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk:

$$d = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Mivel egy adott háromszög esetén  $R$  állandó, a gyök alatti mennyiség akkor a legkisebb, ha  $a$  a legnagyobb.

Tehát bebizonyítottuk, hogy egy háromszög köré írt körének középpontja a legnagyobb oldalhoz van a legközelebb.

**1407** A helyesen kitöltött táblázat:

Háromszög kerülete	Háromszög területe	Beírt kör sugara
60 cm	125 cm <sup>2</sup>	$\frac{25}{6}$ cm
30 cm	30 cm <sup>2</sup>	2 cm
$k$	$\frac{k \cdot r}{2}$	$r$

**1408** A befogók legyenek  $a = 30$  cm,  $b = 40$  cm, és a Pitagorasz-tételből az átfogó  $c = 50$  cm.

a) A beírt kör sugarára ismert a következő összefüggés:

$$r = \frac{a + b - c}{2} = 10 \text{ cm.}$$

b) Az átfogóhoz írt kör sugara:

$$r_c = \frac{a + b + c}{2} = 60 \text{ cm.}$$

c) A befogókhoz írt körök sugara:

$$r_a = \frac{a - b + c}{2} = 20 \text{ cm} \quad \text{és} \quad r_b = \frac{b - a + c}{2} = 30 \text{ cm.}$$

**1409** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszögben az ábrának megfelelően  $AB$  az alap,  $F$  az alap felezőpontja.

a) A  $CFB$  háromszögben a Pitagorasz-tételt használva:

$$AB = 2 \cdot FB = 2 \cdot \sqrt{20^2 - 16^2} = 24 \text{ cm.}$$

b) Legyen a szárhoz tartozó magasság  $m$ . Az  $ABC$  háromszög területére igaz:

$$\frac{24 \cdot 16}{2} = \frac{20 \cdot m}{2}.$$

Innen a szárhoz tartozó magasság 19,2 cm.

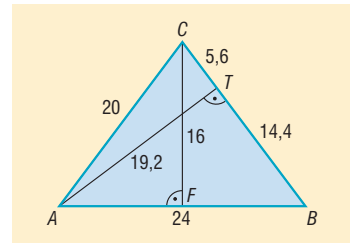
c) A  $BC$  szárhoz tartozó magasság talppontja legyen  $T$ . Az  $ABT$  háromszögben Pitagorasz tétele:

$$TB^2 + 19,2^2 = 24^2 \Rightarrow TB = 14,4 \Rightarrow TC = 20 - 14,4 = 5,6.$$

A szárhoz tartozó magasság a szárat 14,4 és 5,6 cm-re osztja.

d) Ha a beírt kör sugara  $r$ , a háromszög területét kétféleképpen felírhatjuk:

$$\frac{24 \cdot 16}{2} = r \cdot \left(\frac{20 + 20 + 24}{2}\right) \Rightarrow r = 6 \text{ cm.}$$



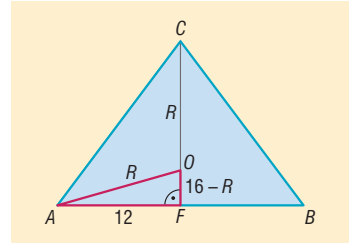
e) Legyen a háromszög köré írható körének sugara  $R$ , a kör középpontja  $O$ . Az  $O$  pont rajta van az alaphoz tartozó magasságon.

Az  $AFO$  derékszögű háromszögben  $OF = 16 - R$ ,  $AO = R$  és  $AF = 12$ .

Pitagorasz tétele az  $AFO$  háromszögre:

$$R^2 = 12^2 + (16 - R)^2.$$

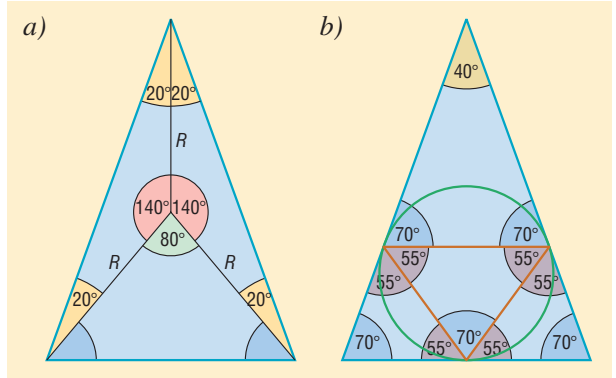
Az egyenletet megoldva:  $R = 12,5$  cm.



1410 A háromszög egyenlő szárú, mert szögeinek nagysága  $70^\circ$ ,  $70^\circ$  és  $40^\circ$ .

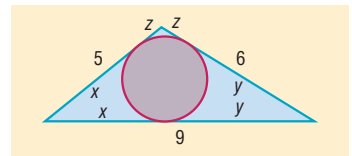
a) A bal oldali ábráról leolvasható, hogy az egyenlő szárú háromszög oldalai  $140^\circ$ ,  $140^\circ$  és  $80^\circ$ -os szögben látszanak a körülírt kör középpontjából.

b) Külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlőségéből az egyenlő szárú háromszögekben adódnak a jobb oldali ábrán látható szögek. Annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt körnek az oldalakkal vett érintési pontjai határoznak meg:  $70^\circ$ ,  $55^\circ$  és  $55^\circ$ .



1411 Az ábra alapján a háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 9 \\ y + z &= 6 \\ x + z &= 5 \end{aligned} \right\}$$



Az egyenletrendszer megoldásai:  $x = 4$ ,  $y = 5$ ,  $z = 1$ .

Tehát az érintési pontok az 5 cm-es oldalt 4 és 1 cm-es szakaszokra, a 6 cm-es oldalt 6 és 1 cm-es szakaszokra, a 9 cm-es oldalt 4 és 5 cm-es szakaszokra osztják.

1412 a) A háromszöget lefedő legkisebb sugarú kör éppen a háromszög köré írt kör.

Az  $ABC$  háromszögben  $AB = 6$  cm,  $BC = AC = 5$  cm.

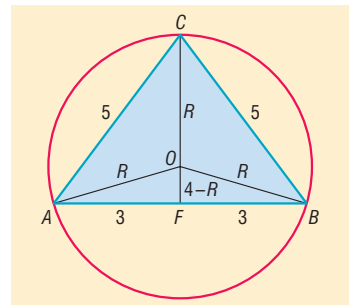
Ha az alap felezőpontja  $F$ , akkor  $AF = 3$  cm. Az  $AFC$  háromszögben Pitagorasz tétele alapján  $CF = 4$  cm.

Legyen az  $ABC$  háromszög köré írt körének sugara  $R$ , a kör középpontja  $O$ . Az  $O$  pont rajta van az  $ABC$  háromszög alapjához tartozó magasságán.

Az  $AFO$  derékszögű háromszögben  $OF = 4 - R$ ,  $AO = R$ , valamint  $AF = 3$ . Pitagorasz tétele erre a háromszögre:

$$R^2 = 3^2 + (4 - R)^2 \Rightarrow R = \frac{25}{8} = 3,125.$$

A háromszöget lefedő körlap sugara legalább 3,125 cm.





b) A beírt kör  $K$  középpontja az  $ABC$  háromszög alaphoz tartozó magasságán van.

Ha a beírt kör sugara  $r$ , a háromszög területét kétféleképpen írhatjuk fel:

$$\frac{4 \cdot 6}{2} = r \cdot \left( \frac{5+5+6}{2} \right) \Rightarrow r = 1,5.$$

Így  $CK = 4 - 1,5 = 2,5$  cm.

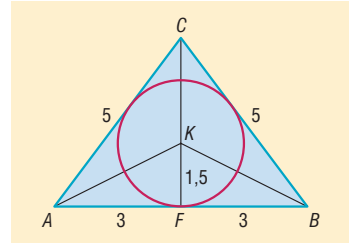
Az  $AKF$  derékszögű háromszögben  $AF = 3$  cm,  $KF = r = 1,5$  cm.

Az  $AKF$  derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AK = \sqrt{3^2 + 1,5^2} \approx 3,35 \text{ cm.}$$

Hasonlóan adódik:  $BK = 3,35$  cm.

A beírt kör középpontja a csúcsoktól 2,5, 3,35 és 3,35 cm-re van.



**1413** a) A doboz alapélének hosszát annak a szabályos háromszögnek az oldala adja, amelybe 13 cm sugarú kör írható. Az 1405. feladat alapján:

$$13 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = \frac{78}{\sqrt{3}} \approx 45,03 \text{ cm.}$$

A háromszög alapú doboz alapéle 45,03 cm.

b) A doboz alapélének hosszát annak a négyzetnek az oldala adja, amelybe 13 cm sugarú kör írható. A négyzet alapú doboz alapéle  $2 \cdot 13 = 26$  cm.

c) Az első esetben az alaplap területe:

$$\frac{\left( \frac{78}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{78^2 \cdot \sqrt{3}}{12} \approx 878,15 \text{ cm}^2,$$

míg a kerülete:

$$3 \cdot \frac{78}{\sqrt{3}} \approx 135,1 \text{ cm.}$$

A második esetben az alaplap területe:

$$26^2 = 676 \text{ cm}^2,$$

a kerülete pedig:

$$4 \cdot 26 = 104 \text{ cm.}$$

Mivel a dobozok magassága egyenlő, a második csomagolási módot érdemes választani.

**1414** Az ábra segítségével a háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján a következő egyenletrendszert kapjuk:

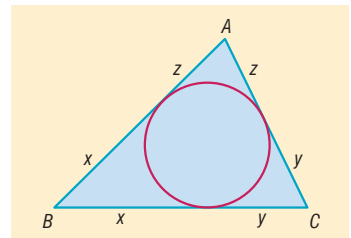
$$\left. \begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ x + z &= c \end{aligned} \right\}$$

Az egyenletrendszer megoldásai ( $s$  a háromszög félkerülete):

$$x = \frac{a+c-b}{2} = s-b, \quad y = \frac{a+b-c}{2} = s-c, \quad z = \frac{b+c-a}{2} = s-a.$$

Tehát az érintési pontok az oldalakat a következő hosszúságú szakaszokra osztják:

$a$  oldalt  $s-b$  és  $s-c$ ;  $b$  oldalt  $s-a$  és  $s-c$ ;  $c$  oldalt  $s-a$  és  $s-b$ .





**1415** Ha a háromszög befogói  $a$ ,  $b$  és az átfogója  $c$ , akkor a Pitagorasz-tétel alapján  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Ha a két befogó mindegyike páratlan, akkor az átfogó páros. Ha a két befogó mindegyike páros, akkor az átfogó páros. Ha a két befogó különböző paritású, akkor az átfogó páratlan. Tehát mindegyik esetben  $a + b - c$  páros.

A derékszögű háromszög beírt körének sugarára ismert a következő összefüggés:

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Mivel a tört számlálója páros,  $r$  egész.

**1416** Az ábrán látható  $ABC$  egyenlő szárú háromszögben:

$$\angle BAC = \angle BCA = 50^\circ.$$

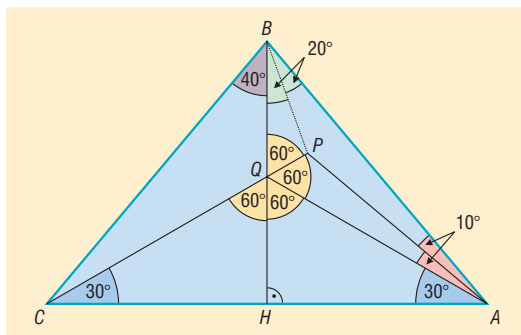
Rajzoljuk meg az alaphoz tartozó  $BH$  magasságot, ennek  $CP$ -vel való metszéspontja legyen  $Q$ .

Az  $ACQ$  egyenlő szárú háromszögben:

$$\angle QAC = \angle QCA = 30^\circ \text{ és } \angle AQC = 120^\circ.$$

A  $QAB$  háromszögben:

$$\begin{aligned} \angle BAQ &= 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ, \\ \angle QBA &= 40^\circ \text{ és } \angle BQA = 120^\circ. \end{aligned}$$



Vizsgáljuk meg a  $QAB$  háromszögben  $PQ$ , illetve  $PA$  mekkora részekre osztja a  $Q$ -nál, illetve az  $A$ -nál lévő szögeket.

Mivel  $\angle PAC = 40^\circ$ ,  $\angle QAP = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$ , a  $PA$  egyenese felezi az  $A$ -nál lévő szöget. Az  $ACQ$  háromszög  $Q$ -nál lévő külső szöge  $\angle PQA = 60^\circ$ , vagyis  $PQ$  egyenese felezi a  $Q$ -nál levő szöget.

Megvizsgálva  $QAB$  háromszögben,  $P$  pont a háromszög két belső szögfelezőjének metszéspontja, amelyen áthalad a harmadik szögfelező is. Tehát:

$$\angle PBQ = \angle PBA = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ.$$

A  $PCB$  háromszögben tehát ismert két szög:

$$\angle PBC = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ \text{ és } \angle PCB = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ.$$

Mivel a háromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$ , a harmadik  $\angle BPC$  szög  $100^\circ$ .

## Thalész tétele – megoldások

**1417** A háromszög köré írt körének sugara:

a)  $4 \cdot \sqrt{10}$  cm;

b)  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ .

**1418** A szerkesztés Thalész tétele segítségével történhet. Az érintőszakasz hossza 6 cm.

**1419** Legyen  $P$  egy olyan pont, amelyből  $r$  hosszúságú érintő húzható az  $O$  középpontú körhöz.

A körön lévő egyik érintési pont, a kör középpontja és  $P$  olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, amely befogóinak hossza  $r$ , ezért Pitagorasz tétele alapján  $P$  pont  $r \cdot \sqrt{2}$  távolságra van a kör középpontjától. A  $P$  rajta van az  $O$  középpontú  $r \cdot \sqrt{2}$  sugarú körön.

Ez utóbbi kör minden pontja rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy abból  $r$  hosszúságú érintő húzható az  $O$  középpontú  $r$  sugarú körhöz.

Az adott pontok halmaza tehát  $O$  középpontú  $r \cdot \sqrt{2}$  sugarú kör.



**1420** Egy egyenlő szárú háromszög  $AB$  alapjának felezőmerőlegese tartalmazza a háromszög  $C$  csúcsát. Ismert, hogy egy tetszőleges háromszög bármely csúcsából kiinduló két oldal egyenese, a beírt kör egy-egy érintője.

Ez alapján a szerkesztés menete:

1. Vegyük fel az egyenlő szárú háromszög  $AB$  alapját, és szerkesszük meg a szakasz felezőmerőlegesét.
2. Szerkesszük meg azt a kört, amely az alapot az alap felezőpontjában érinti, és sugara a beírt kör sugarával egyenlő.
3. Thalész-kör segítségével az alap  $A$  pontján áthaladó, a beírt kört érintő másik egyenest szerkesszük meg.
4. Ez utóbbi érintő és az  $AB$  felezőmerőlegésének metszéspontja adja a háromszög  $C$  csúcsát.

**1421** A deltoid két szemben levő szöge  $90^\circ$ .

**1422** Az átfogó két végpontja mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-kör és az egyenes metszéspontja szolgáltatja a háromszög derékszögű csúcsát.

Ha az adott egyenesre nem illeszkedik az átfogó egyik végpontja sem, akkor:

- ha az adott egyenesnek az átfogó felezőpontjától vett távolsága kisebb, mint az átfogó fele, akkor két háromszöget kapunk megoldásként;
- ha az adott egyenesnek az átfogó felezőpontjától vett távolsága éppen az átfogó fele, akkor egy ilyen háromszöghöz jutunk;
- egyébként a feladatnak nincs megoldása.

Ha az adott egyenes csak az átfogó egyik végpontjára illeszkedik, és nem merőleges a két adott pont által meghatározott egyenesre, akkor egy háromszöget tudunk szerkeszteni, ha merőleges, akkor nincs megoldása a feladatnak.

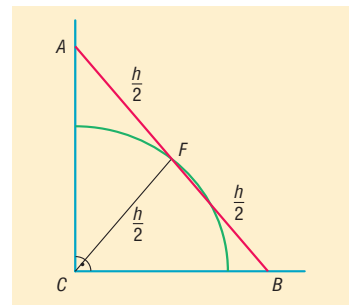
Ha az adott egyenes az átfogó mindkét végpontját tartalmazza, szintén nincs megoldás.

**1423** Legyen a derékszög csúcsa  $C$ , a szakasz végpontjai  $A$  és  $B$ , a szakasz felezőpontja  $F$ .

Thalész tételének megfordítása alapján  $F$  pont az  $ABC$  derékszögű háromszög köré írható körének középpontja. Az  $FC$  távolság a kör sugara, ami éppen az adott  $h$  hosszúságú szakasz hosszának fele. Tehát  $F$  pont rajta van a  $C$  középpontú  $\frac{h}{2}$  sugarú körön.

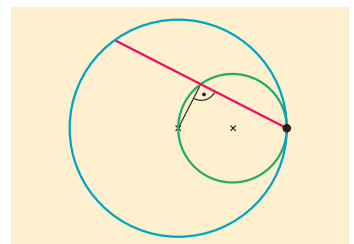
A körnek minden olyan pontja, amely a derékszögű szögtartományba esik, előáll valamely  $h$  hosszúságú szakasz felezőpontjaként.

Az adott tulajdonságú pontok halmaza a derékszögű szögtartományba eső  $C$  középpontú  $\frac{h}{2}$  sugarú negyed körív. (Az ív határoló pontjai is hozzá tartoznak a halmazhoz.)



**1424** Tudjuk, hogy egy kör tetszőleges húrjának felezőmerőlegese áthalad a kör középpontján. Tehát a húr felezőpontja, a kör középpontja és a húr egyik végpontja derékszögű háromszöget határoznak meg.

A kör adott pontján áthaladó húrok felezőpontjai Thalész tételének megfordítása alapján rajta vannak az adott pont és a kör középpontja fölé mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-körön. A Thalész-kör minden, az adott ponttól különböző pontja előáll valamely húr felezőpontjaként.





**1425** Thalész tételének megfordítása alapján a talppontok rajta vannak a  $PC$  szakasz mint átmérő fölé írt Thalész-körön.

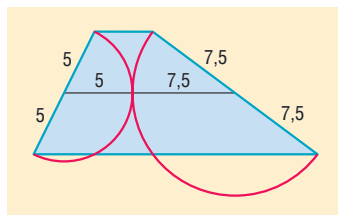
A talppontok, valamint  $P$  és  $C$  pontok egy körön helyezkednek el.

**1426** Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű. A derékszögű háromszög köré írt körének sugara az átfogó hosszának a fele, tehát 6,5 cm.

**1427** Adott átfogójú derékszögű háromszög derékszögű csúcsa rajta van az átfogó mint átmérő fölé írt Thalész-körön.

Egy háromszögnek a területét számolhatjuk az  $\frac{a \cdot m_a}{2}$  képlettel. Mivel az átfogó adott, annak a háromszögnek a legnagyobb a területe, amelyiknek az átfogóhoz tartozó magassága a legnagyobb, vagyis amelyiknek a derékszögű csúcsa legtávolabb van az átfogótól. Ez akkor teljesül, amikor a derékszögű csúcs rajta van az átfogó felezőmerőlegesén, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

**1428** A két Thalész-kör sugara egy-egy szár hosszának a fele: 5 és 7,5 cm. A két Thalész-kör kívülről érinti egymást, tehát középpontjaikat összekötő szakasz hossza, ami a szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza is, éppen a két kör sugarának összege. A szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza tehát 12,5 cm.



**1429** Az egyik kör középpontja legyen  $O_1$ , a másik kör középpontja  $O_2$ , és az egyenessel vett érintési pontjaik rendre  $E_1$  és  $E_2$ . A két kör az  $E$  pontban érintse egymást.

Az  $O_1E_1E_2O_2$  négyszög derékszögű trapéz, amelynek az  $O_1O_2$  szárán  $E$  egy olyan pont, amelyre igaz, hogy

$$O_1E = O_1E_1, \text{ illetve } O_2E = O_2E_2.$$

Az  $O_1EE_1$  egyenlő szárú háromszögben az

$$\angle O_1EE_1 = \frac{180^\circ - \angle E_1O_1E}{2}.$$

Az  $O_2EE_2$  egyenlő szárú háromszögben az

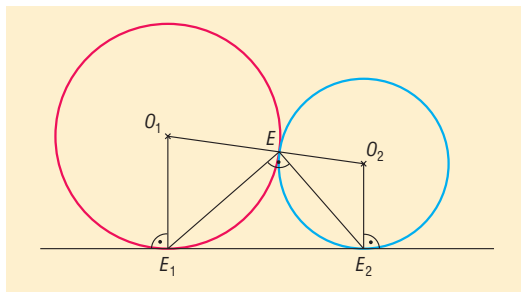
$$\angle O_2EE_2 = \frac{180^\circ - \angle E_2O_2E}{2}.$$

Mivel egy trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege  $180^\circ$ , ez utóbbi két szög összege:

$$\frac{180^\circ - \angle E_2O_2E}{2} + \frac{180^\circ - \angle E_1O_1E}{2} = 180^\circ - \frac{\angle E_2O_2E + \angle E_1O_1E}{2} = 90^\circ.$$

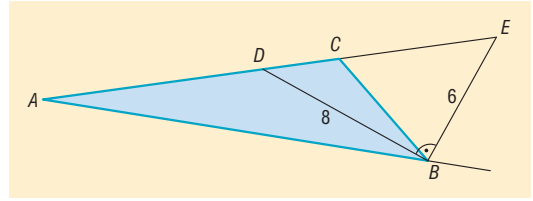
Ez azt jelenti, hogy az  $E_2EE_1$  háromszög derékszögű háromszög. Thalész tételének megfordítása alapján az  $E_2E_1$  átfogó felezőpontja a derékszögű csúcstól fele olyan távolságra van, mint  $E_2E_1$  hossza.

Az érintési pontok által meghatározott  $E_1E_2$  szakasz felezőpontjának az  $E$  ponttól vett távolsága tehát 10 cm.





- 1430 a)  $\angle DBE = 90^\circ$ , mivel egy szögnek és a mellékszögének felezői egymásra merőlegesek. A  $BDE$  háromszögben Pitagorasz tétele alapján a  $DE$  átfogó 10 cm. Thalész tételének megfordítása alapján a  $BDE$  háromszög köré írt körének sugara az átfogó fele: 5 cm.



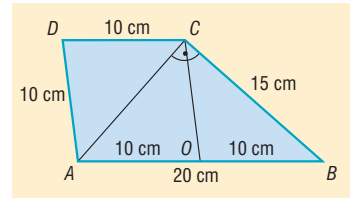
- b) A háromszög területét kétféleképpen számolva:

$$\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{(6 + 8 + 10) \cdot r}{2}$$

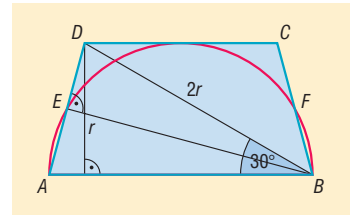
Ebből a beírt kör sugara 2 cm.

- 1431 Az  $ABCD$  trapéz  $AB$  alapjának felezőpontja legyen  $O$ . Az  $AOCD$  négyszög 10 cm oldalhosszúságú rombusz. Az  $O$  pontnak  $A$ -tól,  $B$ -től és  $C$ -től vett távolsága egyaránt 10 cm. Thalész tétele értelmében az  $ABC$  háromszög derékszögű, és  $C$  csúcsnál van a derékszög. Pitagorasz tételét felírva:

$$AC = \sqrt{20^2 - 15^2} = \sqrt{175} \approx 13,23 \text{ cm.}$$



- 1432 A trapéz  $BC$  és  $AD$  szárainak felezőpontjai legyenek rendre  $F$  és  $E$ , valamint az  $AB$  alap fölé mint átmérő fölé írt kör sugara  $r$ . Thalész tétele alapján  $\angle AEB = 90^\circ$ , és mivel  $E$  felezőpont, az  $ABD$  háromszög egyenlő szárú:  $AB = BD = 2r$ . A trapéz  $DC$  alapját érinti a félkör, tehát a trapéz magassága  $r$ . A trapéz  $r$  magassága a  $2r$  hosszú  $BD$  átlóval egy fél szabályos háromszöget határoz meg. Ennek a háromszögnek a kisebbik hegyesszöge  $\angle DBA = 30^\circ$ .



- Az  $ABD$  egyenlő szárú háromszögből:

$$\angle BAD = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

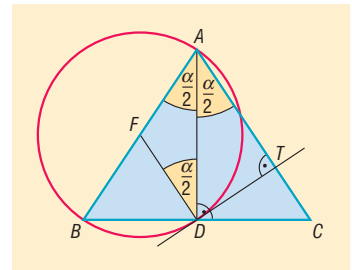
Hasonlóan az  $\angle ABC = 75^\circ$ .

A trapéz szögei:  $75^\circ, 105^\circ, 105^\circ, 75^\circ$ .

- 1433 Az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsánál lévő szöge  $\alpha$ ,  $D$ -ből  $AC$ -re állított merőleges talppontja legyen  $T$ .

A háromszög egyenlő szárú, tehát  $\angle DAB = \angle DAC = \frac{\alpha}{2}$ .

Az  $ABD$  háromszög derékszögű, így körülírható köre az  $AB$  mint átmérő fölé írt Thalész kör. A kör középpontja az  $AB$  átmérő  $F$  felezőpontja, és az  $FA$ , illetve az  $FD$  szakaszok a kör sugarával egyenlő hosszúságúak. Ez alapján  $FAD$  háromszög egyenlő szárú, tehát  $\angle FAD = \angle FDA = \frac{\alpha}{2}$ .



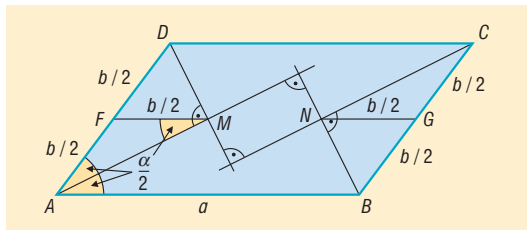
Tehát a  $\angle DAC$  és az  $\angle FDA$  szögek egyenlők, vagyis  $FD$  párhuzamos  $AC$ -vel.

Mivel  $DT$  merőleges  $AC$ -re, merőleges a vele párhuzamos  $FD$ -re is.

Az  $ABD$  háromszög körülírható körének sugara  $FD$ , és láttuk, hogy merőleges  $DT$  egyenesére, tehát a  $DT$  egyenes érinti az  $ABD$  háromszög körülírható körét.



**1434** Mivel a paralelogramma oldalai nem egyenlő hosszúak, két-két szögfelező metszéspontja különböző, tehát a belső szögfelezők metszéspontjai négyszöget határoznak meg.



Két szomszédos belső szög szögfelezői olyan szögeket feleznek, amelyeknek összege  $180^\circ$ , tehát ezek derékszögben metszik egymást, vagyis a négy metszéspont olyan négyszöget határoz meg, amelynek szögei  $90^\circ$ -osak, tehát téglalap.

Legyen  $AD = b$  és az  $AD$  oldal felezéspontja  $F$ , valamint az  $A$  és a  $D$  csúcsonál lévő belső szögfelezők metszéspontja  $M$ .

Az előbbieket alapján az  $AMD$  háromszög derékszögű. Thalész tételének megfordításából következik, hogy  $FM = FA = \frac{AD}{2} = \frac{b}{2}$ . Az  $AFM$  háromszög egyenlő szárú, tehát az  $FAM\hat{=} = AMF\hat{=} = \frac{\alpha}{2}$ .

Az  $AMF$  és az  $MAB$  szögek egyenlők, vagyis  $FM$  párhuzamos  $AB$ -vel.

Ugyanígy belátható a  $B$ , illetve a  $C$  csúcsonál lévő belső szögfelezőknek  $N$  metszéspontjára, hogy az  $N$  pont a  $BD$  oldal  $G$  felezéspontjától  $\frac{b}{2}$  távolságra van, és hogy  $GN$  párhuzamos  $AB$ -vel.

Ha a paralelogramma hosszabbik oldala  $a$ , akkor  $FG = a$  és  $FG$  párhuzamos a paralelogramma  $a$  hosszúságú oldalával.

Tehát az  $M$  és az  $N$  pontok  $FG$  szakaszra esnek, valamint

$$MN = FG - FM - GN = a - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = a - b.$$

Tehát a téglalap átlója  $a - b$  hosszúságú.

## Érintőnéyszög, érintősokszög – megoldások

**1435** A rombusz érintőnéyszög, beírható körének középpontja az átlók metszéspontja. Ebből közvetlenül adódik az állítás.

**1436** A rombusz oldala  $24 \cdot \sqrt{2}$  cm.

**1437** A rombusz szemben lévő oldalai párhuzamosak, tehát a szemben lévő érintési pontokat összekötő szakasz felezőpontja a beírt kör középpontja.

A rombusz magassága mindkét párhuzamos oldalpár esetén ugyanolyan hosszú, tehát a szemben lévő érintési pontokat összekötő szakaszok egyenlő hosszúak.

Tehát a beírt kör érintési pontjai által meghatározott négyszög átlói egyenlők és felezik egymást, vagyis téglalap.

A beírt kör érintési pontjai által meghatározott négyszög átlói ugyanakkora szöveget zárnak be, mint a rombusz hegyesszöge, tehát  $60^\circ$ -ot.

**1438** Kössük össze az  $a, b, c, d$  oldalú érintőnéyszög csúcsait a beírt kör középpontjával. Az így kapott háromszögek mindegyikének magassága a beírt kör sugara. A négy háromszög területének összegeként írjuk fel a négyszög területét:

$$t_{\text{négyszög}} = \frac{a}{2} \cdot r + \frac{b}{2} \cdot r + \frac{c}{2} \cdot r + \frac{d}{2} \cdot r = \frac{a + b + c + d}{2} \cdot r = \frac{k}{2} \cdot r.$$

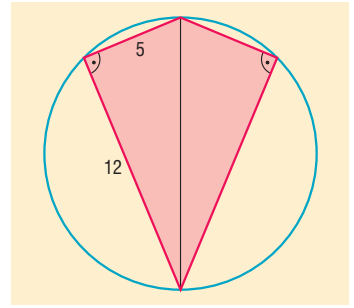


- 1439** Mivel a deltoid köré kör írható, ennek a körnek a középpontja rajta van a szimmetriaátlón. Thalész tételének alapján a deltoid két szomszédos, különböző hosszúságú oldala merőleges egymásra.

Legyen a beírható kör sugara  $r$ . A deltoid területét kétféleképpen számolva:

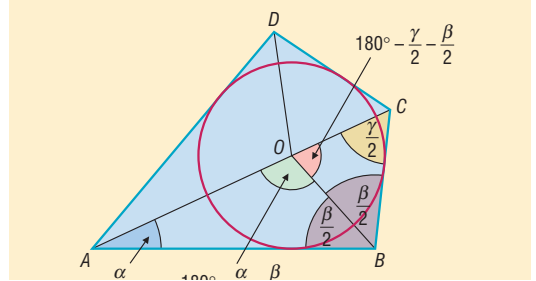
$$\frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 2 = r \cdot \frac{2 \cdot 12 + 2 \cdot 5}{2} \Rightarrow r = \frac{60}{17} \approx 3,53 \text{ cm.}$$

A beírható kör sugara 3,53 cm.



- 1440** a) Vegyük fel a két szomszédos oldal által közbezárt szöveget, és szerkesszük meg a szög szárait érintő, a beírt kör sugarával egyenlő sugarú kört.

A szög száraira mérjük fel a két adott oldal hosszúságát, majd a végpontokból szerkesztünk a körhöz érintőket. Az adott szög száraitól különböző érintők metszéspontja adja a négyszög negyedik csúcsát.



- b) Az  $ABCD$  érintőnégyzög szögfelezőinek metszéspontja  $O$  pont. Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  csúcsoknál lévő szögek rendre  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$ . Az  $AOB$  és  $BOC$  szögek nagysága:

$$\angle AOB = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \text{ illetve } \angle BOC = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Ez alapján, ha adott  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$ , valamint a beírt kör sugara, a szerkesztést így hajthatjuk végre:

1. Vegyük fel a  $B$  csúcsú  $\beta$  szöveget, és szerkesszük meg a szög szárait érintő, a beírt kör sugarával egyenlő sugarú kört.
2. A kör  $O$  középpontjában mérjük fel  $OB$  félegyenesre  $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$  szöveget, így az  $A$  csúcsot kapjuk.
3. A kör  $O$  középpontjában mérjük fel  $OB$  félegyenesre a másik oldalra  $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$  szöveget, így a  $C$  csúcsot kapjuk.
4. A negyedik csúcsot az  $A$  és  $C$  pontokból a körhöz húzott érintők szerkesztésével kapjuk.

- 1441** A harmadik oldal lehet 6 cm, 18 cm vagy 22 cm.

- 1442** Mivel kör írható a hatszögbe:

Behelyettesítve:

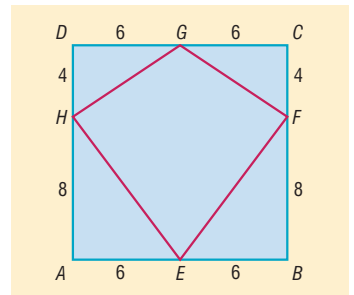
$$AB + CD + EF = BC + ED + FA.$$

$$6 + 8 + 10 = 8 + 7 + FA \Rightarrow FA = 9 \text{ cm.}$$

- 1443** a) Mivel  $HG = FG$  és  $HE = FE$ , a négyszög deltoid.  
 b) A deltoid területét kétféleképpen számolhatjuk. Egyrészt a négyzet területének a fele:  $T = 72 \text{ cm}^2$ .

Másrészt, mivel a deltoid érintőnégyzög, a beírt kör  $r$  sugarával számolva, a terület:

$$T = r \cdot \frac{k}{2} = r \cdot \frac{2 \cdot (HG + HE)}{2} = r \cdot (\sqrt{6^2 + 4^2} + \sqrt{6^2 + 8^2}) = r \cdot (\sqrt{52} + 10).$$





A két érték megegyezik, ezért:

$$r \cdot (\sqrt{52} + 10) = 72 \Rightarrow r = \frac{72}{\sqrt{52} + 10} \approx 4,18 \text{ cm.}$$

A négyszög beírt körének sugara 4,18 cm.

**1444** Használjuk az ábra jelöléseit. Az  $ABCD$  derékszögű trapéz derékszögű szára  $AD$ , alapjai pedig  $AB = 11 \text{ cm}$  és  $CD = 9 \text{ cm}$ . Az érintőnégyszögek tétele alapján:

$$AD + BC = 9 + 11 = 20 \text{ cm} \Rightarrow BC = 20 - AD.$$

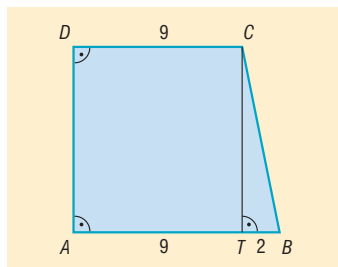
A  $CTB$  háromszög egyik befogója  $CT$ , a másik befogója pedig  $TB = 11 - 9 = 2 \text{ cm}$ . Mivel  $AD = CT$ , a  $BC$  átfogó  $20 - CT$ . A háromszögben felírva Pitagorasz tételét:

$$CT^2 + TB^2 = CB^2.$$

Behelyettesítve és rendezve az egyenletet:

$$CT^2 + 2^2 = (20 - CT)^2 \Rightarrow CT = \frac{396}{40} = 9,9 \text{ cm.}$$

A trapéz magassága 9,9 cm.



**1445** A derékszögű szár 40 cm, a másik szár ennél nagyobb, így csak a rövidebbik alap lehet 30 cm. Az ábra jelöléseit használva, a  $C$  pontból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségéből:

$$CE = CF = 30 - 20 = 10 \text{ cm.}$$

Legyen a  $B$  pontból húzott érintőszakasz hossza  $x$ .  $BE = BG = x$ .

A  $TCB$  háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$(10 + x)^2 = 40^2 + (x - 10)^2.$$

Az egyenletet rendezve  $x = 40$ .

A trapéz alapjainak hossza tehát 30 cm és 60 cm, magassága 40 cm.

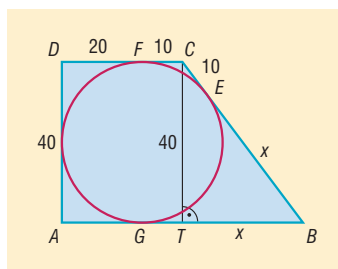
A trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(30 + 60) \cdot 40}{2} = 1800 \text{ cm}^2.$$

A beírt kör sugara  $\frac{40}{2}$  cm, területe:

$$T_{\text{kör}} = 20^2 \cdot \pi = 400\pi \text{ cm}^2.$$

Tehát a trapéz területének  $\frac{1800 - 400\pi}{1800} \cdot 100 = 30,19\%$ -a esik a körön kívül.

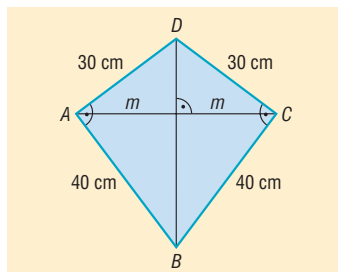


**1446** Mivel a négyszögnek két-két oldala egyenlő, de két szemben lévő szöge nem egyenlő, a négyszög deltoid.

Egy négyszög belső szögeinek összege  $360^\circ$ . A deltoid két szemben lévő, nem egyenlő szögének az összege  $180^\circ$ , tehát a két egyenlő nagyságú szöge  $90^\circ$ .

A deltoid két olyan derékszögű háromszögből áll, amelynek befogói 30 és 40 cm hosszúak.

Tekintsük az ábra jelöléseit.





a) A hurkapálcák hosszának meghatározásához szükségünk van a  $BCD$  derékszögű háromszög átfogójának, illetve az átfogóhoz tartozó  $m$  magasságának a hosszára.

A Pitagorasz-tételből az átfogó hossza 50 cm, ami a deltoid egyik átlójának a hossza.

A derékszögű háromszög területét kétféleképpen számíthatjuk:

$$\frac{30 \cdot 40}{2} = \frac{50 \cdot m}{2} \Rightarrow m = 24.$$

Mivel a deltoid átlói merőlegesek egymásra, a másik átló hossza  $2m = 48$  cm.

A merevítéshez egy 50 cm és egy 48 cm hosszú hurkapálcára van szükségünk.

b) A deltoid területe a két derékszögű háromszög területének az összegeként számítható:

$$2 \cdot \frac{30 \cdot 40}{2} = 1200 \text{ cm}^2.$$

A sárkány elkészítéséhez felhasznált papírmennyiség:

$$\frac{1200}{80} \cdot 100 = 1500 \text{ cm}^2 = 15 \text{ dm}^2.$$

c) A deltoid belső szögfelezőinek metszéspontja lesz a kör középpontja, sugara ennek a pontnak valamely oldaltól vett távolsága.

d) Az  $AOB$  és a  $COD$  szögek nagyságának összege  $180^\circ$ .

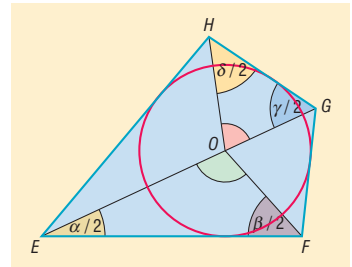
e) Az  $EFGH$  érintőnégyyszög  $E, F, G$  és  $H$  csúcsnál levő szögei legyenek rendre  $\alpha, \beta, \gamma$  és  $\delta$ . Mivel a beírt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja, ezért:

$$\sphericalangle EOF = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{és} \quad \sphericalangle GOH = 180^\circ - \frac{\gamma + \delta}{2}.$$

Az  $EFGH$  négyszög belső szögeinek összege  $360^\circ$ , tehát:

$$\sphericalangle EOF + \sphericalangle GOH = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} + 180^\circ - \frac{\gamma + \delta}{2} = 360^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180^\circ.$$

Az  $ABCD$  érintőnégyyszögben az  $AOB$  és a  $COD$  szögek nagyságának összege  $180^\circ$ .



## Vegyes feladatok – megoldások

**1447** Két  $60^\circ$ -os és két  $120^\circ$ -os szöge van a trapéznek.

**1448** A harmadik csúcsához tartozó magasság és szögfelező  $11^\circ$ -os szöget zár be egymással.

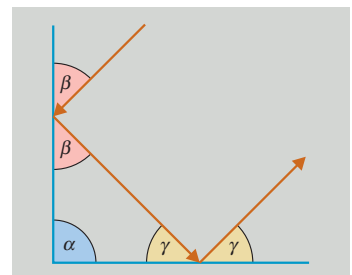
**1449** A háromszög harmadik csúcsánál lévő belső szöge  $84^\circ$ .

**1450** Az ábra jelöléseit használva, tegyük fel, hogy a beeső fénysugár  $\beta$  szöget zár be az első tükörrel, és a visszaverődő fénysugár  $\gamma$  szöget zár be a második tükörrel.

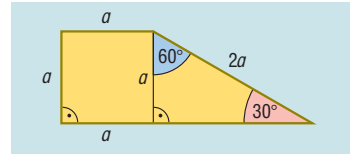
Ha ez a két fénysugár párhuzamos, akkor  $180^\circ - 2\beta$  és  $180^\circ - 2\gamma$   $180^\circ$ -ra egészítik ki egymást:

$$180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$

A két síktükör merőleges egymásra.

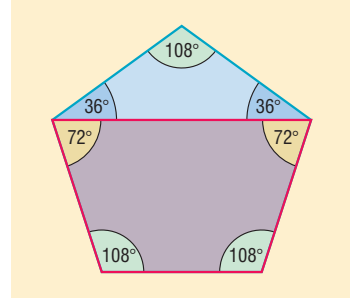


- 1451 A derékszögű trapéz felbontható egy  $a$  oldalú négyzetre és egy  $2a$  oldalú fél szabályos háromszögre.  
 a) A trapéz negyedik oldala  $a + a \cdot \sqrt{3}$ .  
 b) A trapéz szögei:  $90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $150^\circ$  és  $30^\circ$ .



- 1452 A négyszög két szöge egyenlő a szabályos ötszög egy belső szögével, azaz  $108^\circ$ -osak. A fennmaradó két szög nagyságát megkapjuk úgy, hogy  $108^\circ$ -ból kivonjuk annak az egyenlő szárú háromszögnek az alapon fekvő szögét, amelynek szárszöge  $108^\circ$ . (→)  
 A másik két szög nagysága:

$$108^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

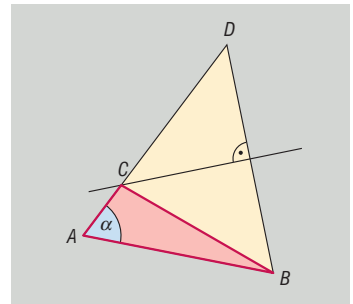


- 1453 A háromszög harmadik csúcsa egyenlő távol van az alap két végpontjától, így az alap felezőmerőlegesének és a szárnak a metszéspontja szolgáltatja a háromszög harmadik csúcsát.

A szerkesztés akkor végezhető el, ha a szár egyenese áthalad a megadott pontok valamelyikén, illetve nem merőleges az alap egyenesére.

- 1454 Induljunk ki a kész ábrából. Mérjük fel az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalának hosszát  $CA$  oldal egyenesére  $C$ -n túl. Így  $D$  ponthoz jutunk. Mivel  $BCD$  háromszög egyenlő szárú, a  $C$  csúcs rajta van  $DB$  szakasz felezőmerőlegesén.

Ez alapján a szerkesztés az  $ABD$  háromszög szerkesztésével kezdődik. (Ez végrehajtható, mivel adott két oldalának hossza, valamint a közébszárt szög nagysága.) A háromszög  $C$  csúcsát a  $BD$  szakasz felezőmerőlegesének és az  $AD$  szakasznak a közös pontja szolgáltatja.



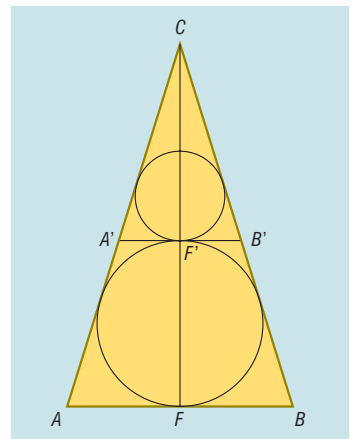
- 1455 a) Két szemközti csúcsának távolsága a köré írt kör sugarának kétszerese, azaz  $36$  cm.  
 b) Két szemközti oldalának távolsága egy  $18$  cm oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese:

$$2 \cdot \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{2} = 18 \cdot \sqrt{3} \text{ cm.}$$

- 1456 Induljunk ki a kész ábrából. Az  $F$  és  $F'$  pontok az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög beírt körének és a háromszög alaphoz tartozó magasságának metszéspontjai.

A háromszög beírt körét a szerkesztendő kör az  $F'$  pontban érinti. Ez alapján a szerkesztés lépései a következők:

1. Szerkesszük meg az adott  $ABC$  háromszög beírt körét.
  2. A beírt körhöz  $F'$  pontban szerkesszünk érintőt, ennek a szárrakkal való metszéspontjai legyenek  $A'$  és  $B'$ .
  3. Az  $A'B'C$  háromszög beírt körét szerkesszük meg.
- A szerkesztés mindig végrehajtható.



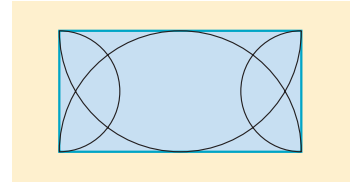


**1457** A kör középpontja a szakasztól 5 cm távolságra van.

**1458** A  $C$  végpontú átmérők másik végpontjait összekötő szakasz áthalad a két kör másik metszéspontján, tehát  $A$  és  $B$  nem különböző pontok.

**1459** A téglalap oldalai fölé rajzolt Thalész-köröknek a téglalap csúcsaitól különböző metszéspontjait kell összeszámlálnunk.

Hat olyan pont van a téglalap belsejében, amelyből valamelyik két oldal derékszög alatt látszik.



**1460** A paralelogrammák közül érintőnégyyszög csak a rombusz lehet. A rombusz magassága a beírt körének az átmérője, 20 cm.

Mivel a rombusz egyik szöge  $45^\circ$ , az oldala  $20 \cdot \sqrt{2}$  cm hosszú.

A rombusz kerülete  $80 \cdot \sqrt{2} \approx 113,14$  cm.

A rombusz területe  $20 \cdot 20 \cdot \sqrt{2} = 400 \cdot \sqrt{2} \approx 565,69$  cm<sup>2</sup>.

**1461** Legyen a két hiányzó oldal hossza  $a$  és  $a + 4$ . Az érintőnégyyszögek tétele szerint:

$$10 + 12 = a + a + 4 \Rightarrow a = 9.$$

A négyszög két hiányzó oldalának hossza 9 és 13 cm hosszú.

**1462** Ha  $n$  oldalú a sokszög, akkor

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2} = 20 \Rightarrow n \cdot (n - 3) = 40.$$

Figyelembe véve, hogy  $n$  pozitív egész és nagyobb, mint  $n - 3$ , 40 lehetséges szorzatalakjai:

$$40 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5.$$

Mivel a két tényező különbségének 3-nak kell lennie, a  $8 \cdot 5$  a megfelelő szorzatalak.

A szabályos sokszög 8 oldalú és egy belső szöge  $135^\circ$ .

**1463** Ha a kép szélessége  $16x$ , magassága  $9x$ , akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$(16x)^2 + (9x)^2 = 81^2 \Rightarrow x \approx 4,41.$$

A televízió méretei megközelítőleg:

$$\text{szélesség: } 16 \cdot 4,41 + 2 \cdot 10 = 90,56 \text{ cm, magasság: } 9 \cdot 4,41 + 10 + 18 = 67,69 \text{ cm.}$$

Nem fér be a készülék a szekrényünkbe, mivel a magassága 65 cm-nél nagyobb.

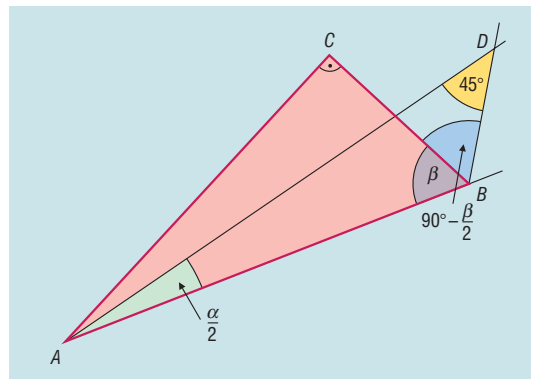
**1464** Messe az  $A$  csúcsból kiinduló belső szögfelezőt a  $B$  csúcsból kiinduló külső szögfelezőt egy  $D$  pontban.

Az  $ABD$  háromszög belső szögeinek összege:

$$\frac{\alpha}{2} + \left( \beta + 90^\circ - \frac{\beta}{2} \right) + 45^\circ = 180^\circ,$$

amiből  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

Tehát az  $ABC$  háromszög  $C$  csúcsánál lévő belső szöge  $90^\circ$ . Thalész tételének megfordítása alapján a háromszög köré írt körének sugara az  $AB$  átfogó hosszának a fele, vagyis 10 cm.



1466 A váza távolságát a terítő széleitől a rombusz beírható körének  $r$  sugara adja meg, amelyet a következő összefüggés segítségével határozhatunk meg:

$$t_{\text{rombusz}} = r \cdot \frac{k_{\text{rombusz}}}{2}.$$

A rombusz oldalának hosszát Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$a = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ cm} \Rightarrow k_{\text{rombusz}} = 200 \text{ cm}.$$

A rombusz területét az átlók szorzatának fele adja meg:

$$t_{\text{rombusz}} = \frac{60 \cdot 80}{2} = 2400 \text{ cm}^2,$$

$$2400 = r \cdot \frac{200}{2} \Rightarrow r = 24.$$

A váza a terítő széleitől 24 cm távolságra van.

1466 Számoljuk össze a háromszögeket aszerint, hogy oldalai a szabályos nyolcszög oldalai közül hány oldalt fognak közre.

Ezek szerint a közrefogott oldalak száma lehet:

$$1, 1 \text{ és } 6; \quad 1, 2 \text{ és } 5; \quad 1, 3 \text{ és } 4; \quad 2, 2 \text{ és } 4; \quad 2, 3 \text{ és } 3.$$

Tehát 5 különböző háromszöget alkothatnak a szabályos nyolcszög csúcsai.

Egy háromszög akkor derékszögű, ha egyik oldala a köré írt körének az átmérője. Mivel a szabályos nyolcszög köré írható kör, azok a háromszögek lesznek derékszögűek, amelyeknek egyik oldala a nyolcszög négy oldalát fogja közre.

E szerint két derékszögű háromszög van.

1467 Legyen az  $ABCD$  paralelogramma két hosszabbik oldala  $AB$  és  $CD$ , valamint  $BAC$  szög  $60^\circ$ . Keressük a paralelogramma kerületén azokat a pontokat, amelyekből az  $AB$  oldal  $90^\circ$ -os szög alatt látszik.

Az  $ABD$  háromszögben az  $A$  csúcsánál levő szöge  $60^\circ$  és  $AB = 2 \cdot AD \Rightarrow$  fél szabályos háromszög  $\Rightarrow D$ -nél derékszög van  $\Rightarrow D$  csúcs rajta van  $AB$  Thalész körén.

Legyen a  $DC$  oldal felezéspontja  $E$ .

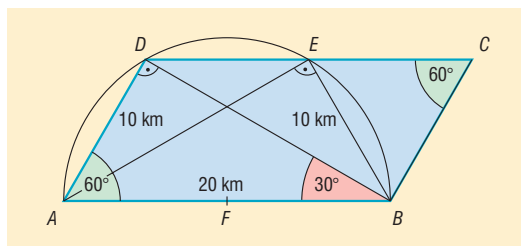
A  $BCE$  háromszög szabályos háromszög ( $BC = CE$  és a  $BCE$  szög  $60^\circ$ ).

Az  $AEB$  háromszög is egy fél szabályos háromszög, mivel a  $B$  csúcsánál levő szöge  $120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$  és  $AB = 2 \cdot EB \Rightarrow E$  csúcs is rajta van  $AB$  Thalész körén.

Mivel egy egyenesnek és egy körnek legfeljebb két metszéspontja lehet, a paralelogramma kerületén csak az  $E$  és  $D$  pontokból látszik az  $AB$  oldal  $90^\circ$ -os szögben.

Hasonlóan adódik, hogy  $DC$  oldal az  $AB$  oldal  $B$  végpontjából és  $F$  felezéspontjából látszik derékszög alatt.

A kincs a paralelogramma kerületén négy helyen lehet: a két tompaszögű csúcsban, vagy a hosszabbik oldalak felezéspontjaiban.





**1468** Legyen az  $ABC$  szabályos háromszög beírható körének középpontja  $O$ . Ismert, hogy a szabályos háromszög beírt köre sugarának hossza:

$$\frac{a \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{6} = 4 \cdot \sqrt{3}.$$

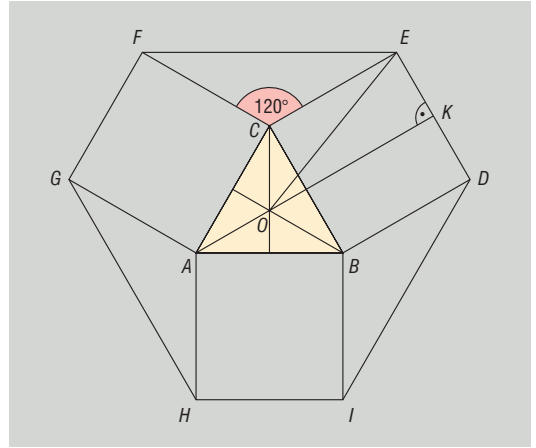
Az ábra jelöléseit használva  $ED$  oldal  $K$  felezéspontjának  $O$ -tól vett távolsága  $24 + 4 \cdot \sqrt{3}$ .

A  $KOE$  derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$OE^2 = (24 + 4 \cdot \sqrt{3})^2 + 12^2 = 768 + 192 \cdot \sqrt{3},$$

amiből

$$OE = \sqrt{768 + 192 \cdot \sqrt{3}} \approx 33,17 \text{ cm.}$$



Hasonlóan számítható:

$$OD = OF = OG = OH = OI \approx 33,17 \text{ cm.}$$

a) Mivel a hatszög csúcsainak  $O$  ponttól vett távolsága ugyanakkora, ezért a hatszög köré írható kör.

b) A hatszög köré írható kör sugara megközelítőleg 33,17 cm.

c) A hatszög oldalai közül  $DE = FG = HI = 24$  cm hosszú.

A hatszög  $FE$  oldala egy olyan egyenlő szárú háromszögnek az alapja, amelynek a szárszöge  $120^\circ$ , és a szárai 24 cm hosszúak. Tehát az  $FE$  oldal egy 24 cm oldalú szabályos háromszög magasságának a kétszerese, vagyis

$$\frac{24 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 24 \cdot \sqrt{3} \approx 41,57 \text{ cm.}$$

A hatszög  $EF$ ,  $GH$  és  $ID$  oldalainak hossza:

$$24 \cdot \sqrt{3} \approx 41,57 \text{ cm.}$$

**1469** Az  $OA$ , illetve  $OB$  szakaszok felezőmerőlegesei az  $AB$  oldalt  $F$  és  $E$ , a  $BC$  oldalt  $G$ , az  $AC$  oldalt  $H$  pontban metszik. Az ábrán látható szabályos, illetve egyenlő szárú háromszögeket figyelembe véve  $AF$ ,  $FO$ ,  $FE$ ,  $OE$ ,  $EB$ ,  $AH$  és  $BG$  szakaszok hossza egyaránt 6 cm.

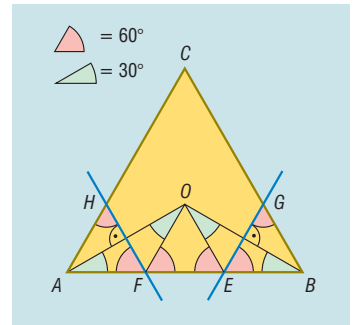
a) Az  $F$  és  $E$  pontok három 6 cm-es részre, a  $H$  és  $G$  pontok egy 6 és egy 12 cm-es részre osztják a háromszög oldalait.

b) Az  $AFH$  és  $BGE$  háromszögek területe egyenlő:

$$\frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9 \cdot \sqrt{3} \approx 15,59 \text{ cm}^2.$$

Az  $EGCHF$  ötszög területe:

$$\frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot 9 \cdot \sqrt{3} = 81 \cdot \sqrt{3} - 18 \cdot \sqrt{3} = 63 \cdot \sqrt{3} \approx 109,12 \text{ cm}^2.$$





**1470** A hajó induljon az  $A$  pontból, a világítótoronyok helyzetét jelezze  $B$  és  $D$  pont, a hajó két óra múlva legyen a  $C$  pontban. A feladat szövege szerint  $DB = 50$  km.

Az  $ACD$  háromszögben két  $45^\circ$ -os szög van, és  $CT = DT = TA = x$ .  
 $DBA$  háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

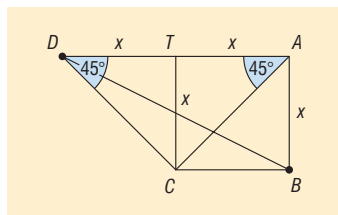
$$x^2 + 4x^2 = 50^2 \Rightarrow x = 10 \cdot \sqrt{5} \approx 22,36 \text{ km.}$$

A  $CTA$  háromszögből:

$$CA = 10 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{10} \approx 31,62 \text{ km.}$$

A hajó átlagsebessége:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{10}}{2} = 5 \cdot \sqrt{10} \approx 15,81 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$



**1471** Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen a keresett kör sugarának hossza  $r$ , a középpontja  $O$ .

Ez a kör belülről érinti az  $A$  középpontú  $80$  cm sugarú kört, ezért

$$AO = 80 - r.$$

A kérdéses kör kívülről érinti a  $K$  középpontú  $20$  cm sugarú félkört, ezért

$$KO = 20 + r.$$

Az  $AOD$  derékszögű háromszögben:

$$OD^2 = AO^2 - AD^2 = (80 - r)^2 - 40^2 = 4800 - 160r + r^2.$$

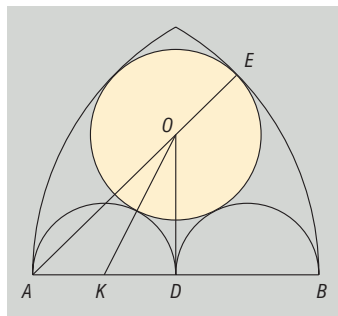
A  $KOD$  derékszögű háromszögben:

$$OD^2 = KO^2 - KD^2 = (20 + r)^2 - 20^2 = 40r + r^2.$$

Ezek alapján a keresett kör sugara a következő egyenletből számolható:

$$4800 - 160r + r^2 = 40r + r^2 \Rightarrow r = 24.$$

A keresett kör sugara  $24$  cm.



**1472** Az ábrán látható jelöléseket használva legyen a telek az  $EFG$  háromszög, a rá épített ház az  $ABC$  háromszög.

A feladat feltételei szerint az  $FEG\hat{x} = 45^\circ$ , illetve  $BC = 12$  m és  $AC = 16$  m.

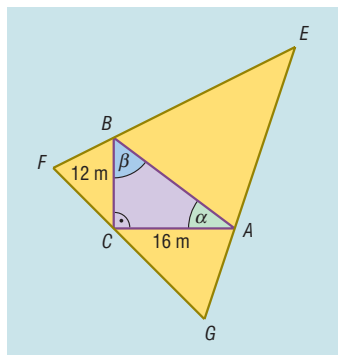
Az  $ABC$  háromszög  $A$  és  $B$  csúcsánál lévő külső szögek nagysága  $180^\circ - \alpha$ , illetve  $180^\circ - \beta$ . Ezen külső szögek szögfelezői által bezárt szög:

$$\begin{aligned} 180^\circ - \frac{(180^\circ - \alpha)}{2} - \frac{(180^\circ - \beta)}{2} &= \\ = \frac{\alpha + \beta}{2} &= 45^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ. \end{aligned}$$

Tehát az  $ABC$  háromszög  $C$  csúcsánál derékszög van.

a) A háznak a telek  $45^\circ$ -os szögével szemközti oldala a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ m.}$$



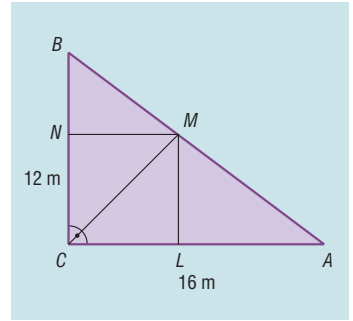


- b) Ha a négyszög alakú szobának minden fala a ház 12 vagy 16 méteres oldalával párhuzamos, és minden oldala egyenlő hosszú, akkor annak az  $LMNC$  négyzetnek a területét kell meghatároznunk, amelynek  $N$  és  $L$  csúcsa az  $ABC$  háromszög befogóira,  $M$  csúcs pedig az átfogóra illeszkedik.

Legyen a négyzet oldalának hossza  $a$ . Az  $ABC$  derékszögű háromszög területe előáll a  $BCM$  és  $ACM$  háromszögek területének összegeként:

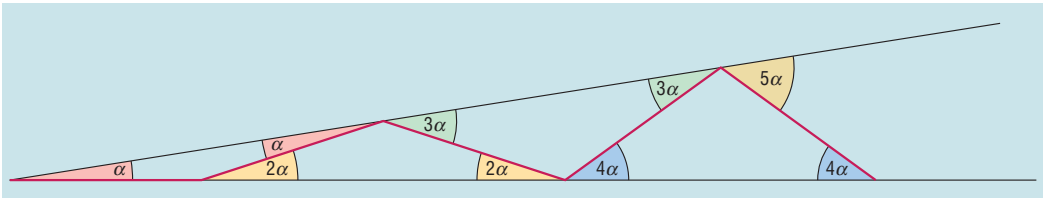
$$\frac{12 \cdot 16}{2} = \frac{12a}{2} + \frac{16a}{2} \Rightarrow a = \frac{48}{7}.$$

Legfeljebb  $\left(\frac{48}{7}\right)^2 \approx 47 \text{ m}^2$  lehet annak a négyszög alakú szobának az alapterülete, amelynek minden fala a ház 12 vagy 16 méteres oldalával párhuzamos.

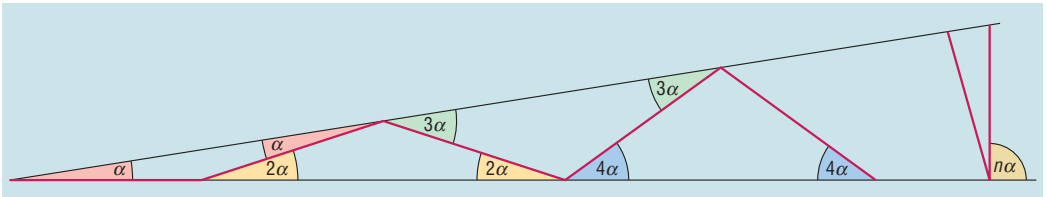


- 1473 a) A  $\beta$  szög nagysága  $36^\circ$ .

- b) Az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei számíthatók:  $\alpha, 2 \cdot \alpha, 3 \cdot \alpha, \dots$ . A kilencedik szakaszt még meg kell tudnunk rajzolni, így  $9 \cdot \alpha$  legfeljebb  $90^\circ$  lehet. Tehát az  $\alpha$  szög nagysága legfeljebb  $10^\circ$ .



- c) Az előzőek alapján az  $n$ -edik szakasz után már nem tudunk újabb szakaszt berajzolni, ha az ábrán jelölt szög  $90^\circ$ -nál nagyobb. Tehát  $\alpha$  szög nagysága legfeljebb  $\frac{90^\circ}{n}$ .



- 1474 A derékszögű  $ABE$  és  $ABG$  háromszögek  $E$  és  $G$  csúcsai Thalész tételének megfordítása alapján rajta vannak az  $AB$  mint átmérő fölé írt körön.

Az  $FA, FG, FE$  és  $FB$  szakaszok a Thalész-kör sugarai, tehát egyenlő hosszúak.

Az  $AFG$  egyenlő szárú háromszög alapon levő szögei  $42^\circ$ -osak, tehát az  $\angle AFG = 180^\circ - 2 \cdot 42^\circ = 96^\circ$ .

Az  $EBF$  egyenlő szárú háromszög alapon levő szögei  $67^\circ$ -osak, tehát az  $\angle EBF = 180^\circ - 2 \cdot 67^\circ = 46^\circ$ .

Ezek alapján az  $EFG$  egyenlő szárú háromszög szárszöge  $180^\circ - 46^\circ - 96^\circ = 38^\circ$ .

Az  $EFG$  háromszög szögei  $38^\circ, 71^\circ$  és  $71^\circ$ .

