# Valószínűség-számítási feladatok emelt szinten

**1649.** Akkor lesz elég a készlet, ha 0, 1, 2, 3 vagy 4 ügyfél vesz takarítógépet. Ennek valószínűsége:

$$p=\binom{10}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^6+\binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7+\binom{10}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8+$$

$$+\binom{10}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^9+\binom{10}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=$$

$$=\frac{210\cdot 64+120\cdot 128+45\cdot 256+10\cdot 512+1024}{3^{10}}=0{,}786\,87.$$



**1650.** Itt is egy binomiális eloszlásról van szó. A keresett valószínűség: $p=\sum_{k=0}^{9}\binom{20}{k}\cdot 0{,}6^k\cdot 0{,}4^{20-k}$. Ezt a $k=9$-től indulva lehet legkönnyebben kiszámolni, mert ha $k<5$, akkor a valószínűség kisebb lesz 0,001-nél, elhagyhatóak.

| | |
|---|---|
| $P(x=5)$ | 0,001 29 |
| $P(x=6)$ | 0,004 85 |
| $P(x=7)$ | 0,014 56 |
| $P(x=8)$ | 0,035 50 |
| $P(x=9)$ | 0,070 10 |
| $P(x\leq 9)$ | 0,127 20 |

Tehát a kérdéses valószínűség kisebb 13%-nál.

**1651.** Az első kérdés megoldásához a teljes valószínűség tételét használjuk. $p$ (a teszt pozitív) $=0{,}04\cdot 0{,}95+0{,}96\cdot 0{,}02=0{,}0572$.

A második kérdést a Bayes-tétel alapján lehet megválaszolni. $P$ (egészséges | a teszt pozitív)$=\frac{0{,}96\cdot 0{,}02}{0{,}0572}\approx 0{,}3357$, több, mint $\frac{1}{3}$.

A teszt akkor téved, ha egészségesnél pozitív, vagy betegnél negatív eredményt ad. Ezek egymást kizáró események, valószínűségük összeadódik: $p$ (negatív | beteg) $=\frac{0{,}04\cdot 0{,}05}{0{,}9428}\approx 0{,}002\,12$, ezért annak valószínűsége, hogy a teszt rossz eredményt ad $p=0{,}337\,78$.

**1652.** Hasonlóan az előző példához: $p=\frac{0{,}001\cdot 0{,}998}{0{,}001\cdot 0{,}998+0{,}999\cdot 0{,}05}\approx 0{,}019\,59$, azaz kisebb 2%-nál!!!

**1653.** Mivel kevés lehetőség van, legegyszerűbb felírni az összeset.

| a választott kártyák | összeg | szorzat |
|---|---|---|
| 0; 1 | 1 | 0 |
| 0; 3 | 3 | 0 |
| 0; 5 | 5 | 0 |
| 1; 3 | 2 | 3 |
| 1; 5 | 6 | 5 |
| 3; 5 | 8 | 15 |



A táblázatból leolvasható, hogy

$P\ (az\ öszseg\ páros) = \frac{3}{6} = 0{,}5;$

$P\ (a\ szorzat\ páros) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$

Mivel két szám különbsége pontosan akkor páros, ha az összegük páros, valamint a táblázatból látható, hogy az összeg és a szorzat egyszerre nem lehet páros, ezért

$P(a\ különbség\ páros) = P(az\ összeg\ páros) = 0{,}5;$
$P(az\ összeg\ páros \mid a\ szorzat\ páros) = 0;$
$P(a\ szorzat\ páros \mid az\ összeg\ páros) = 0.$

**1654.** A megoldáshoz egy nevezetes ötlet az ún. tükrözési elv fog segítséget nyújtani. Ehhez úgy jutunk, hogy a szavazás lefolyását egy Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Az origóból indulunk, s ha az első szavazó $A$-ra szavazott, akkor jobbra $(+1)$ és felfelé lépünk $(+1)$-et. Ha $B$-re szavazott, akkor is jobbra $(+1)$ viszont lefelé $(-1)$-et lépünk. Ezt folytatjuk a további szavazóknál is, tehát minden $A$-ra szavazó esetén az $(1;\ 1)$ vektorral, minden $B$-re szavazó esetén az $(1;\ -1)$ vektorral lépünk tovább. Így a lehetséges szavazáslefolyások egy $(0;\ 0)$-ból induló és az $(a + b;\ a - b)$-be érkező töröttvonallal ábrázolhatók. Annyiféleképpen folyhat le a szavazás, ahány ilyen töröttvonal létezik. A kedvező esetek száma, tehát hogy $A$ végig vezet, azaz, ha a töröttvonal a kezdőponttól eltekintve többet nem éri el az $x$ tengelyt, azaz végig fölötte halad. A Laplace-féle valószínűség kiszámítási formula szerint (kedvező esetek száma/összes esetek száma) ki tudjuk akkor számolni a kérdezett esélyt, ha az összes töröttvonalak számát, illetve az $x$ tengelyt nem érintő töröttvonalak számát meghatározzuk. Az első kérdés az egyszerűbb, az összes töröttvonalak száma:

$\binom{a+b}{a},$

mivel az $a+b$ darab jobbra lépésből ha kijelöljük azt az $a$ darabot, amikor felfelé lépünk, akkor a töröttvonal már adott, ezek száma pedig a fenti formulából számolható.
A másik szám kiszámításához használjuk fel a tükrözési elvet, ami a következőt jelenti: A jó útvonalak mindenképpen az első lépésben az (1; 1) ponton mennek át. Az (1; –1) ponton átmenők már mind rosszak. Ezenkívül rossz az (1; 1) ponton átmenők közül mindaz, amelyik legalább egyszer érinti az $x$ tengelyt. S itt jön a tükrözési elv, amely szerint: minden (1; 1) pontból induló rossz útvonalnak (tehát amelyik érinti legalább egyszer az $x$ tengelyt) megfelel egy (1; –1) pontból az $(a+b;\ a–b)$-be vezető útvonal. Ráadásul ez a megfeleltetés egy-egyértelmű, tehát minden az (1; –1)-en átvezető útvonalhoz tartozik pontosan 1 rossz (1; 1)-en átvezető útvonal. Lásd az ábrát, amely mutatja az okot. Lényegében az utolsó $x$ tengelyen lévő metszéspontig tükrözünk az $x$ tengelyre, csak az utolsó szakasz marad. Ez azt jelenti, hogy a rossz útvonalak száma nem más, mint kétszer az $(1;\ -1)$ ponton átmenő $(a+b;\ a-b)$ -be vezető útvonalak száma. Tehát a rossz utak száma:

VI

$$2\cdot\binom{a+b-1}{a},$$

eszerint a kedvező esetek száma:

$$\binom{a+b}{a}-2\cdot\binom{a+b-1}{a}.$$

Innen a keresett valószínűség:

$$p=\frac{\binom{a+b}{a}-2\cdot\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}}=1-\frac{2\cdot\dfrac{(a+b-1)!}{a!\cdot(b-1)!}}{\dfrac{(a+b)!}{a!\cdot b!}}=1-\frac{2b}{a+b}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Azaz minél nagyobb arányban győz $A$, annál nagyobb eséllyel vezet végig.

**1655.** Az előző feladat megoldására építünk. Az a különbség, hogy itt az $x$ tengelyt érintő, de át nem metsző töröttvonalak még kedvezőnek számítanak. Azaz ezeknek a száma kellene a kedvező esetek meghatározásához. Itt is a rossz töröttvonalak számát tudjuk könnyebben meghatározni. Ehhez használjuk fel a tükrözési elvet a következőképpen: Minden rossz útvonal olyan, hogy átmegy valahol az $x$ tengelyen és eléri az $y=–1$ egyenest. Ha az első ilyen pontban, ahol $y=–1$ az 1000 Ft-os sorban állót kicserélem egy 500 Ft-osra, akkor ez a pont átkerül az $y=1$-be, s innen a teljes további útvonalat kettővel feltolva egy a (0; 0)-ból a $(2n;\ 2)$ pontba menő útvonalat kapunk. Ezek száma:

$$\binom{2n}{n+1},$$

hiszen ilyenkor $n + 1$ db 500 és csak $n - 1$ db 1000 Ft-os lesz a csere miatt. Világos, hogy ezt a lépést csak azokra a „rossz útvonalakra” tudjuk megtenni, amelyek átlépik lefelé az $x$ tengelyt. Összesen

$\binom{2n}{n}$-féleképpen állhatnak sorban, tehát a kedvező esetek száma:

$$\binom{2n}{n} - \binom{n+1+n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Ebből a keresett valószínűség az összes esetek számával való osztás után:
$1 - n/(n + 1) = 1/(n + 1)$.

**1656.** Három lovagot úgy kiválasztani, hogy legalább kettő egymás mellett üljön, ugyanannyiféleképpen lehet, mint a következő két dominót elhelyezni a kerek asztal körül:

| | | |
|---|---|---|
| | X | X |

| |
|---|
| X |

Ha az $X$-szel jelölt helyeken ülő lovagokat választjuk a kommandóba, akkor lesz közöttük szomszédos, és minden olyan lovaghármasra, amelyben van két szomszédos lovag, egyértelműen ráhelyezhető a két dominó úgy, hogy a kiválasztott lovagok pontosan az $X$-szel jelölt helyeken üljenek. (Gondoljuk meg, a $3 \times 1$-es dominó üres kockájára a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéshez van szükségünk.) A két dominót összesen $25 \cdot 22$-féleképpen tudjuk elhelyezni, mivel az $1 \times 1$-es dominót 25 helyre tehetjük, és ezt követően a $3 \times 1$-es dominót a maradék 24 hely közül 22 helyre tehetjük úgy, hogy elférjen. A keresett valószínűség tehát:

$$p = \frac{25 \cdot 22}{\binom{25}{3}} = \frac{11}{46}.$$

A számláló és a nevező összege így 57.

**1657.** A kérdéses együtthatók $c_0 = 1$; $c_1 = 6$; $c_2 = 15$; $c_3 = 20$; $c_4 = 15$; $c_5 = 6$; $c_6 = 1$. A lehetséges kéttagú összegek száma: 21. Ezek közül csak a $(c_1 + c_3)$; $(c_2 + c_3)$; $(c_2 + c_4)$; $(c_3 + c_4)$; $(c_3 + c_5)$ nem kisebb 25-nél. Ha feltesszük, hogy bármely pár kiválasztásának az esélye ugyanannyi, akkor ebből $(21–5)/21 = 16/21$ adódik válaszként a kérdésre, azaz az első válaszlehetőség a helyes.

**1658.** Bizonyára kedvelte. Így Ben első lövése nem talál, és Joe a számára veszélyesebb Samre lő majd, akit el is talál. Ismét Ben következik, aki 0,3 valószínűséggel életben marad, ha eltalálja Joe-t. Nézzük, mi lenne, ha éles lőszerrel próbálkozna Ben! Csak Joe-ra lőhet, mert ha véletlen eltalálja Samet, akkor biztosan meghal Joe következő lövésétől. Számítsuk ki, mennyi az esélye az életben maradásra, ha eltalálja Joe-t. Akkor lehet a párbaj győztese, ha Sam első lövése nem talál, az ő Sam-re leadott első lövése viszont talál, vagy

Sam elsőre nem talál, ő se, és Sam másodszor is elhibázza, de ő nem, és így tovább. Ennek valószínűsége:
$p = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + \dots$
Ez egy végtelen mértani sor, amelynek kvóciense < 1, tehát összege:

$$p = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{1 - 0{,}5 \cdot 0{,}7} = \frac{15}{65} = \frac{3}{15} < 0{,}3.$$

**1659** Az ellentett esemény valószínűségét számoljuk ki. $p$(nem nyerünk) =

$$= \frac{\binom{5}{1}\binom{84}{4} + \binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} = 0{,}9659.$$ Ebből következik, a nyerés esélye $p = 0{,}0341$.

Azt számoljuk ki, hogy hány hét után lesz 50%-nál kisebb esély annak, hogy egyszer sem nyertünk. $0{,}9659^n < 0{,}5 \Rightarrow n > 20$.

A nagy nyeremény esélye $p$(nagyot nyerünk) $= \dfrac{\binom{5}{4}\binom{85}{1} + 1}{\binom{90}{5}} = 9{,}693 \cdot 10^{-7}$.

Ebből
$P$(nincs nagy nyereményünk) = 0,999 999 030 7. Az előző módszert követve számoljuk ki, hogy hány hétig kell játszani az első nagy nyereményig, erre 717 101 hét (kb. 13 752 év!) adódik.
Az első nagy nyerésig eltelő hetek számának várható értéke:

$$E = \frac{1}{p} \approx 1\,031\,672 \approx 19\,651 \text{ év}.$$

**1660.** Normális eloszlást tételezünk fel a hosszra, ezért

*a)* $P\left(\left|\dfrac{X - 1000}{2}\right| < 2\right) \approx 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 \approx 0{,}95.$

*b)* $P\left(\left|\dfrac{X - 1000}{2}\right| < 0{,}5\right) \approx 2\Phi(0{,}5) - 1.$

*c)* $P\left(\left|\dfrac{X - 1000}{2}\right| < A\right) \approx 2\Phi(A) - 1 = 0{,}98. \qquad A = ?$

**1661.** *a)* $\binom{80}{12} \cdot 0{,}15^{12} \cdot 0{,}85^{68} \approx 0{,}124.$

*b)* Hasonlóan kell kiszámolni, hogy 0, 1, 2 vagy 3 külföldit találtak, és ezeket a számokat össze kell adni.

*c)* $E(X) = 12$ és $D(X) = 3{,}2$. A becslést most Csebisev-egyenlőtlenséggel adjuk meg. $P\left(\left|X - E\right| \le \lambda D\right) \ge 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 0{,}8$, ebből $\lambda = \sqrt{5} \approx 2{,}24$, ahonnan az [5; 19] intervallum adódik a külföldiek számára.

(Ha a binomiális eloszlásból számolunk, akkor a sokkal szűkebb [8; 16] intervallumot kapjuk.)

**1662.** A megjelenő hallgatók száma $X \in B\left(220, \frac{1}{2}\right)$. A Moivre–Laplace tételből $P\left(X < 110 + \sqrt{55 \cdot x}\right) \approx \varphi(x) = 0{,}9$, ha $x = 1{,}3$. Tehát $0{,}9 \approx P\left(X < 110 + \sqrt{55 \cdot 1{,}3}\right) \le$ $\le (X < 120)$. Tehát, egy 120 fős teremben legalább 90%-os valószínűséggel mindig elférnek.

VI

**1663.** A megjelenők száma $X \in B(1000,\ 0{,}1) \Rightarrow X = \frac{X - 100}{\sqrt{900}} \approx N(0{,}1)$ a Moivre–Laplace tétel értelmében.

$P\left(\frac{X - 100}{30} < A\right) \approx \varphi(A) = 0{,}9 \Rightarrow A = 1{,}3 \Rightarrow P(X < 30 \cdot 1{,}3 + 100) \approx 0{,}9$,

azaz kb. 139-en jelennek meg a termékbemutatón 90%-os valószínűséggel. 140 fős terem elég.

**1664.** Annak valószínűsége, hogy egy jelentkező ki fog állítani 0,85. Annak valószínűsége, hogy 170 jelentkező közül több mint 150-en szeretnének kiállítani:

$$P = \sum_{k=151}^{170} \binom{170}{k} \cdot 0{,}85^k \cdot 0{,}15^{170-k} = 0{,}095\,332\,2.$$

**1665.** A feladatot a következő összefüggés segítségével fogjuk megoldani:

$$P\left(np + \alpha\sqrt{npq} \le \sum_{i=1}^{n} X_i \le np + \beta\sqrt{npq}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt.$$

Jelen esetben $n = 400$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$.

Keressük

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \le 50\right) = ?$$

$$np + \beta\sqrt{npq} = 40 + 6\beta = 50 \Rightarrow \beta = \frac{10}{6} \approx 1{,}667,$$

ahonnan táblázat segítségével meghatározható, hogy

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le 50\right) \approx 0{,}9515.$$

A második kérdésnél meg kell keresnünk azt a legkisebb $n \geq 500$ egészt, amelyre teljesül, hogy

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq n-500\right) > 0{,}01.$$

A kérdezett valószínűség ismét a fenti alakú integrállal közelíthető, és újra csak táblázatból nézhetjük meg, hogy $\beta \approx -2{,}33$ választás mellett lesz az integrál értéke 0,01. Mi azt az $n$-et keressük, amelyre

$$np + \beta\sqrt{npq} = n - 500,$$

ahonnan $p$-t; $q$-t és $\beta$-t behelyettesítve nyerjük, hogy

$$n - 500 = 0{,}1n - 2{,}33 \cdot 0{,}3\sqrt{n}\,.$$

Ez másodfokú egyenlet $\sqrt{n}$-re, melynek pozitív gyökéből $n = 537{,}5$ adódik. Tehát legalább 538 darabos tételt kell szállítani ahhoz, hogy legalább 99%-os valószínűséggel eljusson 500 szál ép rózsa a megrendelőhöz.

VI

**1666.** Jelöljük $Y_i$-vel azt a valószínűségi változót, amelyik 1/3 valószínűséggel 1-et, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel pedig 0-t vesz fel. $Y_i = 1$, ha a vizsgázó helyesen tippel. Az $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{300}$ valószínűségi változó mutatja meg, hogy hány kérdésre kaptunk helyes választ. $Y$ binomiális eloszlású, $B(300,1/3)$ paraméterekkel. Először becsüljük meg $P(Y \geq 150)$-et!
$E(Y) = 100$, így a Markov-egyenlőtlenség segítségével: $P(Y > 149) \leq 100/149 \approx 0{,}671$.

**1667.** Jelöljük a szükséges dobásszámot $X$-szel! $P(X = k) = 2\cdot\frac{1}{2^k}$ $k = 2; 3; \ldots$

Tehát $E(X) = \sum_{2}^{\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = 3$. (A kapott sort úgy lehet pl. összegezni, hogy a kétszereséből levonjuk a megfelelő tagokat, így egy mértani sort kapunk, amelynek ismerjük az összegét. $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$.

**1668.** A keresett eloszlás:

$$X = \begin{cases} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6} & \frac{5\cdot4}{6^2}\cdot\frac{3}{6} & \frac{5\cdot4\cdot3}{6^3}\cdot\frac{4}{6} & \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{6^4}\cdot\frac{5}{6} & \frac{6!}{6^6} \end{cases}$$

A várható érték:

$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{10}{36} + 4\cdot\frac{10}{36} + 5\cdot\frac{40}{216} + 6\cdot\frac{100}{6^4} + 7\cdot\frac{20}{6^4} = 3{,}85.$$

**1669.** Ez egy binomiális eloszlás $n = 5$ és $p = \frac{1}{5}$ paraméterekkel, mert minden ötödik szám osztható 5-tel. A várható érték tehát
$E(X) = np = 1$.

**1670.** Nem lehetnek függetlenek, mert $P(X = 4 \text{ és } Y = 4) = 0$, de

$$P(X = 4)P(Y = 4) = \frac{1}{\binom{32}{4} \cdot \binom{32}{4}}.$$

**1671.** $X$ eloszlása diszkrét egyenletes: $P(X = k) = \frac{99}{100} \frac{98}{99} \dots \frac{k-1}{k} \frac{1}{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots, 100$.

**1672.** Tegyük fel, hogy a száz közül $x$ diák vásárolt a csokiból. Minden diák $\frac{1}{8}$ valószínűséggel hazudik, $\frac{7}{8}$ valószínűséggel pedig igazat mond. A csokit vásárló diákoknak tehát várhatóan $\frac{7}{8}$ része igent válaszol, de igent mond a nem ezt a csokit vásárló diákok $\frac{1}{8}$ része is. Száz megkérdezett diák közül $Y$ ad igen választ, ez az $Y$ egy valószínűségi változó, melynek várható értéke tehát

$$E(Y) = \frac{7}{8} \cdot x + \frac{1}{8} \cdot (100 - x),$$

ahonnan

$$x = \frac{8}{6} \cdot (E(Y) - 12,5).$$

Száz diák elegendő ahhoz, hogy megkérdezésük után feltételezhessük, hogy azok $Y'$ száma, akik igent válaszoltak, nagyjából megegyezik $E(Y)$-nal, ezért

$$x = \frac{8}{6} \cdot (Y' - 12,5).$$

Extrém esetben előfordulhatna, hogy $x < 0$ vagy $x > 100$ adódna a fenti képletből. Ilyenkor célszerű a kísérletet újra elvégezni, vagy a fenti becslés helyett a következő képletből számolni:

$$x \approx \min\left(100; \max\left(0; \frac{4}{3} \cdot (Y' - 12,5)\right)\right).$$

**1673.** $X$ az elfutó szarvasok száma: $X \in \{0, 1, 2\}$.

$P(X = 2) = P$ („Mindegyik vadász ugyanazt a szarvast lövi le”) $= \frac{3}{27}$.

$P(X = 0) = P$ („Mindegyik vadász más-más szarvast lő le”) $= \frac{6}{27}$.

$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - (X = 2) = \frac{18}{27}$.

$$E(X) = \frac{8}{9}, \quad E(X)^2 = \frac{10}{9}, \quad \sigma^2(X) = \frac{26}{81}.$$

VI

**1674.** Ez egy geometriai eloszlás $p$ paraméterrel. Várható értéke $E(X) = \frac{1}{p}$.

**1675.** $E(Z) = 100 \cdot E(X_1) = 32 \cdot 0{,}4 = 12{,}8$ és
$\sigma^2(Z) = 100 \cdot \sigma^2(X_1) = 100 \cdot 32 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 768.$

**1676.** Jelölje $X$ a hibás töltények számát! $X \in B\ (200{,}0{,}02)$.
A Moivre–Laplace-tételből:
$P\left(\left|\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\right| < x\right) \approx 2\phi(x) - 1 = 0{,}9$. $np = 4$, $\sqrt{npq} = 1{,}98$, $x = 1{,}7$. Így a keresett intervallum: [0, 63, 7, 36], azaz a hibás töltények száma 0 és 8 közé fog esni.

VI

**1677.** Mivel $P\left(\left|\frac{X-1000}{10}\right| < A\right) \approx 2\Phi(A) - 1$ összefüggéssel közelíthető a keresett valószínűség , és most $A = 1$, $P\ (990 < X < 1010) \approx 2\Phi(1) - 1 =$ $= 2 \cdot 0{,}841 - 1 = 0{,}682$.

**1678.** A centrális határeloszlás tételével:
$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < 0{,}01\right)$$
$$P\left(\left|\frac{\frac{k}{n}-p}{pq}\right|\sqrt{n} < \frac{0{,}01\sqrt{n}}{pq}\right) \geq P\left(\left|\frac{\frac{k}{n}-p}{pq}\right|\sqrt{n} < 0{,}04\sqrt{n}\right) = 0{,}999.$$
$\Rightarrow 2\phi\left(0{,}04\sqrt{n}\right) - 1 = 0{,}999 \Rightarrow 0{,}04\sqrt{n} = 3{,}29 \Rightarrow n \geq 53\,940.$
(pl. részvételi hajlandóság, nem válaszolók aránya és a válaszmegtagadás oka.)

**1679.** $X \in N(175{,}10)$, $Y \in N(165{,}8) \Rightarrow X - Y \in N\left(10,\ \sqrt{164} = \sqrt{10^2 + 8^2}\right)$;
$$P(X < Y) = P(X - Y < 0) = \varphi\left(\frac{-10}{\sqrt{164}}\right).$$

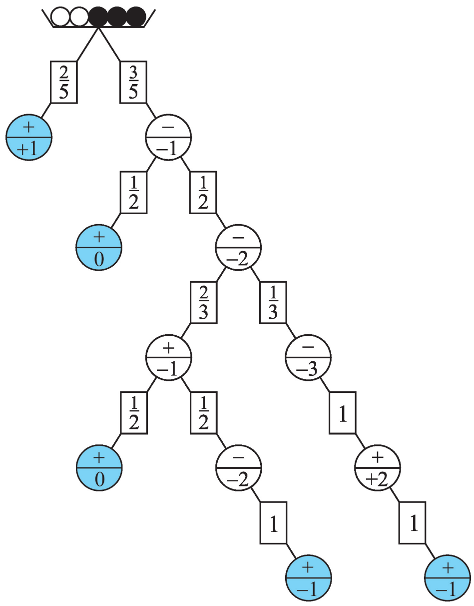
**1680.** Az $i$-edik narancsból $X_i \in N(50{,}2)$ lé facsarható ki.
$X_1 + X_2 \in N\left(100,\ \sqrt{8}\right)$.
A keresett valószínűség: $p = P\left(100 \leq X_1 + X_2\right) = 1 - \phi(0) = 0{,}5$.

**1681.** $X_1, X_2, X_3, \ldots X_{100}$ teljesen független rendszer, olyan normális eloszlással közelíthető, amelynek várható értéke 7 $m$ és szórása 1 $m$.
$$p\left(\max X_i < h\right) = \left(\Phi\left(\frac{h-7}{1}\right)\right)^{100} \geq 0{,}99, \text{ ezért } \Phi(h-7) \geq \sqrt[100]{0{,}99} \approx 0{,}999\,89 \Rightarrow$$
$\Rightarrow h - 7 \geq 3{,}71$. A gátat tehát legalább 10,71 m magasra kell építeni.

**1682.** A feladat megoldásakor az a helyes kiindulási alap, ha azt vizsgáljuk meg, hogy a játékot tovább folytatva, a *játék befejezéséig mekkora valószínűséggel nyerne* András, illetve Béla. Ugyanis Béla csak akkor nyerhetne, ha a következő három dobás mindegyike írás lenne, ennek valószínűsége pedig $\frac{1}{8}$. Minden más esetben András nyer, a helyes osztozkodási arány 7 : 1.

**1683.** A játék a játékosnak kedvez (nem a kaszinónak), ha a következő stratégiával játszik: ha első húzásra nyerő golyót húz, akkor megáll, ha nem nyerőt húz elsőre, akkor 0 veszteségre törekszik, de ha ez nem sikerül, akkor nem áll meg addig, míg el nem fogynak a golyók.

**1683.**



Az ábrán a játék fagráfja látható. A körök a játszma egyes állásait reprezentálják, a felülre írt előjel a legutóbbi húzás eredményére utal (+ = nyerő húzás, – = vesztő húzás), az alulra írt szám az addigi nyeremény összegére. A szürke körök azok az állapotok, ahol a játékos megáll. A téglalapokba az állapotok közötti átmenet valószínűségét írtuk. A játékos várható nyereménye Ft-ban:

$$E(X) = 10 \cdot \left( \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2.$$