VI

Eseményalgebra

1524. *a)* 2, 4, 5, 6;
b) 4, 6;
c) 2;
d) 1, 3, 5.

1525. A következő számokat csak a kétjegyű természetes számok közt keressük.
a) A szám vagy páratlan, vagy osztható 6-tal.
b) A szám 3-mal osztható, de nem osztható 6-tal.
c) A szám osztható 6-tal.
d) A szám páratlan, de nem osztható 3-mal.
e) Lehetetlen esemény. (Nincs olyan szám, ami páratlan, de 4-gyel osztható.)
f) A szám osztható 4-gyel.
g) A szám osztható 2-vel, de 4-gyel nem.
h) A 12-vel osztható számok közül a párosak, tehát minden 12-vel osztható szám.

1526. *a)* $A_2 + A_4 + A_6$;
b) $A_3 + A_6$;
c) $A_2 + A_4 + A_6 + A_3$;
d) A_6;
e) $A_1 + A_5$;
f) $A_2 + A_4$;
g) $A_1 + A_3 + A_5$;
h) $A_4 + A_5 + A_6$;
i) $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

1527. *a)* Páros, 5-tel nem osztható számok: $a = A - B$;
5-re végződő kétjegyű számok: $b = B - A$;
0-ra végződő kétjegyű számok: $c = A \cdot B$;
páratlan, 5-tel nem osztható számok: $d = H - (A + B)$.
b) Azok a kétjegyű számok, amik 2-re, 4-re, 6-ra, 8-ra vagy 5-re végződnek, tehát : $a + b = A + B - A \cdot B$
c) $A \cdot B$.

1528. *a)* 2-t, 4-et, 5-öt vagy 6-ot dobtunk;
b) 4-et vagy 6-ot dobtunk;
c) 2-t dobtunk;
d) 1-et, 3-at vagy 5-öt dobtunk;
e) 4-et vagy 6-ot dobtunk;
f) 5-öt dobtunk.

1529. *a)* A két lift és a mozgólépcső közül legalább az egyik működik.
b) A két lift és a mozgólépcső közül mindegyik működik.
c) A két lift működik, és a mozgólépcső nem.
d) A két lift és a mozgólépcső közül pontosan kettő működik.
e) Se az első lift, se a mozgólépcső nem működik.
f) A második lift és a mozgólépcső közül legalább az egyik nem működik.

1530. *a)* A selejtszázalék legalább 2%, de kisebb 4%-nál.
b) Lehetetlen esemény. (A selejtszázalék kisebb 2%-nál, kivéve a 4%-nál kisebb eseteket.)

1531. *a)* A bal felső részt;
b) a jobb alsó részt;
c) a jobb alsó részt;
d) bárhova lőhettem a bal alsó részt kivéve (pl. tábla mellé is).

VI

1532. A tanuló betöltötte a 17. évét, de még nincs 18 éves.

1533. *a)* Azt jelenti, hogy vagy matematikából legalább három jeles lesz, vagy a matematikából felmentett tanulók és a matematikából is jelest kapott kitűnő tanulók száma összesen legalább 3.
b) Az osztályban legalább 3 kitűnő tanuló van, aki matematikából is jeles.

1534. *a)* piros vagy figura, piros figura;
b) piros vagy ász, piros ász;
c) figura, ász;
d) piros vagy figura, piros ász;
e) ász;
f) piros ász vagy ász = ász;
g) piros figura;
h) piros figura vagy bármilyen ász.

1535. *a)* piros vagy zöld vagy hetes (makk v. tök);
b) piros vagy zöld, de nem hetes;
c) lehetetlen esemény;
d) hetes, de nem piros vagy zöld (⇒ makk v. tök).

1536. *a)* Kihúzták a 37-et, és vagy a 14, 42, 51 számokat, vagy még a 41 és 68 számokat.
b) Lehetetlen esemény, hiszen az öt szám között kell lennie a 14, 37, 41, 42, 51, 68 számoknak, de ez hat szám.

1537. Azokra, amelyekre C a lehetetlen esemény.

1538. *a)* Legalább az egyik módon fuvaroznak.
b) Aznap mindkét módon szállítanak árut.
c) Vagy csak az egyiken fuvaroznak aznap, vagy egyik módon sem.
d) Ha közúton szállítanak aznap, akkor lehet, hogy vasúton nem, de az is lehet, hogy vasúton sem, ha viszont nincs közúti szállítás, akkor biztosan nincs vasúti sem aznap.
e) Aznap egyik módon sem szállítanak.
f) Legalább az egyik módon szállítanak aznap.

Valószínűségek kombinatorikus kiszámítási módja

1539. $\frac{1}{8!} = \frac{1}{40\,320} = 0{,}000\,025.$

1540. $\frac{1}{\frac{8!}{3!}} = \frac{3!}{8!} = \frac{1}{6720} = 0{,}000\,149.$

1541. $\frac{3! \cdot 2! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{151\,200} = 0{,}000\,0066.$

1542. A két lap kihúzása visszatevés nélkül $32 \cdot 31$-féleképpen történhet. Ezek közül kedvező az, ha mindkét lapot a királyok közül húztuk; $4 \cdot 3$. Így $P = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31}$.

1543. A két lapot, mivel az elsőként kihúzottat visszatesszük, 32^2-féleképpen húzhatjuk ki. Kedvező ezek közül, ha mindkettő király. Ezek száma: 4^2. Így $P = \frac{4^2}{32^2}$.

1544. Kedvező eset: a 4 hetes közül hármat $\binom{4}{3}$-féleképpen tudunk kihúzni. Ezek mindegyikéhez negyedik lapként a másik 28 lap bármelyikét húzhatjuk. A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{4}{3} \cdot 28}{\binom{32}{4}} = 0{,}003\,11.$$

1545. *a)* 0,25.

b) A 32 lap között 4 darab hetes van, tehát 1/8 = 0,125.

c) 11 olyan lap van, ami piros vagy hetes, ezért $\frac{11}{32}$, (amit úgy is megkaphatunk, hogy $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}25 + 0{,}125 - \frac{11}{32}$.

1546. Az első lap kihúzásakor a hetes esélye mindkét esetben $\frac{4}{52}$. Annak valószínűsége, hogy másodszor is hetest húzunk az első estben ugyanannyi, míg a második esetben $\frac{3}{51}$, ami kevesebb, mint $\frac{4}{52}$.

1547. 8 pontból hármat $\binom{8}{3}$-féleképpen választhatunk ki. Ha egy csúcsot kiválasztottunk, akkor már nem választhatjuk a vele éllel összekapcsolt 3-at. A maradék 4 csúcs közül a pontból induló testátló másik végpontját sem választhatjuk, mert az 4 új pontot zár ki, és nem marad lehetőségünk a harmadik pont kiválasztására. Így azt kaptuk, hogy egy pont és a belőle induló lapátlók végpontjai olyan pontnégyest adnak, amiből kell hármat választani (vagyis egyet kihagyni). Egy él két végpontja két különböző pontnégyest ad, ezért a kedvező esetek száma tehát 8. Így $P = \frac{8}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{7}$.

1548. Könnyen látható, hogy sem él, sem testátló nem lehet a 4 pont között, ezért a kedvező esetek számának kiszámítása megegyezik az előző feladattal, ezért a végeredmény is, tehát $P = \frac{8}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{7}$.

1549. *a)* $p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$;

b) $\frac{35}{36}$, mert a 36 eset közül az a rossz, amikor az első és a második kockán is hatos van;

c) $\frac{5}{6}$, mert bármit dobtunk is az egyik kockával, azt a számot nem dobhatjuk a másikkal, tehát öt szám kedvező a hatból;

d) Az első és a második kockával is négyfélét dobhatunk egymástól függetlenül, tehát $p = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$;

Az *e), f), g)* kérdésekre a választ az alábbi táblázatból olvassuk le:

e) $p = \frac{35}{36}$; *f)* $p = \frac{35}{36}$; *g)* $p = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$.

dobás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1 + 1	1 + 2	1 + 3	1 + 4	1 + 5	1 + 6	2 + 6	3 + 6	4 + 6	5 + 6	6 + 6
		2 + 1	2 + 2	2 + 3	2 + 4	2 + 5	3 + 5	4 + 5	5 + 5	6 + 5	
			3 + 1	3 + 2	3 + 3	3 + 4	4 + 4	5 + 4	6 + 4		
				4 + 1	4 + 2	4 + 3	5 + 3	6 + 3			
					5 + 1	5 + 2	6 + 2				
						6 + 1					
db	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

1550. $A + B = (A - AB) + B$. Viszont $(A - AB)B = 0$, vagyis egymást kizáró események. Ezért valószínűségük összeadható:
$P(A + B) = P(A - AB) + P(B) = P(A) - P(AB) + P(B)$. A második egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy $(A - AB) + AB = A$, és itt is kizárja egymást a bal oldali két esemény.

1551. Az előző összefüggés szerint $P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A + B)$, és $P(A + B) \leq 1$, ezért $P(AB) \geq 0{,}3$. Ha a B esemény maga után vonja A-t, tehát A része B-nek, akkor $P(AB) = 0{,}6$, és e két határ között bármi lehet. Pl. ha A jelenti azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen leejtett pont a [0; 1] intervallumon a [0; 0,6] intervallumra, míg B jelenti azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen leejtett pont a [0; 1] intervallumon a [0; 0,7] intervallumra esik, ekkor $P(AB) = 0{,}6$. Ha A jelenti azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen leejtett pont a [0; 1] intervallumon a [0; 0,6] intervallumra, míg B jelenti azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen leejtett pont a [0; 1] intervallumon a [0,3; 1] intervallumra esik, ekkor $P(AB) = 0{,}3$.

1552. $P(A + B + C) = P[(A + B) + C] = P(A + B) + P(C) - P[(A + B)C] =$
$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC + BC) = P(A) + P(B) + P(C) -$
$- P(A \cdot B) - P(AC) - P(BC) + P[(AC)(BC)]$.
De $(AC)(BC) = ABC$, és így a bizonyítandó állítást kaptuk.

1553. A lehetséges esetek száma 6^{36}. A kedvező esetek száma $\frac{36!}{(6!)^6}$.

Így $P = \frac{\frac{36!}{(6!)^6}}{6^{36}}$.

1554. Használjuk az **1549.** *feladatnál* megadott táblázatot!

a) $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$; *b)* $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$;

c) $\frac{1}{2}$; *d)* $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

1555. $\frac{1}{2}$, mert az első $(n - 1)$ számnak bármi is az összege, azt pontosan a következő dobható számok fele egészíti ki párosra és fele páratlanra.

1556. $\frac{1}{6}$ az előző gondolatmenet alapján.

1557. *a)* Könnyebb a komplementer esemény valószínűségét meghatározni. Annak valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk 6-ost $\left(\frac{5}{6}\right)^5$, tehát annak valószínűsége, hogy legalább egyszer dobunk 6-ost

$$p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

b) Annak valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk sem 1-est, sem 6-ost $\left(\frac{4}{6}\right)^5$, tehát annak valószínűsége, hogy legalább egyszer dobunk 1-est vagy 6-ost $p = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^5$.

c) Ez azt jelenti, hogy előtte négyszer nem 6-ost dobtunk, és az ötödikre 6-ost. Ennek valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$.

1558. *a)* $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, pl. leszámolva a *26.* példa megoldásánál megadott táblázatban.

b) Mivel $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, ezért $P(A+B) = \frac{1}{2} + \frac{11}{36} - \frac{6}{36} = \frac{23}{36}$, de ezt is le lehet számolni a táblázatban. (A páratlan összeghez azt az 5 esetet kell hozzávenni, amikor az összeg páros, de valamelyik kockán 6-os van.)

c) Mint a *b)* kérdésnél leszámolható, hogy $\frac{1}{2} + \frac{11}{36} - \frac{5}{36} = \frac{24}{36}$.

d) Annak valószínűsége, hogy nincs hatos és az összeg páros $\frac{13}{36}$.

1559. *a)* $\frac{1}{3^{14}}$.

b) Ez azt jelenti, hogy az első 13 tippet eltaláltuk, ennek esélye $\frac{1}{3^{13}}$, és az utolsót elhibáztuk, ennek valószínűsége $\frac{2}{3}$. A keresett valószínűsége e kettő szorzata, azaz $\frac{1}{3^{13}} \cdot \frac{2}{3}$.

c) Ez annyiban különbözik az előző példától, hogy a 14 meccsből bármelyiket elhibázhattuk, ezért a keresett valószínűség $14 \cdot \frac{1}{3^{13}} \cdot \frac{2}{3}$.

1560. 10 ember egy padra 10!-féleképpen tud leülni. Ezek közül kedvezők azok az elhelyezkedések, amikor *A* és *B* egymás mellett ül. Az elhelyezkedések összeszámolásánál *AB-t* tekintsük egy elemnek. Így 9!-féleképpen foglalhatnak helyet. De *AB* helycseréje az így kapott elhelyezkedések számát megkétszerezi. Így $P = \frac{2 \cdot 9!}{10!}$.

1561. Az előző feladathoz hasonlóan járunk el. Így a keresett valószínűség: $P = \frac{2 \cdot 2 \cdot 8!}{10!}$.

VI

1562. A 22-es feladat megoldásakor alkalmazott gondolatmenetet követve kapjuk, hogy $P = \dfrac{2 \cdot 2\,(n-2)!}{n!}$.

1563. $P = \dfrac{2 \cdot 2\,(n-3)!}{(n-1)!}$.

1564. Az előző feladat megoldásához hasonlóan

$$a)\ P = \frac{\binom{a-b}{b}}{\binom{a}{b}}; \qquad b)\ \frac{1}{\binom{a}{b}}.$$

1565. A lehetséges esetek száma $5 \cdot 4 \cdot 8^3$. A kedvező eseteket az jelenti, ha 6 óra alatt megtaláljuk azt az egyetlen beállítást. Ez $6 \cdot 60 \cdot 20$ esetig lehet jó. Így $P = \dfrac{6 \cdot 60 \cdot 20}{5 \cdot 4 \cdot 8^3}$.

1566. A lehetséges esetek száma 10^6. A kedvező eseteket az előző feladat megoldásában használt gondolatmenettel kapjuk: $6 \cdot 60 \cdot 20$.

Így $P = \dfrac{6 \cdot 60 \cdot 20}{10^6}$.

1567. A 3:3 arányú döntetlen eredmény csak úgy következhet be, ha

1. mindketten három játszmát megnyertek, s hármat elvesztettek;
2. mindketten két-két játszmát nyertek, és két játszma döntetlen;
3. mindketten egy-egy játszmát nyertek, és négy játszma döntetlen és végül
4. ha mind a hat játszma döntetlenül végződött.

A valószínűségek rendre:

$$P_1 = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{13}{28}\right)^3;$$

$$P_2 = \frac{6!}{2!2!2!} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{13}{28}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2;$$

$$P_3 = \frac{6!}{4!} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{13}{28} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4;$$

$$P_4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6.$$

A keresett valószínűséget, mivel ezek páronként egymást kizáró események, az így kapott valószínűségek összege adja; azaz $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.

1568. Legyen a fiú nyerésének valószínűsége Apa ellen a, Papa ellen p ($p > a$), s számoljuk ki mindkét esetben a fiú számára sikeres mérkőzéssorozat valószínűségét.
Az Apa–Papa–Apa mérkőzések esetén vagy az első két mérkőzést kell megnyernie (ennek valószínűsége ap), vagy az utolsó kettőt (pa). Kétszer számoltuk azt az esetet, amikor mind a három mérkőzést megnyeri, így a keresett valószínűség $2ap - a^2p$.
Hasonlóan számolva a Papa–Apa–Papa sorozatot, a valószínűség $2ap - p^2a$.
Összehasonlítva a két értéket, kedvezőbb az Apa–Papa–Apa sorozat.

1569. Az összes szabályos utak száma $\binom{11}{4}$, hiszen 11 lépésből kell a 4 lefelé lépést kiválasztani. Azoknak az utaknak a száma, amelyek áthaladnak a (3; 5) mezőn $\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2}$, mert először el kell érni a mezőt, ez $\binom{6}{2}$-féleképpen tehető meg, azután arról a mezőről indulva kell eljutni a G pontba, ez $\binom{5}{2}$-féleképpen tehető meg. A kérdezett valószínűség tehát $\dfrac{\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{11}{4}} = \dfrac{5}{11}$.

1570. *a)* $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{3} = 0,4$;

b) $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{15}$.

1571. $p_1 = p_2 = \dfrac{1}{2}$.

1572. $p_1 = p_2 = \dfrac{1}{3}$.

1573. Az öttel való oszthatóság feltétele, hogy az utolsó dobás ötös legyen. Ennek valószínűsége $p = \dfrac{1}{6}$.

1574. Akármi is az első dobás, kétféle második dobott szám esetén lesz 3-mal osztható a kétjegyű szám. Annak valószínűsége, hogy pont az a kettő közül dobjuk az egyiket, $p = \dfrac{1}{3}$.

1575. Egyenlő, lásd **1549.** *feladat* táblázata.

1576. Egyenlő, lásd **1549.** *feladat* táblázata.

1577. Öt páratlan szám összege páratlan szám. A keresett valószínűség 1.

1578. A -1, 0, 1 számok dobása egyenlően valószínű. Ezért vizsgálhatjuk a 3 számból képezett rendezett számötösöket. A dobott számok összege akkor, és

VI

VI

csak akkor páros szám, ha a dobott számok között páratlan számú 0 szerepel. Azoknak a rendezett számötösöknek a száma, amelyekben a 0 egyszer, háromszor, illetve ötször szerepel rendre $5\cdot 2^4$, $\binom{5}{3}\cdot 2^2$, 1. A keresett valószínűség

$$\frac{5\cdot 2^4+\binom{5}{3}\cdot 2^2+1}{3^5}=\frac{121}{243}.$$

1579. $\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{8}{15}.$

1580. Az első fiút 5-féleképpen választhatjuk ki, azután egy lány következik, akit szintén 5-féleképpen választhatunk ki, azután a 4 fiú közül választunk egyet, … stb. A sor azonban indulhat lánnyal is, ezért 2-vel kell szorozni., tehát $p=\dfrac{2\cdot 5\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{10!}.$

1581. 0,25.

1582. $\dfrac{4}{\binom{32}{8}}$, mert bármelyik játékosnál lehet az összes zöld.

1583. $\dfrac{\binom{30}{6}}{\binom{32}{8}}=0{,}056.$

1584. $p=\dfrac{\binom{76}{4}}{\binom{90}{5}}.$

1585. $p=\dfrac{\binom{73}{4}}{\binom{90}{5}}.$

1586. $p = \dfrac{\binom{64}{5}}{\binom{90}{5}}$, ha a határokat is megengedjük.

1587. $\dfrac{\binom{20}{2} \cdot \binom{69}{2}}{\binom{90}{5}}$.

1588. Ez azt jelenti, hogy az utolsó 40-ből 3-at, és az első 50 számból húztunk 2-t, vagy az utolsó 40-ből 4-et, és az első 50 számból húztunk 1-et, vagy minden szám az utolsó 50 közül való. Ezért a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{40}{3} \cdot \binom{50}{2} + \binom{40}{4} \cdot \binom{50}{1} + \binom{40}{5}}{\binom{90}{5}}.$$

VI

1589. $\dfrac{1}{5!}$.

1590. *a)* $\dfrac{1}{\binom{90}{5}}$; *b)* $\dfrac{\binom{85}{2} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}$; *c)* $\dfrac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}$.

1591. $\dfrac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$.

1592. Ez komplementer eseménye annak, hogy mind a négy ászt kihúztuk, ezért $p = 1 - \dfrac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$.

1593. *a)* $\dfrac{5}{15} \cdot \dfrac{10}{14} \cdot 2 = \dfrac{\binom{5}{1} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{15}{2}} = 0{,}476$.

VI

b) $\frac{5}{15}\cdot\frac{10}{15}\cdot 2=\frac{4}{9}=0,\dot{4}.$

1594. Ez az előző feladatbeli esemény komplementer eseményének valószínűségét kérdezi, tehát

a) $p\approx 0{,}524$;

b) $p=\frac{5}{9}$.

1595. Ha nincs mind a három színből, akkor két színből kivettük az összes golyót, egyből bennmaradt mind. Ezt $3\cdot\frac{1}{\binom{9}{6}}=\frac{1}{28}$-féleképpen lehet megtenni. A komplementer esemény (hogy van mindhárom színből) valószínűsége $p=\frac{27}{28}$.

1596. 0,6

1597. Itt is először a komplementer esemény valószínűségét számoljuk ki. Annak valószínűsége, hogy nem tudjuk meggyújtani, $0{,}9^4$, ezért a tábortüzet $1-0{,}9^4$ eséllyel meg lehet gyújtani.

1598. Ez a valószínűség nem függ attól, hányszor próbálkoztunk már, tehát ennek valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

1599. Az első esemény valószínűsége $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=0{,}5177$, míg a másodiké $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0,4914$, tehát az első valószínűbb.

1600. $0{,}96^{20}\approx 0{,}44$, tehát bármilyen kicsi is az ellenőrrel való találkozás esélye, valószínűbb, hogy Péter lebukik, mint az, hogy megússza büntetés nélkül.

1601. Ahhoz, hogy ne fedezze, legalább $\frac{3000}{150}=20$-szor kell sikeresen bliccelni. Ennek valószínűsége $0{,}96^{20}\approx 0{,}44$, tehát 56%-os valószínűséggel fedezi a bírság a blicceléssel okozott kárt.

1602. $80\cdot\binom{9}{3}$ olyan számötös van, amiben a legnagyobb és legkisebb szám különbsége 10. Ezek közül egy esetben ötösöm, 19 esetben négyesem van, ezért a keresett valószínűség $p=\frac{20}{80\cdot\binom{9}{3}}=\frac{1}{336}$. (Azért 19 eset, mert lehet, hogy a *3, 5, 7* számok közül nem találtam el egyet, és akkor a *2, 4, 6, 8, 9, 10* számok közül húzták ki valamelyiket, ez 18 eset, de az is lehet, hogy a *3, 5, 7, 11, 13* számokat húzták.)

1603. Annak valószínűsége, hogy n pénzdarabot feldobva van fej $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, így a következő egyenlőtlenséget kell megoldani: $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0{,}9$, ahonnan $n \geq 4$ adódik.

1604. Az állítás ugyanazt jelenti, mint hogy legfeljebb 0,25 valószínűséggel nincs egyetlen hatos sem. Ennek valószínűsége $p=\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}25$. Az egyenlet reciprokát véve (fordul az egyenlőtlenség iránya!), majd logaritmussal számolva, a logaritmus azonosságait használva a következő adódik:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^n > 4;$$

$$n(\lg 6 - \lg 5) > \lg 4;$$

$$n > \frac{\lg 4}{(\lg 6 - \lg 5)} \approx 7{,}6.$$

Tehát legalább 8 kockát kell feldobni.

Megjegyzés: Az is jó megoldás, ha az $\left(\frac{5}{6}\right)$-ot addig hatványozom, amíg a hatványérték 0,25-nél kisebb lesz.

1605. Jelölje S_n az n véletlenszerűen kiválasztott villanykörte között a selejtesek számát!

Ekkor a következőket keressük:

a) $P(S_{10} \geq 2)$;

b) $P(S_{10} = 4)$;

c) legalább mekkora n, ha $P(S_{10} \geq 1) \geq 0{,}99$.

A villanykörtéket egymás után, egyesével is kiválaszthatjuk, és minden lépésben 0,08 valószínűséggel selejtes körtét húzunk, 0,92 valószínűséggel jót. A húzások függetlenek, így

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}08^k \cdot 0{,}92^{n-k} \text{ tetszőleges } 0 \leq k \leq n \text{ esetén.}$$

Így azonnal adódik a *b)* kérdésre a válasz: $n = 10$; $k = 4$ helyettesítéssel $P(S_{10} = 4) \approx 0{,}125$.

Az *a)* kérdésre megkapjuk a választ, ha figyelembe vesszük, hogy csak akkor nincs legalább két selejtes, ha a kiválasztott 10 körte között csak egy selejt van, vagy egyáltalán nem találtunk selejtet. Így

$$P(S_{10} \geq 2) = 1 - P(S_{10} = 1) - P(S_{10} = 0) = 1 - \binom{10}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^{10-1} - 0{,}92^{10} \approx 0{,}188.$$

VI

A *c)* kérdés megválaszolásához azt kell kiszámolni, hogy milyen n-re lesz annak valószínűsége, hogy nem húzunk selejtest 0,01-nál kisebb. (Ennek ellentett eseménye, hogy lesz selejt.)

$$P(S_n \geq 1) = 1 - 0{,}92^n > 0{,}99;$$
$$0{,}92^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}92} \cong 55{,}2.$$

Tehát legalább 56 villanykörtét kell megvizsgálni ahhoz, hogy annak valószínűsége, hogy van köztük selejtes körte, legalább 0,99 legyen.

1606. Legnagyobb valószínűséggel 5 hibás lesz közöttük, ennek valószínűsége $p = \binom{500}{5} 0{,}01^5 \cdot 0{,}99^{495} \approx 0{,}176.$

VI

1607. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy minden tételsorból olyat húz, amit tud. Ennek komplementerének valószínűségét kérdezik.
p (mindet tudja) $= 0{,}8^3 = 0{,}512$, tehát a kérdezett valószínűség 0,488, közel 50%!

1608. Még két számot húznak, és csak akkor nem lesz hármasom, ha az általam játszott *7, 51, 54* számoktól eltérőt húznak a bennmaradt 87 közül, tehát 84 számból választanak. Ezért a kérdezett valószínűség: $1 - \frac{\binom{84}{2}}{\binom{87}{2}} \approx 0{,}068.$

1609. 25 nap alatt tehát 50-szer próbálkozhatok. Az összes lehetőséget kell még kiszámolni. Itt két eset van. Ha az első számjegy nem 3, akkor ott 8-féle számjegy állhat, és a három megmaradt helyből kettőn 3 áll, a harmadikon pedig a hármas kivételével bármi, és ezek 3-féle sorrendben lehetnek. Ebben az esetben tehát $8 \cdot 9 \cdot 3 = 216$ lehetőség van. Ha az első számjegy a hármas, akkor még egy hármas mellett két helyre tehetek 9-féle számot, és ezt 3-féleképpen állíthatom sorba. Ezért itt az esetek száma $9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$. Az összes esetek száma tehát 459, a keresett valószínűség pedig $\frac{50}{459} = 0{,}1089.$

1610. A pontos valószínűség P (érvényes szavazás) $= \sum_{k=[pN]+1}^{\infty} \binom{N}{k} p^k \cdot (1-p)^{N-k}.$

Ennek nagyságát N és p ismeretében lehet becsülni.

1611. 16 darab „babás” lap van, közöttük 4 darab piros. Így ha p-vel jelöljük a kihúzott piros lapok számát, akkor a hipergeometriai eloszlás formulája szerint $0 \leq k \leq 4$ esetén

$$P(p = k) = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{12}{4-k}}{\binom{16}{4}}.$$

Ezt felhasználva

$$P(p \geq 2) = 1 - P(p=1) - P(p=0) = 1 - \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{12}{3}}{\binom{16}{4}} - \frac{\binom{12}{4}}{\binom{16}{4}} \approx 0{,}607.$$

1612. Az egyenlő esélyből következik, hogy a fiúk és lányok aránya is 2/3 kell legyen.

1613. Aladár nyerési esélye $p_A = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = 0{,}0670$. Ahhoz, hogy Barnabás nyerjen, kétszer kell ugyanannyiadikra kijönnie a hatosnak. Ennek valószínűsége: $p_B = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{36}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{i-1} = \left(\frac{1}{36}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}} =$

$= \left(\frac{1}{36}\right)\cdot\frac{36}{11} = \frac{1}{11} = 0{,}09.$

Tehát Barnabás nyerési esélye nagyobb.

1614. Az első szám 80-féle lehet. Ez meghatározza az utolsó számot is. A közte lévő hármat az e két szám között levő 9 közül kell kiválasztani, tehát

$$p = \frac{80\cdot\binom{9}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

1615. Ez azt jelenti, hogy ha i-edikre dobunk először 6-ost, akkor addig se 6-ot, se 1-et nem dobtunk. A keresett valószínűség tehát :

$$p = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^{i-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{6}} = \left(\frac{1}{6}\right)\cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right).$$

1616. A feladatot a teljes valószínűség tételével oldjuk meg. Válasszuk szét aszerint a dobásokat, hogy hány egyformát dobtunk elsőre. Annak valószínűsége, hogy az első dobásunkra három különböző szám jött ki, $\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{5}{9}$, annak, hogy három egyforma jött ki $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$, tehát annak esélye, hogy két egyforma van $1 - \frac{5}{9} - \frac{1}{36} = \frac{5}{12}$. Most számoljuk ki, mekkora valószínűséggel dobjuk ugyanazt! Ha három különböző szám volt, most is ugyanazoknak a számoknak kell kijönniük, de ezt megtehetik 6-féle sorrendben. Ha két különböző

VI

szám volt, ezt csak 3-féle sorrendben lehet megkapni, míg az utolsó esetben egyetlen lehetőség jó. A teljes valószínűség tétele szerint a kérdéses valószínűség tehát: $\frac{5}{9}\cdot\frac{6}{216}+\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{216}+\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{216}=\frac{166}{6^5}=0{,}021$.

1617. Páratlan számú golyó húzásának nagyobb a valószínűsége; határozzuk meg pl. a páros számú golyó húzásának valószínűségét. Az összes eset száma 2^n-1 (nem számoljuk azt az esetet, amikor egyetlen golyót sem húzunk ki; egyébként minden golyót vagy kihúzunk, vagy nem). Páros számú golyót $\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ldots$-féleképpen húzhatunk ki, ami $(2^{n-1}-1)$-gyel egyenlő. (Az összeghez hozzáadva $\binom{n}{0}$-t, 2^{n-1}-t kapunk.) A keresett valószínűség $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$, s ez kisebb, mint $\frac{1}{2}$.

1618. Az összeadási és szorzási szabályt alkalmazhatjuk. Így a három esetben rendre $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$; $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$; $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$ valószínűségeket kapunk, a sajt megtalálásának valószínűsége ezek összege, $\frac{4}{27}$.

1619. $P=0{,}3\cdot0{,}4\cdot0{,}5+0{,}5\cdot0{,}3+0{,}5\cdot0{,}5\cdot0{,}5=0{,}335$.

1620. A találkozás a négyzet átlója mentén történhet. Fentről lefelé haladva rendre 1, 4, 6, 4, 1 út vezet mindkét oldalról a találkozási pontokba, így a kedvező esetek száma $1^2+4^2+6^2+4^2+1^2=70$. Mivel az első négy lépést a macska is és az egér is tetszőlegesen választhatja ki két irány közül, mindketten 2^4-féle utat tehetnek meg. Az összes eset száma tehát $2^4\cdot2^4=2^8$, a keresett valószínűség $\frac{70}{256}\approx0{,}273$.

1621. *a)* Az eredmény nyilván $\frac{1}{2}$.

b) A három egyenlő részre osztott pálca középső harmadába nem eshet a töréspont. A keresett valószínűség $\frac{2}{3}$.

1622. A valószínűség megegyezik a „jó” terület és a négyzet területének arányával. Azok a pontok, amik közelebb vannak a középponthoz, mint valamelyik csúcshoz, egy olyan négyzet belsejében vannak, amelynek csúcsai a négyzet oldalfelezőpontjai. Ennek területe fele a négyzetének, tehát a keresett valószínűség $1/2$.

1623. A megoldást az $x+y>1$ tartomány adja, ami az $y=-x+1$ fölötti része a négyzetnek, tehát a keresett valószínűség $1/2$.

1624. Legyenek a háromszög oldalai x, y, z; legyen $x \le y \le z$ és $x + y + z = 12$. Ahhoz, hogy a szakaszokból háromszög keletkezzék, szükséges és elégséges, hogy $y + z > x$ legyen. Ebből $5 \le x \le 4$.

$x = 5, y = 5, z = 2$, 3 eset, hegyesszögű;
$x = 5, y = 4, z = 3$, 6 eset, derékszögű;
$x = 4, y = 4, z = 4$, 1 eset, hegyesszögű;
összesen 10 eset.

a) $P = \dfrac{10}{\binom{11}{2}}$; *b)* $P = \dfrac{1}{\binom{11}{2}}$; *c)* $P = \dfrac{4}{\binom{11}{2}}$;

d) $P = \dfrac{6}{\binom{11}{2}}$; *e)* $P = \dfrac{4}{\binom{11}{2}}$; *f)* $P = 0$.

1625. Legyenek x, y, z a háromszög oldalai, $x + y + z = 11$, és legyen $x \le y \le z$. Szükséges és elégséges feltétel, hogy $y + z > x$.
Ebből $4 \le x \le 5$.

$x = 5, y = 5, z = 1$, 3 eset, hegyesszögű;
$x = 5, y = 4, z = 2$, 6 eset, tompaszögű;
$x = 5, y = 3, z = 3$, 3 eset, tompaszögű;
$x = 4, y = 4, z = 3$, 3 eset, hegyesszögű;
összesen 15 eset.

a) $P = \dfrac{15}{\binom{10}{2}}$; *b)* $P = 0$; *c)* $P = \dfrac{9}{\binom{10}{2}}$;

d) $P = 0$; *e)* $P = \dfrac{6}{\binom{10}{2}}$; *f)* $P = \dfrac{9}{\binom{10}{2}}$.

1626. Az *a), b)* és *e)*-re a válasz: a pontok mindig ellenkező paritású pontban tartózkodnak, ezért ezek lehetetlen események, s valószínűségük 0.

c) Az A csak $+1, +1, +1, +1, +1$ lépéssorozattal juthat a $+5$-be. Ennek valószínűsége $\dfrac{1}{2^5}$. Hasonlóan B csak $-1, -1, -1, -1, -1$ lépéssorozattal juthat el 0-ba; valószínűsége szintén $\dfrac{1}{2^5}$. A függetlenség miatt a helycsere bekövetkezésének valószínűsége $\dfrac{1}{2^5} \cdot \dfrac{1}{2^5}$.

d) A eljuthat a $-3, -1, 1, 3$ pontba.
B eljuthat a 2, 4, 6, 8 pontba.
A feltételeknek megfelelő lépéspárok:
(1; 2), valószínűsége $\dfrac{3}{2^3} \cdot \dfrac{1}{2^3}$.

(3; 2), valószínűsége $\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3}$.

(3; 4), valószínűsége $\frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{2^3}$.

A keresett valószínűséget ezek összege adja:

$P = \frac{3}{2^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{3}{2^6}$.

1627. *a)* A keresett valószínűség 0.

b) $P = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3}$

c) Csak a +2, illetve a +4 pontban találkozhatnak. A a +2 pontba −1, +1, +1, +1 permutációival juthat el; B pedig a −1, −1, −1, −1 sorozattal.

VI

$P_1 = \frac{4!}{3!} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{4!}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^6}$.

Ugyanennyi a valószínűsége a + 4 pontban való találkozásnak is;

$P_2 = \frac{1}{2^6}$. Így $P = \frac{1}{2^6} \cdot 2$.

d), e), f): A távolság mindig páros lesz. Ezért ez lehetetlen esemény. Valószínűsége 0.

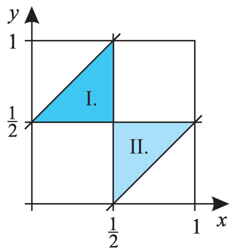
g) $P = \frac{1}{2^6} \cdot \frac{1}{2^6}$.

h) $\frac{8!}{7!} \cdot \frac{1}{2^8} \cdot \frac{8!}{7!} \cdot \frac{1}{2^8}$.

1628. Tekintsük egységnyinek a pálca hosszát, s legyen $AQ = x$, $AR = y$. Feleltessük meg a két töréspontot a sík egységnégyzete (x, y) pontjának; az (x, y) pont véletlenszerű kiválasztása ekvivalens a két töréspont megjelölésével. Két esetet különböztetünk meg:

I. eset: Ha $x < y$, akkor a három szakasz hossza $x, y - x, 1 - y$. Ezekre kell a háromszög-egyenlőtlenségnek teljesülnie, a kapott feltételek: $x < \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$, $y < x + \frac{1}{2}$. A ponthalmazoknak megfelelő tartományt az ábrán I-gyel jelöltük.

1628.



II. eset: Ha $y < x$, akkor szerepcserével $y < \frac{1}{2}$, $x > \frac{1}{2}$, $x < y + \frac{1}{2}$. A ponthalmazt II-vel jelöltük. (1628. ábra)

Az egyenlőtlenség-rendszernek eleget tevő pontok halmaza az I. és II. tartomány, a keresett valószínűség $\frac{1}{4}$.

Megjegyzés: A kimaradt $x = y$ eset annak felel meg, ha a Q és R töréspont egybeesik. Ennek az eseménynek 0 a valószínűsége (bár nem lehetetlen esemény).

1629. A szögeket jelöljük $x < y < z$-vel, s végezzük el a következő becslést: $x + y = 180° - z$, ezért $x + y < 180° - y$, s innen $\frac{x}{2} + y < 90°$. Ezután határozzuk meg az egyes x értékekhez tartozó lehetséges y értékeket:

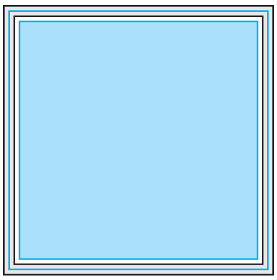
ha $x = 1°$, $y \in \{2°, 3°, \dots, 89°\}$, 88 lehetőség;
ha $x = 2°$, $y \in \{3°, 4°, \dots, 88°\}$, 86 lehetőség;
ha $x = 3°$, $y \in \{4°, 3°, \dots, 88°\}$, 85 lehetőség;
ha $x = 4°$, $y \in \{5°, 4°, \dots, 87°\}$, 83 lehetőség;
…
ha $x = 57°$, $y \in \{58°, 59°, 60°, 61°\}$, 4 lehetőség;
ha $x = 58°$, $y \in \{59°, 60°\}$, 2 lehetőség;
ha $x = 59°$, $y \in \{60°\}$, 1 lehetőség.

Könnyen bizonyítható a szabályosság: ha x a páratlan (vagy páros) számokon fut, a lehetőségek száma hármasával csökken. A lehetőségek számai között a 3-mal osztthatóak fognak hiányozni, a kedvező lehetőségek száma tehát $(1 + 4 + 7 + \dots + 88) + (2 + 5 + 8 + \dots + 86) = 2611$. Az összes lehetőség $\binom{179}{3}$, a keresett valószínűség $\frac{2611}{939\,929}$.

1630. Az érme helyét egyértelműen meghatározza a középpontjának helye. Az, hogy az érme középpontja adott pontba kerüljön, csak egyféleképpen valósítható meg. Ezért ez tekinthető elemi eseménynek.
Kedvező esetnek tekinthetjük egy négyzet kiválasztása esetén annak a négyzetnek a területét a csempe belsejében, amelynek középpontja az eredetivel azonos, és odalai párhuzamosak az eredetivel, oldalhossza pedig 48 cm. A kedvező és lehetséges területek aránya független attól, hogy hány négyzetet vizsgálunk. Ha a lap kiterjedése elég nagy, akkor ezt az arányt a két végén esetleg fellépő töredék négyzetek már nem befolyásolják lényegesen. A keresett valószínűség tehát $1 - \frac{48^2}{50^2} = 0{,}0784$.

1631. Egybevágó négyzetekkel fedhetjük le a rácsot, a négyzetek oldala a szomszédos drótok tengelyeire esik (1631. ábra).
A négyzet oldala 10 cm, ezeken belülre nyúlik a kerítés drótjából 2 mm. Akkor nem fog a kerítésnek ütközni a sörét, ha középpontja ettől a benyúlástól még legalább 2 mm-rel beljebb esik. Tehát az esemény szempontjából a teljes alakzat 10 cm oldalú négyzet, a komplementer esemény „kedvező” alakzata pedig egy 9,2 cm oldalú négyzet. Az áthaladási valószínűség $\frac{9{,}2^2}{10^2} \approx 0{,}8464$, az ütközési valószínűség tehát $\approx 0{,}15$.

1631.



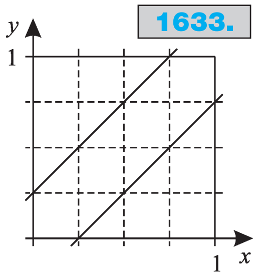
1632. *a)* $0{,}8464^{10} \approx 0{,}1887$, vagyis az ütközésmentes áthaladásra még 20% esély sincs.

b) $0{,}8464^{20} \approx 0{,}0356$ a valószínűség, tehát rendkívül kicsi.

Megjegyzés: Kicsit megvizsgálva 0,8464 hatványait, meglepő eredményekre jutunk. $0{,}8464^{4} \approx 0{,}5132$, tehát már 4 sörét esetén is kb. ugyanakkora valószínűséggel történik a sima áthaladás, mint az ütközés.

VI

1633.



1633. Az előző megoldás gondolatmenetét alkalmazhatjuk. Érkezzék az egyik személy x, a másik y órával 10 óra után ($x, y \le 1$), s az érkezésüket feleltessük meg ismét az egységnégyzet (x, y) koordinátájú pontjának. Ekkor az $|x-y| \le \frac{1}{4}$ ponthalmaz területét kell meghatároznunk. (1633. ábra)

A keresett valószínűség $\frac{7}{16}$.

1634. A tábla területe legyen egységnyi (1), az alak területe t. $P(t)$-vel jelöljük a keresett valószínűséget.

$$P(t) = \binom{5}{2} \cdot t^2(1-t)^3.$$

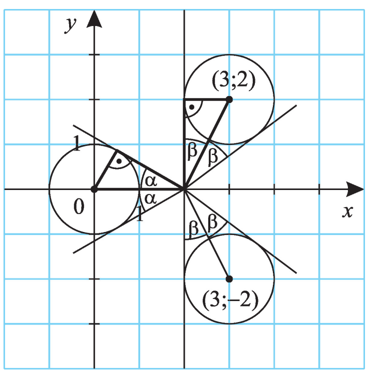
$P(t)$ maximumának helyét kell meghatározni:

$$P'(t) = \binom{5}{2}\left[2t(1-t)^3 - 3t^2(1-t)^2\right] = \binom{5}{2} t(1-t)^2(2-5t),$$

$t = 0{,}4$.

1635. A kedvező és lehetséges területek aránya egyenlő egy kis négyzet területének aránya egy nyolcszög és egy kis négyzet területének összegéhez. Tehát $P = \dfrac{1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} + 1}$.

1636.



1636. $\sin\alpha = \frac{1}{2} \to \alpha = 30°$,

$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2} \to \beta = 26°\,34'$;

$$P = 1 - \frac{2\alpha + 4\beta}{360°} = 0{,}54.$$

(Az ábra jelölése szerint.)

Más nemzetek érettségi feladataiból

1637. A Laplace-modellt felhasználva (kedvező elemi események száma/összes elemi események száma) számítjuk ki a feladatot. Az összes 16 ceruza közül piros vagy fehér $4 + 5 = 9$, tehát a helyes válasz $\frac{9}{16}$

1638. Ha a golyók száma: $2x$ (x fehér és x piros), akkor annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül két pirosat húzunk

$$P(\text{két piros}) = \frac{\binom{x}{2}}{\binom{2x}{2}} = \frac{x(x-1)}{2x(2x-1)} = \frac{x-1}{4x-2}.$$

A feladat feltételei szerint ez éppen $\frac{8}{33}$. Ekkor a $33x - 33 = 32x - 16$ egyenlet megoldását keressük. Ez $x = 17$. Tehát az urnában $2x = 34$ golyó van.

1639. A golyóknak színük szerint $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$ sorrendje lehetséges. Ezek egyenlő valószínűségűek. A kedvező esetek összeszámlálásához először tegyük le a nem zöldeket. Ezek összes sorrendje $\binom{8}{3}$, mivel a 8 hely közül kell azt a 3-at kiválasztani, ahová pirosat teszünk. A zöld golyókat most betehetjük bármelyik nemzöld elé, vagy az utolsó zöld után, tehát összesen 9 helyre. A keresett valószínűség tehát: $\frac{\binom{8}{3}\binom{9}{4}}{\binom{12}{3}\binom{9}{4}\binom{5}{5}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$, ezért a válasz 69.

1640. Annak a valószínűsége, hogy 2 sárgát húztunk:

$$p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \cdot 6}{120} = \frac{3}{10}.$$

1641. A kihúzott számok összege pontosan akkor páratlan, ha 5, 3 vagy 1 páratlan számot húztunk. A 11 eredeti számból 6 páratlan és 5 páros. A számunkra kedvező esemény valószínűsége:

P(az összeg páratlan) = P(a páratlanok száma 1, 3 vagy 5) =
= P(1 páratlant húztunk) + P(3 páratlant húztunk) + P(5 páratlant húztunk) =

$$= \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{5}+\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{3}+\binom{6}{5}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{11}{6}} = \frac{118}{231}.$$

1642. Az, hogy pontosan egy páros lesz a kiválasztott számok között, azt jelenti, hogy egy számot a {2;4} halmazból választottunk, egyet pedig az {1;3;5} halmazból. Ennek valószínűsége:

$$p = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}.$$

1643. 0,5 eséllyel választjuk ki bármelyik dobozt, majd abból az első doboz esetében

$$\frac{3\cdot 4+4\cdot 3}{7\cdot 7} = \frac{24}{49},$$

a második doboz esetén

$$\frac{5\cdot 2+2\cdot 5}{7\cdot 7} = \frac{20}{49}$$

valószínűséggel teljesül a feltétel. A keresett valószínűség tehát:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{24}{49}+\frac{20}{49}\right) = \frac{22}{49}.$$

1644. Ez kétféleképpen lehetséges, vagy először húzunk fehéret, és azután feketét – ennek valószínűsége

$$\frac{2}{12}\cdot\frac{4}{11} = \frac{2}{33}$$

–, vagy fordítva, aminek az esélye ugyanannyi. Így a helyes válasz $\frac{4}{33}$.

1645. Alkalmazzuk a Laplace-modellt!

$$P = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

1646. Ezt a feladatot is a Laplace-modellt felhasználva oldjuk meg.
Az összes esetek száma

$$\binom{10}{6}=\binom{10}{4}.$$

Kedvezőek azok az esetek, amelyekben az első két szám közül egyet választunk, kiválasztjuk a 3-at, majd a maradék négy szám közül még négyet. Ezért a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{7}{4}\cdot 2}{\binom{10}{6}}=\frac{1}{3}.$$

1647. Tudjuk, hogy 10^{99} minden osztója 2^k5^l alakba írható, ahol $0 \le k;l \le 99$. Véletlenszerűen osztót választani annyit tesz, mint egymástól függetlenül választjuk meg k és l értékét a 100 lehetőség közül. Egy osztó akkor lesz 10^{88} többszöröse, ha k és l értéke egyaránt legalább 88. Ezért

$$P(k \ge 88 \text{ és } l \ge 88)=P(k \ge 88)\cdot P(l \ge 88)=\frac{12}{100}\cdot\frac{12}{100}=\left(\frac{3}{25}\right)^2=\frac{9}{625}.$$

Ez már tovább nem egyszerűsíthető alak, így a számláló és a nevező összege 634.

1648. Számoljuk először ki a 2 kiválasztásának valószínűségét!
Ez a feltétel alapján $\log 3-\log 2$. Ennek kétszerese

$$2\cdot(\log 3-\log 2)=\log\left(\frac{3}{2}\right)^2=\log\frac{9}{4}.$$

Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy pl. a *b)* lehetőség valószínűsége

$$\log\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)=\log\frac{5}{3},$$

míg a *c)* esetben

$$\log\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=\log\frac{9}{4}$$

adódik. Az első két esetben és a negyedikben ennél kisebb, az utolsóban ennél nagyobb érték adódik. Tehát a helyes válasz a *c)*.