

IV. Sorozatok

Sorozatok bevezetése

854. Az 1, 2, 3, 4 számjegyek és tengelyes tükröképek együtt alkotják a sorozat tagjait. A folytatás lehetséges *például* az ábrán látható módokon.

Megjegyzés:

A „Hogyan folytatható ...”-típusú feladatok igen népszerűek a különböző rejtvenyűságokban, társasjátékokban, televíziós vetélkedőkön. Sajnos, ezek „hivatalos megoldása” matematikailag mindig hibás, ugyanis véges sok kezdőtag *sohasem határozza meg egyértelműen a sorozatot*. A feladatban kitűzött sorozatot is számtalan módon folytathatjuk, néhány lehetőség:

- lehetséges, hogy az első négy tag periodikusan ismétlődik;
- a negyedik tag után a második és harmadik ismétlődik periodikusan;
- az ötödik tagtól kezdve minden tag egy 9-es számjegy;
- egyáltalán bármilyen alakzat lehet az ötödik tag.

(A sorozatokat még végtelen sok tagjuk sem határozza meg.)

Az alábbi feladatok némelyikében a sorozatok képzési szabályának meghatározása a feladat. A fentiek értelmében tehát fontos kihangsúlyozni, hogy ezek a sorozatok *bárhogyan folytathatók*; egy esetleges „csúnya” szabály matematikailag éppen olyan helyes, mint egy elegáns vagy frappáns formula. Legfeljebb arra törekedhetünk, hogy a „legvalószínűbb” vagy „legkevésbé önkényes” szabályt próbáljuk megtalálni.

855. a) Többféle szabály adható. Lehetséges pl., hogy a háromszögek az óramutató járásával megegyező irányban „keringenek”, s váltakozó színűek. Ekkor a háromszög 3 lépésenként visszatér a kiindulási helyére, s 6 lépésenként ugyanolyan színnel. E szabály szerint az ábrasorozat 6 lépésenként ismétlődik.

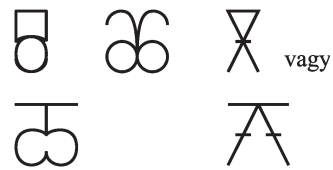
Jelöljük a_n -nel az n . ábrát ($n \in \mathbb{N}^+$)! Ekkor $a_{20} = a_2$, $a_{111} = a_3$, $a_{778} = a_4$. Egy másik lehetséges szabály szerint pl. az ábrasorozat ötösével ismétlődik.

Ekkor $a_{20} = a_5$, $a_{111} = a_1$, $a_{778} = a_3$.

b) Egy lehetséges szabály, hogy a háromszögek az óramutató járásával megegyező irányban „keringenek” és „forognak”. Ekkor a kezdőhelyére, azonos állásban 12 lépésenként kerül vissza a háromszög. Ha b_n -nel jelöljük az n . ábrát, akkor $b_{20} = b_8$, $b_{111} = b_3$, $b_{778} = b_{10}$. A három ábra látható a 855/I. ábrán.

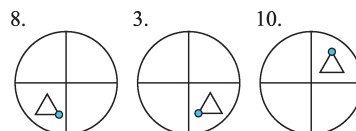
c) Egy lehetséges szabály, hogy a négyzetek az óramutató járásával meg-

854.

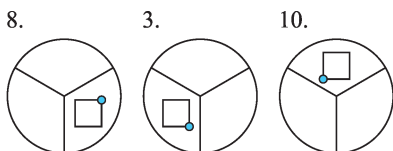


IV

855/I.



855/II.

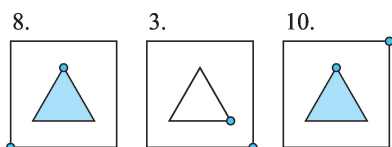


egyező irányban „keringenek” és ellentétes irányban „forognak”. A periódus 12 hosszú, $c_{20} = c_8$, $c_{111} = c_3$, $c_{778} = c_{10}$. A három ábra látható a 855/II. ábrán.

d) Egy lehetséges szabály, hogy a négyzetek az óramutató járásával megegyező irányban, a háromszögek pedig ellentétes irányban forognak, váltakozó színnel. A periódus 12 hosszú, $d_{20} = d_8$, $d_{111} = d_3$, $d_{778} = d_{10}$ (855/III. ábra).

IV

855/III.



856. a) Első megoldás: A következő tagot úgy kapjuk, hogy az előző tagot megnöveljük számjegyeinek összegével. Ekkor a folytatás: 32, 37, 47, 58, 71, 79, 95, 109, 119, 130, 134, 142, 149, 163, 173 stb. A 20. tag 173.

Második megoldás: A tagok közötti különbség kétszeresre nő. Ekkor a folytatás: 41, 73, 137, 265 stb. A 20. tagot úgy kaphatjuk meg, hogy a 10 kezdőtaghoz hozzáadunk $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{18}$ -t, ennek értéke $10 + 2^{19} - 1 = 2^{19} + 9$.

Harmadik megoldás: Egy lehetséges szabály, hogy pl. mindig periodikusan ez az öt szám ismétlődik. Ekkor tehát a folytatás 10, 11, 13, 17, 25, 10 stb., a 20. tag 25.

Megjegyzés:

Nem minden szabály esetén sikerül a sorozat további tagjait valamilyen használható képlettel megadni. Ha pl. az első megoldás szabályát alkalmazva a 100. tag értéke lett volna a kérdés, nem lett volna más lehetőségünk, mint egyesével kiszámolni a sorozat tagjait. Ebben és a hasonló helyzetekben esetleg érdemes egy rövid számítógépes programot készíteni, amellyel tetszőleges sorszámú tagot meghatározhatunk.

b) Egy lehetséges szabály szerint a következő tagot úgy kaphatjuk meg, hogy az aktuális szám számjegyeinek négyzetösszegét képezzük. A folytatás 89, 145, 42, 20, 4 stb. Észrevehetjük, hogy a továbbiakban ismétlődnek a tagok (hiszen újra megkaptuk a 4-et, s bármely tag csak az öt közvetlenül megelőző tagtól függ), így a 20. tag 16.

c) **Első megoldás:** Egy lehetséges szabály, hogy tekintjük az előző tag kétszeresét, s ezen szám számjegyeinek összege lesz a sorozat következő tagja. A folytatás ekkor 1, 2, 4, 8 stb., a 20. tag 2.

Második megoldás: Egy másik lehetőség, hogy az előző tag kétszeresének 9-es maradéka lesz a sorozat következő tagja. A szabályok különböznek, de a két sorozat megegyezik.

857. (857/I-II. ábra.) A sorozatok első hat tagja s egy lehetséges képzési szabály ($n \in \mathbb{N}^+$):

- a) 5, 5, 5, 5, 5, 5; $a_n = 5$.
 b) 4, 5, 6, 7, 8, 9; $b_n = n + 3$.
 c) 1, 3, 5, 7, 9, 11; $c_n = 2n - 1$.
 d) 1, 0, -1, 0, 1, 2; $d_n = |n - 3| - 1$.
 e) 5, 0, -3, -4, -3, 0; $e_n = n^2 - 8n + 12$.
 f) 2, 4, 8, 16, 32, 64; $f_n = 2^n$.
 g) 1, 3, 9, 27, 81, 243; $g_n = 3^{n-1}$.

858. a) 60; b) 400; c) 4010; d) $2k$; e) $4k + 14$; f) $2k^2$.

859. a) 34; b) 298; c) 4008; d) $2k - 2$; e) $2(2k + 3) - 2 = 4k + 4$; f) $2k^2 - 2$.

860. a) 39; b) 199; c) 4009; d) $2k - 1$; e) $2(2k + 1) - 1 = 4k + 1$; f) $2k^2 - 1$.

861. a) A sorozat n . tagja $a_n = 3n - 2$ ($n \in \mathbb{N}^+$). A számok közül 3-mal osztva 1 maradékot ad a 7, 10 és 100, ezek rendre a 2., 4. és 34. tagok.

b) A sorozat n . tagja $b_n = (n - 1)^2$, $n \in \mathbb{N}^+$. $b_7 = 36$, $b_{11} = 100$.

c) A tíztágú sorozat n . tagja $c_n = n^2 - 12n + 68 = (n - 6)^2 + 32$. $c_4 = c_8 = 36$.

d) Az első tag 7. A sorozat minden tagja 7-re vagy 2-re végződik, így a többi szám nem szerepel a sorozatban.

862. Több megoldás van. Lehetséges képletek ($n \in \mathbb{N}^+$):

a) A szomszédos tagok közötti különbség váltakozva 1, illetve 2.

Ha $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú, akkor $a_n = a_{2k-1} = 3k - 2$; ha $n = 2k$ alakú, akkor $a_n = a_{2k} = 3k - 1$.

b) A sorozat tagjai váltakozó előjelűek: $b_n = (-1)^n$.

c) A számokat közös nevezőre hozva felírva $\frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}$

stb. sorozatot kapjuk, innen $c_n = \frac{n-3}{n}$.

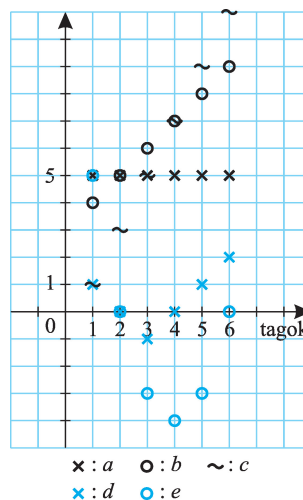
d) $d_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

e) $e_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$.

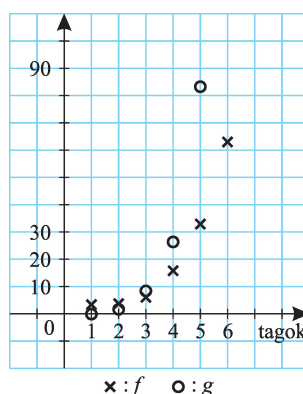
f) A szomszédos tagok közötti különbség 4; $f_n = 4n + 3$.

863. Az $a_n = 2^n$, $b_n = 2^{n+4}$, $c_n = 2^{n-3}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) sorozatok egymás eltoltsai. $a_{100} = b_{96} = c_{103}$; hasonlóan $b_{100} = a_{104} = c_{107}$; illetve $c_{100} = b_{107} = a_{103}$.

857/I.



857/II.



IV

864. Az értékkészletek:

- a) $\{0; 2\}$; b) $\{05; 25\}$; c) $\{-2; 0; 4\}$; d) $\{-1; 1\}$;
 e) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 20\}$; f) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{99}}\right\}$.

865. Az utolsó számjegyek sorozatai:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1
x^3	1	8	7	4	5	6	3	2	9
x^4	1	6	1	6	5	6	1	6	1
x^5	1	2	3	4	5	6	7	8	9

A táblázatból látható, hogy az utolsó számjegyek periodikusan ismétlődnek (x^n utolsó számjegye csak x^{n-1} utolsó számjegytől függ); a periódus hossza lehet 1, 2 vagy 4.

- a) A sorozat 2005. tagja x .
 b) A 15. tag megegyezik x^3 utolsó számjegyével.
 c) Az értékkészlet 1, 2 vagy 4 elemű lehet.

866. a) Nem; $\sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

b) Nem; pl. $n = 2$ esetén $\sin \frac{(n+2)\pi}{2} = 0$.

c) Igen.

d) Nem.

e) Igen.

f) Nem.

g) Igen. $\left(\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)$ minden x -re.

h) Igen. $(\sin x = \sin(x + 2\pi))$ minden x -re.)

867. a) $a_7 = 16$;

b) $b_4 = 16$;

c) $n^3 + 3n^2 + 3n - 47 = 16$ egyenletből $(n+1)^3 = 64$, tehát $c_3 = 16$.

Másik megoldási lehetőség: az $n(n^2 + 3n + 3) = 63$ átalakításból n osztója 63-nak.

d) $d_{64} = 16$;

e) $e_2 = 16$;

f) $19 \cdot (-1)^n + 3 \cdot (-1)^{n+1} = 16 \cdot (-1)^n$, így $f_{2k} = 16$, ahol $k \in \mathbf{N}^+$.

868. A 3-mal osztva 2 maradékot adó (pozitív) számok sorozatát az $a_n = 3n - 1$ képlettel adhatjuk meg.

a) $a_{25} = 74$; b) $a_{100} = 299$; c) $a_{2005} = 6014$; d) $a_n = 3n - 1$;

e) $a_{2n-3} = 3(2n-3) - 1 = 6n - 10$.

869. Ha $a_n + a_{n+1} = a_n^2 - a_{n+1}^2 = (a_n + a_{n+1})(a_n - a_{n+1})$ minden pozitív egész n -re, akkor két lehetőség adódik:

1. $a_n + a_{n+1} = 0$. Ekkor a sorozat tagjai váltakozó előjellel egymás ellentettjei: $k, -k, k, -k, \dots$

2. $a_n + a_{n+1} \neq 0$. Ekkor $1 = a_n - a_{n+1}$, a sorozat tagjai egyesével csökkennek: k , $(k-1)$, $(k-2)$, ..., viszont ez a sorozat nem állhat végtelen sok természetes számból.

Ha $a_n + a_{n+1} = a_{n+1}^2 - a_n^2$, akkor a fentiekhez hasonló megfontolásokkal a k , $(k+1)$, $(k+2)$, ... további sorozatot kapjuk.

870. A sorozat első tíz tagja közül egyik sem lehet nulla, hiszen az első és második 5-5 elem szorzata nem nulla. A feltételt általánosan felírva $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = a_{n+1}^2$ ($n = 1, 2, \dots, 9$), s mivel $a_{n+1} \neq 0$ és $a_n \neq 0$, innen $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ adódik.

Legyen a sorozat első két tagja $a_1 = a$ és $a_2 = b$, ekkor a képlet alapján a további tagok $a_3 = \frac{b}{a}$, $a_4 = \frac{1}{a}$, $a_5 = \frac{1}{b}$, $a_6 = \frac{a}{b}$, $a_7 = a$, $a_8 = b$. Ezután a tagok ismétlődnek, $a_9 = a_3$, $a_{10} = a_4$ stb., hiszen az $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ képlet alapján bármely tag csak az öt közvetlenül megelőző két tagtól függ.

Az első öt tag szorzata $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = a \cdot b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b}{a}$, a második öt

tag szorzata $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} = \frac{a}{b} \cdot a \cdot b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} = b$. Tehát $b = 2$, $a = 1$, a sorozat:

1, 2, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ...

A tagok 6-os periódussal ismétlődnek. 2005 6-tal osztva 1 maradékot ad, tehát a sorozat 2005. tagja 1.

871. Jelöljük a sorozat első két tagját a -val és b -vel, és írjuk fel segítségükkel a további tagokat, felhasználva, hogy bármely 3 szomszédos tag összege 2!

A sorozat: $a, b, 2-a-b, a, b$, és innentől a tagok ismétlődni fognak (bármely tag csak az öt közvetlenül megelőző két tagtól függ). A sorozat minden harmadik tagja megegyezik. Mivel 10 maradéka 3-mal osztva 1, $a = 10$; 200 maradéka 3-mal osztva 2, $b = 8$; a 3-mal osztható sorszámú tagok értéke $2 - 10 - 8 = -16$. $a_{333} = -16$.

872. a) Könnyen belátható, hogy a sorozat minden tagja kisebb 200-nál. Mivel végtelen számú tagból áll a számsorozat, és bármely tag értéke csak az öt közvetlenül megelőző tagtól függ, előbb-utóbb fellép az ismétlődés.

b) A számítások meggyorsítására érdemes egy egyszerű programot írni, de manuálisan is célt érhetünk.

Jelöljük az 1, 2, 3, ..., 9-cel kezdődő sorozatokat (a_n^1) , (a_n^2) , (a_n^3) , ..., (a_n^9) -nel ($n \in \mathbb{N}^+$)!

Ha a kezdőtag 1, a sorozat további tagjai 1, 1, ...; vagyis $a_n^1 = 1$.

(a_n^2) : 2, 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, s innen ismétlődés lép fel.

$a_2^2 = a_{10}^2$, a periódus hossza $p = 8$.

(a_n^3) : 3, 9, 81, 65, 61, 37, ... $a_6^3 = a_4^3$, $p = 8$.

(a_n^4) : $a_1^4 = a_2^4$, $p = 8$.

IV

$$(a_n^5) : 5, 25, 29, 85, 89, \dots a_5^5 = a_6^2, p = 8.$$

$$(a_n^6) : 6, 36, 45, 41, 17, 50, 25, \dots a_7^6 = a_2^5, p = 8.$$

$$(a_n^7) : 7, 49, 97, 130, 10, 1, \dots a_6^7 = a_1^1, p = 1.$$

$$(a_n^8) : 8, 64, 52, 29, \dots a_4^8 = a_3^5, p = 8.$$

$$(a_n^9) : 9, \dots a_1^9 = a_2^3, p = 8.$$

Vagyis a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9-cel kezdődő sorozatok periódusa a leghosszabb, 8.

873. Az alábbi táblázat mutatja Béla egy lehetséges stratégiáját.

rossz tippek száma	0	1	2	3	4	5	...
feltevés a kezdeti golyószámra	0	1	2	3	4	5	...
tipp	0	2	4	6	8	10	...
tippelés sorszáma	1	2	3	4	5	6	...

Eszerint Bélának a páros számokat érdemes tippelnie. Ha a dobozban kezdetben x golyó volt, $(x + 1)$. próbálkozásra a $2x$ tippel talál.

Számtani sorozatok

874. Számtani sorozatok: $a), b), c), d), j), l), m)$.

Meg kell mutatnunk, hogy a szomszédos tagok különbsége állandó. Pl. $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 8 - (3n - 8) = 3$, s ez valóban állandó érték. Hasonlóan járhatunk el a többi számtani sorozat esetén is; míg ez a feltétel a nem számtani sorozatokra nem teljesül.

A (j_n) sorozatra $\frac{n^2 - 16}{n + 4} = \frac{(n + 4)(n - 4)}{n + 4} = n - 4$, hiszen $n \neq -4$; a (k_n) sorozat pedig $n = 3$ esetén nem értelmezett.

875. Igaz, a tagok közötti különbség állandó (éppen d).

876. Ha egy (a_n) számtani sorozat kezdőtagja a_1 , különbsége d , akkor az n -edik tagra $a_n = a_1 + (n - 1)d$, s ez éppen a kívánt alakra alakítható át: $a_n = a_1 - d + dn$.

877. $a) d > 0$; $b) d < 0$; $c) d = 0$. Itt d éppen a számtani sorozat differenciája (különbsége).

878. Néhány lehetséges módszer:

1. Képezzük az $a_{n+1} - a_n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) általános tagok különbségét; ha ez nem állandó (vagyis n -től függ), a sorozat nem számtani.

2. A számtani sorozat explicit alakja $dn + b$ ($n \in \mathbb{N}^+$), s ez lineáris függvénye az n változónak. Ha az (a_n) sorozat nem hozható ilyen alakra, akkor a sorozat nem számtani.

3. Elég keresni 2-2 szomszédos tagot, melyek különbsége nem egyforma. (Leg-egyszerűbb pl. az első 3 tag két különbségét megvizsgálni.)

879. Például:

- a) A szomszédos tagok különbsége
 $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$, nem állandó.
 b) A kifejezés másodfokú, nem lineáris.
 c) Az első három tag 2, 4, 8; a különbségek 2, illetve 4.
 d) Az első négy tag 1, 0, -1, 0; a különbségek nem állandók.

880. (ábra).

A függvényértékek egy-egy számtani sorozat hat szomszédos tagját alkotják.

881. (ábra).

Az előző megoldáshoz hasonló grafikonokat kaptunk.

Az $n \mapsto an + b$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) függvények az $x \mapsto ax + b$ lineáris függvények leszűkítései; a képpontok ezért egy egyenesen helyezkednek el.

882. Az állítások igazak.

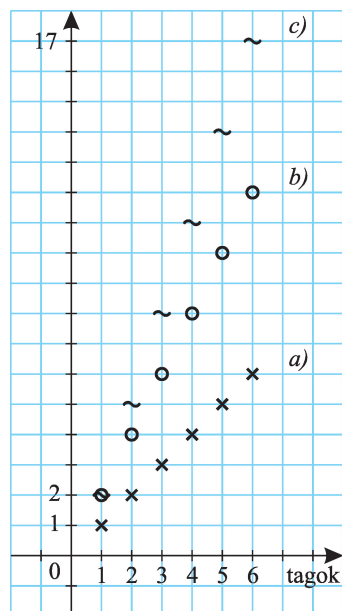
Általában is igaz, hogy a számtani sorozat bármely tagjától számított minden k -adik tagja ($k \in \mathbb{N}^+$) számtani sorozatot alkot. Ha az eredeti sorozat differenciája d , akkor a k -adik tagok által alkotott sorozat differenciája kd . (Ha $k = 1$, akkor az eredeti sorozat valamely későbbi tagjával kezdődő részsorozatát kapjuk.)

883. Ha a sorozat szigorúan növekvő vagy csökkenő, akkor az értékkészlet végtelen halmaz; ha a sorozat állandó, akkor az értékkészlet egyetlen elemből áll.

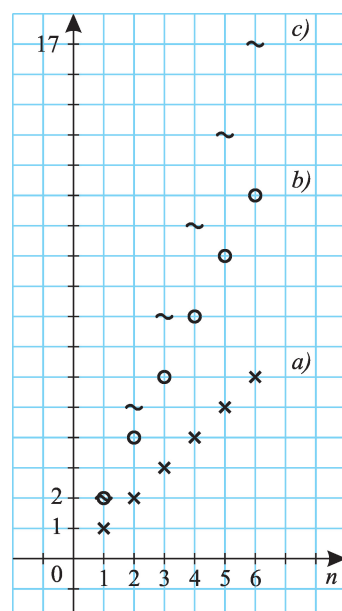
884. $a_{11} - a_5 = 6d$, innen $6d = 12$, $d = 2$.
 Mivel $a_5 = a_1 + 4d$, $a_1 = a_5 - 4d = 7 - 4 \cdot 2 = -1$.
 A sorozat kezdőtagja $a_1 = -1$, differenciája $d = 2$.
 A számtani sorozat n -edik tagját az $a_n = a_1 + (n-1)d$ képlet segítségével számolhatjuk ki, így a kezdőtag és a különbség már egyértelműen meghatározza a sorozatot.

885. $a_{11} - a_4 = 7d$, innen $d = 1$.
 $a_{2005} = a_{11} + 1994d = 1999$.

880.



881.



886. $7d = -21$, $d = -3$, $a_1 = 22$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 22 - 3(n-1) = -3n + 25.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha az $a_n = a_3 + (n-3)d$ összefüggést alkalmazzuk.

887. A sorozat első tagja $a_1 = a_8 - 7d = -13$, az n -edik tagja

$$a_n = -13 + 3(n-1) = 3n - 16.$$

Az $500 < 3n - 16 < 700$ egyenlőtlenségeket az $n = 173, 174, \dots, 238$ számok elégítik ki, tehát a sorozatnak 66 tagja esik 500 és 700 közé.

IV

888. a) $a_n = 3n - 2$; $a_{100} = 298$, $a_{k^2} = 3k^2 - 2$.

$$b) b_n = 2n - 6; \quad b_{100} = 194, \quad b_{k^2} = 2k^2 - 6.$$

$$c) c_n = n - 0,7; \quad c_{100} = 99,3, \quad c_{k^2} = k^2 - 0,7.$$

$$d) d_n = n + 12; \quad d_{100} = 112, \quad d_{k^2} = k^2 + 12.$$

$$e) e_n = \frac{6-n}{2}; \quad e_{100} = -47, \quad e_{k^2} = \frac{6-k^2}{2}.$$

889. Csak páros számú gyerek esetén lehetnek egymással szemben állók, így jelöljük $n = 2k$ -val a gyerekek számát ($k, n \in \mathbb{N}^+$). Észrevehetjük, hogy az 1-es sorszámú gyerekekkel szemben a $(k+1)$ -edik, a 2-essel szemben a $(k+2)$ -edik, általában az i -edik gyerekekkel szemben az $(i+k)$ -edik gyerek áll. Innen $k = 53 - 20 = 33$, vagyis 66 gyerek van a körben.

890. Az 1-et és 2-t is számolva 12 számot kapunk. Mivel ezek számtani sorozatot alkotnak, a differencia $\frac{1}{11}$, a keresett számok: $\frac{11}{11}, \frac{12}{11}, \frac{13}{11}, \dots, \frac{22}{11}$.

891. A számtani sorozat első n tagjának összege

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

$$a) \text{ Az explicit alak: } a_n = n. \quad S_n = \frac{(1+n)n}{2}, \quad S_{100} = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 5050.$$

$$b) b_n = n + 9.$$

$$S_n = \frac{(10+n+9)n}{2} = \frac{(19+n)n}{2}, \quad S_{100} = \frac{(19+100) \cdot 100}{2} = 5950.$$

$$c) c_n = 3n - 2.$$

$$S_n = \frac{(1+3n-2)n}{2} = \frac{(3n-1)n}{2}, \quad S_{100} = \frac{(300-1) \cdot 100}{2} = 14\,950.$$

$$d) d_n = 2n - 6.$$

$$S_n = \frac{(1+2n-6)n}{2} = \frac{(2n-5)n}{2}, \quad S_{100} = \frac{(200-5) \cdot 100}{2} = 9750.$$

$$e) e_n = n - 0,7;$$

$$S_n = \frac{(0,3 + n - 0,7)n}{2} = \frac{(n - 0,4)n}{2}, \quad S_{100} = \frac{(100 - 0,4) \cdot 100}{2} = 4980.$$

$$f) f_n = \frac{6 - n}{2};$$

$$S_n = \frac{\left(\frac{5}{2} + \frac{6 - n}{2}\right)n}{2} = \frac{(11 - n)n}{4}, \quad S_{100} = \frac{(11 - 100) \cdot 100}{4} = -2225.$$

892. a) A $100 + 102 + \dots + 998$ összeg 450 tagból áll, ezért

$$S_{450} = \frac{(100 + 998) \cdot 450}{2} = 247\,050.$$

b) A $101 + 103 + \dots + 999$ összeg 450 tagból áll, ezért

$$S_{450} = \frac{(101 + 999) \cdot 450}{2} = 247\,500.$$

c) A legfeljebb háromjegyű páros számok összege

$$2 + 4 + \dots + 998 = \frac{(2 + 998) \cdot 499}{2} = 249\,500, \text{ a legfeljebb háromjegyű}$$

$$\text{páratlan számok összege } 1 + 3 + \dots + 999 = \frac{(1 + 999) \cdot 500}{2} = 250\,000.$$

Megjegyzés:

A *b)* eredményhez más úton is eljuthatunk. A 450 darab páratlan szám mindegyike 1-gyel nagyobb, mint az *a)* feladatbeli páros számok, így összegük 450-nel több.

Hasonlóan a *c)* feladatban 3-tól 999-ig 499-cel nagyobb a páratlan számok összege, s ehhez jön még a kezdeti +1.

893. a) A k -adik páratlan szám $2k - 1$, a $(3n + 7)$ -edik $2(3n + 7) - 1 = 6n + 13$. Az összeg $\frac{(1 + 6n + 13)(3n + 7)}{2} = (3n + 7)^2 = 9n^2 + 42n + 54$.

Megjegyzés:

Hasonló okoskodással nevezetes eredményt kapunk: az első n páratlan

$$\text{természetes szám összege } \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2.$$

$$b) \frac{(1 + 2n + 3)(2n + 3)}{2} = (n + 2)(2n + 3) = 2n^2 + 7n + 6.$$

$$c) 2 + 5 + \dots + (3n - 1) = \frac{(2 + 3n - 1)n}{2} = \frac{(3n + 1)n}{2}.$$

$$\mathbf{894.} \quad 102 + 105 + \dots + 999 = \frac{(102 + 999) \cdot 300}{2} = 30\,150.$$

$$\mathbf{895.} \quad 13 + 17 + \dots + 97 = \frac{(13 + 97) \cdot 22}{2} = 1210.$$

IV

896. Jelöljük n -nel az összeg utolsó tagját ($n \in \mathbb{N}^+$)!

Ekkor $1000 \leq 1 + 2 + \dots + n < 10\,000$. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, így a meg-

oldandó egyenlőtlenség-rendszer:

$$n^2 + n - 2000 \geq 0, \text{ illetve } n^2 + n - 20\,000 < 0.$$

Az első egyenlőtlenség megoldása $n \leq -45,2$ vagy $44,2 \leq n$;

a másodiké $-141,9 < n < 140,9$. A megfelelő n értékek: 45, 46, ..., 140.

897. Az első n tag összege $-210 + 45 + 228 = 63$. Az összegképlet alapján $63 = \frac{(-210 + 228) \cdot n}{2}$, innen $n = 7$.

A sorozat differenciája $\frac{438}{6} = 73$, az elemek: $-210, -137, -64, 9, 82, 155, 228$.

A közbülső tagok száma 5.

898. $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{100} = 2^{1+2+\dots+100} = 2^{5050}$. Ha ez a szám k jegyű ($k \in \mathbb{N}^+$), akkor $10^{k-1} \leq 2^{5050} < 10^k$. A 10-es alapú exponenciális függvény (és a 10-es alapú logaritmus függvény) szigorúan monoton nő; mindkét oldalt logaritmizálva $k-1 \leq \lg(2^{5050}) < k$. $\lg(2^{5050}) = 5050 \cdot \lg 2 \approx 1520,2$, vagyis a szám 1521 jegyű.

899. A definícióból közvetlenül következik, hogy a sorozat bármelyik (1-nél nagyobb indexű) tagja a szomszédos tagok számtani közepe: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Megjegyzés:

Csak pozitív számok hatványközepeit értelmeltük (számtani közép, mértani közép, harmonikus közép stb.). A számtani sorozat tagjai negatív számok is lehetnek, így ebben az esetben helyesebb lenne a „számtani közép” helyett az „átlag” kifejezést használnunk. Hibát azonban nem követünk el, mivel a számtani közép fogalmát negatív számokra is könnyen kiterjeszthetjük.

900. Jelöljük d -vel a sorozat különbségét! Ekkor $a_{k-p} = a_k - pd$ és

$$a_{k+p} = a_k + pd, \text{ így } \frac{a_{k-p} + a_{k+p}}{2} = \frac{a_k - pd + a_k + pd}{2} = a_k \text{ valóban teljesül.}$$

901. Az $a) - e)$ esetekben megmutathatjuk, hogy a számtani sorozatban bármely a_k taghoz képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok átlaga a_k .

a) Az a_8 tagra szimmetrikus tagok átlaga a_8 .

$$\text{Ugyanis } a_7 = a_8 - d, \quad a_9 = a_8 + d, \text{ így } \frac{a_7 + a_9}{2} = \frac{a_8 - d + a_8 + d}{2} = a_8.$$

$$b) \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{5} = \frac{a_4 - 2d + a_4 - d + a_4 + a_4 + d + a_4 + 2d}{5} = a_4.$$

c) a_{10} .

d) a_7 .

e) a_{14} .

f) Ebben az esetben is a tagok átlagát kapjuk: $\frac{a_5 + a_6}{2}$. A szimmetriatulajdonságot pl. a $d = 2t$ helyettesítéssel $\frac{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{4} = a_5 + t$ alakban is felírhatjuk.

902. A szimmetriatulajdonság miatt az első kilenc tag átlaga 10, így az első kilenc tag összege 90.

903. 12. (Az első 12 tag pozitív.)

904. Jelöljük a -val a középső számot, d -vel a sorozat különbségét! Ekkor a három szám $a - d$, a , $a + d$. Az $a - d + a + a + d = 18$ feltételből $a = 6$, az $(a - d) \cdot a \cdot (a + d) = 192$ feltételből $d^2 = 4$, $d = \pm 2$. A három szám 4, 6, 8. (Két megfelelő háromtagú sorozat van: 4, 6, 8, illetve 8, 6, 4.)

905. A négy szám átlaga 2. Alkalmazzuk a sorozat különbségére a $d = 2t$ helyettesítést! Ekkor a négy szám $2 - 3t$, $2 - t$, $2 + t$, $2 + 3t$, s mivel szorzatuk -15 , innen $9t^4 - 40t^2 + 31 = 0$. A t^2 -ben másodfokú egyenlet gyökei 1, illetve $\frac{31}{9}$. In-

nen $t = \pm 1$, illetve $t = \pm \sqrt{\frac{31}{9}}$. Négy megfelelő sorozatot találtunk: $-1, 1, 3, 5$;

$2 - \sqrt{31}, 2 - \frac{\sqrt{31}}{3}, 2 + \frac{\sqrt{31}}{3}, 2 + \sqrt{31}$; valamint ezek „fordítottjai”.

906. Jelöljük a sorozat második tagját a -val, a differenciát d -vel!

Ekkor $(a - d)^2 + a^2 = 130$, $a^2 + (a + d)^2 = 202$. Az egyenletek összeadása és kivonása után az $ad = 18$, $2a^2 + d^2 = 166$ egyenletrendszert kapjuk. A $d = \frac{18}{a}$ helyettesítéssel $a^4 - 83a^2 + 162 = 0$, innen $a = \pm 9$ ($d = \pm 2$), illetve $a = \pm \sqrt{2}$ ($d = \pm 9\sqrt{2}$). Négy sorozatot kapunk: $a_n = 2n + 5$; $b_n = -2n - 5$;

$c_n = 9\sqrt{2}n - 17\sqrt{2}$; $d_n = -9\sqrt{2}n + 17\sqrt{2}$.

907. a) 60 hét elteltével.

b) Feltételezve, hogy a termelés egyik héten sem szünetel, az 52. héten $300 + 51 \cdot 5 = 555$ terméket gyártanak. $300 + 305 + \dots + 555 = \frac{(300 + 555) \cdot 52}{2} = 22\,230$.

908. a) $2 \cdot (6 + 12 + 18 + \dots + 96) = 12 \cdot (1 + 2 + \dots + 16) = 1632$ darab.

b) $12 \cdot (1 + 2 + \dots + n) = 6n(n + 1)$ darab.

909. A 22. sorban 41 szék van, így összesen $\frac{(20 + 41) \cdot 22}{2} = 671$ a férőhelyek száma.

910. Ha n sor szék van a nézőtérben ($n \in \mathbb{N}^+$), akkor az ülőhelyek száma $\frac{(10 + 2n + 8) \cdot n}{2} = n(n + 9)$, innen $n = 12$. ($n = -21$ hamis gyök.)

911. A kiosztott részek számtani sorozatot alkotnak. Jelöljük a -val a legkisebb részt, d -vel a különbséget, ekkor:

$\frac{(a + a + 4d) \cdot 5}{2} = 100$ és $7(a + a + d) = a + 2d + a + 3d + a + 4d$.

A kapott egyenletrendszer: $a + 2d = 20$ és $11a = 2d$, ennek megoldása $a = \frac{5}{3}$ és $d = \frac{55}{6}$.

A részek: $\frac{5}{3}, \frac{65}{6}, 20, \frac{175}{6}, \frac{115}{3}$.

IV

912. Jelöljük t -vel a második kerékpáros indulásától a találkozásig eltelt időt! Ekkor az első kerékpáros $20 + 18 + 16 + \dots + (18 - 2t)$ utat tett meg, a második $10 + 13 + \dots + (7 + 3t)$ utat. A megtett utak összege 119 km, innen

$$\frac{(20 + 18 - 2t) \cdot (t + 2)}{2} + \frac{(10 + 7 + 3t) \cdot t}{2} = 119. \text{ A } t^2 + 51t - 162 = 0 \text{ egyenlet}$$

megoldása $t_1 = 3$, $t_2 = -54$. Elfogadható megoldás t_1 , a két kerékpáros a második indulása után 3 órával (az első indulása után 5 órával) találkozik.

Megjegyzés:

Természetesen ezt az értéket rövid próbálgatás után is meghatározhatjuk. Ekkor azonban meg kell indokolni, hogy miért nem lehetséges több megoldás.

913. Jelöljük u -val az utolsó munkás munkaóráinak számát, m -mel a munkában részt vevő munkások számát!

Az egyes munkások munkaideje számtani sorozatot alkot, ezért az összes munkaidő

$$\frac{(u + 11u) \cdot m}{2}. \text{ Innen } \frac{(u + 11u) \cdot m}{2} = 24m, u = 4, 11u = 44.$$

Az első munkás 44 órát dolgozott, de a munkások számát nem tudjuk meghatározni.

914. A bűvös állandó értéke $\frac{1 + 2 + \dots + 9}{2 \cdot 3} = 15$. A 15-ös összeg lehetséges előállításai: $1 + 5 + 9$, $1 + 6 + 8$, $2 + 4 + 9$, $2 + 5 + 8$, $2 + 6 + 7$, $3 + 4 + 8$, $3 + 5 + 7$, $4 + 5 + 6$. Észrevehetjük, hogy csak az 5-ös szerepel négy összegben is, így a középső mezőre 5 kerül. A 2, 4, 6, 8 számok két-két összegben szerepelnek, ezek lesznek a bűvös négyzet csúcsaiban stb.

Egy lehetséges megoldás (ez található az I-csing (Változások könyve) c. ősi kínai jóskönyvben is):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

915. Első megoldás: Az előző feladat megoldáshoz hasonlóan megmutathatjuk, hogy ha a sorozat tagjai $a - 4d$, $a - 3d$, $\dots$, $a + 4d$, akkor a középső mezőre szükségképpen a kerül; a csúcsokba $a - 3d$, $a - d$, $a + d$, $a + 2d$; végül az élközép mezőkre $a - 4d$, $a - 2d$, $a + 2d$, $a + 4d$. Innen már könnyen szerkeszthető bűvös négyzet.

Második megoldás: Észrevehetjük, hogy ha a bűvös négyzet minden eleméhez ugyanazt a számot adjuk, vagy minden elemét ugyanazzal a számmal megszorozzuk, akkor továbbra is „bűvös” marad. Így az 1, 2, $\dots$, 9 számokat a tetsző-

leges $a, a + d, a + 2d, \dots, a + 8d$ számtani sorozatra transzformáljuk: a sorozat tagjait d -vel szorozva a $d, 2d, \dots, 9d$ sorozatot kapjuk, majd itt minden taghoz $(a - d)$ -t adunk. A bűvös négyzet bűvös tulajdonsága megmarad, például az alábbi négyzetből kiindulva:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

 $\rightarrow$

$6d$	$1d$	$8d$
$7d$	$5d$	$3d$
$2d$	$9d$	$4d$

 $\rightarrow$

$a + 5d$	a	$a + 7d$
$a + 6d$	$a + 4d$	$a + 2d$
$a + d$	$a + 8d$	$a + 3d$

916. Tegyük fel, hogy az eredeti tervek szerint t hétre volt elegendő a takarmány, ekkor a mennyisége $15t$. A valóságban $2t$ ideig tartott ki a takarmány, a fogyasztás $15 + 14 + \dots + (16 - 2t)$ volt. Innen $\frac{(15 + 16 - 2t) \cdot 2t}{2} = 15t, t = 8, 15t = 120$.

Összesen 120 liter takarmányt tároltak, eredetileg 8 hétre szánták. Amikor a takarmány elfogyott, a tyúkok is elfogytak.

917. Összesen $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ mérkőzésre került sor. Ennyi a játékosok pontszámainak összege is, ezért a 4. helyezett versenyző 3 pontot szerzett. Ha a számtani sorozat különbsége 0, akkor mindenkinek 3 pontja volt; ha a számtani sorozat különbsége 0,5, akkor a pontszámok: 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; ha a számtani sorozat különbsége 1, akkor a pontszámok: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. (Ez utóbbi esetben nem volt döntetlen, minden játékos legyőzte a nála gyengébbet.) Több lehetőség nincs.

918. Az első ágyás megöntözéséhez $10 + 24 + 10$, a másodikhoz $12 + 24 + 12$, a harmadikhoz $14 + 24 + 14, \dots$, az utolsóhoz $48 + 24 + 48$ méternyi utat kell megtennie. A $44 + 48 + 52 + \dots + 120$ számtani sorozat összege

$$\frac{(44 + 120) \cdot 20}{2} = 1640 \text{ (m)}.$$

919. Jelöljük $a + 1, a + 2, \dots, a + n$ -nel a szomszédos természetes számokat ($a \in \mathbb{N}$)! Ezek összege $an + \frac{n(n+1)}{2}$, s ez pontosan akkor osztható n -nel, ha n páratlan.

920. Az $an + \frac{kn(n+1)}{2}$ kifejezés osztható n -nel, ha n páratlan vagy k páros. (Csak akkor nem osztható n -nel, ha n páros és k páratlan.)

921. Sokféle megoldás adható.

Pl. csoportosítsuk hármasával a számokat, az egyes csoportokban 0, 3, 6, 9, ... a számok összege. (Az összeg mindig hármasával nő, ugyanis a megfelelő tagokat párosítva $+3 + 3 - 3$ a változás.) Így a -2004 tagig $0 + 3 + 6 + \dots + 2001$ a tagok összege, ehhez jön még $+2005$. Eredmény: 670 339.

Más megoldási lehetőségek: Összegezhetjük külön az 1, 4, 7, ..., 2005, valamint 2, 5, 8, ..., 2003, illetve 3, 6, 9, ..., 2004 sorozatokat; vagy az $1 + 2 + 3 + \dots + 2005$ összegből levonhatjuk a $3 + 6 + \dots + 2004$ összeg kétszeresét.

IV

922. Az „első egy tag összege” $a_1 = S_1 = 8$, az első két tag összege $a_1 + a_2 = S_2 = 22$ stb. Ha $n \geq 2$, általában is teljesül, hogy $S_n = S_{n-1} + a_n$. $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 5n - (3(n-1)^2 + 5(n-1)) = 6n + 2$, vagyis az (a_n) sorozat valóban számtani.

923. Jelöljük az oldalakat a, b, c -vel, s legyen pl. $a \leq b \leq c$. Ekkor a számtani sorozat számtaniközép-tulajdonsága miatt $b = 10$, s az (a, c) párra öt megoldást kapunk: $(a, c) = (6, 14), (7, 13), (8, 12), (9, 11), (10, 10)$. Több nem lehet a háromszög-egyenlőtlenség miatt.

924. Jelöljük a szögeket α, β, γ -val, s legyen pl. $\alpha \leq \beta \leq \gamma$! Ekkor a szimmetriatulajdonság miatt $\beta = 60^\circ, \alpha \in \{1^\circ, 2^\circ, \dots, 60^\circ\}$, s minden α -hoz egyetlen γ tartozik. Összesen 60 megoldás van.

925. Jelöljük a sokszög oldalszámát n -nel ($n \in \mathbb{N}^+$), ekkor szögei $120^\circ, 125^\circ, 130^\circ, \dots, 115^\circ + n \cdot 5^\circ$. Bármely n -szög belső szögeinek összeg $(n-2) \cdot 180^\circ$, így – a mértékegységeket elhagyva – $120 + 125 + \dots + (115 + 5n) = (n-2) \cdot 180$. Innen $\frac{(120 + 115 + 5n)n}{2} = (n-2) \cdot 180$, átalakítva $n^2 - 25n + 144 = 0$. A másodfokú egyenlet gyökei $n_1 = 9, n_2 = 16$. A feladatnak csak az $n_1 = 9$ a megoldása; az $n_2 = 16$ esetben a sokszögnek 180° -os szöge is volna.

926. Legyen a három oldal hossza $a - d, a, a + d$ ($a > d; a, d \in \mathbb{N}^+$), a legkisebb szöge α ! Ekkor Pitagorasz tételéből $(a + d)^2 = a^2 + (a - d)^2$, innen $4ad = a^2$. Mivel $a \neq 0$, a háromszög oldalai $3d, 4d, 5d$. $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \approx 36,9^\circ$, a másik két szög $53,1^\circ$ és 90° .

Megjegyzés:

A megoldásban nem használtuk ki, hogy az oldalak egész számok. Ha tehát egy tetszőleges derékszögű háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak, szögei $36,9^\circ, 53,1^\circ$ és 90° .

927. a) Az első 99 sorban $1 + 2 + \dots + 99 = 4950$ szám van, így a 100. sor kezdőszáma 4951, a 13. helyen álló szám 4963.

b) Az első $(n-1)$ sorban $\frac{n(n-1)}{2}$ szám van, az n . sor k . helyén álló szám $\frac{n(n-1)}{2} + k$.

c) Az $\frac{n(n-1)}{2} \leq 1000$ egyenlőtlenségből $-44,2 \leq n \leq 45,2$, tehát az 1000 a 45. sorban található. Az első 44 sorban $\frac{44 \cdot 45}{2} = 990$ szám van, az 1000 a 64. sor 10. száma.

928. a) Az első 9 sorban az első $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ páratlan szám található. A 10. sor első eleme a 46. páratlan szám, $1 + 2 \cdot 45 = 91$. A keresett összeg $91 + 93 + \dots + 109 = \frac{(91 + 109) \cdot 10}{2} = 995$.

b) A 11. sor az 56. páratlan számmal kezdődik, közepén a 61. páratlan szám van, a 121.

c) Az $\frac{n \cdot (n-1)}{2} + k$ sorszámu páratlan szám áll itt, ennek értéke $n(n-1) + 2k - 1$.

929. Az első sorban lévő számok összege $\frac{n(n+1)}{2}$, a második soré $\frac{n(n+1)}{2} + n$, a harmadiké $\frac{n(n+1)}{2} + 2n$ és így tovább; az utolsó sorban az összeg $\frac{n(n+1)}{2} + n(n-1)$. Ezen számok összege

$$\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + n(n-1) \right) n}{2} = \frac{n^2(3n+1)}{2}.$$

930. A feltételek szerint $S_n = b$, $S_{2n} = c$, keresendő S_{3n} . Észrevehetjük, hogy a második n elem minden egyes tagja éppen a differenciával nagyobb, mint az első n elem megfelelő tagjai. Ha a sorozat differenciáját d -vel jelöljük, akkor $c = b + nd$, hasonlóan $S_{3n} = b + 2nd$. Innen $S_{3n} = b + (2c - 2b) = 2c - b$.

931. Tegyük fel, hogy kezdetben n tagú volt a sorozat; ekkor tagjai 17, 18, ..., $16 + n$ ($n \in \mathbb{N}^+$)!

Észrevehetjük a következőket:

- páratlan számú szomszédos egész szám átlaga egész szám;
- páros számú szomszédos egész szám átlaga egész szám és fél;
- ha kiveszünk egy tagot a sorozatból, a megmaradt számok átlaga az eredeti átlagtól legfeljebb 0,5-del tér el.

Ez alapján két lehetőséget vizsgálunk meg: a szám kivétele előtt az átlag lehetett 52 vagy 52,5.

Ha az átlag 52 volt (vagyis n páratlan), akkor $\frac{(17 + 16 + n)n}{2n} = 52$, innen $n = 71$. Az eredeti sorozat 17, 18, ..., 87, a tagok összege $\frac{(17 + 87) \cdot 71}{2} = 3692$.

A kivétel után a maradék 70 szám átlaga 52,4, ekkor a számok összege $52,4 \cdot 70 = 3668$ -ra módosult. A kivett szám a 4.

Ha az átlag 52,5 volt (vagyis n páros), akkor $\frac{(17 + 16 + n)n}{2n} = 52,5$, innen

$n = 72$. Az eredeti sorozat 17, 18, ..., 88, a tagok összege $\frac{(17 + 88) \cdot 72}{2} = 3780$. A kivétel után a maradék 71 szám átlaga 52,4, ekkor a számok összege $52,4 \cdot 71$. Ez nem egész, ekkor nincs megoldás.

Mértani sorozatok

932. Mértani sorozatok: $b), c), e), g), h), k), l)$.

Meg kell mutatnunk, hogy a szomszédos tagok hányadosa állandó (ha a sorozat semelyik tagja sem 0); vagy, kicsit pontosabban, meg kell mutatnunk, hogy bármelyik tag az előző tag q -szoros, ahol q a sorozat hányadosa (kvóciense). Pl. $b_{n+1} = 2 \cdot b_n$ minden n -re, így a (b_n) sorozat mértani; míg pl. az (a_n) sorozat

első három tagja $-5, -2, 1$, s mivel $\frac{-2}{-5} \neq \frac{1}{-2}$, a sorozat nem mértani.

933. Igaz; bármely tag az előző q -szoros.

934. A sorozat tagjai a, aq, aq^2 stb. Például:

a) $a > 0, q > 1$; vagy $a < 0, 0 < q < 1$.

b) $a > 0, 0 < q < 1$; vagy $a < 0, q > 1$.

c) $q = 1$.

d) $a = 5, q = -1$.

935. Több lehetőségünk van.

Egyrészt a mértani sorozat explicit alakja $a_n = aq^{n-1}$; ha a vizsgált (a_n) sorozat explicit alakja más, és nem is hozható erre az alakra, akkor nem mértani sorozat.

Másrészt megmutathatjuk, hogy a szomszédos tagok hányadosa nem állandó (ha a tagok egyike sem zérus); egyes esetekben az általános eset helyett már két-két szomszédos tag hányadosának vizsgálata is ellentmondásra vezethet.

936. a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \neq$ állandó, függ n -től.

b) A sorozat első három tagja $-3, 0, 5$; a szomszédos tagok nem ugyanannyiszorosaik egymásnak.

c) Az első tag 3, a második 5; de a harmadik tag (9) nem $\frac{5}{3}$ -szoros a másodiknak.

d) A sorozat tagjai $1, 0, -1$ stb.; ezek ismét nem alkotnak mértani sorozatot.

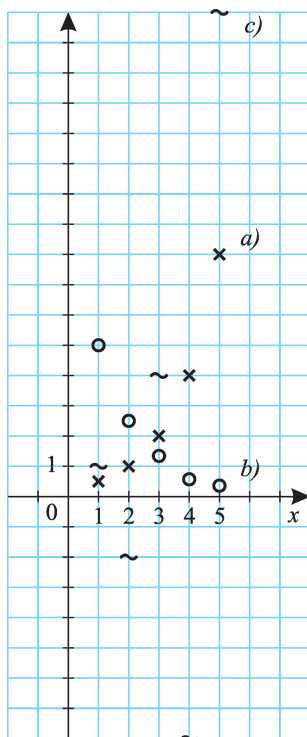
937. A függvényértékek egy-egy mértani sorozat tagjait adják (937/I–II. ábra).

938. Az állítások igazak.

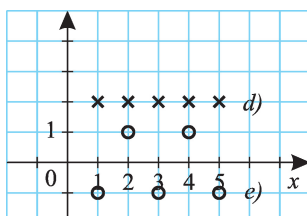
Általában is igaz, hogy a mértani sorozat bármely tagjától számított minden k -adik tagja ($k \in \mathbb{N}^+$) mértani sorozatot alkot. Ha az eredeti sorozat há-

IV

937/I.



937/II.



nyadosa q , akkor a k -adik tagok által alkotott sorozat hányadosa q^k . (Ha $k = 1$, akkor az eredeti sorozat valamely későbbi tagjával kezdődő részsorozatát kapjuk.)

939. Az értékkészlet lehet 1 elemű (ha a sorozat állandó), 2 elemű (ha a kvóciens -1 és nem nulla az első tag), vagy végtelen sok elemű.

940. $a_3 = 12$, $a_7 = 192$. Mivel $a_7 = a_3 \cdot q^4$, $q^4 = 16$, $q = \pm 2$. $a_1 = \frac{12}{q^2} = 3$.

Két megoldás van: a kezdőtag 3, a hányados pedig $+2$ vagy -2 .

Az explicit alak $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ vagy $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$.

941. $\frac{a_{11}}{a_4} = q^7 = 8 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}^7$, innen $q = \sqrt{2}$. $a_1 = \frac{a_4}{q^3} = -2 \cdot \sqrt{2}$.

$a_n = -2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^{n-1} = -2 \cdot \sqrt{2}^n = -\sqrt{2}^{n+2}$; $a_{2005} = -\sqrt{2}^{2007}$.

942. a) Nem szerepelhet, hiszen minden tag 7-nek többszöröse.

b) Ha egy egész szám nem osztható 3-mal, akkor a kétszerese sem, ezért a sorozatban nincs 3-mal osztható szám.

c) A $10^9 \leq 7 \cdot 2^{n-1} < 10^{10}$ egyenlőtlenségrendszer megoldásszámát keressük.

Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény szigorúan növekvő, így $\log_2 10^9 \leq \log_2 (7 \cdot 2^{n-1}) < \log_2 10^{10}$, $9 \log_2 10 - \log_2 7 + 1 \leq n < 10 \log_2 10 - \log_2 7 + 1$, innen $28,09 \leq n < 31,41$. Három megoldás van.

943. a)–c): Nincsenek ilyen sorozatok.

d) A hetedik tag q^4 -szerese a harmadik tagnak, ezért a két tag nem lehet ellentétes előjelű. Nincs ilyen sorozat.

Általában is igaz, hogy a mértani sorozat páratlan sorszámú tagjai nem lehetnek különböző előjelűek (és természetesen ugyanez teljesül a páros sorszámú tagokra is).

e) $q^4 = 81$, $q = \pm 3$, tehát két ilyen sorozat van.

944. A sorozatra $q = \sqrt{3}$, $a_1 = 2 \cdot \sqrt{3}$, így $a_n = 2 \cdot \sqrt{3}^n$. $1000 < 2 \cdot \sqrt{3}^n < 3000$, innen $11,31 < n < 13,31$. Két tag esik a megadott intervallumba: a_{12} és a_{13} .

945. a) $a_n = 2^{n-1}$, így $a_{100} = 2^{99}$, $a_{8k-5} = 2^{8k-6}$.

b) $b_n = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, így $b_{100} = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$, $b_{8k-5} = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8k-5}$.

c) $c_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$, így $c_{100} = 3 \cdot (-2)^{99}$, $c_{8k-5} = 3 \cdot (-2)^{8k-6}$.

d) $d_n = (0,1)^n$, így $d_{100} = (0,1)^{100}$, $d_{8k-5} = (0,1)^{8k-5}$.

e) $e_n = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n-1}$, így $e_{100} = -\frac{1}{2}$, $e_{8k-5} = \frac{1}{2}$.

946. Az (a_n) mértani sorozatban $a_1 = 1$ és $a_{12} = 2$, innen $q = \sqrt[11]{2}$.

A tíz szám: $\sqrt[11]{2}, \sqrt[11]{2^2}, \sqrt[11]{2^3}, \dots, \sqrt[11]{2^{10}}$.

IV

947. Jelöljük T -vel a gyáregység kezdeti termelését! Ekkor az első hónap végén $1,01 \cdot T$, a második hónap végén $1,01^2 \cdot T$, az n -edik hónap végén $1,01^n \cdot T$ a termelés.

a) Egy év alatt a termelés $1,01^{12} \cdot T \approx 1,127T$ -re emelkedik, a növekedés 12,7%-os.

b) $1,01^n \cdot T = 2T$, innen $n \approx 69,66$. Állandó ütemű növekedés mellett 70 hónap alatt kétszereződik meg a termelés.

948. A hányados lehet 1 vagy -1 , az összeg 50 vagy 0.

949. Jelöljük a keresett összeget S -sel: $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + \dots + 2^{100}$. Innen $2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^n + \dots + 2^{100} + 2^{101}$, a kettő különbségéből $S = 2^{101} - 1$.

950. Hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladat megoldásában. Legyen $S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$; ekkor $qS = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$, s a kettő különbségéből $(q-1)S = aq^n - a$.

Ha $q \neq 1$, akkor a mértani sorozat első n tagjának összege $S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Ha $q = 1$, akkor ez a képlet nem használható. Mivel $q = 1$ esetén a mértani sorozat minden tagja a , $S = a \cdot n$.

951. a) $2^{14} - 1$.

b) $2^{n+1} - 1$.

c) $9216 = 9 \cdot 2^{10}$, ezért

$$9 + 18 + 36 + \dots + 9216 = 9 \cdot (1 + 2 + \dots + 2^{10}) = 9 \cdot (2^{11} - 1).$$

d) $8 \cdot (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-15}) =$

$$= 8 \cdot \frac{2^{-16} - 1}{2^{-1} - 1} = 8 \cdot \frac{1 - 2^{-16}}{1 - 2^{-1}} = 16 \cdot (1 - 2^{-16}).$$

e) $(-27) \cdot \frac{(-3)^n - 1}{(-3) - 1}$.

952. Az (a_n) mértani sorozatban $q(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$, így $q = 3$. $a_1 + 3a_1 + 9a_1 + 27a_1 = 40$, innen $a_1 = 1$. $a_n = 3^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

953. $q^4 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = (a_5 + a_6 + a_7)$, így $q = \pm 3$. Ha $q = 3$, akkor $a_1 = 2$, $a_4 = 54$, az összeg $26 + 2106 + 54 = 2186$; ha $q = -3$, akkor $a_1 = \frac{26}{7}$,

$a_4 = (-27) \cdot \frac{26}{7}$, az összeg $26 + 2106 - \frac{27 \cdot 26}{7} \approx 2031,71$.

954. Ha a sorozat tagjai pozitívak, akkor bármely tag a szomszédos tagok mértani közepe.

Ha a szomszédos tagok között negatívak is vannak, akkor helyesebb úgy fogalmaznunk, hogy bármely tag négyzete egyenlő a szomszédos tagok szorzatával. (Csak pozitív számok mértani közepét értelmezzük.)

955. $a_{k-p} = \frac{a_k}{q^p}$, $a_{k+p} = a_k q^p$, $\sqrt{\frac{a_k}{q^p} \cdot a_k q^p} = a_k$ valóban. (Ha a tagok között ne-

gatívak is vannak, akkor a $\sqrt{a_{k-p} a_{k+p}} = a_k$ összefüggés helyett az $a_{k-p} a_{k+p} = a_k^2$ képletet alkalmazhatjuk.)

956. Megmutatható, hogy a pozitív tagú mértani sorozatban bármely a_k taghoz képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok mértani közepe a_k ; ha pedig a tagok között negatívok is vannak, az előző feladat megoldásához hasonlóan hatványalakban fogalmazhatjuk meg a kapcsolatot.

$$a) a_8^2; \quad b) |a_4|; \quad c) \sqrt[3]{a_3 a_4 a_5} = \sqrt[3]{\frac{a_4}{q} a_4 a_4 q} = a_4; \quad d) a_4; \quad e) |a_{10}|; \quad f) a_7;$$

g) $|a_{14}|$. h) Ha a tagok pozitívok, $\sqrt[4]{a_4 a_5 a_6 a_7} = \sqrt{a_5 a_6}$, a szomszédos tagok mértani közepét kapjuk.

957. 10^9 .

958. Legyen a három szám $\frac{a}{q}$, a , aq ($q \neq 0$)! Ekkor $\frac{a}{q} + a + aq = 26$,

$$\left(\frac{a}{q}\right)^2 + a^2 + a^2 q^2 = 364. \quad \text{Átalakítva az egyenleteket:} \quad \frac{a}{q} + aq = 26 - a,$$

$$\left(\frac{a}{q} + aq\right)^2 = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + a^2 q^2 + 2a^2, \text{ ezért } (26 - a)^2 = 364 + a^2. \text{ Innen } a = 6, \text{ s az első}$$

$$\text{egyenletből } \frac{1}{q} + q = \frac{10}{3}, \quad q = 3 \quad \text{vagy} \quad q = \frac{1}{3}.$$

Két megfelelő sorozat van: 2, 6, 18, illetve 18, 6, 2.

959. A szimmetriatulajdonság miatt a középső szám 10; az első szám $\frac{10}{q}$, a

$$\text{harmadik } 10q \quad (q \neq 0)! \text{ Ekkor } \frac{10}{q} + 10q = 52, \quad q_1 = 5, \quad q_2 = 0,2.$$

A sorozat: 2, 10, 50, illetve 50, 10, 2.

960. A búzaszemek száma $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$, irdatlan nagy szám. Ennyi búza többszörösen befedné a Föld teljes felszínét. (Egy másik hasonlat: ha a búzatároló raktár alapterülete 40 m^2 , akkor magasságának éppen a Napig kellene emelkednie, hogy ennyi búza beleférjen.)

961. $85\,000 \cdot 0,95^{10} = 50\,893$ (Ft).

962. Az első hajtogatás után 1 hajtásvonal keletkezik. A második hajtogatás után 2 új hajtásvonal lesz (összesen 3), a harmadik után 4 új hajtásvonal (összesen 7), ..., az n . hajtogatás után 2^{n-1} új hajtásvonal keletkezik. Összesen $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ a keletkezett hajtásvonalak száma.

Megjegyzés:

A kapott hajtásvonalak száma elvi érték, a gyakorlatban csak néhány hajtogatást végezhetünk. Érdemes kipróbálni!

963. a) Mindkét méret $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ részére csökken. Az összehajtogatott papír

mérete $1,25 \text{ cm} \times 3,75 \text{ cm}$.

b) $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ vízszintes és ugyanennyi függőleges hajtásvonal keletkezik.

c) $1,25 \text{ cm}$, illetve $3,75 \text{ cm}$.

Megjegyzés:

A gyakorlatban a nyolc hajtogatás igen nehezen hajtható végre.

IV

964. a) A jelenlegi termelések: $T_I = 100 \cdot 1,03^{20} \approx 180,6$; $T_{II} = 80 \cdot 1,05^{20} \approx 212,3$.

A II. vállalat már megelőzte az I-est a termelésben.

b) Az össztermelések: $S_I = 100 \cdot 1,03^1 + 100 \cdot 1,03^2 + \dots + 100 \cdot 1,03^{20} =$
 $= 100 \cdot 1,03 \cdot \frac{1,03^{20} - 1}{1,03 - 1} \approx 2767,6$;

$S_{II} = 80 \cdot 1,05^1 + 80 \cdot 1,05^2 + \dots + 80 \cdot 1,05^{20} = 80 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{1,05 - 1} \approx$
 $\approx 2777,5$. Az eltelt 10 év alatt a II. vállalat termelt többet.

965. a) Legyen a vállalatok termelése kezdetben 100 egységnyi!

Az I. vállalatnál az egyes években 110, 120, ..., 200 a termelés nagysága. Az össztermelés $\frac{(110 + 200) \cdot 10}{2} = 1550$.

A II. vállalatnál jelölje x a növekedés ütemét! $100 \cdot x^{10} = 200$, innen $x = \sqrt[10]{2} \approx 1,072$, vagyis a növekedés $\approx 7,2\%$ -os. Az össztermelés $100 \left(\sqrt[10]{2} + \sqrt[10]{2^2} + \sqrt[10]{2^3} + \dots + \sqrt[10]{2^{10}} \right) =$

$= 100 \cdot \sqrt[10]{2} \left(1 + \sqrt[10]{2} + \sqrt[10]{2^2} + \dots + \sqrt[10]{2^9} \right) = 100 \cdot \sqrt[10]{2} \cdot \frac{\sqrt[10]{2^{10}} - 1}{\sqrt[10]{2} - 1} \approx$
 $\approx 1493,3$.

b) Ha n évet tekintünk, a két össztermelés: $T_I = \frac{(110 + 100 + 10n) \cdot n}{2} =$
 $= 5n^2 + 105n$, illetve $T_{II} = 100 \cdot \sqrt[10]{2} \cdot \frac{\sqrt[10]{2^n} - 1}{\sqrt[10]{2} - 1} = 1493,3 \cdot \left(\sqrt[10]{2^n} - 1 \right)$.

$n = 14$ esetén $T_I = 2450$, $T_{II} = 2447,5$; $n = 15$ -re $T_I = 2700$, míg $T_{II} = 2730$. A 15. évben a II. vállalat össztermelése nagyobb lesz; s mivel növekedésének üteme gyorsabb, a különbség nőni fog.

966. A hat hajtogatás után $2^6 = 64$ darab réteg kerül egymásra.

a) 64. b) $64 \cdot 3 = 192$.

967. Első megoldás: Okoskodjunk visszafelé!

Mivel a hetedik vevő a maradék almák felét és még egy fél almát kapott, s ekkor elfogytak az almák, a hatodik vevő után összesen 1 alma maradt. Hasonló okoskodással az ötödik vevő után 3 maradt (ebből kapott meg a hatodik vevő $1,5 + 0,5 = 2$ almát), a negyedik után 7, a harmadik után 15, a második után 31, az első után 63; s kezdetben 127 volt. (Ellenőrizzünk!)

Második megoldás: Jelöljük x -szel az almák kezdeti számát!

Az első vevő $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ almát kapott, maradt $\frac{x-1}{2}$. A második vevő $\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$ almát kapott, maradt $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$. Tovább

folytatva az eljárást, a harmadik vevő $\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$, ..., a hetedik vevő $\frac{x+1}{2^7} = \frac{x+1}{128}$ almát kapott. $\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2^2} + \dots + \frac{x+1}{2^7} = x$, innen $x = 127$.

968. Az r sugarú félkör hossza $r\pi$.

a) Az egyes félkörök hossza mértani sorozatot alkot: $\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi, \dots$

Ezek együttes hossza 10 lépés után $\pi \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^9} \right) =$

$$= \pi \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \pi \left(2 - \frac{1}{2^9} \right).$$

b) Az előző átalakításhoz hasonlóan megmutatható, hogy n lépés után

($n \in \mathbb{N}^+$) a spirális hossza $\pi \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$. Ez az érték mindig kisebb,

mint 2π ; a kör kerülete soha nem érhető el.

c) $\pi(1 + 2 + 4 + \dots + 2^9) = \pi(2^{10} - 1)$.

969. Vegyünk fel az ábra szerint két érintkező kört! Jelöljük a körök középpontjait B -vel és C -vel, a középpontokból az egyik szárra bocsátott merőlegesek talppontjait rendre E -vel és F -fel; legyen továbbá a B középpontú kör sugara x , a C középpontúé y .

Mivel a körközéppontokon átmenő egyenes szimmetriaokok miatt felezi az A csúcsnál lévő 60° -os szöveget, ezért az ABE derékszögű háromszög szögei 30° és 60° . Innen $AB = 2BE = 2x$, hasonlóan $AC = 2CF = 2y$. Mivel $BC = x + y$, így $2y - 2x = x + y$, ahonnan $x = \frac{y}{3}$.

A kapott eredmény a többi érintkező körre is igaz; a körök sugarainak hosszai olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa 3. A sugarak növekvő

sorrendben: $\frac{r}{9}, \frac{r}{3}, r, 3r, 9r$.

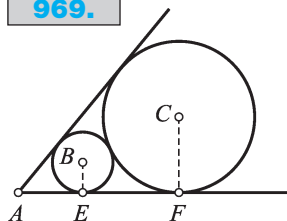
970. Alkalmazzuk a $2^{10} \approx 10^3$ becslést! $10^{12} \text{ km}^3 = 10^{21} \text{ m}^3 \approx 2^{70} \text{ m}^3$. (Valójában $2^{69} \approx 5,90 \cdot 10^{20}$, $2^{70} \approx 1,18 \cdot 10^{21}$.) A 40. generációnak még 70-szer kellene osztódnia, hogy térfogatuk elérje a Föld térfogatát. A 110 osztódás időtartama valamivel kevesebb, mint 124 nap.

971. Minden egyes hajtogatásnál a felület felére csökken, a vastagság kétszeresedik.

a) 10.

b) Ha n jelöli a hajtogatások számát ($n \in \mathbb{N}^+$), akkor $2^n \cdot 0,1 \geq 3,84 \cdot 10^{11}$, innen $n \geq 41,8$. 42 hajtogatásra volna szükség.

969.



IV

972. a) $a_n = 10^n - 1$;

b) $b_n = 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1$;

c) $c_n = \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \frac{(10^n - 1)(10^n + 2)}{9}$.

973. a) $1 + g + g^2 + \dots + g^{n-1} = \frac{g^n - 1}{g - 1}$;

b) $(3 + 2g)(1 + g^2 + g^4 + \dots + g^{2n-2}) = \frac{(3 + 2g)(g^{2n} - 1)}{g^2 - 1}$;

c) $2 \cdot \frac{g^n - 1}{g - 1} \cdot g^n + 3 \cdot \frac{g^n - 1}{g - 1} = \frac{(2g^n + 3)(g^n - 1)}{g - 1}$.

974. a) $\approx 84 \text{ cm} \times 118,8 \text{ cm}$; $T_0 \approx 9979,2 \text{ cm}^2$.

b) $\approx 21 \text{ cm} \times 14,9 \text{ cm}$; $T_5 = \frac{T_0}{2^5} \approx 311,9 \text{ cm}^2$.

c) $\approx 2,6 \text{ cm} \times 3,7 \text{ cm}$; $T_{10} = \frac{T_0}{2^{10}} \approx 9,7 \text{ cm}^2$.

975. Az első kiöntés után az 5 g só 80%-a marad meg; a második után már csak ennek a 80%-a stb. $5 \cdot 0,8^{10} \approx 0,54 \text{ (g)}$, ennyi só marad.

976. Az első kiöntés után 19 liter víz marad; a második után ennek a 95%-a; a harmadik után már csak a maradék 95%-a stb. A megmaradt víz: $20 \cdot 0,95^{15} \approx 9,27 \text{ (l)}$, tehát 10,73 liter alkohol marad az edényben.

977. a) Az első év végén tartozásunk $10^6 \cdot 1,08 \text{ Ft}$. Ebből 10^5 Ft -ot az év végén törlesztettünk, így a második év elején tartozásunk $10^6 \cdot 1,08 - 10^5 \text{ Ft}$, ez fog kamatozódni. A második év végi törlesztés után tartozásunk $10^6 \cdot 1,08^2 - 10^5 \cdot 1,08 - 10^5 \text{ Ft}$, általában az n . év végén ($n \in \mathbb{N}^+$) $10^6 \cdot 1,08^n - 10^5 \cdot 1,08^{n-1} - 10^5 \cdot 1,08^{n-2} - \dots - 10^5 \text{ Ft}$.

$$10^6 \cdot 1,08^n - 10^5 \cdot 1,08^{n-1} - 10^5 \cdot 1,08^{n-2} - \dots - 10^5 =$$

$$= 10^6 \cdot 1,08^n - 10^5 \cdot \frac{1,08^n - 1}{1,08 - 1}. \text{ Ha az } n. \text{ év végén nincs tartozásunk,}$$

akkor $10^6 \cdot 1,08^n - 1,25 \cdot 10^6 \cdot 1,08^n + 1,25 \cdot 10^6 \leq 0$. Ennek megoldása $n \geq 20,91$, vagyis a 21. év végén fizetjük vissza a tartozásunkat. (Az utolsó évben kevesebbet fizetünk vissza, mint 100 000 Ft.)

b) 20 éven keresztül $2 \cdot 10^6 \text{ Ft}$ -ot fizetünk vissza. A 20. év végén tartozásunk $1,25 \cdot 10^6 - 0,25 \cdot 10^6 \cdot 1,08^{20} = 84\,761 \text{ Ft}$; a teljes visszafizetett összeg 2 084 761 Ft.

978. Az n . félhang frekvenciája a 440 Hz alapérték $12\sqrt{2^n}$ -szerese. Így a frekvenciák kerekített értékei:

hang	a	b	h	c	cisz	d	disz	e	f	fisz	g	gisz	a
frekvencia (Hz)	440	466	494	523	554	587	622	659	698	740	784	831	880

979. Legyen a mértani sorozatot alkotó három szám a, aq, aq^2 . Ha egyúttal számtani sorozatot is alkotnak, akkor $a + aq^2 = 2aq$, innen $a(q^2 - 2q + 1) = 0$. Az $a = 0$ vagy a $q = 1$ lehetőségek azt mutatják, hogy a három szám egyenlő. *Megjegyzés:*

Az ilyen típusú feladatokban kiindulhatunk az $a - d, a, a + d$ számtani sorozatból is. Ha ezek a számok mértani sorozatot alkotnak, akkor $(a - d)(a + d) = a^2$, $d = 0$.

980. *Első megoldás:* Legyen a számtani sorozatot alkotó három szám $a - d, a, a + d$. Ha a reciprokaik mértani sorozatot alkotnak, akkor $\frac{1}{a-d} \cdot \frac{1}{a+d} = \frac{1}{a^2}$,

innen $d = 0$. A három szám egyenlő, de $a \neq 0$.

Második megoldás: Ha az a, aq, aq^2 mértani sorozatból indulunk ki, akkor az $\frac{1}{a} + \frac{1}{aq^2} = \frac{2}{aq}$ egyenletből $q = 1$ ($a \neq 0$).

981. *Első megoldás:* Legyen a számtani sorozat három eleme $a, a + d, a + 2d$; ekkor a mértani sorozat három eleme $a, a + d, a + 2d + 1$.

Innen $a(a + 2d + 1) = (a + d)^2$, valamint $a + 2d + 1 - a = 3$. Az egyenletrendszer megoldása $d = 1$, $a = 1$. A számtani sorozat tagjai: 1, 2, 3; a mértani sorozaté 1, 2, 4.

Második megoldás: Ha az a, aq, aq^2 mértani sorozatból indulunk ki, akkor $a, aq, aq^2 - 1$ számtani sorozatot alkot $(a + aq^2 - 1 = 2aq)$ és $a + 3 = aq^2$.

982. Legyen a számtani sorozat három eleme $5 - d, 5, 5 + d$; ekkor $5 - d, 4, 5 + d$ mértani sorozatot alkot, tehát $(5 - d)(5 + d) = 4^2$. Innen $d = \pm 3$, a három szám 2, 5, 8.

983. Induljunk ki a számtani sorozatból! A három szám összege 30, így tagjai $10 - d, 10, 10 + d$; az eredeti mértani sorozat tagjai pedig $10 - d, 6, 10 + d$. Innen $(10 - d)(10 + d) = 36$, $d = \pm 8$. A három szám 2, 6, 18.

984. *Első megoldás:* Legyen a három szám $a, a + 3d, a + 24d$! Innen $a + a + 3d + a + 24d = 114$, valamint $a(a + 24d) = (a + 3d)^2$. A második egyenletből $24d = d^2$. Ha $d = 0$, a 38, 38, 38 sorozatot kapjuk; ha $d \neq 0$, akkor $d = 2a$. Az első egyenletbe visszahelyettesítve $a = 2$, $d = 4$ adódik; ekkor a három szám 2, 14, 98.

Második megoldás: Legyen a három szám a, aq, aq^2 ! Ekkor $a + aq + aq^2 = 114$, valamint $8(aq - a) = aq^2 - a$. Mivel $a \neq 0$, a második egyenletből $8(q - 1) = q^2 - 1$; innen $q_1 = 1$ és $q_2 = 7$ adódik stb.

985. *Első megoldás:* Legyen a három szám a, aq, aq^2 ! Ekkor $a + aq + aq^2 = 26$, valamint $(a + 1) + (aq^2 + 3) = 2(aq + 6)$. A két egyenlet különbségéből $aq = 6$, visszahelyettesítve az első egyenletbe $3q^2 - 10q + 3 = 0$. A két gyök $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{1}{3}$; a kezdőtag $a_1 = 2$, $a_2 = 18$. A három szám 2, 6, 18 (vagy 18, 6, 2 sorrendben).

Második megoldás: A számtani sorozat három tagjának összege $26 + 1 + 6 + 3 = 36$, így a számok $12 - d, 12, 12 + d$. A $11 - d, 6, 9 + d$ számok mértani sorozatot alkotnak, innen $(11 - d)(9 + d) = 36$, $d^2 - 2d - 63 = 0$. Ennek gyökei

$d_1 = 9$, $d_2 = -7$; a számtani sorozat 3, 12, 21 vagy 19, 12, 5; a hozzájuk tartozó mértani sorozatok 2, 6, 18, illetve 18, 6, 2.

986. Ha a számtani sorozat három tagja $a - d$, a , $a + d$, akkor a kezdeti $a - d$, $a - 4$, $a + d$ és a végső $a - d$, a , $a + d + 32$ számok is mértani sorozatot alkotnak. Innen $(a - d)(a + d) = (a - 4)^2$, valamint $(a - d)(a + d + 32) = a^2$. Az

egyenletrendszer megoldása $(d; a) = (8; 10)$ vagy $(d; a) = \left(\frac{8}{3}; \frac{26}{9}\right)$; a három

IV

szám lehet 2, 6, 18 vagy $\frac{2}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{50}{9}$.

987. Legyen a négy szám $a - d$, a , $a + d$, $\frac{(a+d)^2}{a}$! Ekkor $a - d + \frac{(a+d)^2}{a} = 22$, $a + a + d = 20$. Az egyenletrendszer megoldása $(d; a) = (4; 8)$, illetve $(d; a) = (-5; 12,5)$. A négy szám 4, 8, 12, 18; vagy 17,5, 12,5, 7,5, 4,5.

988. Legyen $a_n = dn + c$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $d \neq 0$)!

a) $a_n + a_{n+1} = dn + c + d(n+1) + c = 2dn + 2c + d$ szintén számtani sorozat (a differencia $2d$).

b) $a_{n+1} - a_n = d$, állandó számtani sorozat.

c) $2a_n = 2dn + 2c$ számtani sorozat.

d) $a_n^2 = d^2n^2 + 2dnc + c^2$; ez ún. másodrendű számtani sorozat (a szomszédos tagok különbsége alkot nem állandó számtani sorozatot).

e) $2^{a_n} = 2^c \cdot (2^d)^n$ mértani sorozat ($q = 2^d$).

989. Számtani sorozatokat kapunk.

990. Az a)–f) esetekben mértani sorozatokat kapunk.

Legyen $a_n = a_1 q^{n-1}$ ($a_1, q > 0$, $n \in \mathbb{N}^+$)!

a) $a_n + a_{n+1} = a_1 q^{n-1} + a_1 q^n = a_1(1+q)q^{n-1}$ mértani sorozat (a kvóciens q).

b) $a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1(q-1)q^{n-1}$. (Ha $q = 1$, a konstans 0 sorozat adódik.)

c) $2a_n = 2a_1 q^{n-1}$.

d) $a_n^2 = a_1^2 \cdot (q^2)^{n-1}$, a hányados q^2 .

e) $\sqrt{a_1 q^{n-1}} = \sqrt{a_1} \cdot (\sqrt{q})^{n-1}$.

f) $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}$.

g) $\lg a_n = \lg(a_1 q^{n-1}) = \lg a_1 + (n-1) \lg q$, számtani sorozat ($\lg q$ a különbség).

991. Ha a páratlan sorszámú tagok összegét A -val jelöljük, akkor a páros sorszámú tagok összege qA (q a sorozat hányadosa). $A + qA = 3A$, innen $q = 2$. ($A = 0$ nem lehet, a tagok pozitívok).

992. Legyen $A = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ és $B = a_1 + a_3 + a_5 + a_7$! Ekkor $A + B = 250$,

$A - B = 150$; innen $A = 200$, $B = 50$, s mivel $A = qB$, $q = 4$. $a_1 \cdot \frac{4^8 - 1}{4 - 1} = 250$,

innen $a_1 = \frac{250}{21845} = \frac{50}{4369}$. A sorozat: $a_n = \frac{50}{4369} \cdot 4^{n-1}$.

- 993.** a) Legyen a háromszög három oldala $a \leq aq \leq aq^2$ ($q \geq 1$). A háromszög-egyenlőtlenségnek teljesülnie kell, ezért $a + aq > aq^2$; innen $aq^2 - aq - a < 0$. Az egyenlőtlenség megoldása

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Háromszöget } 1 \leq q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62 \text{ esetén}$$

kapunk. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ha nem tesszük fel, hogy } q \geq 1, \text{ akkor } \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,62 \end{array} \right.$

$$\text{az alsó korlát: } \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- b) Ha a háromszög derékszögű, akkor $a^2 + a^2q^2 = a^2q^4$.

Innen $q^4 - q^2 - 1 = 0$, a pozitív gyök $q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Ebből a pozitív q

értéke $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1,27$; ekkor a derékszögű háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lehetséges a reciprok megoldás is, ekkor} \end{array} \right.$

$$q = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \approx 0,79.$$

- 994.** a) $S = 3 \cdot (2^n - 1)$; $P = 3^n \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$; $N = 3 \cdot (4^n - 1)$;

$$R = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

- b) Ha a sorozat nem állandó ($q \neq 1$), akkor $S = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$;

$$P = b_1^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}; N = b_1^2 \cdot \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1};$$

$$R = \frac{1}{b_1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{q}{b_1(q - 1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right).$$

Ha a sorozat állandó, akkor $S = n \cdot b_1$, $P = b_1^n$, $N = n \cdot b_1^2$, $R = \frac{n}{b_1}$.

- 995.** Ha a mértani sorozat minden tagja 3, akkor 31 elem összege 93; ekkor azonban $31 \cdot \frac{1}{3} \neq \frac{31}{48}$.

Ha a mértani sorozat $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $q \neq 1$) alakú, akkor az első n tagjának összege $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, az első n tag reciprokának összege

$$R_n = \frac{q}{a_1(q-1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right).$$

Innen $S_n = 3 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 93$, $R_n = \frac{q}{3(q-1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right) = \frac{31}{48}$. Az első egyenlet-

IV

ből $(q^n - 1) = 31(q - 1)$, a másodikból $(q^n - 1) = \frac{31}{16} q^{n-1}(q - 1)$; innen $q^{n-1} = 16$,

vagyis $q^n = 16q$. Visszahelyettesítve $q = 2$, $n = 5$, a tagok: 3, 6, 12, 24, 48.

996. A 20. év végén a faállomány $10\,000 \cdot 1,06^{20}$, majd ritkítás után $9000 \cdot 1,06^{20} \text{ m}^3$ lesz. Ugyanígy a 23. év végén $9000 \cdot 1,06^{20} \cdot 1,15^3$, illetve $8100 \cdot 1,06^{20} \cdot 1,15^3 \text{ m}^3$, a 26. év végén $8100 \cdot 1,06^{20} \cdot 1,15^6$, illetve $7290 \cdot 1,06^{20} \cdot 1,15^6 \text{ m}^3$, vagyis $\approx 54\,079 \text{ m}^3$ a faállomány. A kitermelt fa mennyisége $1,06^{20} \cdot (1000 + 900 \cdot 1,15^3 + 810 \cdot 1,15^6) \text{ m}^3$, vagyis $13\,600 \text{ m}^3$ fát vágnak ki.

997. $a_3 \left(\frac{1}{q^2} + 1 + q^2 \right) = 63$, $a_3 \left(\frac{1}{q} + q \right) = 30$. Legyen $z = \frac{1}{q} + q$, ekkor

$a_3(z^2 - 1) = 63$, $a_3 z = 30$. A két egyenlet hányadosából $30(z^2 - 1) = 63z$, innen $10z^2 - 21z - 10 = 0$. $z = 2,5$ vagy $z = -0,4$; az első esetben $q = 2$ vagy $q = 0,5$ ($a_3 = 12$), míg a második esetben nincs megoldás.

Két lehetséges sorozatot kaptunk: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, illetve $a_n = 48 \cdot 0,5^{n-1}$.

Rekurzív sorozatok

Explicit és rekurzív alakok

998. A sorozatok kezdőtagját 1-től indexeljük, így n pozitív egész szám.

a) Explicit alak: $a_n = 2$.

Rekurzív alak: ha $n \geq 2$, akkor $a_n = a_{n-1}$; $a_1 = 2$.

Egy másik rekurzív megadás pl. $a_n = a_{n-2}$ ($n \geq 3$), $a_1 = a_2 = 2$.

b) Explicit alak: $b_n = 2n + 4$;

Rekurzív alak: $b_n = b_{n-1} + 2$ ($n \geq 2$), $b_1 = 6$.

c) Explicit alak: $c_n = 2n - 4$;

Rekurzív alak: $c_n = c_{n-1} + 2$ ($n \geq 2$), $c_1 = -2$.

d) Explicit alak: $d_n = 2^{n+2}$;

Rekurzív alak: $d_n = 2d_{n-1}$ ($n \geq 2$), $d_1 = 8$.

e) Explicit alak: $e_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

Rekurzív alak: $e_n = \frac{1}{2} e_{n-1}$ ($n \geq 2$), $e_1 = -4$.

f) Explicit alak: $f_n = (-1)^n \cdot 2$;

Rekurzív alak: $f_n = -f_{n-1}$ ($n \geq 2$), $f_1 = 2$.

g) Explicit alak: ha n páratlan, $g_n = 3$; ha n páros, $g_n = 7$.

Másik lehetőség: $g_n = 2 \cdot (-1)^n + 5$.

Rekurzív alak: $g_n = g_{n-1} + 4 \cdot (-1)^n$ ($n \geq 2$), $g_1 = 3$.

h) Explicit alak: $h_n = 5 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = 5 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 10}{2}$.

Rekurzív alak: $h_n = h_{n-1} + n - 1$ ($n \geq 2$), $h_1 = 5$.

i) Explicit alak: $i_n = 7 + 9 + \dots + (2n+5) = \frac{n(7+2n+5)}{2} = n^2 + 6n$.

Rekurzív alak: $i_n = i_{n-1} + (2n+5)$ ($n \geq 2$), $i_1 = 7$.

j) Explicit alak: $j_n = n!$.

Rekurzív alak: $j_n = n \cdot j_{n-1}$ ($n \geq 2$), $j_1 = 1$.

k) Explicit alak: $k_n = \frac{1}{n}$.

Rekurzív alak: $\frac{k_n}{k_{n-1}} = \frac{n-1}{n}$, innen $k_n = k_{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}$ ($n \geq 2$), $k_1 = 1$.

Egyéb lehetőségek: $k_n - k_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{n(n+1)}$,

így $k_n = k_{n-1} - \frac{1}{n(n+1)}$;

vagy $k_n \cdot k_{n-1} = \frac{1}{n(n+1)}$, innen $k_n = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{k_{n-1}}$.

l) Explicit alak: $l_n = \sqrt{n+7}$.

Rekurzív alak: $l_n = l_{n-1} \cdot \sqrt{\frac{n+7}{n+6}}$ ($n \geq 2$), $l_1 = \sqrt{8}$.

999. a) $a_n = a_{n-1} + 2$ ($n \geq 2$), $a_1 = -1$.

b) $b_n = b_{n-1} + n$ ($n \geq 2$), $b_1 = 1$.

c) $c_n = 2c_{n-1}$ ($n \geq 2$), $c_1 = 3$.

d) $d_n = -d_{n-1}$ ($n \geq 2$), $d_1 = 1$.

e) $e_n = -2e_{n-1}$ ($n \geq 2$), $e_1 = -2$.

f) $f_n = f_{n-1} - \frac{3}{n(n-1)}$ ($n \geq 2$), $f_1 = 5$.

g) $g_n = \frac{1}{g_{n-1}}$ ($n \geq 2$), $g_1 = 2$.

IV

Rekurziók osztályozása

- 1000.** a) Ez a számtani sorozat rekurzív alakja; állandó együtthatós, elsőrendű, $d = 0$ esetén homogén, egyébként inhomogén, lineáris rekurzió. (Az explicit formula: $a_n = c + (n - 1)d$, $(n \geq 1)$.)
 b) Ez a mértani sorozat: állandó együtthatós, elsőrendű, homogén, lineáris rekurzió. A mértani sorozat explicit alakja $b_n = cq^{n-1}$ ($n \geq 1$).
 c) Nem állandó együtthatós, elsőrendű, homogén, lineáris rekurzió. Megoldása $c_n = n!$ ($n \geq 0$) a $0! = 1$ megállapodással.
 d) Elsőrendű, másodfokú (nemlineáris) rekurzió.
 e) Másodrendű, törtes (nemlineáris) rekurzió.
 f) A jól ismert Fibonacci-sorozat: állandó együtthatós, másodrendű, homogén, lineáris rekurzió. (Leonardo Pisano (1175–1250) itáliai matematikus vizsgálta először ezt a sorozatot.)
 g) Negyedrendű homogén nemlineáris rekurzió.
- 1001.** A sorozat explicit alakja $a_n = 2n$ ($n \in \mathbb{N}^+$).
 a) $a_n = a_{n-1} + 2$ ($n \geq 2$), $a_1 = 2$.
 b) $a_n = a_{n-2} + 4$ ($n \geq 3$), $a_1 = 2, a_2 = 4$.
Egy másik lehetőség: mivel bármely közbülső tag a szomszédos tagok számtani közepe, $n \geq 2$ esetén $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, vagyis
 $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$. Innen indexeltolással $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 3$),
 $a_1 = 2$ és $a_2 = 4$.
 c) $a_n = a_{n-4} + 8$ ($n \geq 5$), $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8$.
Másik lehetőség: az $a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{5}$ összefüggést
 átalakítva $a_{n+2} = -a_{n+1} + 4a_n - a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 3$), $a_1 = 2, a_2 = 4$,
 $a_3 = 6, a_4 = 8$.
 d) Pl. $a_n = \frac{(a_{n-1} + 2)(a_{n-2} + 2)}{a_{n-1}}$, $a_1 = 2, a_2 = 4$.

Teljes indukció

- 1002.** a) Az $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = 2$ behelyettesítések alapján az explicit alakra az $a_n = \sqrt{n}$ összefüggést sejtethetjük meg. Teljes indukcióval bizonyítunk: feltesszük, hogy $a_k = \sqrt{k}$, s kérdés, hogy $a_{k+1} = \sqrt{k+1}$ teljesül-e. A rekurziós összefüggés és az indukciós feltevés alapján
 $a_{k+1} = \sqrt{1 + a_k^2} = \sqrt{1 + \sqrt{k}^2} = \sqrt{1 + k}$, vagyis sejtésünk igaz. $a_{100} = 10$.
 b) Sejtés: $a_n = \sqrt{n + 99}$. Teljes indukcióval bizonyíthatunk. Az „örök-lődés” az $a_{k+1} = \sqrt{1 + a_k^2} = \sqrt{1 + \sqrt{k + 99}^2} = \sqrt{k + 100}$ átalakításból következik. $a_{100} = \sqrt{199}$.

1003. A sorozat néhány kezdőtagja alapján $\left(a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}\right)$ az $a_n = \frac{n}{n+1}$ sejtést próbálhatjuk bebizonyítani az $a_k = \frac{k}{k+1}$ indukciós feltevésből kiindulva. Mivel $a_{k+1} = \frac{1}{2 - a_k} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$, így az explicit képlet valóban $a_n = \frac{n}{n+1}$.

IV

1004. Első megoldás: A sorozat tagjainak hárommal való osztási maradékai $(2, 0, 2, 0, \dots)$ periodikusan ismétlődnek, mert a sorozat bármely tagja csak az öt közvetlenül megelőző tagtól függ. Így a sorozat páros indexű tagjai – és csak azok – oszthatók 3-mal.

Megjegyzés:

A periodicitás egyébként – a skatulyaelv miatt – bármely rendű rekurzív összefüggés és a 3-as helyett tetszőleges modulus esetében is fennáll, ha a sorozat elemei egészek.

Második megoldás: A sorozat kezdőelemei 2, 3, 5, 9, 17 stb. Észrevehetjük, hogy mindegyik tag eggyel nagyobb egy kettőhatványnál, így az $a_n = 2^{n-1} + 1$ ($n \geq 1$) explicit alakot sejtethetjük meg. Az indukciós feltevés $a_k = 2^{k-1} + 1$, ebből kell belátnunk, hogy $a_{k+1} = 2^k + 1$, ez pedig az $a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 1$ átalakításból már következik.

$2^{n-1} + 1$ ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, mint $(-1)^{n-1} + 1$, tehát a sorozat páros indexű tagjai oszthatók 3-mal.

Elsőrendű lineáris rekurziók

1005. Írjuk fel az i . tag rekurziós alakját rendre az $i = 1, 2, 3, \dots, n$ esetekben:

$$a_1 = c,$$

$$a_2 = a_1 + f_1,$$

$$a_3 = a_2 + f_2,$$

...

$$a_i = a_{i-1} + f_{i-1},$$

...

$$a_n = a_{n-1} + f_{n-1}.$$

Az egyenleteket összeadva $a_n = c + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}$

(rövidebben $a_n = c + \sum_{i=1}^{n-1} f_i$). Vagyis minden olyan esetben felírhatjuk a_n -et zárt alakban, amikor az $f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}$ összeg zárt alakra hozható.

IV

1006. a) Az $a_n = a_{n-1} + n + 2$ ($n \in \mathbf{N}^+$, $n \geq 2$, $a_1 = 10$) összefüggésből

$$a_1 = 10,$$

$$a_2 = a_1 + 4,$$

$$a_3 = a_2 + 5,$$

...

$$a_n = a_{n-1} + n + 2.$$

Az egyenleteket összeadva $a_n = 10 + 4 + 5 + \dots + (n + 2) =$

$$= 10 + \frac{(4 + n + 2)(n - 1)}{2} = \frac{n^2 + 5n + 14}{2}, \text{ s így}$$

$$a_{2005} = \frac{2005^2 + 5 \cdot 2005 + 14}{2} = 2\,015\,032.$$

b) A 3-mal való oszthatóság szempontjából elég vizsgálni az

$$a_n = \frac{n^2 + 5n + 14}{2} \text{ explicit alak számlálóját, hiszen 2 és 3 relatív prímek.}$$

Ha n maradéka 0, 1 vagy 2, akkor $n^2 + 5n + 14$ maradéka rendre 2, 2, 1. Vagyis ebben a sorozatban nincs 3-mal osztható tag.

1007. *Első megoldás:* Az első csúcsból $(n - 1)$ darab szakaszt húzhatunk (ki-marad önmaga); a második csúcsból már csak $(n - 2)$ -t, hiszen az első csúccsal már összeköttöttük egyszer; a harmadikból $(n - 3)$ -at stb; végül az utolsó, $(n - 1)$. csúcsból már csak egy szakasz húzható.

A behúzott szakaszok száma $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}$, az átlók száma

$$\text{tehát } \frac{n(n - 1)}{2} - n = \frac{n(n - 3)}{2}.$$

Második megoldás: Minden csúcsból $n - 3$ átlót húzhatunk; ez $n(n - 3)$ átlót jelent. Mivel minden átlót kétszer számoltunk, az összes átló száma $\frac{n(n - 3)}{2}$.

Harmadik megoldás (rekurzióval): Ha a konvex $(n - 1)$ -szög átlóinak száma A_{n-1} , akkor az n . csúcs felvételekor $n - 3$ új átló keletkezik, valamint egy korábbi oldalélből is átló lesz. Vagyis az $A_n = A_{n-1} + n - 2$ ($n \geq 4$, $A_3 = 0$) rekurzió explicit alakját kell előállítanunk.

Ennek megoldása a hagyományos módon $A_n = 2 + 3 + \dots + (n - 2) = \frac{n(n - 3)}{2}$.

1008. Adott számú egyenes esetén a legtöbb síkrészt akkor kaphatjuk, ha az egyenesek között nincsenek párhuzamosak, és semelyik ponton nem megy át kettőnél több egyenes. (Véges számú egyenest így mindig felvehetünk.)

Az alábbi táblázatban feltüntettük, hogy $n = 0, 1, 2, 3, 4$ egyenes felvételekor hány tartomány keletkezett.

egyenesek száma:	0	1	2	3	4
tartományok száma:	1	2	4	7	11
különbség:		1	2	3	4

Észrevehetjük, hogy a szomszédos tartományszámok különbsége eggyel nő. A sejtés bizonyításához tegyük fel, hogy $n - 1$ egyenes S_{n-1} részre osztja a síkot. Az n . egyenes elmettzi a korábban felvett $n - 1$ egyenest, ekkor $n - 1$ új tartomány keletkezik; valamint az utolsó metszéspont után szintén kapunk egy további (nem korlátos) síkrészt. Vagyis n egyenes legfeljebb $S_{n-1} + n$ részre osztja fel a síkot, mint azt sejtettük.

Az $S_n = S_{n-1} + n$ ($n \geq 1, S_0 = 1$) rekurzió megoldása:

$$S_n = 1 + 1 + 2 + \dots + n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}; \text{ legfeljebb ennyi részre oszthatja } n$$

egyenes a síkot.

1009. Adott számú kör felvételekor a legtöbb síkbeli tartományt akkor kaphatjuk, ha bármely két kör két pontban metszi egymást és semelyik metszésponton nem megy át kettőnél több kör. (Ellenkező esetben a tartományok számát növelhetnénk.) A továbbiakban tehát csak az ilyen helyzetű körökkel foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy $n - 1$ darab kör k_{n-1} részre osztja a síkot. Az n . kör felvételekor $2(n - 1)$ metszéspontot kapunk, s mindegyikhez tartozik egy új tartomány. Így a $k_n = k_{n-1} + 2(n - 1)$ ($n \geq 2, k_1 = 2$) rekurzív összefüggést kapjuk, ennek megoldása $k_n = 2 + 2(1 + 2 + \dots + (n - 1)) = 2 + n(n - 1) = n^2 - n + 2$.

A maximális helyzet el is érhető. Tetszőleges n esetén megadhatunk n darab kört úgy, hogy bármely kettőnek két metszéspontja legyen. Pl. egy adott kört rögzített irányban $(n - 1)$ -szer „kissé” eltolunk; ha az első és utolsó kör középpontjának távolsága kisebb, mint a kör sugara, akkor mindegyik kör metszi mindegyik kört, különböző pontokban.

1010. Az alábbi táblázatban az $n = 1, 2, 3, 4$ téglalaphoz tartozó maximális tartományú síkfelosztás adatai láthatók.

téglalapok száma:	1	2	3	4
tartományok száma:	2	6	14	26
különbség:	4	8	12	

Legtöbb síkrészt akkor kapunk, ha bármely két téglalap négy pontban metszi egymást. (Ez a helyzet el is érhető.) Tegyük fel, hogy $(n - 1)$ darab téglalap t_{n-1} részre osztotta fel a síkot! Az n . téglalapnak a korábbi téglalapokkal $4(n - 1)$ metszéspontja van, s mindegyik metszésponthoz egy-egy új tartomány tartozik. Innen $t_n = t_{n-1} + 4(n - 1)$ ($n \geq 2, t_1 = 2$). A rekurzió megoldása: $2 + 4 + 8 + 12 + \dots + 4(n - 1) = 2 + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)) = 2n^2 - 2n + 2$.

1011. Írjuk fel a sorozat néhány kezdőtagját és vizsgáljuk a szomszédos tagok különbségét:

$$a_1 = e,$$

$$a_2 = b \cdot a_1 + c,$$

$$a_3 = b \cdot a_2 + c,$$

$$a_4 = b \cdot a_3 + c,$$

...

A különbségek: $a_2 - a_1 = b \cdot a_1 + c - e$, $a_3 - a_2 = b(a_2 - a_1)$, $a_4 - a_3 = b(a_3 - a_2)$, ...
Definiáljuk a (d_n) különbségsorozatot $d_i = a_i - a_{i-1}$ ($i \geq 2$) formában, ekkor

IV

$d_2 = b \cdot a_1 + c - e$ (= állandó), $d_3 = b \cdot d_2$, $d_4 = b \cdot d_3 \dots$ Vagyis (d_n) egy b hányadosú mértani sorozat, $d_n = b^{n-2} \cdot d_2$. Mivel $a_n = d_n + a_{n-1}$, $a_{n-1} = d_{n-1} + a_{n-2}$, $\dots$, $a_2 = d_2 + a_1$, a (d_n) sorozat ismeretével egy olyan elsőrendű rekurziót kaptunk (a_n) -re, melyben a_{n-1} együtthatója 1. Ennek megoldása már korábban láttuk:

$$a_n = a_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \dots + d_n, \text{ innen}$$

$$a_n = a_1 + \frac{b^{n-1} - 1}{b - 1} d_2 = e + \frac{b^{n-1} - 1}{b - 1} (be + c - e).$$

1012. Első megoldás: A sorozat kezdőtagjai: $a_1 = 3$, $a_2 = 2a_1 + 1 = 7$, $a_3 = 2a_2 + 1 = 15$, $a_4 = 2a_3 + 1 = 31$. A különbségsorozat $d_2 = 4$, $d_3 = 8$, $d_4 = 16$, $\dots$, $d_n = 2^n$. Így $a_n = a_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n = 3 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Második megoldás: Behelyettesíthetünk az előző feladat megoldásában levezetett $a_n = e + \frac{b^{n-1} - 1}{b - 1} (be + c - e)$ formulába: $a_1 = e = 3$, $b = 2$, $c = 1$, így

$$a_n = 3 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} (2 \cdot 3 + 1 - 3) = 2^{n+1} - 1.$$

Harmadik megoldás: Az explicit alak könnyen megsejthető, dolgozhatunk teljes indukcióval is.

Megjegyzés:

A különbségsorozat használata miatt kissé kényelmesebb az (a_n) sorozatot 0-tól indexelni.

- 1013.** a) $a_{20} = 4$.
 b) $a_{20} = 3^{19} + 4$.
 c) $a_n = 3^{n-1} + 4$.

1014. Ha $c_n = 0$, akkor a rekurzió homogén, egyébként inhomogén. Az általános megoldást a speciális homogén rekurzió megoldása segítségével állítjuk elő.

A továbbiakban feltesszük, hogy $b_n \neq 0$ (egyébként a rekurzió elfajul). Legyen a $c_n = 0$ esethez tartozó homogén rekurzió megoldása (h_n) : $h_n = b_n \cdot h_{n-1}$ ($n \geq 1$, h_0 értéke egyelőre szabadon választható); majd tekintsük a $(q_n) = \left(\frac{a_n}{h_n} \right)$ sorozatot:

$$\frac{a_n}{h_n} = \frac{b_n a_{n-1}}{h_n} + \frac{c_n}{h_n} = \frac{a_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{c_n}{h_n}.$$

Az így kapott $q_n = q_{n-1} + \frac{c_n}{h_n}$, ($n \geq 1$, q_0 később meghatározandó) rekurzió megoldása

$$q_n = q_0 + \frac{c_1}{h_1} + \frac{c_2}{h_2} + \dots + \frac{c_n}{h_n}$$

$$\left(\text{vagy rövidebben } q_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{h_i} \right). \text{ Innen } \frac{a_n}{h_n} = \frac{a_0}{h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{h_i}, \text{ vagyis}$$

$$a_n = \frac{a_0}{h_0} h_n + h_n \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{h_i}.$$

A homogén rekurzió megoldása $h_n = h_0 b_1 b_2 \dots b_n$. (Ha b_n állandó, akkor speciális esetként a mértani sorozatot kapjuk meg.) Látható, hogy a $h_0 = 1$ választás

a legkényelmesebb; ekkor $h_n = b_1 b_2 \dots b_n$, és $a_n = a_0 h_n + h_n \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{h_i}$.

1015. *Első megoldás:* A sorozat néhány kezdőtagja $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{5}{2}$, $a_2 = \frac{21}{4}$, $a_3 = \frac{85}{8}$ stb. Megsejthetjük, hogy ha a sorozat egyik tagja $\frac{x}{y}$, akkor a következ

ő tag $\frac{4x+1}{2y}$; így a_n olyan tört alakban írható, melynek nevezője 2^n , számlálója pedig az $x_n = 4x_{n-1} + 1$, $x_0 = 1$ rekurzív összefüggésből határozható meg. Ez utóbbi megoldási képletét már korábban levezettük, most vagy indexeltolást alkalmazunk, vagy $x_1 = 5$ kezdőtaggal számolunk:

$$x_n = 5 + \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} (4 \cdot 5 + 1 - 5) = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

Sejtésünk alapján $a_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n}$, ezt teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Az állítás $n = 0$ -ra igaz. Ha $a_{k-1} = \frac{4^k - 1}{3 \cdot 2^{k-1}}$ ($k \in \mathbb{N}^+$), akkor $a_k = 2a_{k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^k =$

$$= 2 \cdot \frac{4^k - 1}{3 \cdot 2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{4^{k+1} - 4}{3 \cdot 2^k} + \frac{3}{3 \cdot 2^k} = \frac{4^{k+1} - 1}{3 \cdot 2^k},$$

tehát valóban fennáll az öröklődés.

Második megoldás: Helyettesítsünk be az általános képletbe. A $h_n = 2 \cdot h_{n-1}$ ($n \geq 1$, $h_0 = 1$) homogén rekurzió megoldása $h_n = 2^n$. Mivel $b_n = 2$, $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$\begin{aligned} \text{így } a_n &= 2^n + 2^n \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{2^3} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n} \right) = \\ &= 2^n \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} \right) = \frac{1}{2^n} (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}) = \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^{2n+2} - 1}{2^2 - 1} \right) = \frac{4^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n}. \end{aligned}$$

1016. A sorozat néhány kezdőtagja: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 19$ stb.

Első megoldás: Alkalmazzuk az előző feladat megoldási módszerét ($b_n = 2$, $c_n = n$). A $h_n = 2 \cdot h_{n-1}$ ($n \geq 1$, $h_0 = 1$) homogén rekurzió megoldása $h_n = 2^n$, így

$$a_n = 2^n + 2^n \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} \right) =$$

$= 2^n + 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-2} \cdot 2 + 2^{n-3} \cdot 3 + \dots + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot n$. A 2^n tag utáni összeget felfoghatjuk, mint n darab mértani sorozat összegét:

$$\begin{aligned}
 (1): & \quad 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1; \\
 (2): & \quad 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1; \\
 & \dots \\
 (n-1): & \quad 1 + 2 = 2^2 - 1; \\
 (n): & \quad 1 = 2 - 1.
 \end{aligned}$$

Ezek összege $2^{n+1} - n - 2$, így $a_n = 3 \cdot 2^n - n - 2$.

Második megoldás: Tekintsük az (a_n) sorozat különbségsorozatát.

$d_n = a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} + n - 1 - (2a_{n-2} + n - 2) = 2d_{n-1} + 1$. $d_1 = 2$, a (d_n) sorozat explicit alakja $d_n = 2 + 3 \cdot (2^{n-1} - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ($n \geq 1$).

Innen $a_n = a_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n = 1 + 3 \cdot (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}) - n = 1 + 3 \cdot 2^n - 3 - n = 3 \cdot 2^n - n - 2$.

1017. a) A sorozat néhány kezdőtagja: $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 19$, $a_3 = 65$.

$A h_n = 3h_{n-1}$, ($n \in \mathbb{N}^+$, $h_0 = 1$) homogén lineáris rekurzió megoldása

$h_n = 3^n$. A $\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$ összeg értéke

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}; \text{ végül}$$

$$a_n = 3^n + 3^n \left(2 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Az explicit alak $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

b) Az első n elem összege $S_{n-1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2} - 2^{n+1} + 1$.

c) A $3^{n+1} - 2^{n+1}$ kifejezés 5-tel való osztási maradékait vizsgáljuk. Az oszthatósági szempontból egyenértékű $(-2)^{n+1} - 2^{n+1}$ kifejezés páratlan n értékekre nulla maradékot ad, páros n -ek esetén $-2 \cdot 2^{n+1}$ a maradék. Tehát az $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $a_0 = 1$) sorozatban csak a páratlan sorszámú tagok oszthatók 5-tel.

Megjegyzés:

Egyes esetekben speciális megoldási módszereket is alkalmazhatunk. Az

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 3a_0 + 2,$$

$$a_2 = 3a_1 + 2^2,$$

...

$$a_{n-1} = 3a_{n-2} + 2^{n-1},$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$$

egyenletek összeadása előtt azonos együtthatókat állítunk elő mindkét oldalon.

Az n . (utolsó előtti) egyenletet megszorozzuk 3-mal; az $(n-1)$. egyenletet 3^2 -nal, az $(n-2)$ -et 3^3 -nal, ..., végül az első egyenletet 3^n -nel. Az így kapott egyenleteket összeadva $a_n = 3^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 2^2 \cdot 3^{n-2} + \dots + 2^{n-1} \cdot 3 + 2^n$. Ezt tekinthetjük egy 3^n kezdőtagú és $\frac{2}{3}$ kvóciensű mértani sornak, amit a hagyományos képlettel összegezhethetünk; vagy megszorozhatjuk a $(3-2)$ -es tényezővel, s így nevezetes azonosságot kapunk: $3^{n+1} - 2^{n+1}$ ($n \geq 0$).

1018. Jelentse a_n az n . év végén meglévő összeget, ekkor tulajdonképpen az $a_1 = 20\,000 \cdot 1,05$, $a_n = (a_{n-1} + 20\,000) \cdot 1,05 = 1,05a_{n-1} + 20\,000 \cdot 1,05$ rekurziót kell megoldanunk ($n \geq 2$).

Az első év végén $a_1 = 20\,000 \cdot 1,05$ az összeg; a második év végén ez tovább kamatozik, értéke $20\,000 \cdot 1,05^2$ lesz; s az újonnan betett $20\,000$ Ft további $20\,000 \cdot 1,05$ értéket ad.

A harmadik év végére $(20\,000 \cdot 1,05^2 + 20\,000 \cdot 1,05) \cdot 1,05 + 20\,000 \cdot 1,05 = 20\,000 \cdot 1,05^3 + 20\,000 \cdot 1,05^2 + 20\,000 \cdot 1,05$ a kamatozott összeg. Észrevéve a szabályosságot, az n . év végére $20\,000 \cdot 1,05^n + 20\,000 \cdot 1,05^{n-1} + \dots + 20\,000 \cdot 1,05$ a teljes összeg, ami nagyobb vagy egyenlő, mint $1\,000\,000$. Ezután alkalmazhatjuk a mértani sorozat összegképletét. Eredmény: $n \geq 24,97$, vagyis $n = 25$ év.

Másodrendű rekurziók

1019. A sorozat kezdőtagjai $0, 1, 1, 7, 13, 55, 133, \dots$ Az (a_n) sorozat megoldását $a_n = x^n$ alakban keressük; ekkor az $x^n = x^{n-1} + 6x^{n-2}$ átalakítás után $x^{n-2}(x^2 - x - 6) = 0$. Mivel $x \neq 0$, az $x^2 - x - 6 = 0$ ún. karakterisztikus egyenlet gyökei $b = -2$ és $c = 3$. Ez azt jelenti, hogy az $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ összefüggést az $a_n = b^n = (-2)^n$ és az $a_n = c^n = 3^n$ mértani sorozatok is kielégítik. Sőt az általános megoldást b^n és c^n lineáris kombinációjaként kaphatjuk meg. (Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a mértani sorozatok lineáris kombinációja valóban megoldása az eredeti rekurciónak.)

Az $a_n = ub^n + vc^n$ általános megoldásban az u, v értékeket az $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ kezdeti értékek illesztésével határozhatjuk meg. Az $a_0 = 0$ feltételből $u + v = 0$, az $a_1 = 1$ feltétel miatt $-2u + 3v = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $u = -\frac{1}{5}$, $v = \frac{1}{5}$; tehát a sorozat explicit alakja $a_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5} \cdot 3^n$.

Hasonlóan járhatunk el minden $a_n = b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2}$ rekurzió megoldásakor, ha a karakterisztikus egyenletnek két valós gyöke van; sőt akkor is, ha a két gyök komplex.

IV

Megjegyzés:

A megoldást mértani sorozatok lineáris kombinációjaként kerestük. Elképzelhető, hogy más úton is eljuthatunk ehhez az eredményhez; de ez a módszer a gyakorlatban mindig célhoz vezet, tehát általánosan alkalmazható.

1020. A sorozat megoldását $a_n = x^n$ alakban kereshetjük. Az $x^n = 5x^{n-1} - 6x^{n-2}$ egyenletből $x^{n-2}(x^2 - 5x + 6) = 0$. $x \neq 0$, így az $x^2 - 5x + 6 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $b = 2$ és $c = 3$. Innen az általános megoldás $a_n = ub^n + vc^n$ alakú.

- a) Ha $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, akkor $u + v = 0$, $2u + 3v = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $v = 1$, $u = -1$, a sorozat explicit alakja $a_n = -2^n + 3^n$.
- b) Ha $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, akkor $u + v = 1$, $2u + 3v = 2$. Az egyenletrendszer megoldása $v = 0$, $u = 1$, a sorozat explicit alakja $a_n = 2^n$.
- c) Ha $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, akkor $u + v = 1$, $2u + 3v = -2$. Az egyenletrendszer megoldása $v = -4$, $u = 5$, a sorozat explicit alakja $a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$.

1021. Első megoldás: Az $x^2 - 2x + 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei egyenlők: $b = c = 1$. Most az $a_n = ub^n + vc^n = (u + v)b^n = yb^n$ átalakítás miatt csak egyetlen y kezdeti állandónk marad; ezt általában nem lehet úgy megválasztani, hogy $a_0 = -2$ és $a_1 = 3$ egyszerre teljesüljön. Általánosan megmutatható (pl. a Viète-formulák segítségével), hogy $a_n = n \cdot c^n$ is kielégíti az eredeti rekurzív összefüggést, ezért $b = c$ miatt a megoldást $a_n = ub^n + vnc^n = (u + vn)b^n$ alakban állíthatjuk elő.

Az $a_0 = -2$ és $a_1 = 3$ kezdőfeltételek alapján $u = -2$ és $u + v = 3$. Innen $v = 5$, így $b = 1$ figyelembe vételével $a_n = (-2 + 5n)b^n = 5n - 2$ adódik ($n \geq 0$).

Második megoldás: A sorozat kezdőtagjai: $-2, 3, 8, 13, 18, \dots$; sejthető, hogy ez egy 5 különbségű számtani sorozat. Bizonyíthatunk teljes indukcióval, vagy speciális módszerként észrevehetjük, hogy a rekurzív formula átalakítható: $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$, vagyis az (a_n) sorozat különbségsorozata állandó.

1022. Jelöljük f_n -nel az n . hónapban meglévő nyulpárok számát ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor $f_1 = f_2 = 1$, $f_3 = 2$. A további f_n értékek meghatározásához vegyük észre, hogy minden hónapban az előző hónapnál annyiival több nyulpár lesz, amennyi két hónappal korábban volt a párok száma. (Ugyanis kéthónapos korban már tenyészképesek a nyulak.) Vagyis érvényes az $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ($n \geq 3$) rekurzív összefüggés, s ez alapján:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Ha az (f_n) sorozatot tovább folytatjuk, akkor az ún. Fibonacci-sorozat tagjait kapjuk.

1023. Jelöljük e_n -nel azt a számot, ahányféleképpen ki tudunk fizetni n forintot 1 és 2 forintosokkal, ha az érmék sorrendjére is tekintettel vagyunk ($n \in \mathbb{N}$). A feladat e_{12} meghatározása.

Ha a kifizetést 1 forintosal kezdjük, akkor a továbbiakban $(n - 1)$ forintot kell kifizetni 1 és 2 forintosokkal; ezt a kifizetést e_{n-1} -féleképpen tudjuk megtenni. Ha viszont az első kifizetett érme 2 forintos, akkor a továbbiakban $(n - 2)$ forintot kell kifizetni; ezt e_{n-2} -féleképpen tehetjük meg. A kifizetést vagy 1, vagy

2 forintos érmével kezdhetjük, így az $e_n = e_{n-1} + e_{n-2}$ ($n \geq 2$, $e_1 = 1$, $e_2 = 2$) összefüggést kapjuk. A rekurzió ismételt alkalmazásával az 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 stb. számokat kapjuk, vagyis $e_{12} = 233$.

Megjegyzés:

Észrevehetjük, hogy $e_{12} = f_{13}$ (általában $e_n = f_{n+1}$, a Fibonacci-sorozat n . tagja).

1024. Jelöljük l_n -nel azt a számot, ahányféleképpen egy 12 szintes lépcső tetjére felmehetünk ($n \in \mathbb{N}^+$)! Ekkor $l_1 = 1$, $l_2 = 2$ és $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ ($n \geq 2$), innen $l_{12} = 233$. (Általában $l_n = f_{n+1}$.)

1025. Jelöljük d_n -nel azt a számot, ahányféleképpen egy $2 \times n$ -es táblázatot 2×1 -es dominókkal lefedhetünk ($n \in \mathbb{N}^+$).

Az első dominó elhelyezésére kétféle lehetőségünk van.

Ha az első dominót az ábra szerint állítva helyezzük el, a továbbiakban egy $2 \times (n-1)$ -es táblát kell lefednünk:

A másik lehetőség, hogy az első dominót fektetve helyezzük el. A másodikat ekkor csak párhuzamosan fölé helyezhetjük, s ezután a maradék $2 \times (n-2)$ -es táblát kell lefednünk.

Ekkor tehát $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ ($n \geq 2$), $d_1 = 1$, $d_2 = 2$; innen $d_{12} = 233$. (Általában $d_n = f_{n+1}$.)

1026. Jelöljük g_n -nel azt a számot, ahányféleképpen n hosszúságú láncot képezhetünk ($n \in \mathbb{N}^+$)! $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ ($n \geq 2$), $g_1 = 2$, $g_2 = 3$; innen $d_{12} = 377$. (Általában $g_n = f_{n+2}$.)

1027. Az előző feladat megoldása alapján 377-féleképpen.

1028. A sorozat megoldását $f_n = x^n$ alakban kereshetjük. Az $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ egyenletből $x^{n-2}(x^2 - x - 1) = 0$. $x \neq 0$, az $x^2 - x - 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ és $c = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Az általános megoldás $a_n = ub^n + vc^n$ alakú.

Az $f_1 = 1$ feltételből $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot u + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot v = 1$, az $f_2 = 1$ feltételből

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot u + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot v = 1. \text{ Az egyenletrendszer megoldása } u = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$v = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; tehát a Fibonacci-sorozat explicit alakja

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

1029. Első megoldás: Jelöljük l_n -nel azt a számot, ahányféleképpen felmehe-
tünk a lépcső tetejére ($n \in \mathbb{N}^+$). Az alábbi táblázatból kiolvasható, hogy $l_{12} = 65$.
(Az 5. fokra vonatkozó feltétel miatt $l_5 = 0$ és $l_6 = l_4$.)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l_n	1	2	3	5	0	5	5	10	15	25	40	65

Második megoldás: Ha az 5. lépcsőfok nem lenne tiltott, akkor az n magas
lépcsőbejárások b_n száma Fibonacci-szerű sorozatot alkotna: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$
és $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ ($n \geq 2$). A (b_n) sorozat az (f_n) Fibonacci-sorozat eltoltja:

$$b_n = f_{n+1}, \text{ így } b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

Vizsgáljuk meg az alábbi táblázatot.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
l_n	1	2	3	5	0	5	5	10	15	25	40	65
t_n					-8	-8	-16	-24	-40	-64	-104	-168

Észrevehetjük, hogy a „normál” (b_n) lépcsőbejárás sorozatától a „valódi” (l_n)
bejárás sorozat egy „tiltott” (t_n) sorozattal különbözik. Ezt a (t_n) sorozatot úgy
is felfoghatjuk, mint egy $t_5 = t_6 = 8$ kezdőtagú Fibonacci-szerű sorozatot, s (b_n)
a (t_n) és (l_n) sorozatok szuperponálásából, összegéből tevődik össze. (Vagyis a
tiltott bejárások is Fibonacci-szerű sorozatot alkotnak.)

1030. Az előző megoldás jelöléseit használva

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 7),$$

$t_5 = t_6 = 8$, s a keresett (l_n) sorozatra $l_n = b_n - t_n$. A feladat tehát (t_n) explicit
alakjának meghatározása.

A könnyebb számolás kedvéért alkalmazzuk a $T_n = t_{n+5}$ eltolást. Ekkor
 $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), $T_0 = T_1 = 8$. (T_n) explicit alakját

$$u \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + v \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \text{ alakban keressük. A } T_0 = 8 \text{ összefüggésből}$$

$$u + v = 8, \text{ a } T_1 = 8 \text{ összefüggésből } u \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + v \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 8. \text{ Az egyen-}$$

$$\text{letrendszer megoldása } u = 4 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}, \quad v = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}; \text{ tehát}$$

$$T_n = 4 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + 4 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{Innen, ha } n \geq 5,$$

$$t_n = 4 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-5} + 4 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-5}, \text{ és}$$

$$l_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} -$$

$$- 4 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-5} + 4 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-5}.$$

1031. A sorozat kezdőtagjai: 0, 1, 2, 9, 22, 77, 210 stb.

Tekintsük az (a_n) sorozat (d_n) különbségsorozatát: $d_i = a_i - a_{i-1}$ ($i \geq 1$). Ekkor a (d_n) sorozat tagjai 1, 1, 7, 13, 55, 133 stb. Az $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 1 - (a_{n-2} + 6a_{n-3} + 1) = a_{n-1} - a_{n-2} + 6(a_{n-2} - a_{n-3})$ átalakítás miatt $d_n = d_{n-1} + 6d_{n-2}$ ($n \geq 3$), vagyis a (d_n) sorozat már *homogén* másodrendű rekurzió, a $d_1 = d_2 = 1$ kezdeti feltételekkel. Ennek megoldása $d_n = u \cdot (-2)^n + v \cdot 3^n$ alakú, a kezdeti feltételeket felhasználva $d_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n$, ($n \geq 1$).

Ezután írjuk fel rendre a szomszédos tagok különbségeit:

$$a_1 - a_0 = d_1,$$

$$a_2 - a_1 = d_2,$$

$$a_3 - a_2 = d_3,$$

...

$$a_n - a_{n-1} = d_n.$$

Az egyenletek összegzéséből $a_n - a_0 = d_1 + d_2 + \dots + d_n$, vagyis

$$a_n = a_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n.$$

A keresett explicit alak $a_n = \frac{3}{10} \cdot (3^n - 1) - \frac{2}{15} \cdot ((-2)^n - 1)$, ahol $n \geq 0$.

1032. Az $x^2 + x + 1 = 0$ karakterisztikus egyenletnek komplex gyökei vannak, ezért speciális megoldást keresünk. Az $a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = 3$ átalakításból következik, hogy a sorozat bármely három szomszédos tagjának összege állandó. Írjunk fel néhány kezdőtagot: $a, b, 3 - a - b, a, b, 3 - a - b$ stb., ekkor észrevehetjük a periodicitást. Tehát az 5, 2, -4 számhármass ciklikusan ismétlődik.

Vegyes rekurziók

1033. A sorozat explicit alakja $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$. Ha áttérünk a rekurzív alakra,

$a_1 = 1$, $a_n = 10a_{n-1} + 1$ ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^+$). A tagok 7-tel való osztási maradékai 1, 4, 6, 5, 2, 0, 1, ... 6-hosszú ismétlődő ciklust alkotnak. Minden 6. tag osztható 7-tel, tehát a $6k$ darab 1-esből állók ($k \in \mathbb{N}^+$).

1034. Az egyenlet átalakításával $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ (= állandó), tehát egy $-\frac{2}{3}$

kvóciensű mértani sorozatról van szó. $a_n = -3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

IV

1035. A 10. év végére $a_{10} = 100\,000 \cdot (1,08^{10} + 1,08^9 + \dots + 1,08) =$
 $= 100\,000 \cdot 1,08 \cdot \frac{1,08^{10} - 1}{1,08 - 1} = 1\,564\,549$ Ft lesz a felnövekedett összeg. A 20. év
 végére $a_{20} = a_{10} \cdot 1,08^{10} - 100\,000 \cdot (1,08^{10} + 1,08^9 + \dots + 1,08) =$
 $= a_{10} \cdot 1,08^{10} - a_{10} = a_{10} \cdot (1,08^{10} - 1) = 1\,813\,195$ Ft.
 $1,08^9 \approx 1,999 < 2$, de $1,08^{10} \approx 2,159 > 2$, ezért a betett pénz – a folyamatos ki-
 vétel ellenére – mindig növekedni fog.

1036. A 10. év végére $a_{10} = 1\,564\,549$ Ft lesz a felnövekedett összeg. Ha éven-
 te x Ft-ot veszünk ki az összegből, akkor a 11. év végén $a_{11} = 1,08 \cdot a_{10} - x$, a 12.
 év végén $a_{12} = 1,08 \cdot a_{11} - x = 1,08^2 \cdot a_{10} - 1,08 \cdot x - x, \dots$, a 20. év végén
 $a_{20} = 1,08^{10} \cdot a_{10} - 1,08^9 \cdot x - 1,08^8 \cdot x - \dots - 1,08 \cdot x - x$ a megmaradt pénz. A
 feltétel szerint $a_{20} = 0$, innen $1,08^{10} \cdot a_{10} - x(1,08^9 + 1,08^8 + \dots + 1,08 + 1) = 0$,
 $1,08^{10} \cdot a_{10} = x \cdot \frac{1,08^{10} - 1}{1,08 - 1}$, $x \approx 233\,164$ (Ft).

1037. Legyen a mértani sorozat $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ekkor

$a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{6} (a_1 \cdot q^{n+1} - a_1 \cdot q^n)$. Mivel $q \neq 0$, a karakterisztikus egyenlet
 $q^2 - q - 6 = 0$, ennek gyökei $q = -2$ és $q = 3$. A két lehetséges mértani sorozat:
 $a_n = a_1 \cdot (-2)^{n-1}$ és $a_n = a_1 \cdot 3^{n-1}$.

1038. *Első megoldás:* $A_{n+1} = A_n - A_{n-1} + A_{n-2} = (A_{n-1} - A_{n-2} + A_{n-3}) - A_{n-1} +$
 $+ A_{n-2} = A_{n-3}$, tehát a sorozat minden negyedik tagja egyenlő.

Mivel $2005 = 501 \cdot 4 + 1$, ezért $A_{2005} = A_1 = 1$.

Második megoldás: Az első néhány tag felírása után: 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, ...
 sejthető, hogy $A_{4k} = A_{4k+1} = 1$ és $A_{4k+2} = A_{4k+3} = 2$. Ezeket az összefüggéseket
 teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

1039. A rekurzió átírható $\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{3}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$ alakba.

Ezután az $a_n = \frac{1}{2^{n-1} + 1}$ sejtést teljes indukcióval igazolhatjuk.

1040. Az

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 3a_1 - a_0,$$

$$a_3 = 4a_2 - 2a_1,$$

$$a_4 = 5a_3 - 3a_2,$$

...

$$a_n = (n+1)a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}$$

egyenleteket összeadva $a_n + a_0 = n \cdot a_{n-1} + 2 - a_0$, innen $a_n = n \cdot a_{n-1}$. Az expli-
 cit alak $a_n = n!$, $a_{2005} = 2005!$.

1041. a) Az $l_n = l_{n-1} + l_{n-2} + l_{n-3}$, $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}^+$; $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 4$ rekurzió írja le a folyamatot. Eredmény: $l_{10} = 274$.

b) Jelöljük h_n -nel a 6. lépcsőt kihagyó utak számát. Ekkor $h_n = l_n$, ha $n < 6$; $h_6 = 0$; majd h_7 -től kezdve ismét alkalmazhatjuk a $h_n = h_{n-1} + h_{n-2} + h_{n-3}$ rekurziót. Eredmény: $h_{10} = 106$.

1042. Egyrészt elképzelhető, hogy adott n esetén H_n nem állandó; esetleg a kapott háromszögek száma attól is függ, hogy hogyan kötöttük össze a pontokat egymással.

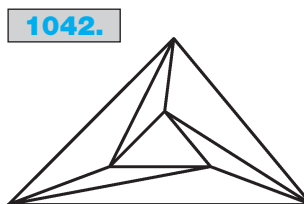
Másrészt nem biztos, hogy a rekurziós lépést megengedik a geometriai feltételek. Az ábrán látható elrendezésre az idézett megoldás nem alkalmazható (bár helyes eredményt kapunk).

Ugyanígy hibás a rekurzióval rokon teljes indukció elvén alapuló megoldás is. *Második megoldás* (helyes):

Tegyük fel, hogy a háromszög belsejében n pontot vettünk fel és h darab háromszöget kaptunk. A háromszögek belső szögösszege $h \cdot 180^\circ$. Ezt a szögösszeget két részből kapjuk meg: egyrészt az n pont körüli teljes szögekből, $n \cdot 360^\circ$, másrészt az eredeti háromszög három szögéből, ami 180° -ot ad. Innen $h \cdot 180^\circ = n \cdot 360^\circ + 180^\circ$, $h = 2n + 1$, vagyis a háromszögek száma valóban páratlan.

A megoldásból az is következik, hogy H_n állandó.

Hasonló megoldást kapunk, ha a szakaszok számát tekintjük ismeretlennek, vagy ha közvetlenül alkalmazzuk az Euler-féle poliédertétel síkbeli változatát.



1042.

IV

1043. Megmutatható, hogy az explicit alak $a_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$, így a_{200} értékére

egy 0-hoz nagyon közeli (pozitív) számot várnánk. *A valóságban azonban teljesen más történik*; egy bizonyos idő után egyre nagyobb abszolútértékű számokat kapunk. Egy konkrét futtatási eredmény $a_{186} \approx -1,33 \cdot 10^{26}$ értéket ad, majd túlsordulás lép fel, a program futása megszakad.

Ennek az az oka, hogy a gépi számhalmaz több tulajdonságában eltér a valós számok halmazától. Néhány érdekesség ezek közül: a számhalmaz korlátos; a gép csak racionális számokat tud tárolni (véges sok helyiértéken); a gép értelmezésében létezik legkisebb abszolút értékű pozitív szám; az összeadás nem asszociatív művelet stb.

Ebben a konkrét esetben a_1 irracionális, ezért az értékét a gép pontatlanul tárolja. Ha a tárolt értéket $a_1 + \varepsilon$ -nal jelöljük, akkor a gép által számított értékek a_0 , $a_1 + \varepsilon$, $a_2 + \varepsilon$, $a_3 + 2\varepsilon$, $a_4 + 3\varepsilon$, stb., vagyis az ε , ε , 2ε , 3ε , 5ε ... hibák Fibonacci-szerű sorozatot alkotnak, s értékük tetszőlegesen nagyra nőhet.

Megjegyzés:

A tapasztalt hiba *elvi hiba*, tehát nem küszöbölhető ki; ugyanígy megjelenik akkor is, ha pontosabb (nagyobb tartományú) gépi számhalmazzal dolgozunk, legfeljebb nem a 186. tag környékén, hanem később.

IV

1044. a) A sorozatok néhány tagja:

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	3	9	19	33	51
b_n	1	3	5	7	9	11

A $b_n = b_{n-1} + 2$, $b_1 = 1$ rekurzió megoldása $b_n = 2n - 1$.

Az $a_n = a_{n-1} + 2 \cdot (2n - 3)$ rekurzió megoldása

$$a_n = 1 + 4 \cdot (2 + 3 + \dots + n) - 6 \cdot (n - 1) = 2n^2 - 4n + 3.$$

$$a_{100} = 19\,603, \quad b_{100} = 199.$$

b) A sorozatok néhány tagja:

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	3	9	21	41	71
b_n	1	3	6	10	15	21

A $b_n = b_{n-1} + n$, $b_1 = 1$ rekurzió megoldása $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Az $a_n = a_{n-1} + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = a_{n-1} + n^2 - n$ rekurzió megoldása

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (2 + 3 + \dots + n) = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^3 - n + 3}{3}. \end{aligned}$$

$$a_{100} = 333\,301, \quad b_{100} = 5050.$$

c) A sorozatok néhány tagja:

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	3	7	17	41	99
b_n	1	2	5	12	29	70

A $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ összefüggésből $a_{n-1} = b_n - b_{n-1}$, ezt visszahelyettesítve az $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$ egyenletbe $b_{n+1} - b_n = b_n - b_{n-1} + 2b_{n-1}$, innen $b_{n+1} = 2b_n + b_{n-1}$. A $q^2 - 2q - 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet két gyöke $1 + \sqrt{2}$ és $1 - \sqrt{2}$. A $b_n = u \cdot (1 + \sqrt{2})^n + v \cdot (1 - \sqrt{2})^n$ explicit alakban u és v a $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ kezdeti feltételekből határozható meg:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad v = -\frac{1}{2\sqrt{2}}; \text{innen}$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^n,$$

$$b_{100} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^{100} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^{100}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Az } a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, a_1 = 1 \text{ rekurzió megoldása } a_n &= 1 + 2 \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^1 + (1 + \sqrt{2})^2 + \dots + (1 + \sqrt{2})^{n-1} \right) - \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} \left((1 - \sqrt{2})^1 + (1 - \sqrt{2})^2 + \dots + (1 - \sqrt{2})^{n-1} \right) = \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1 - \sqrt{2})^n - 1}{-\sqrt{2}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left((1 + \sqrt{2})^n - 1 + (1 - \sqrt{2})^n - 1 \right) = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2}. \\
a_{100} &= \frac{(1 + \sqrt{2})^{100} + (1 - \sqrt{2})^{100}}{2}.
\end{aligned}$$

Megjegyzés:

a_n meghatározásakor eljárhattunk volna úgy is, hogy az $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$ rekurzióból kifejezzük b_{n-1} -et: $b_{n-1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{2}$, s ezt helyettesítjük be b_n rekurzív alakjába. Ekkor a $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ egyenletből $\frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{a_n - a_{n-1}}{2} + a_{n-1}$, innen $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$. Vagyis (a_n) és (b_n) rekurziós hozzárendelése megegyezik, csak a kezdeti értékek mások: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Ezután a „hagyományos” eljárást alkalmazhatjuk: $a_n = u \cdot (1 + \sqrt{2})^n + v \cdot (1 - \sqrt{2})^n$, a kezdeti feltételekből $u = v = \frac{1}{2}$.

1045. a) Az alábbi táblázatban kiszámítottunk néhány kezdőtagot:

n	a_n	b_n	c_n
1	a	b	c
2	$b - c$	$c - a$	$a - b$
3	$b + c - 2a$	$a + c - 2b$	$a + b - 2c$
4	$3(c - b)$	$3(a - c)$	$3(b - a)$
5	$3(2a - b - c)$	$3(2b - a - c)$	$3(2c - a - b)$
6	$9(b - c)$	$9(c - a)$	$9(a - b)$
	...		

Látható, hogy a sorozatok 4. tagja osztható 3-mal, 6. tagja osztható 9-cel stb., és a képzési szabály miatt ez a tulajdonság tovább öröklődik. Mivel a_{2004} , b_{2004} , c_{2004} osztható 3^{1001} -nel, egyik tag sem lehet 2004.

IV

b) Ha $n = 2k$ alakú ($k \in \mathbb{N}^+$), akkor

$$a_n = (b - c)(-3)^{k-1}; b_n = (c - a)(-3)^{k-1}; c_n = (a - b)(-3)^{k-1}.$$

Ha $n = 2k + 1$ alakú, akkor $a_n = (b + c - 2a)(-3)^{k-1};$

$$b_n = (a + c - 2b)(-3)^{k-1}; c_n = (a + b - 2c)(-3)^{k-1}.$$

1046. Jelölje s_{n-1} a megfelelő $(n - 1)$ hosszú színezéseket (a szomszédos pontok mellett A_1 és A_{n-1} is különböző színű, $n \in \mathbb{N}^+$)! Ekkor az $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ pontok utáni A_n felvételekor két lehetőség van.

Ha A_1 és A_{n-1} különböző színű, akkor A_n a maradék 98 szín bármelyike lehet, s A_n mindegyik színezéséhez annyi megfelelő n hosszú színezés lehetséges, ahányféleképpen $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ színezhető volt; vagyis $98s_{n-1}$.

Ha A_1 és A_{n-1} azonos színű, akkor A_n 99-féle lehet, s mindegyik színezéséhez az $A_1, A_2, \dots, A_{n-2}$ pontokat kell helyesen színezni; ez összesen $98s_{n-2}$ lehetőség. Innen az $s_1 = 0, s_2 = 100 \cdot 99, s_n = 98s_{n-1} + 99s_{n-2}$ ($n \geq 3$) rekurziót kapjuk. A $q^2 - 98q - 99 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei -1 és 99 , ahonnan a kezdeti feltételeket felhasználva $s_n = 99^n + (-1)^n \cdot 99$. A feladat s_{100} meghatározása, $s_{100} = 99^{100} + 99$.

Megjegyzés:

Az $s_1 = 0$ kezdeti feltétel értelmezése: egyetlen pontot nem lehet kiszínezni úgy, hogy a szomszédos pontok különböző színűek legyenek. Ehelyett alkalmazhatjuk az $s_3 = 100 \cdot 99 \cdot 98$ feltételt is; azonos eredményt kapunk.

Vegyes feladatok

1047. a) Adjuk össze az alábbi egyenleteket:

$$(1 + 1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1;$$

$$(2 + 1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1;$$

$$(3 + 1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1;$$

...

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

$$\text{Innen } (n + 1)^3 = 1^3 + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + \dots + n) + n.$$

$$\text{A műveleteket elvégezve } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Megjegyzés:

Ezzel a módszerrel a további hatványösszegek is meghatározhatók. A köbszámok összegének meghatározásához az $(i + 1)^4$ hatványokat összegezzük ($i = 1, 2, \dots, n$), a negyedik hatványok összegéhez az $(i + 1)^5$ hatványokból indulhatunk ki stb.

$$\begin{aligned} \text{b) Egy további módszer: Az } \frac{1^3}{1} = 1, \frac{1^3 + 2^3}{1 + 2} = 3, \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{1 + 2 + 3} = 6, \\ \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{1 + 2 + 3 + 4} = 10 \text{ stb. összefüggésekből az } \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{1 + 2 + \dots + n} = \end{aligned}$$

$= 1 + 2 + \dots + n$ azonosságot sejtethjük meg, amelyet teljes indukcióval igazolhatunk. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

Ugyanígy megsejtethjük a fenti azonosságot az $1^3 = 1^2$, $1^3 + 2^3 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$ stb. összefüggésekből is.

1048. a) $\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$; b) $\frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{6} - \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 10\,164$;
c) $\left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 = 3025$; d) $\left(\frac{13 \cdot 14}{2} \right)^2 - \left(\frac{4 \cdot 5}{2} \right)^2 = 8181$.

IV

Megjegyzés:

Ha kellően türelmesek vagyunk, a feladat természetesen egy megfelelő zseb-számológép alkalmazásával is megoldható.

1049 a) Az i . tag $(2i-1)^2 = 4i^2 - 4i + 1$, a keresett összeg alkalmas csoportosítással $4 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) - 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (1 + 1 + 1 + \dots + 1) = \frac{4k(k+1)(2k+1)}{3} - \frac{4k(k+1)}{2} + k = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} - \frac{6k(k+1)}{3} + \frac{3k}{3} = \frac{4k^3 + 6k^2 + 2k - 6k^2 - 6k + 3k}{3} = \frac{4k^3 - k}{3}$.

b) Az a) feladat megoldása alapján

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 33^2 - (1^2 + 3^2 + 5^2) = \frac{4 \cdot 17^3 - 17}{3} - \frac{4 \cdot 3^3 - 3}{3} = 6510.$$

c) Az i . tag $(4i-1)^2 = 16i^2 - 8i + 1$, a keresett összeg alkalmas csoportosítással $16 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) - 8 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (1 + 1 + 1 + \dots + 1) = \frac{16k(k+1)(2k+1)}{3} - \frac{8k(k+1)}{2} + k = \frac{8k(k+1)(2k+1)}{3} - \frac{12k(k+1)}{3} + \frac{3k}{3} = \frac{16k^3 + 24k^2 + 8k - 12k^2 - 12k + 3k}{3} = \frac{16k^3 + 12k^2 - k}{3}$.

d) $(2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 + \dots + (2 \cdot 17)^2 = 4 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 17^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2)) = 4 \cdot \left(\frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{6} - \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \right) = 7084$.

IV

e) Az i . tag $(2i-1)^3 = 8i^3 - 12i^2 + 6i - 1$, a keresett összeg alkalmas csoportosítással $8 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3) - 12 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + k) - (1 + 1 + 1 + \dots + 1) =$

$$= \frac{8k^2(k+1)^2}{4} - \frac{12k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6k(k+1)}{2} - k =$$

$$= 2k^4 + 4k^3 + 2k^2 - 4k^3 - 6k^2 - 2k + 3k^2 + 3k - k = 2k^4 - k^2.$$

f) Az i . tag $(3i+2)^3 = 27i^3 + 54i^2 + 36i + 8$ (itt $i = 1, 2, 3, \dots, k$; $k = 7$). A keresett összeg alkalmas csoportosítással $27 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3) + 54 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) + 36 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (8 + 8 + 8 + \dots + 8) =$

$$= \frac{27k^2(k+1)^2}{4} + \frac{54k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{36k(k+1)}{2} + 8k =$$

$$= \frac{27k^4 + 54k^3 + 27k^2 + 72k^3 + 108k^2 + 36k + 72k^2 + 72k + 32k}{4} =$$

$$= \frac{27k^4 + 126k^3 + 207k^2 + 140k}{4}; k = 7 \text{ helyettesítéssel } 29\,792.$$

Megjegyzés:

A $b), d), f)$ esetekben persze használhatunk zsebszámológépet is.

1050. a) Átcsoportosítjuk az összeadandókat:

$$S_a = \left(\frac{1}{2005} + \frac{2}{2005} + \dots + \frac{2004}{2005} \right) + \left(\frac{1}{2004} + \frac{2}{2004} + \dots + \frac{2003}{2004} \right) +$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} = \frac{2004}{2} + \frac{2003}{2} + \dots + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1\,004\,505.$$

b) Gyöktelenítsük a nevezőt:

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k},$$

így $S_b = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} - 1$
 $(k \in \mathbb{N}^+).$

c) Parciális törtekre bonthatunk: $\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$

Átalakítások után $S_c = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$

d) $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right).$

$$S_d = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$$

e) Az $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2}$ azonosságból
 $A = C = \frac{1}{2}$, $B = -1$, így $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$.
 Bontsuk három részre az összeget!
 $S_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot n}$; $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1}$;
 $S_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2 \cdot (n+2)}$, s ekkor $S_e = S_1 - S_2 + S_3$.
 Mivel $\frac{1}{2 \cdot i} + \frac{1}{2 \cdot i} = \frac{1}{i}$, a megmaradó tagok S_1 -ből $\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2}$,
 S_3 -ból $\frac{1}{2 \cdot (n+1)} + \frac{1}{2 \cdot (n+2)}$, S_2 -ből $\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} +$
 $+\frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2 \cdot (n+1)} + \frac{1}{2 \cdot (n+2)} =$
 $= \frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot (n+1)} + \frac{1}{2 \cdot (n+2)} =$
 $= \frac{(n+1)(n+2) - 2(n+2) + 2(n+1)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n}{4(n+1)(n+2)}.$

1051. Gyöktelenítés után a bal oldal

$$(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{n} - 1,$$

innen $n = 100$.

1052. a) Alkalmazhatjuk az egyszerű, írásos összeadást.

Az utolsó (egyes) helyiértéken az összeg 70; S_a utolsó jegye 0, maradt 7 átvitel.

A tízesek helyiértékén a számjegyek összege 63, a 7 átvittel együtt 70. S_a utolsó előtti jegye 0, maradt 7.

Hasonlóan folytatva százask helyén $56 + 7 = 63$ az összeg; S_a -ban a számjegy 3, maradt 6 és így tovább. A kapott szám 8 641 975 300.

b) Egy másik megoldási lehetőséget kapunk, ha külön-külön felírjuk a

$$\underbrace{33\dots3}_{k\text{-szor}} \text{ típusú tagokat. Pl. } 3 = \frac{10^1 - 1}{3}, 33 = \frac{10^2 - 1}{3}, 333 = \frac{10^3 - 1}{3}$$

$$\text{és így tovább, } \underbrace{33\dots3}_{k\text{-szor}} = \frac{10^k - 1}{3}.$$

$$\text{Innen } S_b = \frac{10^1 - 1}{3} + \frac{10^2 - 1}{3} + \dots + \frac{10^n - 1}{3} = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{9 \cdot 3}.$$

$$c) S_c = \frac{a}{9} (10^1 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) =$$

$$\frac{a}{9} \left(\frac{10}{9} \cdot (10^n - 1) - n \right) = \frac{10a(10^n - 1) - 9an}{81}.$$

1053. $N = \underbrace{11\dots1}_{2005\text{-szor}} 0 - 2005 = 11\dots109\,105$, ebben a számban 2002 darab 1-es számjegy van.

1054. Sejtés, hogy az n . sor ($n \in \mathbb{N}^+$) művelete: $\underbrace{11\dots1}_{2n\text{-szer}} - \underbrace{22\dots2}_{n\text{-szer}} = \underbrace{33\dots3}_{n\text{-szer}} \cdot \underbrace{33\dots3}_{n\text{-szer}}$.

Jelöljük az n darab 1-esből álló számot A -val; ekkor a bizonyítandó egyenlet $(10^n + 1)A - 2A = 3A \cdot 3A$. Innen ekvivalens átalakításokkal $(10^n - 1)A = 9A^2$, $10^n - 1 = 9A$, s ez valóban teljesül.

IV

1055. Sejtés, hogy a kezdőszámok 3, 10, 21, 36, ... olyan sorozatot alkotnak, amelyben a szomszédos tagok különbsége 4-esével nő. Ekkor az n . sor ($n \in \mathbb{N}^+$) kezdőszáma $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = \frac{(3 + 4n - 1)n}{2} = n(2n + 1)$, a bizonyítandó állítás:

$$\begin{aligned} & (n(2n + 1))^2 + (n(2n + 1) + 1)^2 + (n(2n + 1) + 2)^2 + \dots + (n(2n + 1) + n)^2 = \\ & = (n(2n + 1) + n + 1)^2 + (n(2n + 1) + n + 2)^2 + \dots + (n(2n + 1) + n + n)^2. \end{aligned}$$

A bal oldal $(n + 1)n^2(2n + 1)^2 + 2n(2n + 1)(1 + 2 + \dots + n) + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. A jobb oldal $nm^2(2n + 1)^2 + 2n(2n + 1)(n + 1 + n + 2 + \dots + n + n) + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \dots + (n + n)^2$. Be kell látnunk, hogy $n^2(2n + 1)^2 = 2n(2n + 1)n^2 + nm^2 + 2n(1 + 2 + \dots + n)$. Innen belátandó $n^2(2n + 1) = nm^2 + 2n(1 + 2 + \dots + n)$, s ez teljesül.

Az ötödik sor: $55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$.

1056. Ha a zárt alakra valamilyen sejtéssel rendelkezünk, mindig alkalmazhatunk teljes indukciót; egyébként az általános tagot kell összegeznünk.

a) Az i . tag $i(i + 1) = i^2 + i$, a keresett összeg

$$\begin{aligned} & (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ & = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}. \end{aligned}$$

b) Az i . tag $i(i + 2) = i^2 + 2i$, a keresett összeg

$$\begin{aligned} & (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ & = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(2n + 7)}{6}. \end{aligned}$$

c) Az i . tag $i(i + 3) = i^2 + 3i$, a keresett összeg

$$\begin{aligned} & (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ & = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{3n(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)(n + 5)}{3}. \end{aligned}$$

d) Az i . tag $i(n + 1 - i) = -i^2 + (n + 1)i$, a keresett összeg

$$\begin{aligned} & -(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (n + 1)(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ & = -\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{n(n + 1)^2}{2} = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}. \end{aligned}$$

e) *Első megoldás:* Az i . tag $(n+1-i)(2i-1) = -2i^2 + (2n+3)i - n - 1$, a keresett összeg

$$\begin{aligned} & -2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (2n+3)(1+2+3+\dots+n) - n(n+1) = \\ & = -\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)(2n+3)}{6} - \frac{6n(n+1)}{6} = \\ & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Második megoldás: Írjuk fel tagonként az egyes összegeket!

$$\begin{array}{ll} 1+1+\dots+1+1+1+1 & (n\text{-szer}); \\ 3+3+\dots+3+3+3 & ((n-1)\text{-szer}); \\ 5+5+\dots+5+5 & ((n-2)\text{-szer}); \\ \dots & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (2n-3)+(2n-3) & (2\text{-szer}); \\ (2n-1) & (1\text{-szer}). \end{array}$$

Függőlegesen összeadva az egyes oszlopokban szereplő számokat az első n darab, majd az első $(n-1)$ darab, ... páratlan szám összegét kapjuk, ami rendre n^2 , $(n-1)^2$, ... 1^2 .

f) $\frac{n(n+1)(3n-2n-1)}{6}$. A fenti módszereken kívül bizonyíthatunk teljes indukcióval is.

1057. a) Az i . tag $i(i+1)(i+2) = i^3 + 3i^2 + 2i$, a keresett összeg $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) =$

$$\begin{aligned} & = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2} = \\ & = \frac{n(n+1)(n^2+n+4n+2+4)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}. \end{aligned}$$

b) Az i . tag $i(i+2)(i+4) = i^3 + 6i^2 + 8i$, a keresett összeg $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 8(1 + 2 + 3 + \dots + n) =$

$$\begin{aligned} & = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8n(n+1)}{2} = \\ & = \frac{n(n+1)(n^2+n+8n+4+16)}{4} = \frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4}. \end{aligned}$$

c) Pótoljuk ki az összeget $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ -tel és önmagával, ekkor $(1+2+3+\dots+n)^2$ -t kapjuk. A keresett összeg kétszerese

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ az összeg}$$

$$\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}.$$

IV

1058. a) $S_a = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n+3}} \right) = 8 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+4}}}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+4}} \right).$

b) $S_b = \frac{3^{2n+1} + 1}{4}.$

c) Az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot az összeg két-két szomszédos tagjára alkalmazva $S_c = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 = 5050.$

1059. Az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot az összeg két-két szomszédos tagjára alkalmazva $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2n = n(2n+1).$ Csak az $n = 1$ esetben kapunk prímszámot, ekkor $S = 3.$

1060. Tekintsük a $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99}$ szorzatot! Egyrészt $A < B$ (pl. tényezőnként összehasonlítva), másrészt $AB = 0,01.$ Mivel $A^2 < AB$, az $A < 0,1$ állítás valóban igaz.

1061. Bizonyíthatunk teljes indukcióval; vagy egymás után többször alkalmazhatjuk az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ azonosságot.

Szorozzuk be a bal oldalt $(2-1) = 1$ -gyel! $(2-1) \cdot (2+1) = 2^2 - 1$; ezzel szorozva a második tényezőt, $(2^2-1)(1+2^2) = 2^4 - 1$; tovább folytatva $(2^4-1)(1+2^4) = 2^{16} - 1$ és így tovább.

1062. a) $\left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{9} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{400} \right) =$
 $= \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{20} \right) \left(1 + \frac{1}{20} \right) =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{21}{20} = \frac{21}{2 \cdot 20} = \frac{21}{40}.$
 (Egyszerűsítés után az első tört nevezője és az utolsó tört marad meg.)

b) $\frac{n+1}{2n}.$

1063. a) Szorozzuk meg mindkét oldalt $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 50$ -nel. A bal oldal értéke 100. lesz, a jobb oldalon pedig $2^{50} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 50 = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100$ miatt szintén ugyanezt kapjuk.

b) Szorozzuk meg mindkét oldalt $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ -nel.

1064. A 2 kitevői rendre $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{16}, \dots, \frac{n}{2^{n+1}}.$ Ezek S összegét részösszegekre bonthatjuk:

$$S_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}};$$

$$S_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}};$$

$$S_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}};$$

...

$$S_n = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Az egyes összegek:

$$S_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1};$$

$$S_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1};$$

$$S_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1};$$

...

$$S_n = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$\text{Ezek összege } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{n+2}{2}\right) \cdot \frac{1}{2^n}. \text{ Vagyis a szorzatban ennyi a } 2 \text{ kitevője.}$$

1065. a) Pl. $a_n = 2n - 1$ és $b_n = 2n$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

b) Nincsenek ilyen sorozatok. Mindkét sorozat különbsége, d_1 és d_2 , pozitív egész szám. Ha a közös elem x , akkor a feltétel szerint az $x + kd_1 = x + nd_2$ egyenlet ($k, n \in \mathbb{N}$) csak $k = n = 0$ esetén teljesülhetne. Azonban a $\frac{d_1}{d_2} = \frac{n}{k}$ egyenletnek végtelen sok megoldása van

IV

a pozitív egész számok halmazán, vagyis ha két szigorúan monoton növekvő, természetes számokból álló számtani sorozatnak van közös eleme, akkor végtelen sok közös elemük is van.

1066. a) Van, pl. 2, 5, 8, ... (Négyzetszám nem adhat 3-mal osztva 2 maradékot.)

b) Van, pl. 2, 6, 10, ...

c) Nincs. A sorozat differenciája csak pozitív egész szám lehet; ha $a_1 = p$ prím, akkor pl. $a_{p+1} = a_1 + pd$ összetett szám.

1067. a) Nincs ilyen sorozat. A sorozat differenciája pozitív egész szám, s ha pl. az első tag prím, $a_1 = p$, akkor az a_{p+1} , a_{2p+1} , a_{3p+1} stb. tagok különböznek és mindegyik p többszöröse.

b) Ha valamely két szomszédos tagnak van 1-nél nagyobb közös osztója, akkor ez osztja a két tag különbségét, a sorozat differenciáját is. Megfelelő sorozat pl. $a_n = 2n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

c) Nem lehetséges. Ha pl. $a_k = m > 1$, akkor $a_{m+k} = m + md = m(1 + d)$, mindkét tag osztható m -mel.

1068. Pl. $a_n = 6n + 5$, $n \in \mathbb{N}^+$.

1069. a) Pl. $a_n = \sqrt{2}^n$.

b) Nincs ilyen sorozat. A sorozat nem állandó, így végtelen sok racionális tagja lenne, de az ezekre következő tagok irracionálisak.

1070. a) $10^5 \cdot 0,92^{20} = 18\,869,3$ (Pa).

b) $10^5 \cdot 0,92^n \approx 100$, innen $n \approx 83$.

1071. Ha a 3 él hossza $6 - b$, 6 , $6 + b$, akkor $6(6 - b)(6 + b) = 192$, s innen $b = \pm 2$. A 3 él hossza 4 cm, 6 cm, 8 cm, a téglatest felszíne $2(4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 8) = 208$ (cm²).

1072. Ha az $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ szögek számtani sorozatot alkotnak, akkor $\beta = 60^\circ$.

a) A három szög 20° , 60° , 100° , a legnagyobb és a legkisebb oldal aránya a szinusz-tétel alapján $\frac{\sin 100^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 2,88$.

b) Nincs ilyen háromszög.

1073. Legyen a három oldal hossza $10 - d$, 10 , $10 + d$, ekkor $(10 - d)(10 + d) = 96$. Innen $d = \pm 2$, az oldalak hossza 8, 10, 12 (cm), és a Héron-képlet alapján a háromszög területe $t = \sqrt{15 \cdot (15 - 8)(15 - 10)(15 - 12)} \approx 39,69$ (cm²).

1074. $\frac{(1 + n^2)n^2}{2n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$. Az összes szám összegének n -ed része a bővítés állandó.

1075. Ha a sakkversenyen n versenyző szerepelt, akkor a végső pontszámok 3,5; 4; 4,5; ... ; $3 + 0,5n$. Összesen $\frac{n(n-1)}{2}$ játszmára került sor, s összesen ennyi pontot szereztek a játékosok. Innen $3,5 + 4 + 4,5 + \dots + (3 + 0,5n) = \frac{n(n-1)}{2}$, vagyis $\frac{n(6,5 + 0,5n)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, ahonnan $n = 15$. A győztesnek 10,5 pontja volt.

1076. Nem. Ha a sorozat különbségét d -vel jelöljük, a $\sqrt{3} = \sqrt{2} + kd$ és a $\sqrt{5} = \sqrt{2} + md$ ($k, m \in \mathbb{N}^+$) egyenletekből $\frac{m}{k} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ lenne, de a jobb oldalon álló tört irracionális. Ennek bizonyítása:

Tegyük fel, hogy $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = r$ racionális. Átrendezve az egyenletet $\sqrt{2}(1-r) = \sqrt{5} - r\sqrt{3}$, innen $2r\sqrt{15} = 3r^2 + 5 - 2(1-r)^2$. Ellentmondást kaptunk: a bal oldalon irracionális, a jobb oldalon racionális szám szerepel.

1077. Nem lehetséges. Ha a sorozat hányadosa q , akkor $\sqrt{3} = \sqrt{2}q^n$ és $\sqrt{5} = \sqrt{2}q^m$ ($m, n \in \mathbb{N}^+$). Innen $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, átalakítva $3^m 2^n = 5^n 2^m$. Ellentmondást kaptunk a számelmélet alaptételével. (Pl. a bal oldal osztható 3-mal, a jobb oldal nem.)

1078. Legyen a kezdő szám $k+1$, és n tagú az összeg ($k, n \in \mathbb{N}^+$, $n > 1$)! Ekkor $(k+1) + (k+2) + \dots + (k+n) = nk + \frac{n(n+1)}{2}$, s tegyük fel, hogy az összeg egyenlő 2^m -nel ($m \in \mathbb{N}^+$).

Innen $nk + \frac{n(n+1)}{2} = 2^m$, $2nk + n(n+1) = 2^{m+1}$.

Az $n(2k+n+1) = 2^{m+1}$ egyenlet ellentmondásra vezet: a bal oldalon valamilyen tényező 1-nél nagyobb páratlan szám, míg a jobb oldalon lévő 2^{m+1} -nek nincs 1-nél nagyobb páratlan osztója. Vagyis 2^m nem állítható elő szomszédos természetes számok összegeként, s így az 1024 sem.

1079. Mivel $\cos x > 0$, a $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$, illetve $\sin x = \pm \cos x$ átalakítás után csak az $x = \pm \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ gyök ad megoldást.

1080. Jelöljük a három él hosszúságát $a \leq b \leq c$ -vel; ekkor (1) $ac = b^2$ és (2) $ab + ac = 2bc$. (Két egyenletünk van és három ismeretlen, de a megfelelő téglatestek hasonlósága miatt az egyik ismeretlen szabadon választható.) Kiküszö-

bölve az egyenletekből a -t, $\frac{b^3}{c} + b^2 = 2bc$ adódik. Mivel $b \neq 0$, $b^2 + bc - 2c^2 = 0$.

A b -ben másodfokú egyenlet (pozitív) megoldása $b = c$, tehát egyetlen megfelelő téglatest adódik, a kocka.

1081. a) 2005.

b) π ; $\sqrt{10}$.

Ha a sorozatnak tagja lenne a π , akkor $\pi - 3 = kd$ és $5 - \pi = md$ lenne (ahol d a sorozat differenciája és $k, m \in \mathbb{N}^+$). Innen

$2 = d(k+m)$, $d = \frac{2}{k+m}$ racionális szám, s ez ellentmondás.

($3 + kd$ nem lehet irracionális.) A bizonyítás π helyett tetszőleges irracionális számra ugyanígy elmondható, tehát ha egy nem állandó számtani sorozatnak két tagja racionális, akkor minden tagja az (hiszen a differencia is racionális).

1082. a) $\frac{5^{100}}{3^{99}}$.

b) $\pi; \sqrt{10}; 4$.

IV

Ha $3 < x < 5$ szerepelne a sorozatban, akkor $x = 3 \cdot \sqrt[n]{\frac{5}{3}}$ alakban

lenne írható ($m, n \in \mathbb{N}^+$), de a π , $\sqrt{10}$ és 4 nem ilyenek.

1083. Jelöljük a sorozat második tagját a -val és különbségét d -vel. Ekkor

(1) $a - d + a = (a - d)a$,

(2) $a - d + a + a + d = (a - d)a(a + d)$.

Ha $a = 0$, akkor (1)-ből $d = 0$, s ez nem lehetséges. (2)-ből $3 = a^2 - d^2$, (1)-ből $d(a - 1) = a^2 - 2a$. $a = 1$ nem lehetséges; ez utóbbi egyenletet négyzetre emelve s (2)-t felhasználva $(a^2 - 3)(a - 1)^2 = a^2(a - 2)^2$. Innen $2a^3 - 6a^2 + 6a - 3 = 0$,

átalakítva $2(a - 1)^3 = 1$. Tehát $a = \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$, s (3)-ból $d^2 = a^2 - 3 =$

$$= \frac{1 + \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{4} + 1}{\sqrt[3]{4}} = \left(\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2. \text{ Ha } d = \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{2}},$$

akkor a sorozat tagjai $\frac{2 + \sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}, 1 + \sqrt[3]{2}, \frac{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}},$

összegük $\frac{4 + 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}$; ha $d = -\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{2}}$, akkor a sorozat tagjai $1 + \sqrt[3]{2},$

$\frac{1 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}, \frac{2 + \sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3 + \sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}},$ összegük $\frac{6 + 4\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}.$

1084. a) A 100, 103, ..., 997 sorozatban $\frac{997 - 100}{3} + 1 = 300$ szám van.

(Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha észrevesszük, hogy a 900 darab háromjegyű természetes szám közül minden harmadik osztható 3-mal.)

b) 180.

c) A legkisebb megfelelő természetes szám a 7. A 3-mal osztva 1 maradékot adó számok hármásával nőnek; az 5-tel osztva 2 maradékot adó számok ötösével. 3 és 5 legkisebb közös többszöröse 15, így a keresett számok 15-tel osztva 7 maradékot adnak, vagyis a 7, 22, 37, ... számtani sorozat tagjai. Ezek közül a legkisebb háromjegyű 112, a legnagyobb 997; összesen 60 darab háromjegyű van. (A 900 darab háromjegyű szám közül minden 15-ik.)

1085. A 3-mal osztva 2 és 7-tel osztva 3 maradékot adó természetes számok közül a legkisebb a 17. $[3, 7] = 21$, a keresett számok a 17, 38, 59, ... számtani sorozat tagjai. Közülük háromjegyűek: 101, 122, ... , 983 ($= 101 + 42 \cdot 21$). 43 darab megfelelő szám van.

1086. Ha $a_n = b_k$, akkor $3n - 1 = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}^+$). Az $n = k + 1 + \frac{2k+1}{3}$ átalakítás után $k = 3m + 1$ alakú szám lehet csak ($m \in \mathbb{N}$), s ekkor $n = 5m + 3$. (Ellenőrizzünk: $3(5m + 3) = 5(3m + 1) + 4$ valóban.) Az alábbi táblázatból kiolvashatjuk a 15-ösével növekvő közös tagokat:

m	0	1	2	3	...	32
$k = 3m + 1$	1	4	7	10		97
$n = 5m + 3$	3	8	13	18		163
$b_k = 5k + 3$	8	23	38	53		488
$a_n = 3n - 1$	8	23	38	53		488

Összesen 33 darab 500-nál kisebb közös tagja van a két sorozatnak.

1087. Az $a_n = 9n - 7$, $b_n = 8n - 1$ és $c_n = 11n - 3$ számtani sorozatok közös tagjait keressük ($n \in \mathbb{N}^+$). Az $a_k = c_n$ diofantikus egyenletből $9k - 7 = 11n - 3$,

$k = n + 2 \cdot \frac{n+2}{9}$. Mivel $\frac{n+2}{9} = m$ egész szám, $n = 9m - 2$ ($m \in \mathbb{N}^+$), s ekkor $k = 11m - 2$ alakú szám lehet csak. Az (a_k) és (c_n) sorozatok közös tagjai $d_m = 99m - 25$ alakúak: 74, 173, 272, ... A (b_n) és (d_m) sorozatok közös tagjait hasonlóan határozhatjuk meg: $8n - 1 = 99m - 25$, $8n = 99m - 24$, vagyis $m = 8z$ alakú ($z \in \mathbb{N}^+$). A közös tagok tehát $792z - 25$ alakban írhatók: 767, 1559, 2351, 3143, 3935, ... , s az utolsó három felel meg a feladat feltételeinek.

1088. Mivel $2x = 3y + 11$ páros, ezért y csak páratlan szám lehet. Alkalmazzuk az $y = 2k + 1$ helyettesítést! Ekkor $x = \frac{3y+11}{2} = 3k + 7$. Az alábbi táblázatban a T tartományba eső nyolc rácspontot tüntettük fel:

k	7	8	9	10	11	12	13	14
$x = 3k + 7$	28	31	34	37	40	43	46	49
$y = 2k + 1$	15	17	19	21	23	25	27	29

1089. Látható, hogy $n = 1$ megoldás; valamint az $S = 2^n - 1 = k^m$ egyenletben ($k, m > 1$ egész számok) k csak páratlan szám lehet, pl. $k = 2t + 1$ ($t \in \mathbb{N}$).

Ha $n > 1$, akkor az $S = 2^n - 1 = k^m$ egyenletet két részben vizsgáljuk.

Legyen először m páros, tehát $m = 2s$ ($s \in \mathbb{N}$). Ekkor az egyenlet $(2t + 1)^{2s} + 1 = 2^n$ alakú, s mivel a bal oldal 4-gyel osztva 2 maradékot ad, míg a jobb oldal 4-gyel osztható, ellentmondást kaptunk.

Ha m páratlan, vagyis $m = 2s + 1$, akkor az egyenlet $k^{2s+1} + 1 = 2^n$ alakú. A bal oldal szorzattá alakítható: $k^{2s+1} + 1^{2s+1} = (k + 1)(k^{2s} - k^{2s-1} + k^{2s-2} - \dots + k^2 - k + 1)$, s itt könnyen látható, hogy a második tényező 1-nél nagyobb páratlan szám, míg az eredeti egyenlet jobb oldala csak kettőhatványokkal osztható.

Vagyis az $n = 1$ az egyetlen megoldás.

IV

1090. Ha a sorozat különbsége $d = 0$, az állítás teljesül. Egyébként az i . tagra

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_i a_{i+1}} &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right), \text{ ezért } \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \\ &= \frac{1}{d} \cdot \frac{(n-1)d}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}. \end{aligned}$$

1091. Jelöljük az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok átlagát z -vel. Ekkor $\frac{1}{a_i a_{n-i+1}} = \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{n-i+1}} \right) \frac{1}{2z}$, ezért a bal oldal $\frac{1}{2z} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$, s mivel $\frac{a_1 + a_n}{2} = z$, a két oldal valóban egyenlő.

1092. Ha a sorozat első tagja n , akkor a továbbiak $\frac{3}{2}n, \frac{9}{4}n, \frac{27}{8}n, \frac{81}{16}n$.

Innen n 16 többszöröse, s ezek közül csak az $n = 16$ megfelelő. (Ha $n \geq 32$, akkor az egymás mellé írás után több mint tízjegyű számot kapunk.) Az első öt tag 16, 24, 36, 54, 81.

1093. *Első megoldás:* Az $a_i = a_{i-1} + i^2$ egyenletet írjuk fel $i = 1, 2, 3, \dots, n$ -re, majd adjuk össze az egyenleteket. Innen $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, s ez a tört akkor osztható 5-tel, ha n maradéka 5-tel

osztva 0, 2 vagy 4. A sorozat bármely 5 szomszédos tagja között 3 darab, az első 100 tagja között 60 darab 5-tel osztható szám van.

Második megoldás: Elég a sorozat tagjainak 5-tel vett osztási maradékait vizsgálni. Ezek rendre 1, 0, 4, 0, 0, 1, s mivel n^2 maradéka ötösével ismétlődik, a sorozat képzési szabálya miatt az 1, 0, 4, 0, 0 maradékok periodikusan ismétlődnek.

1094. Az

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \cdot a_1,$$

$$a_3 = \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdot a_2,$$

...

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cdot a_{n-1}$$

$$\text{egyenleteket összeszorozva } a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{n+1}{2n}.$$

$$\text{Az első } n \text{ tag szorzata } \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{2n} = \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!} = \frac{n+1}{2^n}.$$

1095. Jelöljük d -vel a sorozat különbségét, ekkor $a_n + d = pa_n + qa_n - qd$.

Innen $a_n(p + q - 1) = d(q + 1)$.

Ha $p + q - 1 = 0$, akkor két lehetőség adódik: $d = 0$, illetve $q = -1$ (ekkor $p = 2$). Ha $p + q - 1 \neq 0$, akkor $a_n = \frac{d(q + 1)}{p + q - 1}$, s ez állandó.

a) Ekkor $p + q - 1 = 0$, s mivel $d \neq 0$, $p = 2$, $q = -1$.

Az $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ rekurzió átrendezve $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ alakba írható, s ez valóban nem állandó számtani sorozat, ha $a_1 \neq a_2$.

b) Ekkor $d = 0$, $p + q = 1$, $a_1 = a_2 = 0$.

c) Ekkor p és q tetszőleges valós szám lehet, $a_1 = a_2 = 0$.

1096. a) *Első megoldás:* $a_3 = 5$, $a_4 = 9$, $a_5 = 17$ stb. Az $a_n = 2^{n-1} + 1$ sejtést teljes indukcióval igazolhatjuk.

Második megoldás: Az $a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$ átalakításból a $d_n = a_n - a_{n-1}$ különbségsorozat 2 hányadosú mértani sorozat. Innen $a_n = a_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n = 2 + 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-2} = 2^{n-1} + 1$.

Harmadik megoldás: A $q^2 - 3q + 2 = 0$ karakterisztikus egyenlet két gyöke 1 és 2. Az $a_n = u \cdot 1^n + v \cdot 2^n$ explicit alakban u és v az

$a_1 = 2$, $a_2 = 3$ kezdeti feltételekből határozható meg: $u = 1$, $v = \frac{1}{2}$.

b) $2^n + n - 1$.

1097. a) Teljes indukcióval bizonyíthatjuk, hogy $a_n = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}}$
 $\left(= 2^{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \right)$.

b) Az $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ szorzatban 2 kitevője

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = n - 1 + \frac{1}{2^n}.$$

$$\log_2 50\,000 = 15,61, \text{ innen } n - 1 + \frac{1}{2^n} \geq 15,61, \text{ ha } n \geq 17.$$

1098. A feladat az $a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n$ rekurzió explicit alakjának meghatározása az $a_{10} = 2$ és $a_{200} = 3$ feltételekkel. A karakterisztikus egyenlet nem ad valós gyököt, ezért felírjuk a sorozat néhány kezdőtagját: $a; b; -a - b; a; b; -a - b$ stb. A sorozat képzési szabálya miatt az első három tag periodikusan ismétlődik. Mivel $a_1 = 2$ és $a_2 = 3$, $a_3 = a_{333} = -5$.

1099. A legtöbb tartományt akkor kapjuk, ha a síkok általános helyzetűek (függetlenek), vagyis a síkok és metszésvonalaik között nincsenek párhuzamosak; továbbá ha a tér egyetlen egyenesét sem tartalmazza kettőnél több sík, és a tér egyetlen pontján sem halad át háromnál több sík.

Tegyük fel, hogy f_n jelöli az n darab független sík által létrehozott tartományok számát. Az $(n + 1)$. független sík (jelöljük S -sel) a korábbiakból n darab függet-

len egyenest metsz ki (semelyik kettő nem párhuzamos, semelyik ponton sem halad át kettőnél több egyenes). Annyi új térrész keletkezik, ahány részre felosztja S -et az n számú független egyenes. Ha ezt a számot s_n -nel jelöljük, az $f_{n+1} = f_n + s_n$ rekurzív összefüggést írhatjuk fel ($f_0 = 1$ értelemszerűen).

Az $f_i = f_{i-1} + s_{i-1}$ egyenletet írjuk fel $i = 1, 2, 3, \dots, n$ -re, majd adjuk össze az egyenleteket. Innen $f_n = f_0 + s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}$. Korábban már meghatá-

IV

roztuk s_n explicit alakját (1008. feladat): $s_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$, így

$$\begin{aligned} f_n &= 1 + \frac{1}{2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) + \frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) + n = \\ &= 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} + \frac{(n-1)n}{4} + n = \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1+3) + 12n + 12}{12} = \frac{(n-1)n(n+1) + 6n + 6}{6} = \\ &= \frac{n^3 + 5n + 6}{6}. \end{aligned}$$

Megjegyzés:

$s_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$, $f_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ alakban is írható.

1100. a) Végtelen sok. Az $a_k = b_n$ egyenlőségéből $k = n^2 + 2n - 1$ minden n -re. (Vagyis (b_n) részsorozata (a_n) -nek.)

b) Az 236. feladat alapján egyetlen közös tag van: $a_2 = b_1$.

c) Végtelen sok.

d) Végtelen sok.

e) Az $a_k = b_n$ egyenlőségéből $k = \frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$, s ez pozitív egész szám csak $n = 1$ esetben lesz. Egyetlen közös tag van: $a_2 = b_1$.

1101. A kérdés tulajdonképpen az, hogy a 2001, 12 001, 22 001, 32 001, ... sorozatban van-e 17-tel osztható szám.

Első megoldás: Megpróbálhatjuk visszaszorzásos módszerrel megkonstruálni a számot. Az írásban végzett szorzás algoritmusát követve egy

	a	b	c	d	e	f	$\cdot$	1	7
							g	h	i
						j	k	l	
				m	n	o			
+			p	q	r				
			s	t	2	0	0	1	

alakú táblázatban szereplő $a, b, \dots, t$ számjegyeket kell meghatároznunk.

Rögtön adódik $i = 1$, ezért $f = 3$, $h = 5$, $g = 0$. Most $h = 5$ miatt $l = 5$, $e = 5$, $k = 8$, $j = 0$. Tovább folytatva a visszaszorzást (és figyelve az átvitelekre), az alábbi táblázatot kapjuk:

			8	3	5	3	·	1	7
								5	1
							8	5	
						5	1		
+				1	3	6			
				1	4	2	0	0	1

IV

Ez azt jelenti, hogy minden 8353 végű szám 17-szerese 2001-re végződik.

Pl.: $18\,353 \cdot 17 = 312\,001$, $28\,353 \cdot 17 = 482\,001$ stb.

Második megoldás: Az előző megoldásban eredményül kapott 142 001, 312 001, 482 001, 652 001 stb. számokat megfigyelve észrevehetjük, hogy a 2001 előtti számok, 14, 31, 48, 65 stb., 17-tel növekednek. Ez az észrevétel egy másfajta bizonyításra, a skatulyaelv alkalmazására ad alkalmat.

Tekintsük a 2001, 12 001, 22 001, 32 001, ... , 162 001 számokat. Ha ezek között van 17-tel osztható, akkor készen vagyunk (a feladat nem követelte meg, hogy konkrétan meg is adjunk egy ilyen számot).

Ha nincs közöttük 17-tel osztható szám, akkor a lehetséges 1, 2, ... , 16 maradékok közül legalább egy ismétlődik, vagyis két szám ugyanazt a maradékot adja 17-tel osztva. Legyen ez a két szám $\overline{x2001}$ és $\overline{y2001}$ alakú ($x < y$; x lehet 0 is, y legfeljebb 16).

A két szám maradéka azonos, tehát különbségük osztható 17-tel. A különbségük $(y - x)0000$ alakú. Mivel 17 és 10 000 relatív prímek, csak $17 \mid y - x$ lehetséges. Ellentmondásra jutottunk, hiszen x és y a 0, 1, 2, ... , 16 számok valamelyike.

Vagyis található a 2001, 12 001, 22 001, 32 001, ... , 172 001 számok között 17-tel osztható.

1102. a) Igaz; $a_n - a_{n-1} = 2n^2 + 3n + 1 - (2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1) = 4n + 1$ számtani sorozat.

b) Igaz.

c) $a_1 = 3$, $a_5 = 27$. Jelöljük a különbségsorozatot (d_n) -nel ($d_n = a_n - a_{n-1}$), ekkor $a_5 = a_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$. Innen $d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 24$, valamint $3 + 3 + d_2 + 3 + d_2 + d_3 + 3 + d_2 + d_3 + d_4 + 27 = 65$. Mivel (d_n) számtani sorozat, $d_3 = d_2 + d$, $d_4 = d_2 + 2d$ stb. Az egyenletrendszer megoldása $d_2 = 3$, $d = 2$, így a sorozat tagjai 3, 6, 11, 18, 27 (s a különbségsorozat 3, 5, 7, 9 valóban számtani).

1103. Először a feladat b) részét oldjuk meg.

b) Az egyes szinteken $1 \cdot 6, 2 \cdot 7, 3 \cdot 8, \dots, n(n+5)$ darab test van. Ezek együttes száma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + 5(1 + 2 + 3 + \dots + n) =$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{5n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+8)}{3}.$$

a) $n = 10$ helyettesítéssel a testek száma 660.

1104. Jelöljük az első elemet a -val, a másodikat b -vel. Ekkor a sorozat tagjai $a, b, \frac{b}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{b}, a, b, \frac{b}{a}$ stb. (6-os periódus lép fel, hiszen két tagból a harmadik már egyértelműen következik.) Egy perióduson belül a tagok szorzata 1, így az első 40 tag szorzata $\frac{b^2}{a} = 8$, a 80 tag szorzata $ab = 8$. Innen $b = 4, a = 2$.

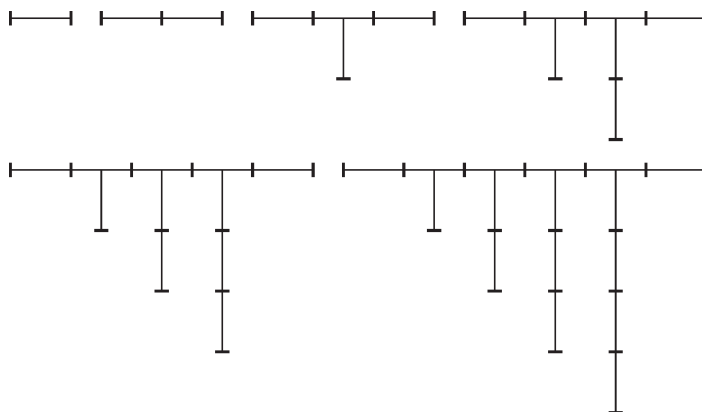
1105. A sorozat néhány kezdőtagja: $a_1 = 1999, a_2 = 364, a_3 = 169, a_4 = 208, a_5 = 130, a_6 = 52, a_7 = 91, a_8 = 130$. A sorozat bármely tagja csak az előtte álló tag értékétől függ, így 3 hosszú ismétlődő periódust kapunk. $a_{2005} = a_7 = 91$.

1106. Kövessük nyomon néhány időegységig a moszat növekedését.

$0 \rightarrow 01 \rightarrow 01(3)2 \rightarrow 01(3)2(32)2 \rightarrow 01(3)2(32)2(322)2 \rightarrow$
 $\rightarrow 01(3)2(32)2(322)2(3222)2$ stb.

Az első hat ábra:

1106.



A növekedést úgy értelmezhetjük, hogy minden időegységben egy új leágazás keletkezik, eggyel nő a moszat „váza”, valamint a már meglévő leágazások hossza is. Magyarozatként többféle lehetőségünk van: észrevehetjük, hogy a sorozat eleje mindig megismétlődik, s csak a $3 \rightarrow 32$ szabály okoz növekedést; vagy vizsgálhatjuk az egyes számjegyek számát. (Egy harmadik módszer a szabályokra vonatkozó indukciós gondolat.)

A moszat hossza ez alapján, 100 növekedést tekintve: $1 + 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5051$ lesz.

Kamatok kamat, járadékszámítás

1107. $\frac{0,7}{1,15} = 0,6087$, azaz 60,87%-a.

1108. 2,5%-kal nőtt.

1109. $2\,800\,000 \cdot \left(1 + 0,07 \cdot \frac{160}{360}\right) = 2\,887\,111$ Ft.

1110. Mivel az 5 hónapra jutó kamat az indulótőke $\frac{27\,450}{36\,600} = 0,075$ -öd része, azaz 7,5%-a, ezért az éves kamatláb ennek a $\frac{12}{5}$ része, tehát 18%.

1111. $50\,000 \cdot 1,12^5 = 88\,117,08 \approx 88\,117$ Ft-ot.

1112. $\frac{500\,000}{1,12^2} = 398\,597$ Ft-ot.

1113. Az osztályon két adjunktus dolgozott. (Jelölje az adjunktusok számát a , akkor $a = 17 - (8 + 1 + 4 + 1 + 1) = 2$.) Mivel az átlagos kifizetés 23 000 Ft, ezért a hiányzó x pénzösszeg a következőképpen határozható meg:
$$\frac{8 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 14\,000 + 4 \cdot 25\,000 + 2 \cdot 31\,000 + 1 \cdot 45\,000 + x}{17} = 23\,000,$$
 ahonnan $x = 90\,000$ forint. Tehát a Professzor Úr 90 000 Ft-ot kapott.

1114. $1,08^n = 2 \Rightarrow n \approx 9$ év az összegtől függetlenül.

1115. $100 \cdot \sqrt{0,15 \cdot 0,11} = 12,8\% < 13\%$ (mértani és nem számtani közép(!))

1116. $(0,1 + 0,2) \cdot 0,8 = 0,56$, azaz az eredetileg befizetett összeg 56%-át osztják csak fel a nyertesek között.

1117. A törlesztőrészlet forintra kerekítve 774 392 Ft.

1118. $\left(\frac{1\,000\,000}{400\,000}\right)^{0,1} - 1 = 0,09596$ tehát $\approx 9,6\%$ -os kamatra, 100 000 Ft

befektetése esetén azonban $\left(\frac{1\,000\,000}{100\,000}\right)^{0,1} - 1 = 0,25893$, azaz $\approx 25,9\%$ -ra.

1119. Egyszeri 300 000 Ft esetén: $300\,000 \cdot 1,1^n = 10^6$ egyenletből $n = \frac{\lg 10 - \lg 3}{\lg 1,1} \approx 12,63$ tehát a gyerek 12 éves korában. Évenkénti 50 000 Ft

befizetésével: $50\,000(1,1^{t-1} + 1,1^{t-2} + \dots + 1) = 1\,000\,000$, ahonnan a mértani sorozat összegképletét használva $20 = \frac{1,1^t - 1}{0,1}$, tehát $t = 11,53$ ezért 13 éves kortól.

IV

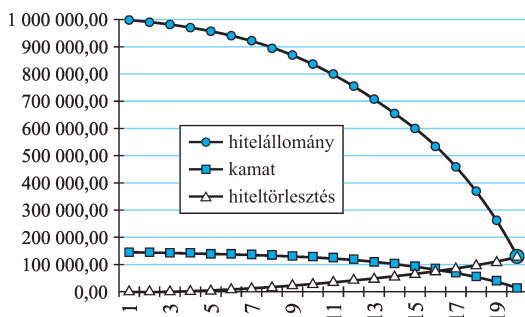
1120.

év	hitelállomány	kamat	hiteltörlesztés
1	1 000 000,00	150 000,00	9 761,47
2	990 238,53	148 535,78	11 225,69
3	979 012,84	146 851,93	12 909,54
4	966 103,29	144 915,49	14 845,98
5	951 257,32	142 688,60	17 072,87
6	934 184,44	140 127,67	19 633,80
7	914 550,64	137 182,60	22 578,87
8	891 971,77	133 795,77	25 965,71
9	866 006,06	129 900,91	29 860,56
10	836 145,50	125 421,83	34 339,65
11	801 805,86	120 270,88	39 490,59
12	762 315,26	114 347,29	45 414,18
13	716 901,08	107 535,16	52 226,31
14	664 674,77	99 701,22	60 060,25
15	604 614,52	90 692,18	69 069,29
16	535 545,23	80 331,78	79 429,69
17	456 115,54	68 417,33	91 344,14
18	364 771,40	54 715,71	105 045,76
19	259 725,64	38 958,85	120 802,62
20	138 923,02	20 838,45	138 923,02

A változatosság kedvéért számoljunk jelenértékkel! Az a kérdés tehát, hogy öt éven át fizetett 100 000 forint jelenértéke nem több-e 400 000 forintnál.

$$100\,000 \cdot \left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,1^2} + \frac{1}{1,1^3} + \frac{1}{1,1^4} + \frac{1}{1,1^5} \right) = 379\,078 < 400\,000, \text{ tehát elég.}$$

1121. Az első esetben 52 500 Ft a kamat, tehát 102 500 forintunk lesz.

1122.

A másodiknál $1,11^7 \approx 2,076$ -szoros, azaz 103 808 forintunk lesz, míg a harmadik esetben a betett összeg $1,17 \cdot 1,15 \cdot 1,13 \cdot 1,11 \cdot 1,09 \cdot 1,07^2 \approx 2,1061$ -szorosa lesz, ami 105 505 Ft, és így a legjobb.

1122. Az évente fizetendő részlet (x) kiszámítása:

$$\begin{aligned} 10^6 \cdot 1,15^{20} &= \\ &= x \cdot (1,15^{19} + 1,15^{18} + \dots + 1), \end{aligned}$$

ahonnan $x = 159\,761,5$ Ft.

1123. $1,1^5 x = 100\,000$; $x = 62\,092$ Ft

1124. $10^5 \cdot 1,15^n = 10^6$; $n = \frac{1}{(\lg 1,15)} = 16,475$. Tehát kb. 17 év alatt.

1125. $500\,000 q^5 = 1\,000\,000$; $q = \sqrt[5]{2} = 1,148698 \Rightarrow 14,87\%$ -os kamat.

1126. Mivel 10 év alatt összesen 40-szer számolnak kamatot, viszont egy kamatszámítási periódusra csak az éves kamat negyede esik, ezért az induló tőke x értékét a következő összefüggésből számoljuk:

$$402\,760 = x \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{40} \Rightarrow x = 150\,000.$$

1127. $50\,000 \cdot 1,12 \frac{1,12^n - 1}{1,12 - 1} = 1\,000\,000$;

$$1,12^n = 1 + \frac{20 \cdot 0,12}{1,12} \quad 1,12 = 3,14286;$$

$n = 10,10 \approx 11$ év.

1128. Először azt kell meghatározni, hogy mekkora havi kamatnak felel meg éves 36%-os kamat.

$$1,36 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12}, \text{ ahonnan } p = 2,6\%. \text{ Ezek után ugyanúgy kell számolni, mint ha 10 éves törlesztést határoznánk meg ezzel a } p\% \text{-os kamattal.}$$

$$300\,000 \cdot 1,026^{10} = x \cdot \frac{1,026^{10} - 1}{1,026 - 1}, \quad x \approx 34\,455 \text{ Ft}$$

1129. $A: 1,21$; $B: \left(1 + \frac{0,2}{2}\right)^2 = 1,21$; $C: \left(1 + \frac{0,195}{12}\right)^{12} = 1,2134$;

$D: \left(1 + \frac{0,2}{365}\right)^{365} = 1,2213$, tehát D a legjobb.

(20%-os kamat mellett n tőkésítés esetén $\left(1 + \frac{0,2}{n}\right)^n$, ami tart $e^{0,2} \approx 1,221\,402\,7$.)

1130. $1\,000\,000 = \frac{a \cdot (1,14^{10} - 1)}{1,14^{10} \cdot 0,14}$, $a = 191\,713,5$ Ft.

1131.

a) $S_6^{(1)} = \frac{450\,000 \cdot 1,065 \cdot (1,065^6 - 1)}{0,065} = 450\,000 \cdot 7,522\,87 = 3\,385\,291$ Ft;

b) $6\,000\,000 = \frac{450\,000 \cdot 1,065 \cdot (1,065^n - 1)}{0,065}$,

$$n = \frac{\lg 1,813\,771\,5}{\lg 1,065} = \frac{0,258\,582}{0,027\,35} = 9,45 \text{ év.}$$

IV

1132. $C_0 \cdot 1,03^2 \cdot 0,95 \cdot 1,03 \cdot 0,96 = C_0 \cdot 0,9965$.

a) kevesebb lett az ára

b) $1 - 0,9965 = 0,0035 \Rightarrow 0,35\%$ -kal csökkent.

1133. Azt kell kiszámolni, hogy a jövőben kapott különböző összegek ma mekkora összegnek felelnek meg. Ez azt jelenti, hogy mennyi pénzem kellene legyen ma ahhoz, hogy például 4 év múlva ki tudjak fizetni 2 000 000 forintot.

Ez 15%-os kamatot feltételezve $\frac{2\,000\,000}{1,15^4}$ forint. Ezért az egyes ajánlatok értéke:

$$A = 2\,000\,000 + 250\,000 \cdot \left(\frac{1}{1,15} + \frac{1}{1,15^2} + \dots + \frac{1}{1,15^8} \right) = 3\,121\,830 \text{ Ft.}$$

$$B = 1\,000\,000 + 2\,000\,000 \frac{1}{1,15^4} + 2\,000\,000 \frac{1}{1,15^6} = 3\,008\,161,7 \text{ Ft.}$$

Tehát az a) ajánlat az előnyösebb.

1134. $x \cdot 1,15 \cdot \frac{1,15^5 - 1}{1,15 - 1} = 300\,000 \cdot 1,15^5$ ahonnan $x = 77\,821 \text{ Ft}$.

1135. $1,08^{10} = (1+x)^8 \Rightarrow x = \sqrt[4]{1,08^5} - 1 = 0,10098 \Rightarrow 10,1\%$ -os kamat.

1136. A nyeresége 25% volt, a vesztesége pedig 20% volt.

1137. Az első üzem teljesítménye tehát $\frac{3}{4}$ -e másodikénak. Ezért az egyenlet a következő:

$$\frac{3}{4} \cdot 1,1^n = 1,05^n; \quad n = \frac{\lg 0,75}{\lg 1,05 - \lg 1,1} = 6,18 \text{ év.}$$

1138. $0,8 \cdot x^8 = 1 \cdot 1,03^8$, ahonnan $x = 1,03 \cdot \sqrt[8]{1,25} = 1,059$,

tehát körülbelül 6%-os növekedést kell az első szállodának elérnie.

1139. $6000 \cdot 1,03^3 = 3000 \cdot 1,03^2 + x \cdot 1,03 + x$. Tehát

$$x = \frac{3000 \cdot (2 \cdot 1,03^3 - 1,03^2)}{2,03} = 1662 \text{ euró.}$$

1140. $1650 \cdot 12 \cdot 1,02^3 = 1600 \cdot 12 \cdot x^3$; $x = 1,0305 \Rightarrow$ tehát 3%-os növekedést kell elérni.

1141. $380\,000 \cdot 1,1^5 = 611\,993,8$; $10\,000 \cdot \frac{1,1^5 - 1}{0,1} = 610\,510$, tehát valóban elég.