

## III. Függvények

### Alapfogalmak



**571.** a) Az  $f, g, h$  függvények. Az  $i$  nem függvény, a 2-höz nem egyértelműen rendelünk elemet.

b) Az  $f$  függvény kölcsönösen egyértelmű, a  $g$  és  $h$  nem. A  $g$  függvény az  $a$ -t, a  $h$  az  $a$ -t és a  $c$ -t többször is felveszi értéként.

c)  $R_f = \{a, b, c, d\}$ ,  $R_g = \{a, c, d\}$ ,  $R_h = \{a, c\}$ .

**572.** Függvények:  $a, b, c$ .

Kölcsönösen egyértelmű függvény:  $a$ .

$R_a = \{6, 7, 8, 9\}$ ,  $R_b = \{6, 7, 9\}$ ,  $R_c = \{6\}$ .

**573.** Az  $a, b$  görbék függvények képei, a  $c$  és  $d$  görbék nem.

**574.** Sokféle szabály elképzelhető. Lehetséges pl.:

$$a(x) = x + 2; b(x) = \frac{x}{3} + 1.$$

Az  $x = 2, 3, 4$  esetben  $c(x)$  értékei között a különbség 1-gyel nő. Így ha  $x > 4$ ,

$$c(x) = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (x - 1) = 1 + \frac{(x - 1)x}{2} = \frac{x^2 - x + 2}{2}, \text{ s ez } x = 10\text{-re}$$

és  $x = 20$ -ra is megfelel.

$d(x)$ : ennyi betűből áll a leírt  $x$  szám.

**575.** Függvények:  $a), b), c), f)$ .

A  $d)$  hozzárendelés általában nem egyértelmű, az  $e)$  esetben a 0-hoz nem rendelünk semmit, a  $g)$  hozzárendelés pedig nem pontosan definiált.

**576.** Reflexív relációk:  $b), c), d)$ . (Minden egész szám osztója és többszöröse is önmagának.)

Szimmetrikus reláció: egyik sem.

Antiszimmetrikus relációk:  $b), c), d)$ .

Tranzitív relációk:  $a), b), c), d)$ .

**577.** Reflexív reláció:  $a)$ .

Szimmetrikus relációk: mindkettő.

Antiszimmetrikus reláció: egyik sem.

Tranzitív reláció:  $a)$ .

**578.** A  $K = 2x^2 - 3x + 1$  egyváltozós, másodfokú kifejezés. A  $K(x)$  jelölés kihangsúlyozza, hogy a kifejezés változója az  $x$ .

a) A kifejezés helyettesítési értéke egy szám; például az  $x = a$  helyen  $K(a) = 2a^2 - 3a + 1$ .

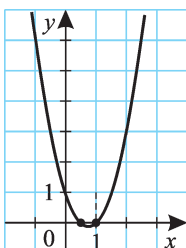
b) Egyenlethez például  $K(x) = 2$ , vagyis  $2x^2 - 3x + 1 = 2$  útján jutunk.

c) Az  $f$  függvény hozzárendelési szabálya  $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ .

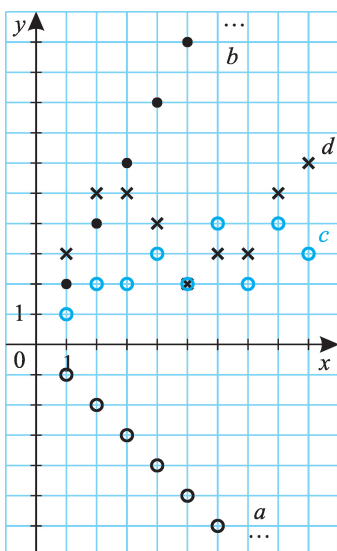
d) Az  $f$  függvény helyettesítési értéke valamely  $x = b$  helyen  $f(b) = 2b^2 - 3b + 1$ .

e) Az  $f$  függvény megadásához a hozzárendelési szabály mellett az értelmezési tartományt is meg kell határoznunk; ha ezt elhagyjuk, akkor –

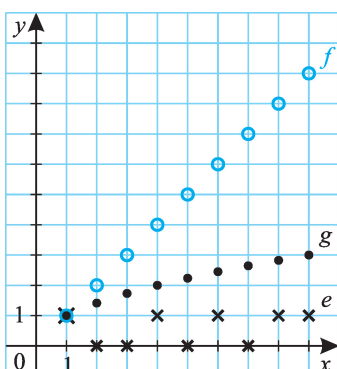
578.



584/I.



584/II.



megállapodás alapján – a lehető legbővebb valós számhalmazzal tekintjük értelmezési tartományának. Ebben az esetben tehát  $D_f = \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$  definiálja az  $f$  függvényt.

- f) Az  $f$  függvény képe a derékszögű koordináta-rendszerben.  
 g) Az  $f$  függvény képének a neve parabola.  
 h) Az  $f$  függvény képének a derékszögű koordináta-rendszerben  $y = 2x^2 - 3x + 1$  az egyenlete. (A parabolán pontosan azok a  $P(x; y)$  pontok vannak rajta, amelyek koordinátái kielégítik az  $y = 2x^2 - 3x + 1$  összefüggést.)  
 i) A függvény grafikonján általában a derékszögű koordináta-rendszerbeli ábrázolását értjük. (Az ábrázolás lehetséges egyéb koordináta-rendszerekben is: ferdeszögű-, polár- stb. koordináta-rendszerek.)

579. (1; 1), (2; 2), (3; 2), (4; 3), (5; 2), (6; 4), (7; 2), (8; 4), (9; 3).

580.  $f: A \rightarrow B$  jelentése:  $D_f = A$ ,  $R_f \subseteq B$ .

- a) Igaz.  
 b) Hamis.  
 c) Hamis (nem egyértelmű a hozzárendelés).  
 d) Igaz.  
 e) Hamis; van olyan racionális szám, amelyik nem egész.

Az értékészlet az a) esetben az egész számok halmaza.

581. a)  $f \neq g$ ;  $1 \in D_f$ , de  $1 \notin D_g$ .

b)  $f = g$ .

c)  $f \neq g$ . (Más az értelmezési tartományuk.)

582. a)  $y = 5$ .

b) Nem definiáltuk. Ha  $f = g$ , akkor

$$g(1) = f(1) = -1.$$

c)  $(-2; 5)$ ,  $(-1; 3)$ ,  $(1; -1)$ .

583. Ha  $D_f = D_g$ .

584. 584/I. és 584/II. ábra.

**585.** 585. ábra.

**586.** Az átlagsebesség értékét az egyenesek meredeksége adja meg. Az I., II., III. egyenesekhez tartozó átlagsebesség-értékek  $v_I = 20$  km/h,  $v_{II} = 60$  km/h,  $v_{III} = 80$  km/h, ez alapján valószínűleg rendre a kerékpár, motorkerékpár és személygépkocsi út–idő grafikonjai.

Az indulási sorrend is ez.

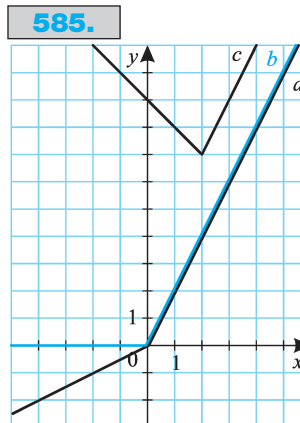
A kerékpár és motorkerékpár találkozási ideje a kerékpáros indulása után 1,5 óra. A kerékpár és személygépkocsi találkozásának idejét az  $s = 20t$  és  $s = 80(t - 2)$  egyenletrendszer megoldásából kapjuk:  $t = 2$  óra 40 perc. A grafikon alapján nem derül ki, hogy a motorkerékpár és a személygépkocsi találkozott-e egymással; ha továbbra is ugyanakkora átlagsebességgel haladnak, akkor a  $60(t - 1) = 80(t - 2)$  egyenletből  $t = 5$  órával a kerékpáros indulása után találkoznak.

**587. a)** Magyarországon évek óta csökken a születések száma, elsősorban emiatt a 15–19 éves korcsoportig lényegesen nagyobb volt a népességszám 1990-ben, mint 2003-ban.

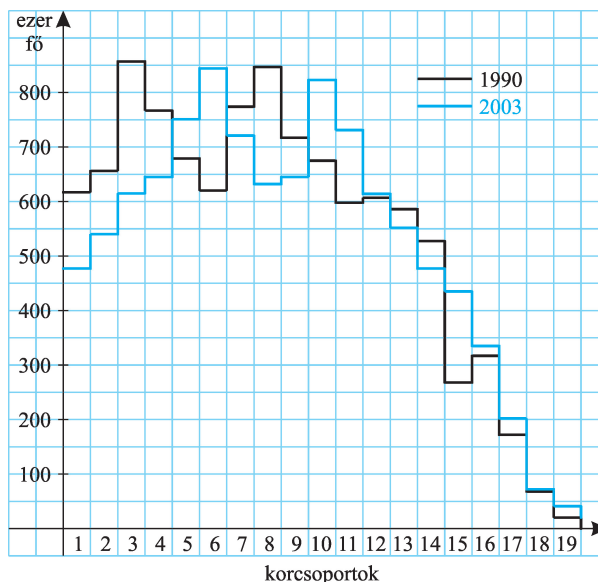
(A 2003. évi 0–4 éves korcsoport lélekszáma kiugróan alacsony, nem éri el az évi 100 000 fős átlagot sem.)

A 30–44 és 60–69-es korcsoportok létszáma volt még magasabb 1990-ben.

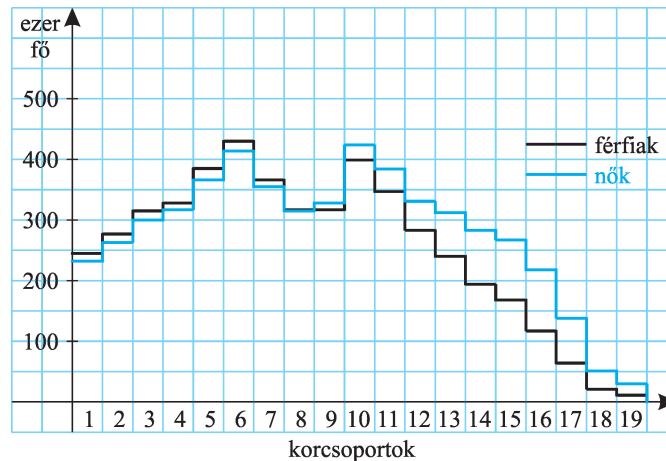
b) 587/I. ábra



**587/I.**



587/II.



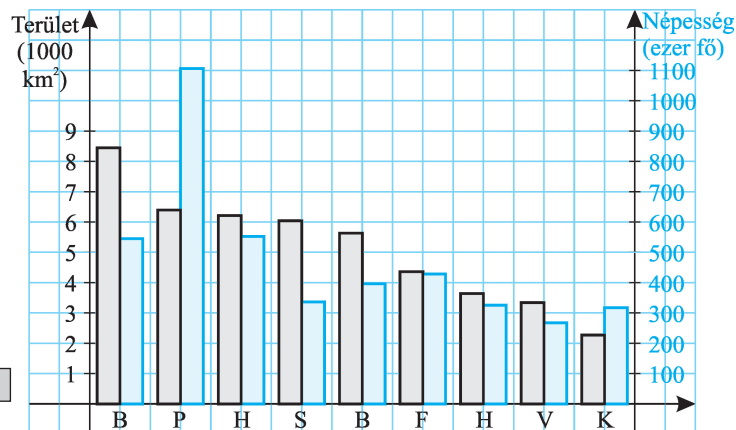
Ha az 1993-as grafikont 13 évvel „jobbra” mozgathatnánk, a 2003-as-hoz közelítő görbét kellene kapnunk.

c) 587/II. ábra

Az idősebb korcsoportokban lényegesen nagyobb a nők száma; ennek legfőbb magyarázata az lehet, hogy a 2003-ban 80 évnél idősebb korosztály a II. világháborúban hadköteles volt.

d) Tekintsük pl. az 1990-ben 20–24 évesek korosztályát (679 ezer fő)! 13 évvel később ez a 33–37 évesek korosztálya; vagyis a 2003-as 30–34-es korcsoportból két, a 35–39-es korcsoportból három év népességét számolhatjuk. Ha feltesszük az évfolyamonkénti egyenletes eloszlást (ez csak közelítés!), akkor a 2003-ban 33–37 évesek számára a  $\frac{2 \cdot 721 + 3 \cdot 632}{5} \approx 668$  (ezer) értéket kapjuk; a csökkenés  $\approx 11$  ezer fő.

588.



A grafikontól könnyen leolvasható, hogy melyik megyékben nagyobb 100 fő/km<sup>2</sup>-nél a népsűrűség.

A konkrét adatok:

területi egység	népsűrűség, fő/km <sup>2</sup>
Bács-Kiskun	64,5
Békés	70,3
Fejér megye	98,2
Hajdú-Bihar	88,9
Heves	89,4
Komárom-Esztergom	140,0
Pest megye	173,0
Somogy	55,7
Vas	80,0

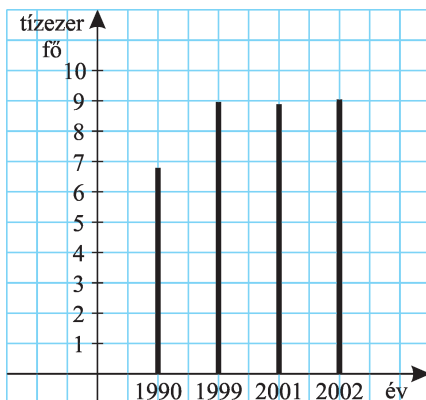


**589.** Az adatokat az alábbi táblázatban tüntettük fel:

végzettség (ezer fő)	1990	1999	2001	2002
8 évfolyam	172,9	119,1	119,3	118,8
gimnáziumi érettségi	27,3	36,3	38,0	40,2
szakközépiskolai érettségi	40,6	53,3	50,9	50,2
felsőfokú oklevél	24,1	42,3	47,4	50,5
érettségi összesen	67,9	89,6	88,9	90,4
összes végzett	264,9	251,0	255,6	259,7
arányok (%)				
alapfok	65,3	47,5	46,7	45,7
középfokú érettségi	25,6	35,7	34,8	34,8
felsőfok	9,1	16,8	18,5	19,4

Az érettségit szerzett diákok száma az egyes években:

**589.**



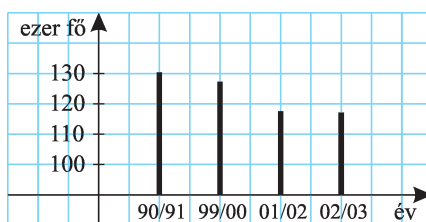
A 8. évfolyamot végzettek száma csökken, ezt a születések számának csökkenésével magyarázhatjuk. Az érettségit és felsőfokú intézményt végzettek aránya nőtt.

**590.** Az adatokat az alábbi táblázatban tüntettük fel:

megnevezés	1990/91	1999/2000	2001/02	2002/03
első évfolyam aránya:	11,2	13,1	12,5	12,6
1 pedagógusra jutó tanuló:	12,2	10,9	10,5	11,2
1 teremre jutó gyerekek:	23,6	18,5	21,9	18,3
átlagos osztálylétszám:	22,7	20,4	19,9	21,3

Az első évfolyamos tanulók száma az egyes években:

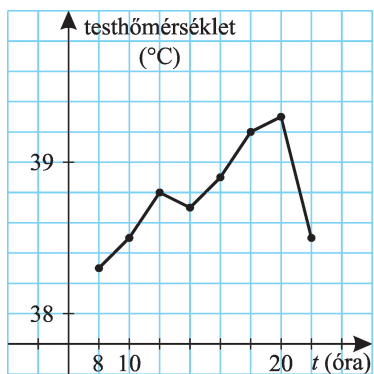
**590.**



**591.** A földfelszín minden egyes pontjához a tengerszint feletti magasságot rendeljük. Pl. Badacsony, Szent György-hegy: 437 m.

592.

592.

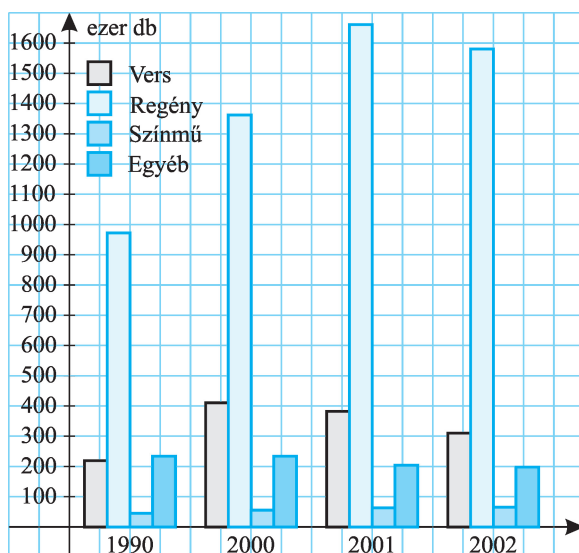


593. Az adatokat az alábbi táblázatban tüntettük fel:

művek száma	1990	2000	2001	2002	példány- szám (2002-ben, ezer db)	átlagos példány- szám művenként
verses mű, antológia	219	410	382	301	396	1 300
regény, elbeszélés	972	1 362	1 661	1 680	11 150	6 600
színmű	45	55	63	65	188	2 900
egyéb széppróza	234	223	204	198	495	2 500
összesen:	1 470	2 050	2 310	2 244	12 229	5 400
színművek aránya (%)	3,1	2,7	2,7	2,9		

A csoportosított oszlopdiagram:

**593.**



**594.** Az adatokat az alábbi táblázatokban tüntettük fel:

a)

megnevezés	1990	2000	2001	2002
balesetek száma	27 801	17 493	18 505	19 686
ebből egy nap átlagosan	76,2	47,9	50,7	53,9
ittasan okozott balesetek száma	4 258	2 062	2 138	2 440
ebből egy nap átlagosan	11,7	5,6	5,9	6,7
meghalt személyek száma	2 432	1 200	1 239	1 429
ebből egy nap átlagosan	6,7	3,3	3,4	3,9
sérült személyek száma	36 996	22 698	24 149	25 978
ebből egy nap átlagosan	101,4	62,2	66,2	71,2

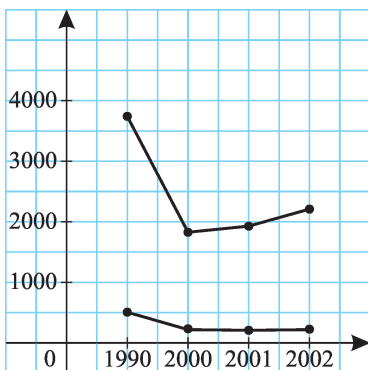
b)

	1990	2000	2001	2002
balesetek száma	27 801	17 493	18 505	19 686
ebből: gyalogos hibája	3 426	1 886	2 031	2 001
százalékos arány	12,3	10,8	11,0	10,2

c)

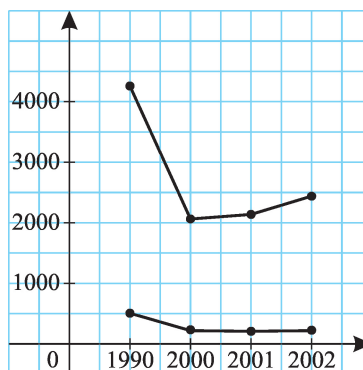
A vonaldiagram:

594/I.



Halmazott vonaldiagram:

594/II.

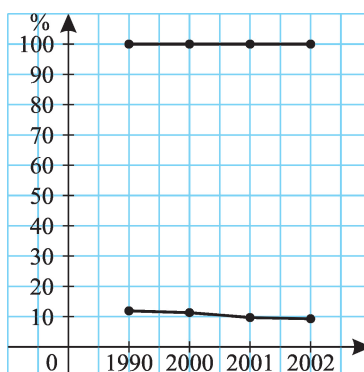


ittasan okozott balesetek száma	4258	2062	2138	2440
ebből: járművezető hibája	3741	1827	1928	2209
gyalogos hibája	507	233	208	226
ennek aránya (%)	11,9	11,3	9,7	9,3

d)

100%-ig halmazott vonaldiagram:

594/III.



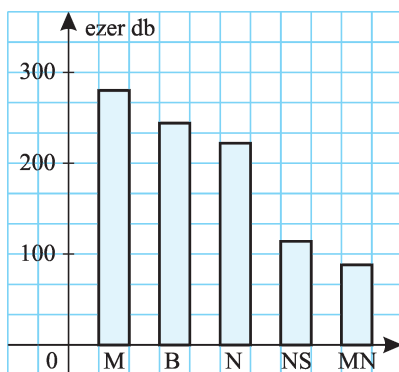
**595.** Az egyes termékek aránya:

sajtótermék (ezer)	2001	arány (%)	2002	arány (%)
Metro	280	29,5	320	31,0
Blikk	244	25,7	257	24,9
Népszabadság	222	23,4	221	21,4
Nemzeti Sport	114	12,0	117	11,4
Magyar Nemzet	88	9,4	116	11,3
összesen:	948	100,0	1031	100,0

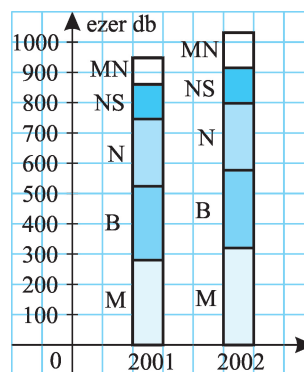


Az oszlopdiagramok:

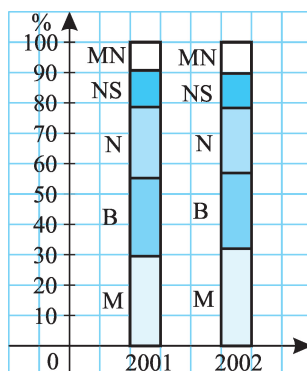
**595/I.**



**595/II.**

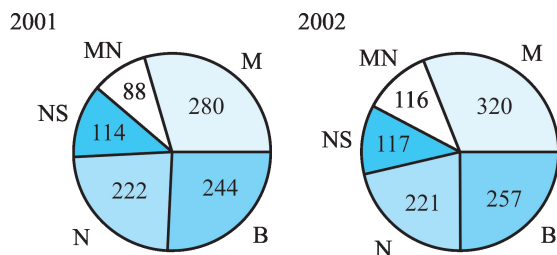


**594/III.**



596.

596.

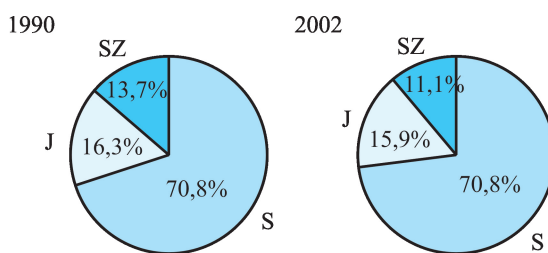


597. a) A szarvasmarha-, juh- és sertésállomány százalékos aránya az egyes években:

állatállomány (ezer db)	1 990	%	2002	%
szarvasmarha	1 571	13,7	770	11,1
juh	1 865	16,3	1103	15,9
sertés	8 000	70,0	5082	73,0
összesen:	11 436	100,0	6955	100,0

A két kördiagram:

597.



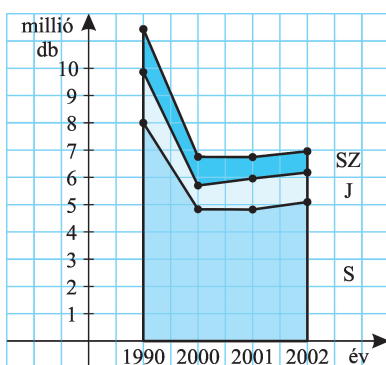
b) Az első grafikon a skálát nem a 0-nál kezdi, így sokkal drámaibb módon hangsúlyozza az állomány csökkenését.

**598.** A még hiányzó adatok:

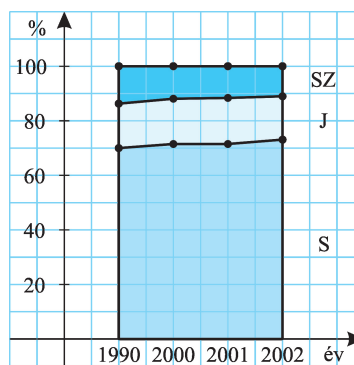
állatállomány (ezer db)	2000	%	2001	%
szarvasmarha	805	11,9	783	11,6
juh	1129	16,7	1136	16,9
sertés	4834	71,4	4822	71,5
összesen:	6768	100,0	6741	100,0

A grafikonok:

**598/I.**



**598/II.**

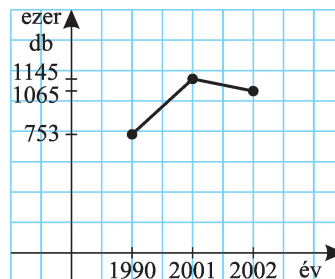


**599.** A hiányzó adatok:

állampolgárság	1990	2001	2002	2002			
				példány-szám (ezer db)	művek (%)	példány-szám (%)	átlagos pldsz. (ezer db)
amerikai (USA)	270	604	670	7537	29,8	61,6	11,3
angol	140	144	129	502	5,8	4,1	3,9
cseh	35	20	16	50	0,7	0,4	3,1
francia	53	96	94	279	4,2	2,3	3,0
lengyel	8	13	15	33	0,7	0,3	2,2
magyar	753	1145	1065	2918	47,4	23,9	2,7
német	88	128	116	541	5,2	4,4	4,7
olasz	12	37	28	64	1,3	0,5	2,3
orosz	30	17	21	90	0,9	0,7	4,3
egyéb (kül.)	81	106	90	215	4,0	1,8	2,4
összesen	1470	2310	2244	12 229	100%	100%	

A magyar szerzők szépirodalmi műveinek alakulása:

599.



**600.** Észrevehető tendencia, hogy az óvodai, általános iskolai létszámok csökkennek, a felsőfokú oktatásban részt vevők száma pedig nő.

**601.** a) Értelmezési tartomány:  $4 \leq x < 13$ ; értékkészlet:  $3 \leq y < 8$ .

b) Értelmezési tartomány:  $2 \leq x \leq 10$ ; értékkészlet:  $-2 \leq y \leq 6$ .

c) Értelmezési tartomány:  $x \in [-2; 2] \cup [4; 14]$ ;

értékkészlet:  $y \in [-4; 1[ \cup [2; 6]$ .

**602.** Az értékkészlet  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ . Pl.  $2^k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) pozitív osztónak száma  $k + 1$ , a 30-nak 8, a 36-nak 9 pozitív osztója van.

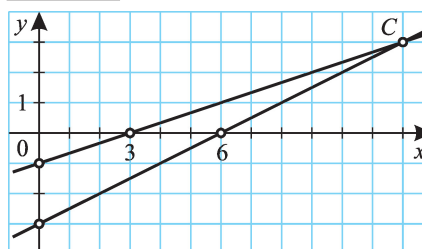
**603.** Nem kölcsönösen egyértelmű a  $b$  függvény, pl. a 2 értéket az  $x = 1$  és  $x = -1$  helyeken is felveszi.

**604.** Például:

a)  $x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$ ;

b)  $x \mapsto 3(x + 2)^2 + 3$ .

604.



Egy másik lehetőség az ábráról leolvasható grafikus megfeleltetés.

**605.** Értelmezési tartomány:  $-2 \leq x \leq 1$  és  $3 \leq x \leq 4$ ; értékkészlet:  $-5 \leq y \leq 9$ .

**606.** A háromszög területe  $t = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \varphi$ , így a területfüggvény:

$t: \varphi \mapsto 60 \sin \varphi$ .

A  $t$  függvény értelmezési tartománya  $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ , értékkészlete  $0 < t < 60$  ( $\text{cm}^2$ ).

A függvény nem kölcsönösen egyértelmű. Pl. a  $t = 30$  ( $\text{cm}^2$ ) értéket a  $\varphi = 30^\circ$  és  $\varphi = 150^\circ$  helyeken is felveszi.

**607.** Pl.  $x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}, -1 \leq x \leq 3.$

(Más lehetőségek is vannak:  $x \mapsto \left| \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right|$  vagy  $x \mapsto \sqrt{\left( \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right)^2}$  szintén

megfelel.)

**608.** a) 1. típus: Amikor a felvett értékek  $a, a, a, b, c.$  Ekkor  $\frac{5!}{3!}$ -féle függvény létezik. Ezt az értéket még 3-mal meg kell szorozni a lehetséges  $b, b, b, a, c,$  illetve  $c, c, c, a, b$  típusok miatt, így  $\frac{5!}{3!} \cdot 3 = 60$  függvény van.

2. típus:  $a, a, b, b, c.$  Ebből  $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 90$ -féle függvény készíthető.

Összesen  $60 + 90 = 150$  függvény van.

b) Az  $a, a, b, c, d$  típusok száma  $\frac{5!}{2!} \cdot 5 = 300.$

c)  $5! = 120.$

d) 0.

**609.** a) Mindegyik elemhez 3-féle értéket rendelhetünk, így  $3^5 = 243$  függvény van.

b)  $6^5 = 7776.$

**610.** a)  $2(a+1) - 2a = 2.$

b)  $(2(a+1)+1) - (2a+1) = 2.$

c) 5.

d) 5.

e)  $(a+1)^2 - a^2 = 2a+1.$

f)  $((a+1)^2+2) - (a^2+2) = 2a+1.$

g)  $((a+1)^2+2(a+1)+2) - (a^2+2a+2) = (a+1)^2 - a^2 + 2(a+1) - 2a = 2a+1+2 = 2a+3.$

h)  $(3(a+1)^2+3) - (3a^2+3) = 3((a+1)^2 - a^2) = 3(2a+1) = 6a+3.$

i)  $((a+1)^3-2) - (a^3-2) = 3a^2+3a.$

j)  $(2(a+1)^3+3(a+1)^2-(a+1)-1) - (2a^3+3a^2-a-1) = 2(3a^2+3a)+3(2a+1)-1 = 6a^2+12a+2.$

Néhány érdekesség:

- az a), b), valamint c), d) stb. esetek mutatják, hogy a konstans tagtól nem függ a különbség;
- $x^2 + 2x$  különbsége előállítható  $x^2$  különbsége és  $2x$  különbsége összegeként;
- $3x^2$  különbsége 3-szorosa  $x^2$  különbségének;
- általában is igaz, hogy  $n$ -ed fokú tag különbsége  $n-1$ -ed fokú ( $n \in \mathbf{Z}^+$ ).

## 611.

$x$	$x - \frac{x^3}{3!}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$
0	0	0	0	0
0,01	0,009 999 833	0,009 999 833	0,009 999 833	0,010 000 333
0,02	0,019 998 667	0,019 998 667	0,019 998 667	0,020 002 667
0,03	0,029 995 500	0,029 995 500	0,029 995 500	0,030 009 003
0,04	0,039 989 333	0,039 989 334	0,039 989 334	0,040 021 347
0,05	0,049 979 167	0,049 979 169	0,049 979 169	0,050 041 708
0,1	0,099 833 333	0,099 833 417	0,099 833 417	0,100 334 672
0,2	0,198 666 667	0,198 669 333	0,198 669 331	0,202 710 036
$\frac{\pi}{10}$	0,308 991 553	0,309 017 054	0,309 016 994	0,324 919 696
$\frac{\pi}{6}$	0,499 674 179	0,500 002 133	0,5	0,577 350 269
$\frac{\pi}{3}$	0,855 800 782	0,866 295 284	0,866 025 404	1,732 050 808
$\frac{\pi}{2}$	0,924 832 229	1,004 524 856	1	nem értelmezzük
$\pi$	- 2,026 120 126	0,524 043 913	0	0



$$\left( \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ a pontos érték.} \right)$$

Több érdekességet is észrevehetünk. Ezek közül az egyik: minél kisebb pozitív szám az  $x$ , annál közelebb vannak  $\sin x$  értékeihez a  $\operatorname{tg} x$ , valamint az  $x - \frac{x^3}{3!}$ , illetve  $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$  kifejezés értékei.  $\left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)$  jobban közelít.

**612.** Az előző észrevételhez hasonlóan, minél kisebb pozitív szám az  $x$ , annál közelebb vannak  $\cos x$  értékeihez az  $1 - \frac{x^2}{2!}$  és  $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  értékei.

$$\left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ jobban közelít.} \right)$$



- 613.** Az  $y$  tengelymetszetet  $x = 0$  helyettesítéssel kaphatjuk meg.  
 a)  $-3$ ; b)  $0$ ; c)  $-7$ ; d)  $8$ .  
 e) Az  $e$  függvény diszkrét pontokból áll,  $(0; 0)$  közös pontja az  $y$  tengellyel.  
 f) A függvényt az  $x = 0$  helyen nem értelmezzük, így nincs közös pontja az  $y$  tengellyel.
- 614.** Az  $x$  tengelymetszetet  $y = 0$  helyettesítéssel kaphatjuk meg, vagyis rendre meg kell oldanunk az  $f(x) = 0$  egyenletet.  
 a)  $\frac{3}{2}$ .  
 b) Az  $x = \sqrt{2}$  érték nincs a függvény alaphalmazában.  
 c)  $x_1 = 2, x_2 = -2$ .  
 d)  $x = -2$ .
- 615.** a) Igaz, pl.  $x \mapsto 1, x \in \mathbf{R}$ .  
 b) Hamis.  
 c) Igaz, pl.  $x \mapsto \frac{1}{x}, x \in ]0; 1]$ .  
 d) Hamis. Ha egy függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor különböző értékekhez különböző értékeket rendel; így ha az alaphalmaz végtelen sok elemből áll, akkor az értékkészlet is.
- 616.**  $-x^2 - x + 6 \geq 0$ , ha  $-3 \leq x \leq 2$ , ezért  $D_f = [-3; 2]$ .  
 $-x^2 + 3x + 4 \geq 0$ , ha  $-1 \leq x \leq 4$ , ezért  $D_g = [-1; 4]$ .  
 a)  $A = D_f \cap D_g = [-1; 2]$ .  
 b)  $B = D_f \cup D_g = [-3; 4]$ .  
 c)  $C = B = D_f \cup D_g = [-3; 4]$ .  
 d)  $D = D_g = [-1; 4]$ .  
 e)  $E = \mathbf{R} \setminus (D_f \cap D_g) = ]-\infty; -1[ \cup ]2; \infty[$ .  
 f)  $F = \mathbf{R} \setminus D_f = ]-\infty; -3[ \cup ]2; \infty[$ .  
 g)  $G = [-3; -1[ \cup ]2; 4]$ .  
 h)  $H = D_g \setminus D_f = ]2; 4]$ .  
 i)  $I = G = [-3; -1[ \cup ]2; 4]$ .  
 j)  $J = H = ]2; 4]$ .  
 k)  $K = ]-\infty; -3[ \cup [-1; 2] \cup ]4; \infty[$ .  
 l)  $L = ]-\infty; -3[ \cup [-1; \infty[$ .  
 m)  $M = \mathbf{R} \setminus (D_f \cup D_g) = ]-\infty; -3[ \cup ]4; \infty[$ .  
 n)  $N = \mathbf{R} \setminus D_g = ]-\infty; -1[ \cup ]4; \infty[$ .
- 617.** Ha a  $B$  halmazra képezünk, a halmaz minden eleme előáll képelemként, vagyis az értékkészlet  $B$ ; ha a  $B$  halmazba történik a leképezés, akkor az értékkészlet valódi részhalmaza is lehet  $B$ -nek.  
 Például:  
 a)  $(1, a), (2, b), (3, b), (4, b)$ ;  
 b)  $(1, d), (2, b), (3, c), (4, a)$ .  
 Kölcsönösen egyértelmű függvényt a b) esetben kapunk.

**618.** *a)* Egybevágósági transzformációval fedésbe hozhatjuk a szakaszokat. (Vagy pl. a  $[0; 10] \rightarrow [20; 30]$  leképezést az  $x \mapsto x + 20$  hozzárendeléssel is megadhatjuk.)

*b)* Hasonlósági transzformációval (kétszeres arányú nagyítás) fedésbe hozhatjuk a szakaszokat. (Vagy pl. a  $[0; 10] \rightarrow [0; 20]$  leképezés az  $x \mapsto 2x$  hozzárendeléssel.)

*c)* Pl. a 618/I. ábra szerinti vetítés megfelelő. (Vagy egy  $x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$  típusú leképezés.)

*d)* Alkalmazhatunk a *b)* és *c)* megoldások alapján egy hasonlóságot és egy vetítést; de megfelel a 618/II. ábra szerinti leképezés is.

**619.** *a)* Egybevágósági transzformációval (pl. eltolás) fedésbe hozhatjuk a körlemezeket.

*b)* Hasonlósági transzformációval (kétszeres arányú nagyítás) fedésbe hozhatjuk a körlemezeket.

**620.** *a)* A  $P$  pontból vetíthetjük az  $AB$  félig zárt szakaszt az 620/I. ábrának megfelelően ( $PB$  és  $f$  párhuzamosak).

*b)* Egy lehetséges eljárás látható a 620/II. ábrán.

A  $P$  pontból a  $BC$  szakaszt levetítve az  $e$  pontjainak részhalmozát, egy zárt félegyenesest kapunk. Ezután a visszamaradt  $AC$  félig zárt szakaszt a visszamaradt  $f$  nyílt félegyenesre kell leképeznünk. Ezt két lépésben valósíthatjuk meg: először  $AC$ -t leképezzük egy nyílt szakaszra, majd ezután már alkalmazható a vetítési technika a nyílt szakasz – nyílt félegyenes megfeleltetésre.

Azonosítsuk a félig zárt  $AC$  szakaszt a számegegyenes  $[a; c[$  szakaszával; a feladat

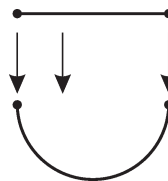
ekkor pl.  $[a; c[$  leképezése  $]a + b; c + b[$ -be. Legyen  $a, a + \frac{1}{2}, a + \frac{1}{3},$

$a + \frac{1}{4}, \dots$  egy  $[a; c[$ -beli sorozat;  $a + b + \frac{1}{2}, a + b + \frac{1}{3}, a + b + \frac{1}{4}, \dots$  pedig

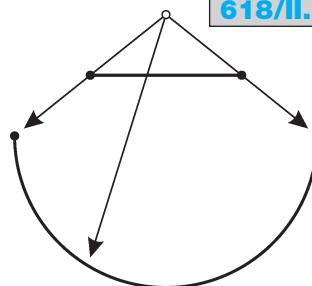
egy  $]a + b; c + b[$ -beli sorozat. Feleltessük meg egymásnak a sorozatok azonos indexű tagjait, az  $[a; c[$  szakasz többi  $x$  pontjához pedig  $x + b$ -t rendelhetjük  $]a + b; c + b[$ -ből.

A módszer általában is alkalmazható; vagyis bármely szakasz leképezhető egy másik szakaszra, ha abból véges sok (vagy megszámlálhatóan végtelen számú) pont hiányzik.

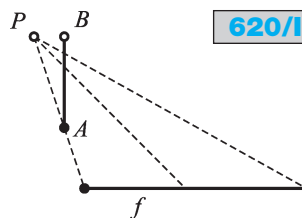
618/I.



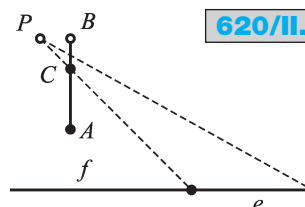
618/II.



620/I.



620/II.

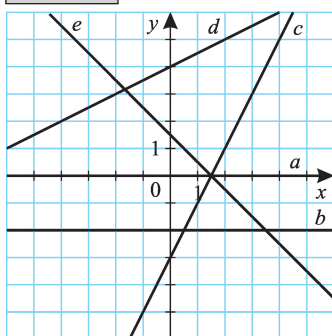


- 621.** a)  $5^5 = 3125$ . Az  $A$  halmaz minden eleméhez 5-féle értéket rendelhetünk.  
 b)  $5! = 120$ . Az értékészlet megegyezik az  $A$  halmazzal.  
 c)  $5! = 120$ . Csak a  $b$ ) esetben kapunk kölcsönösen egyértelmű függvényeket.
- 622.** a)  $7^5 = 16\,807$ .  
 b) Nem lehetséges; az  $A$  képhalmaza csak 5-elemű.  
 c)  $8^5 - 1 = 32\,767$  (levontuk az üres leképezést).  
 d)  $\binom{7}{2} \cdot 2^5 = 672$ .  
 e)  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ .  
 f)  $\binom{11}{5} = 462$ .  
 g)  $\binom{7}{5} = 21$ .

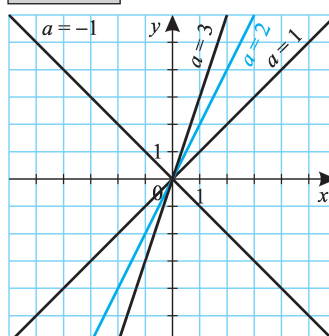
## Függvénytípusok

Nulladfokú és elsőfokú függvények

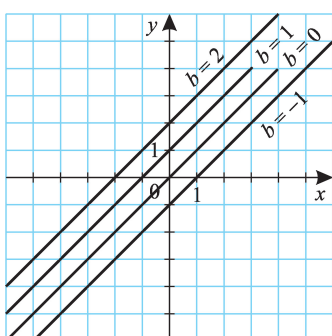
**623. 623/I.**



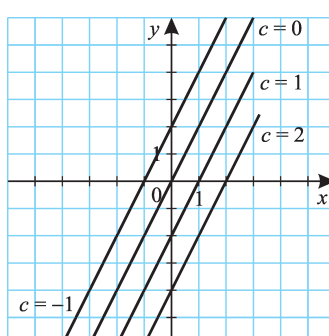
**623/II.**



**623/III.**



**623/IV.**

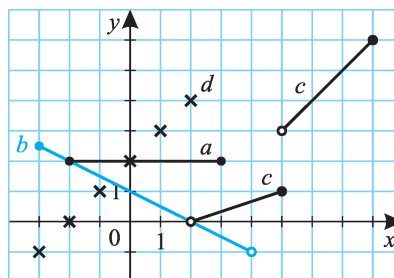


624.

Az egyes függvények értékkészlete:

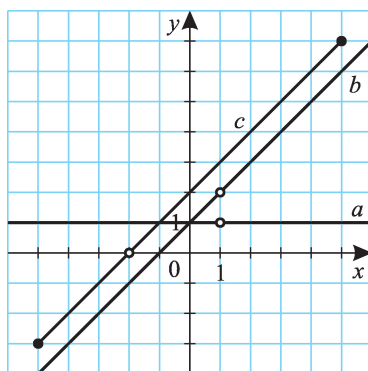
- a)  $R_a = \{2\}$ ;
- b)  $R_b = ]-1; 2,5]$ ;
- c)  $R_c = ]0; 1] \cup ]3; 6]$ ;
- d)  $R_d = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ .

624.

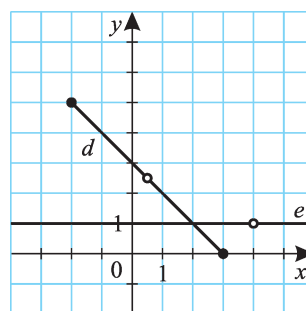


625.

625/I.



625/II.



Az egyes függvények értékkészlete:

- a)  $R_a = \{1\}$ .
- b)  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$ , ha  $x \neq 1$ .  $R_b = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ .
- c)  $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = x + 2$ , ha  $x \neq -2$ .  $R_c = [-3; 7] \setminus \{0\}$ .
- d)  $\frac{-2x^2 + 7x - 3}{2x - 1} = \frac{(2x - 1)(3 - x)}{2x - 1} = 3 - x$ , ha  $x \neq 0,5$ .  
 $R_d = [1; 5] \setminus \{2,5\}$ .
- e)  $e(x) = 1$ , ha  $x \neq 4$ .  $R_e = \{1\}$ .
- f)  $f$  nevezője 0. A törtet nem értelmezzük, így ilyen függvény nincs. (Ilyen törtet „le sem szabad írni”!)

626. Az a) és c) egyenes arányosság grafikonja. Az arányossági tényező 3, illetve -1.

627. Jelöljük  $F$ -fel a Fahrenheit-fokban,  $C$ -vel a Celsius-fokban mért értékeket! Ekkor  $F = 1,8 C + 32$ , illetve  $C = \frac{5}{9} F - \frac{160}{9}$ .

A két mennyiség nem egyenesen arányos.

**628.**  $0^\circ\text{F} = -17,78^\circ\text{C}$ ,  $100^\circ\text{F} = 37,78^\circ\text{C}$ .

**629.** Jelöljük  $R$ -rel a Réaumur-fokban,  $C$ -vel a Celsius-fokban mért értékeket. Ekkor  $R = 0,8 C$ , illetve  $C = 1,25 R$ . A két mennyiség egyenesen arányos.

**630.** a)  $i = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r \cdot 2\pi$ ;

b)  $h = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ ;

c)  $i = \frac{h \cdot \alpha \cdot \pi}{360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$ ;

d)  $k_{OAB} = 2r + i = 2r \left( 1 + \frac{\alpha}{360^\circ} \pi \right)$ ;

e)  $t_{OAB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi$ ;

f)  $k_{OAB\Delta} = 2r + h = 2r \left( 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)$ ;

g)  $t_{OAB\Delta} = \frac{r^2 \cdot |\sin \alpha|}{2}$  (ha  $\alpha > 180^\circ$ ,  $\sin \alpha < 0$ );

h)  $k = h + i = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{h \cdot \alpha \cdot \pi}{360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$ ;

i) ha  $\alpha \leq 180^\circ$ , akkor  $t = t_{OAB} - t_{OAB\Delta} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2} =$   
 $= r^2 \cdot \left( \frac{\alpha \cdot \pi}{360^\circ} - \frac{\sin \alpha}{2} \right)$ ;

ha  $\alpha > 180^\circ$ , akkor  $t = t_{OAB} + t_{OAB\Delta} = r^2 \cdot \left( \frac{\alpha \cdot \pi}{360^\circ} + \frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{2} \right) =$   
 $= r^2 \cdot \left( \frac{\alpha \cdot \pi}{360^\circ} - \frac{\sin \alpha}{2} \right)$ .

Egyenes arányosság az a) és e) esetekben áll fenn.

$i = r \cdot \alpha$ , definíció miatt az arányossági tényező 1. (1 radián annak a szögnek a nagysága, amelyhez egység sugarú körben egységnyi hosszúságú ív tartozik.)

**631.** A függvénykapcsolatok nem változnak. Adott  $\alpha$  esetén az a), b), d), f) mennyiségek és  $r$  között egyenes arányosság áll fenn.

**632.** Jelölje a négyzet oldalát  $a$ , átlóját  $d$ , területét  $t$ ! Ekkor a függvénykapcsolatok:

a)  $d = a\sqrt{2}$ ; b)  $k = 4a$ ; c)  $t = a^2$ .

Az a) és b) esetben kapunk egyenes arányosságot.

**633.** Az  $a \cdot 0 + b = -3$ ,  $a \cdot 4 + b = 5$  egyenletrendszer megoldása  $(a, b) = (2, -3)$ .

**634.**  $-2a + b = 5$ ,  $3a + b = -5$ ; innen  $(a, b) = (-2, 1)$ .



**635.** Az egyenes egyenletét  $y = ax + b$  alakban keressük. Az  $A$  és  $B$  pontokat behelyettesítve

$1 = -a + b$ , illetve  $7 = 3a + b$  adódik, ahonnan  $(a, b) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ . A függvény:

$$f: x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}.$$

**636. a)** Mivel a medence az első csövön keresztül 6 óra alatt telik meg, ezért 1 óra alatt a medence  $\frac{1}{6}$  része,  $t$  óra alatt a medence  $\frac{t}{6}$  része telik meg. A  $h$  vízmagasságot leíró függvény:  $h_1 = \frac{t}{6} \cdot 160 = \frac{80t}{3}$ , illetve  $h_2 = 20t$  (cm).

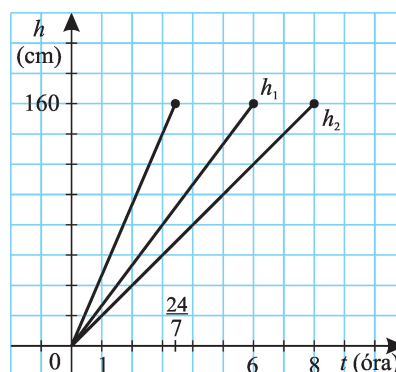
**b)** Ha mindkét csövet kinyitjuk, akkor a vízmagasság időfüggése

$$\begin{aligned} h_3 &= \left(\frac{t}{6} + \frac{t}{8}\right) \cdot 160 = \\ &= \frac{7t}{24} \cdot 160 = \frac{140t}{3} \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

A  $\frac{7t}{24} = 1$  egyenletből a medence  $t = \frac{24}{7}$  óra alatt telik meg, ha mindkét csövet kinyitjuk.

**c)** Mindhárom esetben a vízszint egyenesen arányos az eltelt idővel (ábra).

**636.**

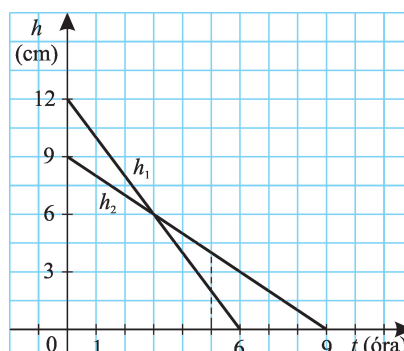


Észrevehetjük, hogy az egyenesek  $m$  meredekségére  $m_3 = m_1 + m_2$  teljesül.

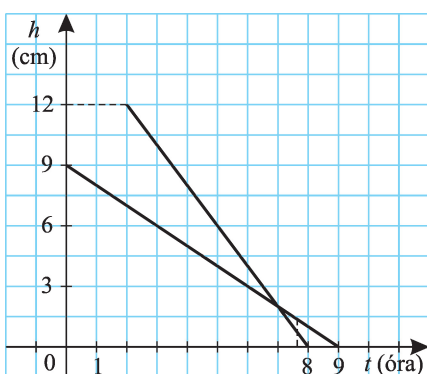
**637. a)** (637/I. ábra)

**b)** Az első gyertyából 1 óra alatt 2 cm,  $t$  óra alatt  $2t$  cm ég el, így  $t$  idő után a magassága  $h_1 = 12 - 2t$ . A második gyertya magassága hasonlóképp  $h_2 = 9 - t$ . A  $h_2 = 2h_1$  összefüggésből  $9 - t = 2(12 - 2t)$ , ennek megoldása  $t = 5$  (óra). Valóban: 5 óra múlva az első gyertya magassága 2 cm, a másodiké 4 cm.

**637/I.**

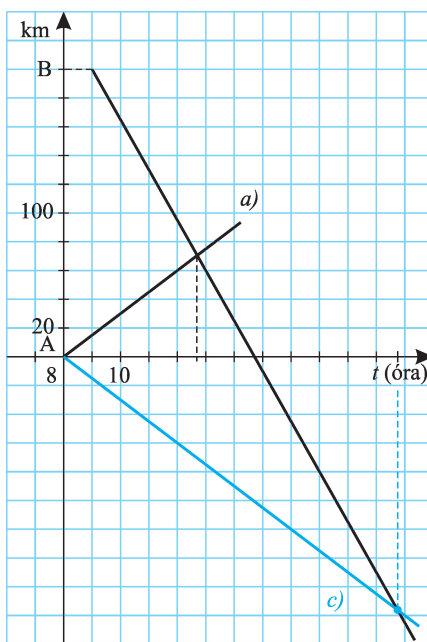


637/II.



638. a) (638. ábra)

638.



639. a)  $a(x) = 2x - 1$ ;  
 b)  $b(x) = -x + 1,5$ ;  
 c)  $c(x) = 3x - 0,5$ .

c) (637/II. ábra)

Jelöljük  $t$ -vel az első gyertya meggyújtása óta eltelt időt! (Ekkor a második gyertya már 2 órája ég, hossza 7 cm.) A  $2(12 - 2t) = 7 - t$  egyenletből  $t = \frac{17}{3}$  (óra), vagyis a később meggyújtott gyertya 5 óra 40 perc múlva lesz feleakkora, mint a másik.  
 (Hosszuk  $\frac{2}{3}$ , illetve  $\frac{4}{3}$  cm.)

d) Az első gyertya égési sebessége 2 cm/h, a másodiké 1 cm/h. Keretszmetstüük területének aránya 1 : 2, átmérőjük aránya  $1 : \sqrt{2}$ .

b) A kerékpáros  $t$  órányi idő alatt  $15t$  utat tesz meg, a versenyző  $(t - 1)$  óra alatt  $35(t - 1)$ -et. Együttesen 200 km-nyi utat tesznek meg, innen  $15t + 35(t - 1) = 200$ . Az egyenlet megoldása  $t = 4,7$  (óra), a találkozási idejük 12,7 óra, vagyis 12 óra 42 perckor találkoznak.

c) A találkozásig a versenykerékpáros 200 km-rel több utat tesz meg, ezért  $15t + 200 = 35(t - 1)$ . Innen  $t = \frac{47}{4} = 11$  óra 45 perc, vagyis 19 óra 45 perckor találkoznak.

Más megoldási lehetőség: 9 óra után az a) esetben 185 km-t tesznek meg, egymáshoz 50 km/h relatív sebességgel közeledve, s ennek megtételéhez 3,7 óra kell;

a b) esetben 215 km-t tesznek meg, egymáshoz 20 km/h relatív sebességgel közeledve, s ennek megtételéhez  $\frac{43}{4}$  óra kell.

640. a)  $a(x) = -\frac{x}{2} + 1$ ;      b)  $b(x) = -\frac{3x}{2} + 3$ ;  
 c)  $c(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$ .

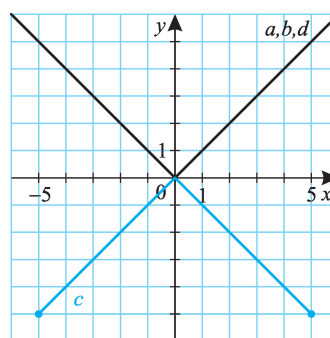
Abszolútértéket tartalmazó függvények



641.

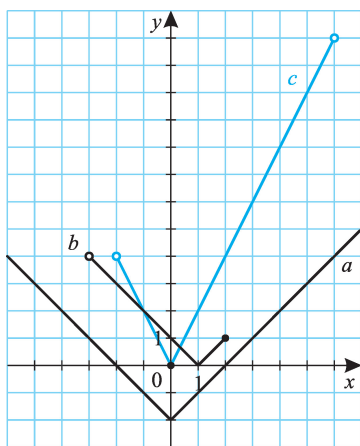
Az értékkészletek:  
 $R_a = R_b = R_d = \mathbf{R}_0^+$ ;  
 $R_c = [-5; 0]$ . ( $\sqrt{x^2} = |x|$ .)

641.

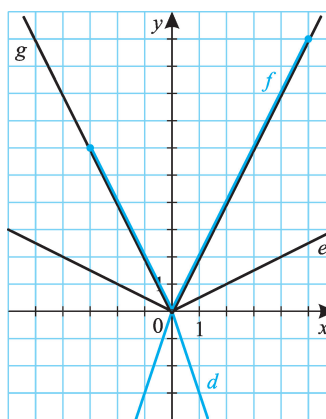


642.

642/I.



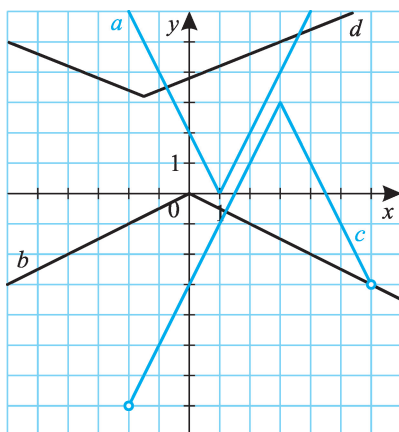
642/II.



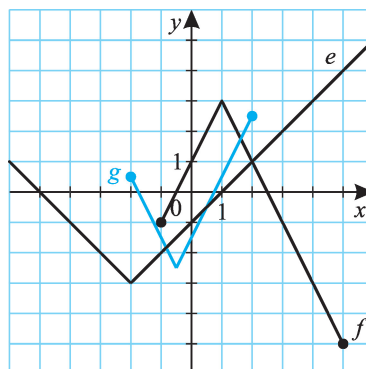
Az értékkészletek:  
 a)  $R_a = [-2; \infty[$ ;      b)  $R_b = [0; 4[$ ;  
 c)  $R_c = [0; 12[$ ;      d)  $R_d = \mathbf{R}_0^-$ ;  
 e)  $R_e = \mathbf{R}_0^+$ ;      f)  $R_f = [0; 10]$ ;  
 g)  $\sqrt{4x^2} = 2|x|$ , így  $R_g = [0; \infty[$ .

643.

643/I.



643/II.



Az értékkészletek:

a)  $R_a = [0; \infty[;$

b)  $R_b = ]-\infty; 0];$

c)  $R_c = ]-7; 3];$

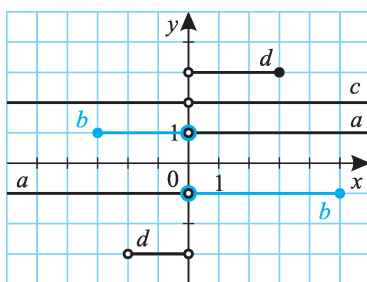
d)  $R_d = [3; 2; \infty[;$

e)  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ , így  $R_e = [-3; \infty[;$

f)  $-2\sqrt{x^2 - 2x + 1} = -2\sqrt{(x-1)^2} = -2|x-1|$ , így  $R_f = [-5; 3];$

g)  $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x+1)^2} = 2\left|x + \frac{1}{2}\right|$ , így  $R_g = [-2,5; 2,5].$

644.



646. a)  $a(x) = -|2x - 3|;$

b)  $b(x) = -|2x + 4| - 1;$

c)  $c(x) = -\frac{1}{2}|x - 2| + 3.$

644.

a)  $\frac{|x|}{x} = 1$ , ha  $x > 0$ ;  $\frac{|x|}{x} = -1$ , ha  $x < 0$ .  $R_a = \{-1; 1\}.$

b)  $R_b = \{-1; 1\};$

c)  $R_c = \{1\};$

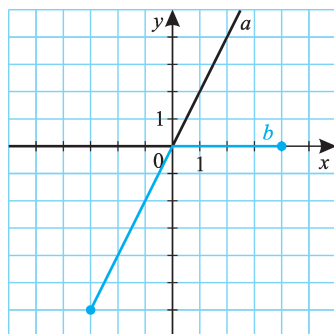
d)  $R_d = \{-3; 3\}.$

645. a)  $a(x) = |x + 1|;$

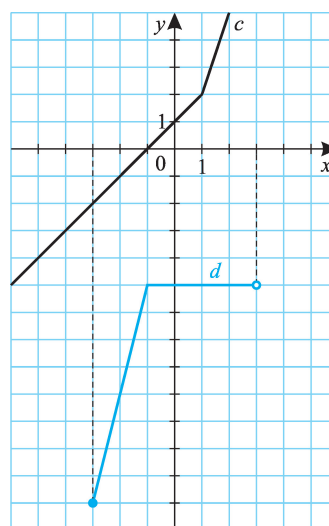
b)  $b(x) = |x - 3| - 1;$

c)  $c(x) = |2x + 2|.$

647/I.



647/II.



647. a) Ha  $x \geq 0$ , akkor  $|x| = x$ ,  $a(x) = 2x$ ; ha  $x < 0$ , akkor  $|x| = -x$ ,  $a(x) = 0$ .  
(647/I. ábra)

b) Ha  $x \geq 0$ , akkor  $b(x) = 0$ ; ha  $x < 0$ , akkor  $b(x) = 2x$ . (647/I. ábra)

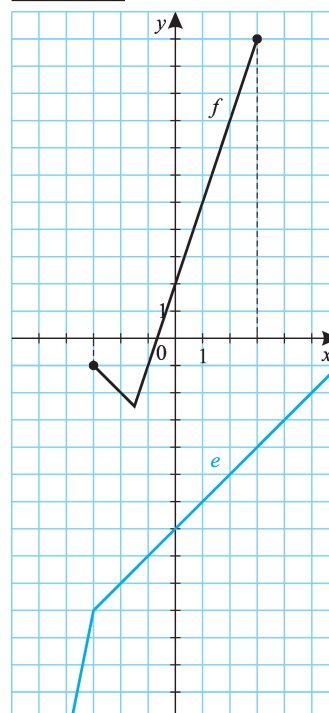
c) Ha  $x \geq 1$ , akkor  $|x - 1| = x - 1$ ,  $c(x) = 3x - 1$ ; ha  $x < 1$ , akkor  $|x - 1| = -(x - 1)$ ,  $c(x) = x + 1$ .  
(647/II. ábra)

d) Ha  $x \geq -1$ , akkor  $d(x) = -5$ ; ha  $x < -1$ , akkor  $d(x) = 4x - 1$ .  
(647/II. ábra)

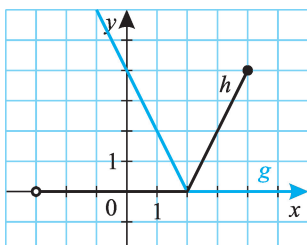
e) Ha  $x \geq -3$ , akkor  $e(x) = x - 7$ ; ha  $x < -3$ , akkor  $e(x) = 5x + 5$ .  
(647/III. ábra)

f) Ha  $x \geq -1,5$ , akkor  $f(x) = 3x + 2$ ; ha  $x < -1,5$ , akkor  $f(x) = -x - 4$ .  
(647/III. ábra)

647/III.



647/IV.

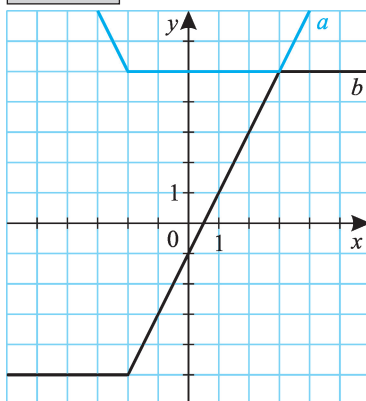


g)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$ . Ha  $x \geq 2$ , akkor  $g(x) = 0$ ; ha  $x < 2$ , akkor  $g(x) = 4 - 2x$ .  
(647/IV. ábra)

h) Ha  $x \geq 2$ , akkor  $h(x) = 2x - 4$ ;  
ha  $x < 2$ , akkor  $h(x) = 0$ .  
(647/IV. ábra)

648. a) A kifejezést három részre bontjuk.

648/I.



I.  $x \leq -2$ . Ekkor  $|x + 2| = -(x + 2)$ ,  
 $|x - 3| = -(x - 3)$ .

$$a(x) = -x - 2 + 3 - x = 1 - 2x.$$

II.  $-2 < x < 3$ . Ekkor  $|x + 2| = x + 2$ ,

$$|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x.$$

$$a(x) = x + 2 + 3 - x = 5.$$

III.  $3 \leq x$ . Ekkor  $|x + 2| = x + 2$ ,

$$|x - 3| = x - 3.$$

$$a(x) = x + 2 + x - 3 = 2x - 1.$$

(648/I. ábra)

b) Ha  $x \leq -2$ , akkor

$$b(x) = -2 - x + x - 3 = -5.$$

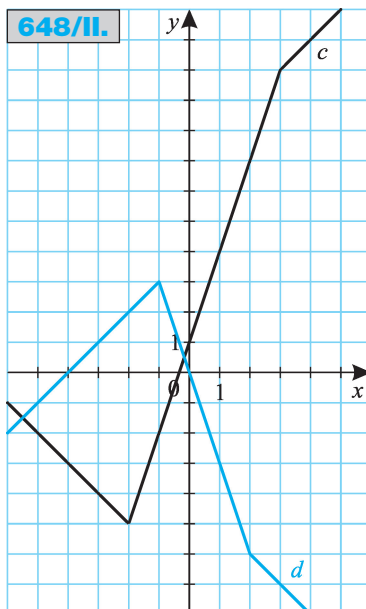
Ha  $-2 < x < 3$ , akkor

$$b(x) = x + 2 + x - 3 = 2x - 1.$$

Ha  $3 \leq x$ , akkor  $b(x) = x + 2 + 3 - x = 5$ .

(648/I. ábra)

648/II.



c) Ha  $x \leq -2$ , akkor

$$c(x) = -4 - 2x + x - 3 = -x - 7.$$

Ha  $-2 < x < 3$ , akkor

$$c(x) = 2x + 4 + x - 3 = 3x + 1.$$

Ha  $3 \leq x$ , akkor

$$b(x) = 2x + 4 + 3 - x = x + 7.$$

(648/II. ábra)

d) Ha  $x \leq -1$ , akkor

$$d(x) = 2x + 2 + 2 - x = 4 + x.$$

Ha  $-1 < x < 2$ , akkor

$$d(x) = -2x - 2 + 2 - x = -3x.$$

Ha  $2 \leq x$ , akkor

$$d(x) = -2x - 2 + x - 2 = -x - 4.$$

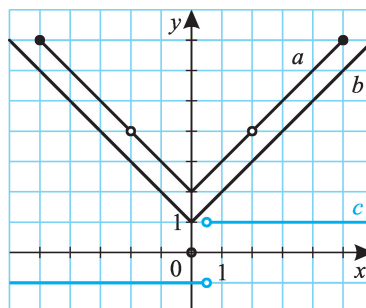
(648/II. ábra)

649. a)  $x^2 - 4 = |x|^2 - 4 =$   
 $= (|x| + 2)(|x| - 2)$ , így  
 $a(x) = |x| + 2$ , ha  $|x| \neq 2$ ,  
 vagyis  $x \neq \pm 2$ .

b)  $x^2 + 2|x| + 1 = |x|^2 + 2|x| + 1 =$   
 $= (|x| + 1)^2$ , így  $a(x) = |x| + 1$ .  
 ( $|x| \neq -1$  mindig teljesül.)

c)  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = |2x - 1|$ .  
 Ha  $x > 0,5$ , akkor  $c(x) = 1$ ;  
 ha  $x < 0,5$ , akkor  $c(x) = -1$ .

649.



650. a) Ha  $x \leq -3$ , akkor  
 $a(x) = -x - 1 - x - 3 - 2x =$   
 $= -4x - 4$ .

Ha  $-3 < x < -1$ , akkor  
 $a(x) = -x - 1 + x + 3 - 2x =$   
 $= -2x + 2$ .

Ha  $-1 \leq x$ , akkor  
 $a(x) = x + 1 + x + 3 - 2x = 4$ .

b) A függvényábrázolást négy lépésben végezzük el.

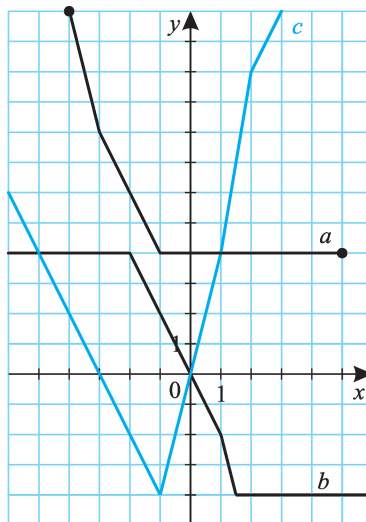
Ha  $x \leq -2$ , akkor  
 $b(x) = 3 - 2x + x - 1 + x + 2 = 4$ .

Ha  $-2 < x \leq 1$ , akkor  
 $b(x) = 3 - 2x + x - 1 - x - 2 = -2x$ .

Ha  $1 < x \leq 1,5$ , akkor  
 $b(x) = 3 - 2x - x + 1 - x - 2 =$   
 $= -4x + 2$ .

Ha  $1,5 < x$ , akkor  
 $b(x) = 2x - 3 - x + 1 - x - 2 = -4$ .

650.



c)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 3\sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x - 1| - 2|x - 2| +$   
 $+ 3|x + 1|$ .

Ha  $x \leq -1$ , akkor  $c(x) = -x + 1 + 2x - 4 - 3x - 3 = -2x - 6$ .

Ha  $-1 < x \leq 1$ , akkor  $c(x) = -x + 1 + 2x - 4 + 3x + 3 = 4x$ .

Ha  $1 < x \leq 2$ , akkor  $c(x) = x - 1 + 2x - 4 + 3x + 3 = 6x - 2$ .

Ha  $2 < x$ , akkor  $c(x) = x - 1 - 2x + 4 + 3x + 3 = 2x + 6$ .

651. Az  $f(-2) = 1$  egyenletből  $2a + b = 1$ ; az  $f(1) = -1$  egyenletből  $a + b = -1$ . Innen  $(a; b) = (2; -3)$ .

652. Az  $f(-2) = 3$  egyenletből  $|-1 + a| + b = 3$ ; az  $f(4) = 0$  egyenletből  $|4 + a| + b = 0$ .

A második egyenletből  $b = -|4 + a|$ , az elsőbe visszahelyettesítve  $|a - 1| - |4 + a| = 3$ .

Az egyenlet megoldását három lépésben hajthatjuk végre.

I. Ha  $a \leq -4$ , akkor  $|a - 1| - |4 + a| = 1 - a + 4 + a = 5$ . Ekkor az  $5 = 3$  egyenletnek nincs megoldása.

II. Ha  $-4 < a < 1$ , akkor  $|a - 1| - |4 + a| = 1 - a - 4 - a = -2a - 3$ .  
Ekkor  $-2a - 3 = 3$ ,  $a = -3$ ,  $b = -1$ .

III. Ha  $1 \leq a$ , akkor  $|a - 1| - |4 + a| = a - 1 - 4 - a = -5$ . Ekkor az  $a - 5 = 3$  egyenletnek nincs megoldása.

Vagyis  $(a; b) = (3; -1)$ .

**653.** Az  $x \mapsto |x|$  „normál” abszolútérték-függvényt a  $(-3; -1)$  vektorral kell eltolnunk, hogy csúcsa a  $C(-3; -1)$  pontba kerüljön, ezért  $b = 3, c = -1$ . Ha az  $f(x) = a|x + 3| - 1$  függvény képe átmegegy az  $A(1; 7)$  ponton, akkor  $f(1) = 7$ . Innen  $4a - 1 = 7$ ,  $a = 2$ .

Tehát  $(a; b; c) = (2; 3; -1)$ .

**654.** a)  $a(x) = 2x - |x|$ ;

b)  $b(x) = 2|x - 1| - x - 1$ ;

c)  $c(x) = |x| + |x - 3| - 1$ .

**655.** a)  $a(x) = |x - 1| + |x + 1|$ ;

b)  $b(x) = |x - 2| - |x + 1|$ ;

c)  $c(x) = |x - 1| + 2|x + 1| - 4$ .

## Másodfokú függvények

**656.** A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékészleteik:

a)  $[0; \infty[$ ;

b)  $[0; \infty[$ ;

c)  $[-2; \infty[$ ;

d)  $] -\infty; 3]$ ;

e)  $[-3; \infty[$ .

**657.** a)  $a(x) = x^2 - 3$ ;

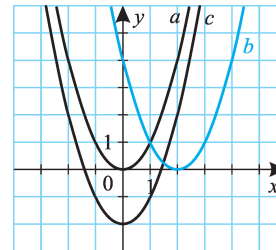
b)  $b(x) = -2x^2 + 1$ ;

c)  $c(x) = (x + 2)^2 - 6$ .

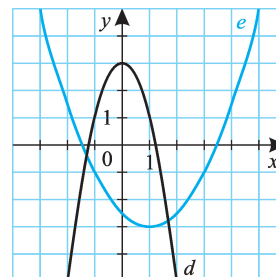
**658.** A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Teljes négyzetté alakítással megkapjuk a függvények transzformációs alakját. Ebből meghatározhatjuk az értékészletet, majd ábrázolhatjuk a függvényeket. Az  $y = f(x)$  függvény  $x$  tengelymetszetét az  $y = 0$ ,  $y$  tengelymetszetét az  $x = 0$  helyettesítés segítségével határozhatjuk meg.

**656/I.**



**656/II.**





**661.** Ha  $c = 0$ , akkor az  $ax^2 + bx = x(ax + b)$  átalakításból látható, hogy a parabola átmegy az origón.

Ha  $b = 0$ , akkor a parabola tengelye egybeesik az  $y$  tengellyel.

**662.** a)  $a(x) = -\frac{x(x-4)}{2}$ ;                      b)  $b(x) = -(x-2)(x-4)$ ;

c)  $c(x) = \frac{(x-6)(x+5)}{30}$ .

**663.** Ha az  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) egyenlet két gyöke  $u$  és  $v$ , akkor az  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  függvény képe az  $x_1 = u$  és  $x_2 = v$  helyeken metszi az  $x$  tengelyt, a függvény szélsőértéke (a parabola csúcsa vagy tengelypontja) az  $x = \frac{u+v}{2}$  helyen van.

**664.** Parabola és egyenes kölcsönös helyzete négyféle lehet:

1. metszik egymást két pontban;
2. az egyenes érinti a parabolát;
3. az egyenes egy pontban metszi a parabolát;
4. nincs közös pontjuk.

A 3. eset csak úgy valósulhat meg, ha az egyenes párhuzamos a parabola tengelyével (és minden ilyen egyenes egy pontban metszi a parabolát).

**665.** a) Ha az  $A, B, C$  pontok koordinátáit rendre behelyettesítjük az  $y = ax^2 + bx + c$  egyenletbe, akkor három egyenletet kapunk három ismeretlennel:

$$0 = a + b + c; \quad 0 = 4a - 2b + c; \quad 20 = 9a + 3b + c.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $(a; b; c) = (2; 2; -4)$ , a parabola egyenlete  $y = 2x^2 + 2x - 4$ .

*Más megoldási lehetőség:*

A parabola  $A$  és  $B$  pontokban metszi az  $x$  tengelyt, ezért a parabola tengelye  $x = -0,5$ -nél van. Az  $a(x + 0,5)^2 + v$  transzformációs alakkal is dolgozhatunk.

b)  $y = \frac{8}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{44}{5}$ .

c) Nincs ilyen parabola. Az  $A, B, C$  pontok az  $y = x$  egyenletű egyenesen vannak, márpedig egy parabolának és egy egyenesnek nem lehet három közös pontja.

d) Nincs ilyen parabola. Az  $A, B, C$  pontok az  $y = 2x + 5$  egyenletű egyenesen vannak.

**666.**  $(a; b; c) = (2; 3; -1)$ .

**667.** A függvénygörbe egyenletét az  $y = a(x+1)(x-2)$  gyöktényezős alakban kereshetjük. Az  $(1; 4)$  pont behelyettesítésével  $4 = a(1+1)(1-2)$ , innen  $a = -2$ .  
 $f(x) = -2(x+1)(x-2) = -2x^2 + 2x + 4$ ;  $(a; b; c) = (-2; 2; 4)$ .

**668.** A parabola egyenletét  $y = a(x-3)^2 + 2$  transzformációs alakban kereshetjük. Az  $M$  pont koordinátáinak behelyettesítésével a  $-3 = a(0-3)^2 + 2$

egyenletet kapjuk, innen  $(a; b; c) = \left(-\frac{5}{9}; \frac{10}{3}; -3\right)$ .

**669.** A függvény képe felfelé nyitott (minimum-) parabola. Az  $x^2 + 2x + c$  kifejezést teljes négyzetté alakíthatjuk:  $x^2 + 2x + c = (x + 1)^2 + c - 1$ ; vagy vizsgálhatjuk a  $D = 4 - 4c$  diszkriminánst.

- a)  $D > 0$ , innen  $c < 1$ .
- b)  $c = 1$ .
- c)  $c > 1$ .
- d)  $f(3) = 0$ , vagyis  $9 + 6 + c = 0$ . Innen  $c = -15$ .
- e)  $(x + 1)^2 + c - 1 \geq 3$ . Innen  $c = 4$ , és a minimumhely  $x = -1$ .
- f)  $D < 0$ ,  $c > 1$ .
- g) Nem lehetséges.

**670.** A transzformációs alak  $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$ . Innen a  $\frac{b}{2} = -2$  és  $c - \frac{b^2}{4} = 3$  egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása  $(b; c) = (-4; 7)$ .

**671.** Az  $f$  függvény zérushelyei  $x_1 = -2,5$  és  $x_2 = 1$ . A függvény képe a 671. ábrán látható. Az ábra alapján  $f(x) > 0$ , ha  $x < -2,5$  vagy  $1 < x$ .

**672.**  $f(x) - g(x) \leq 0$  átrendezéssel a  $3x^2 + x - 4 \leq 0$  egyenlőtlenséget kapjuk. A  $3x^2 + x - 4 = 0$  egyenlet két gyöke  $x_1 = -\frac{4}{3}$  és  $x_2 = 1$ , az  $f(x) - g(x)$  függvény képe a 672. ábrán látható.

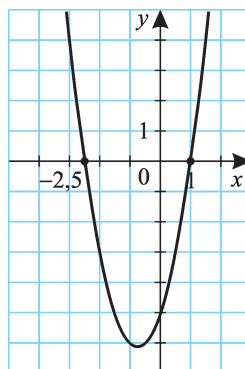
Az egyenlőtlenség megoldása  $-\frac{4}{3} \leq x \leq 1$ .

**673.** A gépkocsi gyorsulása  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{3 \frac{\text{p}}{\text{p}}} = \frac{5 \text{ km}}{1 \text{ p}} = 1,66 \frac{\text{km}}{\text{p}^2}$ .

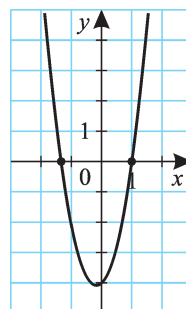
a) Az 1 perc alatt megtett út  $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{5}{6} \cdot 1^2 = \frac{5}{6} \text{ (km)} \approx 833,33 \text{ m}$ .

b) Az út (km)–idő (perc) grafikonon  $s = \frac{5}{6} t^2$  egy parabola egyenlete.

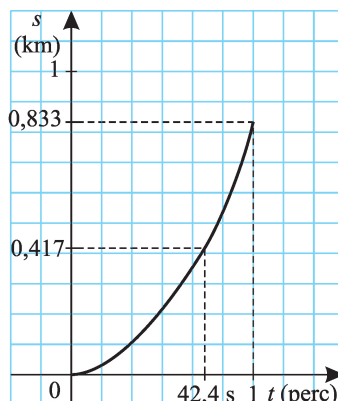
671.



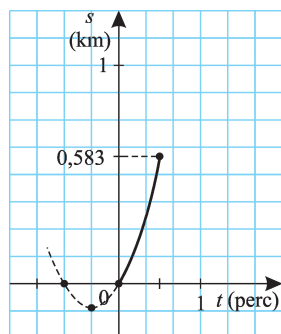
672.



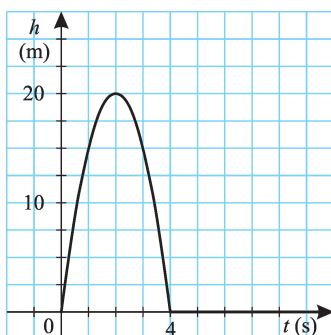
673.



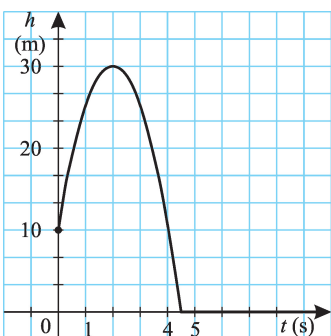
674.



675.



676.



c) Az  $\frac{5}{6}t^2 = \frac{5}{12}$  egyenletből számíthatjuk ki azt az időt, ami a gyorsulási útszakasz felének megtételéhez szükséges.  $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$  (perc), ami közelítőleg 42,4 s.

**674.**  $40 \text{ km/h} = \frac{2}{3} \text{ km/p}$ ,  $100 \text{ km/h} = \frac{5}{3} \text{ km/p}$ .  
 $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60 \text{ km/h}}{0,5 \text{ p}} = \frac{1 \text{ km/p}}{0,5 \text{ p}} = 2 \text{ km/p}^2$ .

A fél perc alatt megtett út  $s = v_0 t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{12} \text{ (km)} \approx 583,3 \text{ m}$ .

Az út (km)–idő (perc) grafikonon az  $s = \frac{2}{3}t + t^2$  egy parabola egyenlete.  $t^2 + \frac{2}{3}t = \left(t + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}$ , így a függvény képe (674. ábra):

**675.** A kavics földfelszíntől mért távolságát a  $h = v_0 t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = 20t - 5t^2$  függvény írja le. (Itt a  $h$ -t méterben, a  $t$ -t másodpercben mérjük.) A függvény képe parabola. A transzformációs alak  $-5t^2 + 20t = -5(t - 2)^2 + 20$ , a pálya legmagasabb pontja a  $t = 2 \text{ s}$  időhöz tartozó 20 méter. (A  $-5t^2 + 20t = 5t(4 - t)$  átalakításból is meg tudhatjuk, hogy a maximumhely 0 és 4 átlaga.)

**676.** Ekkor  $h = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} \cdot t^2$  a mozgást leíró egyenlet. A  $h = -5t^2 + 20t + 10$  parabola egyenlete, transzformációs alakja  $h = -5(t - 2)^2 + 30$ , zérushelyei  $t_1 = 2 - \sqrt{6} \approx -0,45$  és  $t_2 = 2 + \sqrt{6} \approx 4,45$ .

**677.** Az  $x + 2y = 40$  feltétel mellett a  $t = xy$  függvényt vizsgáljuk (a területet  $m^2$ -ben kapjuk).

a) Mivel  $y = 20 - \frac{x}{2}$ ,  $t = x \left( 20 - \frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{2}x^2 + 20x$ .

b)  $x = 40 - 2y$ , így  $t = (40 - 2y)y = -2y^2 + 40y$ .

c) A  $t = -2y^2 + 40y = -2(y^2 - 20y) = -2(y - 10)^2 + 200$  átalakításból következik, hogy  $t \leq 200$ . A  $t = 200$  maximális értéket akkor kapjuk meg, ha  $y = 10$  és  $x = 20$ .

**678.** Az  $a$  oldalú szabályos háromszög területe  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  (ha az oldalt cm-ben adjuk meg, akkor a területet  $cm^2$ -ben kapjuk). Ha az első háromszög oldala  $x$  hosszú, területe  $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ; ekkor a második háromszög oldalának hossza  $(20 - x)$ , területe  $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(20 - x)^2$ .  $t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 40x + 400) = \frac{\sqrt{3}}{2}((x - 10)^2 + 100)$ .

a) A területösszeg akkor minimális, ha  $x = 10$  (cm), vagyis a háromszögek egybevágók. Ekkor a minimum  $t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 100$  ( $cm^2$ ).

b) A területösszegnek nincs maximuma. Ha  $x$  értéke 20-hoz közelít, akkor  $t_1 + t_2$  megközelíti a  $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 400 = \sqrt{3} \cdot 100$  ( $cm^2$ ) értéket.

**679. a)** Legyen az első négyzet oldala  $x$ ! Ekkor  $t_1 + t_2 = x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$ . Az előző feladatbeli szabályos háromszögek területösszegének  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ -szorosát kaptuk.

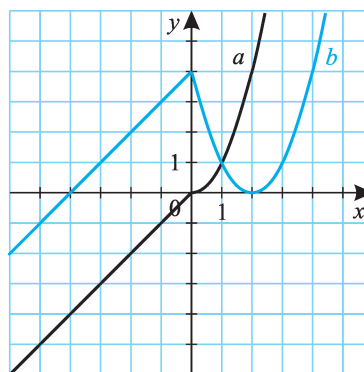
A minimumhely ugyanúgy  $x = 10$  (cm), maximum nincs.

b) Legyen az első félkör átmérője  $x$ ! Ekkor  $t_1 + t_2 = \frac{\pi}{4}(2x^2 - 40x + 400)$ .

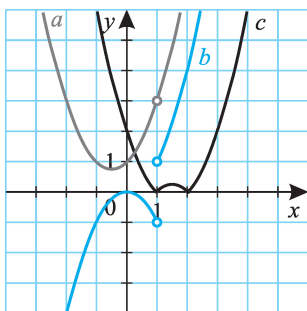
A minimumhely ugyanúgy  $x = 10$  cm esetén lép fel, maximum nincs.

**680.** (680. ábra)

**680.**



681.



$$681. a) \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1, \text{ ha } x \neq -1.$$

$$a(x) = (x + 0,5)^2 + 0,75.$$

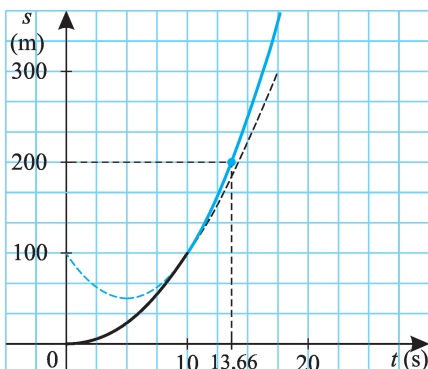
$$b) \frac{x^3 - x^2}{|x - 1|} = x^2 \cdot \frac{x - 1}{|x - 1|}. \text{ Ha } x > 1,$$

$$b(x) = x^2; \text{ ha } x < 1, b(x) = -x^2.$$

$$c) c(x) = \sqrt{(x-1)^2(x-2)^2} = |(x-1)(x-2)|.$$

682. a) Az első útszakasz hossza  $s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot t^2 = 100$  (m), ennek végén  $v_1 = a_1 \cdot t = 20$  (m/s) sebességet ér el az autó. A második 10 másodpercben megtett útszakasz hossza  $s_2 = v_1 t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = 400$  (m), ez adódik hozzá  $s_1$ -hez.

682.



b) Az  $s(m) - t(s)$  grafikon két függvénygörbéből áll. A  $0 \leq t \leq 10$  értékekre  $s = t^2$ , ehhez csatlakoztatjuk a  $10 < t \leq 20$  értékekre az  $s = 20t + 2t^2$  függvénygörbe  $(10; 100)$  vektorral eltoló képét. (A görbe valódi egyenlete  $s = 20(t - 10) + 2(t - 10)^2 + 100 = 2t^2 - 20t + 100$ .)

c) Az átlagos gyorsulás az  $a = \frac{2s}{t^2}$  képlet segítségével számítható ki, ahol  $s$  és  $t$  az összes megtett út, illetve eltelt idő:  $a = \frac{2 \cdot 500}{400} = 2,25$  (m/s<sup>2</sup>).

683. a) Az  $s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot t_1^2$  összefüggés alapján  $t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10$  (s). Az

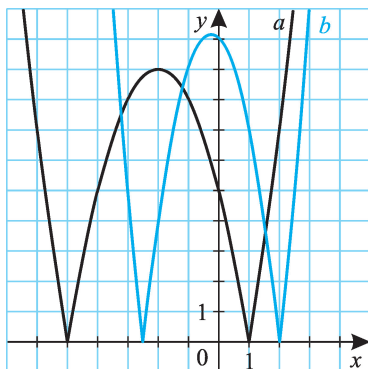
útszakasz végén az autó sebessége  $v_1 = a_1 \cdot t = 2 \cdot 10 = 20$  (m/s) volt.

A második útszakaszra felírható egyenlet  $s_2 = v_1 t_2 + \frac{a_2}{2} \cdot t_2^2$ , innen  $2t_2^2 + 20t_2 - 100 = 0$ . A  $t_2$ -re kapott két gyök  $t_{2,1} = 3,66$  (s) és  $t_{2,2} = -13,66$  (s) közül nyilván csak az első megfelelő.

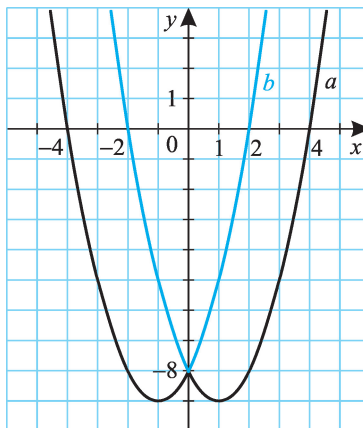
Az előző feladat megoldásának grafikonját kapjuk, a  $0 \leq t \leq 13,66$  értékekre leszűkítve.

b) A teljes megtett út  $s = 200$  m, az eltelt idő  $t = t_1 + t_2 = 13,66$  s. Az átlagos gyorsulás  $a = \frac{2s}{t^2} = \frac{400}{13,66^2} \approx 2,14$  (m/s).

684.



685/I.



**684.** Először ábrázoljuk az  $x \mapsto x^2 + 4x - 5$ , illetve  $x \mapsto -2x^2 - x + 10$  függvényeket; majd az abszolútérték miatt a függvénygörbék  $x$  tengely alatti pontjait tükrözzük az  $x$  tengelyre (ábra).

**685. a)** Ha  $x \geq 0$ , akkor  $a(x) = x^2 - 2x - 8$ ; ha  $x < 0$ , akkor  $a(x) = x^2 + 2x - 8$ . (685/I. ábra)

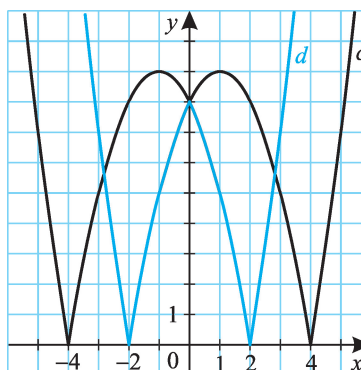
*Eljárhatunk másképpen is.* Minden  $x$ -re  $a(x) = a(-x)$ , vagyis a függvény páros, képe tengelyesen szimmetrikus az  $y$  tengelyre. Ezért először az  $x \geq 0$  félsíkban ábrázoljuk a függvényt, majd az így kapott görbét tükrözzük az  $y$  tengelyre.

b) (685/I. ábra)

c) Az abszolútérték miatt az a) esetben kapott függvénygörbe  $x$  tengely alatti pontjait tükrözzük az  $x$  tengelyre.  
(685/II. ábra)

685/II.

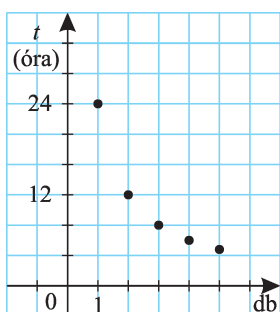
d) Az abszolútérték miatt a b) esetben kapott függvénygörbe  $x$  tengely alatti pontjait tükrözzük az  $x$  tengelyre.  
(685/II. ábra)



## Racionális törtfüggvények

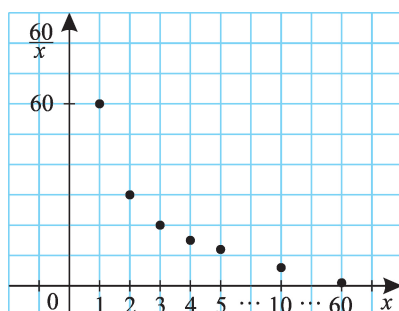


686.



**686.** Általában  $x$  cső esetén  $\frac{24}{x}$  óra alatt telik meg a medence. A megnyitott csövek száma és a medence feltöltéséhez szükséges idő között fordított arányosság áll fenn. Az  $x \mapsto \frac{24}{x}$  függvénynek az  $x = 1, 2, 3, 4, 5$  értékekre való leszűkítése adja a függvény grafikonját.

687.

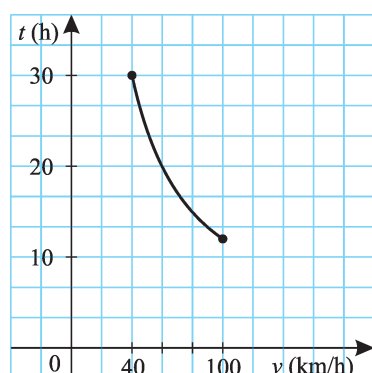


**687.** a) 45 munkadarab elkészítéséhez összesen 60 munkaóra van szükség. Ezt elvégezheti 1 munkás 60 óra alatt, 2 munkás 30 óra alatt, 3 munkás 20 óra alatt, ... , végül 30 munkás 2 óra alatt.

b) A munkások száma és a munkadarabok elkészítéséhez szükséges idő fordítottan arányos.

c) Az  $x \mapsto \frac{60}{x}$ ,  $x \in \{1, 2, 3, \dots, 30\}$  függvény képe: (687. ábra).

688.

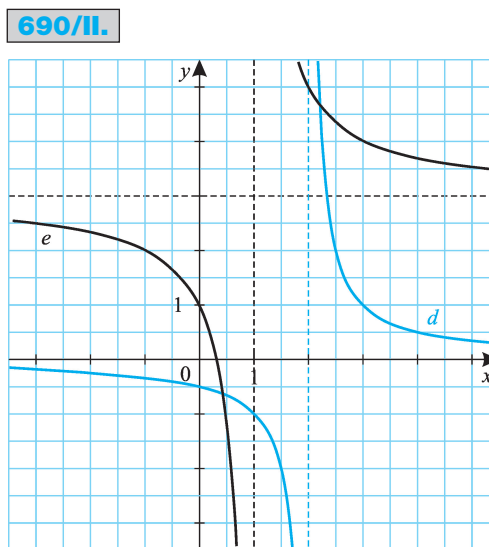
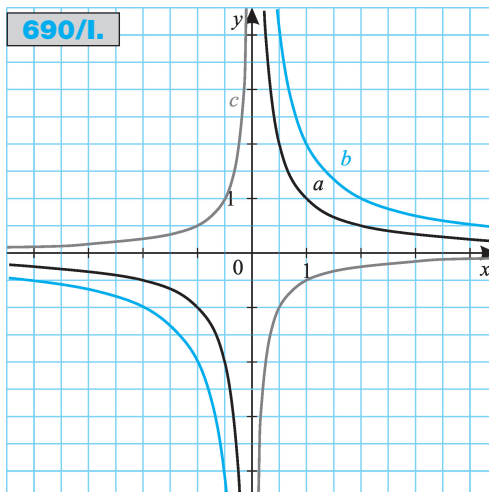


**688.** a) Az út megtételéhez szükséges idő és az ehhez szükséges átlagos sebesség fordítottan arányos.

b) A  $t = \frac{1200}{v}$ ,  $40 \leq v \leq 100$  függvényt ábrázolhatjuk: (688. ábra).

**689.** Ha az  $x$  és  $y$  mennyiségek fordítottan arányosak, szorzatuk állandó. Így az  $y = f(x)$  grafikon hiperbola:  $y = \frac{c}{x}$ , ahol  $c$  az arányossági tényező ( $c \neq 0$ ).

- 690.** a)  $D_a = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ;  $R_a = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .  
 b)  $D_b = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ;  $R_b = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .  
 c)  $D_c = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ;  $R_c = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .  
 d)  $D_d = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ ;  $R_d = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .  
 e)  $D_e = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ;  $R_e = \mathbf{R} \setminus \{3\}$ .



**691.** a)  $a(x) = \frac{1}{x}$ , ha  $x > 0$ ;  $a(x) = -\frac{1}{x}$ , ha  $x < 0$ .

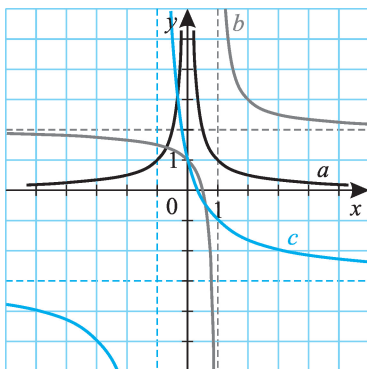
(Másképpen: mivel  $x^2 = |x|^2$ ,  $\frac{|x|}{x^2} = \frac{|x|}{|x|^2} = \frac{1}{|x|}$ .)

b) Állítsuk elő a transzformációs alakot:

$$b(x) = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}.$$



691.



$$c) c(x) = \frac{1-3x}{x+1} = \frac{-3(x+1)+4}{x+1} = -3 + \frac{4}{x+1}.$$

Az értékkészletek:  $R_a = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ;  $R_b = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ;  $R_c = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ ;

$$692. a) a(x) = \frac{1}{x-2};$$

$$b) b(x) = \frac{2}{x+3} - 1;$$

$$c) c(x) = -\frac{1}{2x} + 2.$$

$$693. a) a(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}, \text{ ha } x \neq -1. R_a = \mathbf{R} \setminus \{0; -0,5\}.$$

$$b) b(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}, \text{ ha } x \neq 1. R_b = \mathbf{R} \setminus \{0; 0,5\}.$$

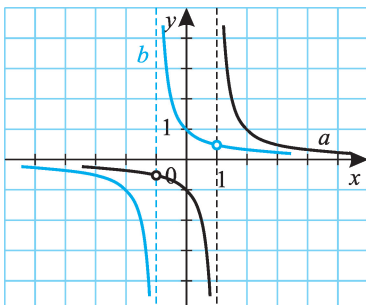
c) Írjuk fel a nevezőt gyöktényezőz alakban!

$$-x^2 + 3x + 10 = -(x-5)(x+2), \text{ így } c(x) = \frac{x^2-25}{10+3x-x^2} = \frac{(x+5)(x-5)}{-(x-5)(x+2)} = -\frac{x+5}{x+2} = -1 - \frac{3}{x+2}, \text{ ha } x \neq 5.$$

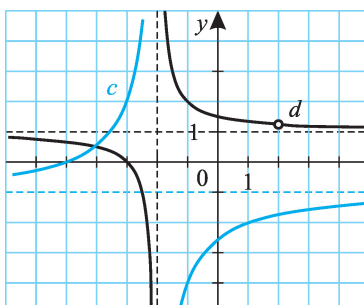
$$R_c = \mathbf{R} \setminus \left\{ -1; -\frac{10}{7} \right\}.$$

$$d) d(x) = \frac{x^2+x-6}{4-x^2} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-2)} = 1 + \frac{1}{x+2}, \text{ ha } x \neq 2. R_d = \mathbf{R} \setminus \{1; 1,25\}.$$

693/I.

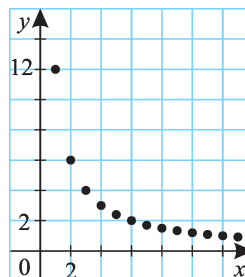


693/II.



**694.** Az arányossági tényező  $3 \cdot 4 = 12$ , a függvény hozzárendelési szabálya  $x \mapsto \frac{12}{x}$ .

**694.**



**695. a)** Egyenes arányosság esetén a koordináták között az  $y = ax$  függvénykapcsolatnak kell fennállnia. Most  $y = 2x - 1$  a kapcsolat, egyenes arányosság nem áll fenn.

Fordított arányosság esetén  $xy = \text{állandó}$ . Mivel  $xy = 6$ , illetve  $xy = 21$  a két pontra, nincs megfelelő fordított arányosság.

b) Megfelelő egyenes arányosság nincs. Fordított arányosság van:  $xy = 6$ .

c) Egyenes arányosság:  $y = \frac{2}{3}x$ ; fordított arányosság:  $xy = 6$ .

**696.** Keressük a függvényeket az  $y = \frac{a}{x+b} + c$  transzformációs alakban!

a) A három pontot behelyettesítve az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$-\frac{5}{3} = \frac{a}{b} + c,$$

$$-2 = \frac{a}{1+b} + c,$$

$$-3 = \frac{a}{2+b} + c.$$

Két-két egyenlet kivonása után két egyenlet marad:

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{b} - \frac{a}{1+b},$$

$$1 = \frac{a}{1+b} - \frac{a}{2+b}.$$

Innen  $3a = b^2 + b$ , illetve  $a = b^2 + 3b + 2$  egyenleteket kapjuk, melyek megoldása  $(a; b) = (0; -1)$ , illetve  $(2; -3)$ . Az első gyökpár hamis, a másodikat felhasználva  $c = -1$ . Tehát a keresett függvény  $x \mapsto \frac{2}{x-3} - 1$ .

b) Az

$$5 = \frac{a}{-2+b} + c,$$

$$-1 = \frac{a}{b} + c,$$

$$1 = \frac{a}{2+b} + c$$

egyenletrendszer megoldása  $(a; b; c) = (-3; 1; 2)$ , a keresett függvény

$$x \mapsto -\frac{3}{x+1} + 2.$$



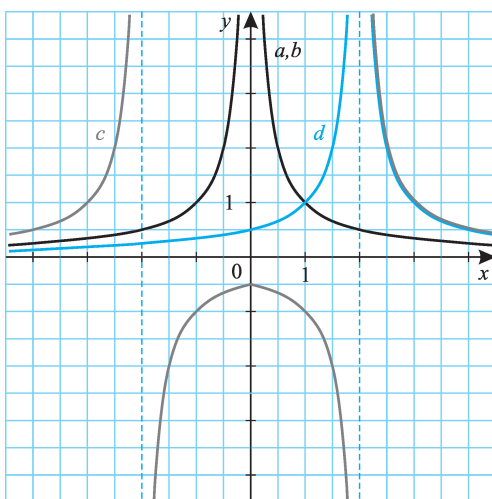
c) A

$$2 = \frac{a}{-2+b} + c, \quad 6 = \frac{a}{b} + c, \quad 12 = \frac{a}{3+b} + c$$

egyenletrendszernek nincs megoldása. Ennek az az oka, hogy a három pont egy egyenesen van (ennek egyenlete  $y = 2x + 6$ ), s egy egyenesnek és egy hiperbolának nem lehet három közös pontja.



698/I.

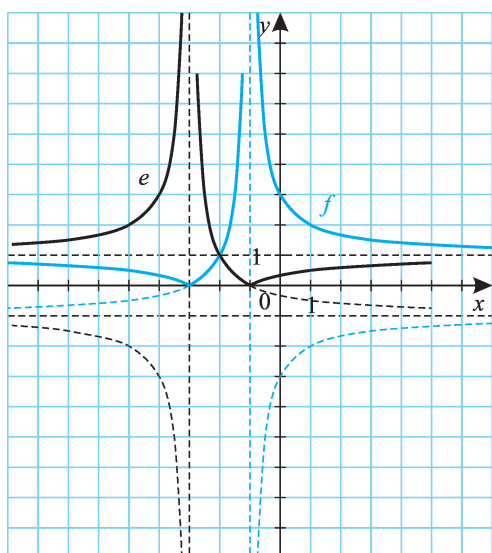


**697.** Az  $y = \frac{a}{x+b} + c$  transzformációs alakból  $\frac{a}{b} + c = 1$  és

$\frac{a}{1+b} + c = 0$  következik, az  $x \neq -1$  feltételből pedig  $b = 1$ . Az egyenletrendszer megoldása  $(a; b; c) = (2; 1; -1)$ , a keresett függvény  $x \mapsto \frac{2}{x+1} - 1$ .

**698.** Az a) és b) függvények megegyeznek 698/I-II. ábra.

698/II.



699. a) A lineáris törtkifejezéseket először transzformációs alakra hozzuk:

$y = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$ . Mivel  $y$  egész szám,  $\frac{3}{x}$  is egész. Továbbá  $x$  is egész szám, tehát  $x$  értékei csak a 3 osztói közül kerülhetnek ki. Az  $x \mapsto \frac{2x+3}{x}$  függvény grafikonja négy rácsponton megy át, ezek:

$x$	1	-1	3	-3
$y$	5	-1	3	1

b)  $y = \frac{3x-1}{x+1} = 3 - \frac{4}{x+1}$ . Az  $x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$  függvény grafikonja hat rácsponton megy át, ezek:

$x+1$	1	2	4	-1	-2	-4
$\frac{4}{x+1}$	4	2	1	-4	-2	-1
$x$	0	1	3	-2	-3	-5
$y$	-1	1	2	7	5	4

c)  $y = \frac{4x+5}{1-x} = -4 + \frac{9}{1-x}$ . Az  $x \mapsto \frac{4x+5}{1-x}$  függvény grafikonja hat rácsponton megy át, ezek:

$1-x$	1	3	9	-1	-3	-9
$\frac{9}{1-x}$	9	3	1	-9	-3	-1
$x$	0	-2	-8	2	4	10
$y$	5	-1	-3	-13	-7	-5

d) Végezzük el az  $y = \frac{x+6}{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+6}{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{13}{2x-1} \right)$  átalakítást!

Innen  $2y = 1 + \frac{13}{2x-1}$ , a lehetséges értékeket az alábbi táblázat tartalmazza:

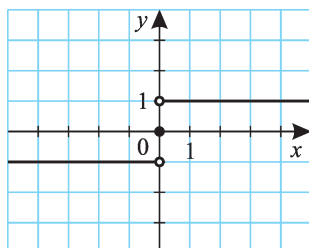
$2x-1$	1	13	-1	-13
$\frac{13}{2x-1}$	13	1	-13	-1
$2y$	14	2	-12	0
$x$	1	7	0	-6
$y$	7	1	-6	0



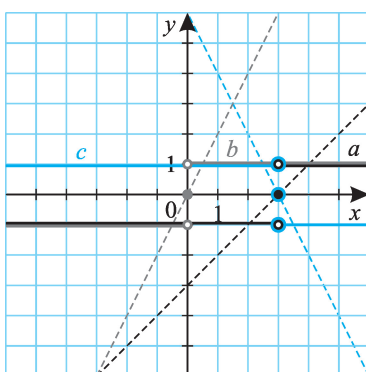
## Előjel, egészrész- és törtrészfüggvények

700.

700. (700. ábra)



701.

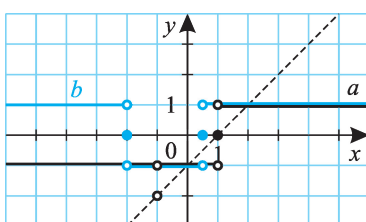


**701.** Rendre megvizsgáljuk, hogy az előjelfüggvény argumentuma mely  $x$  értékekre lesz negatív, nulla, illetve pozitív.

*Másik megoldási lehetőség:*  
A függvényeket ábrázolhatjuk összetett függvényként is.

**702.** Egyik megoldási lehetőség az argumentum előjelvizsgálata, másik az összetett függvényként való ábrázolás.

702/I.



$$a) \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1, \text{ ha } x \neq -1.$$

(702/I. ábra)

$$b) \frac{2x - 1}{x + 2} > 0, \text{ ha } x > 0,5 \text{ vagy}$$

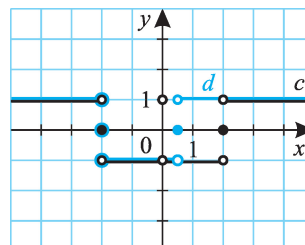
$$x < -2.$$

(702/I. ábra)

c)  $x^2 - 4 > 0$ , ha  $x > 2$  vagy  $x < -2$ .  
(702/II. ábra)

d)  $2x^2 + 3x - 2 > 0$ , ha  $x < -2$  vagy  $0,5 < x$ .  
(702/II. ábra)

702/II.



**703.** Az  $a) - d)$  függvények az argumentum zérushelyein  $y = 0$ , egyébként  $y = 1$  értékeket vesznek fel. A zérushelyek:  $a) x = 0$ ;  $b) x = 0$ ;  $c) x = 2$ ;  $d) x = 2$ . Az  $e)$  függvény zérushelye  $x = 2$  és  $x = -2$ ,  $-2 < x < 2$  helyeken  $y = -1$ , egyébként  $y = 1$  értéket vesz fel.

**704.** Ábrázoljuk az egyenlőtlenségek két oldalán álló kifejezéseket  $x$  függvényeként!

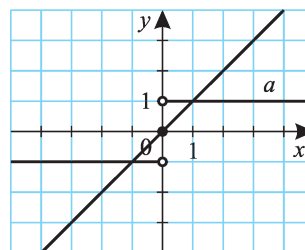
704/I.

a) (704/I. ábra)

Az ábráról leolvasható a megoldás:  
 $-1 < x < 0$  vagy  $1 < x$ .

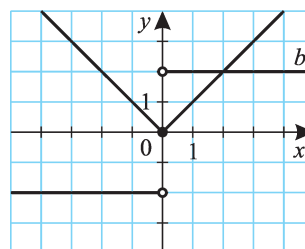
b) (704/II. ábra)

Az ábráról leolvasható a megoldás:  $0 < x < 2$ .



c), d):  $\text{sgn}^2(x) = |\text{sgn}(x)| = \text{sgn}|x|$  minden  $x$ -re teljesül.

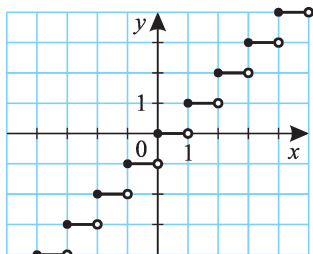
704/II.





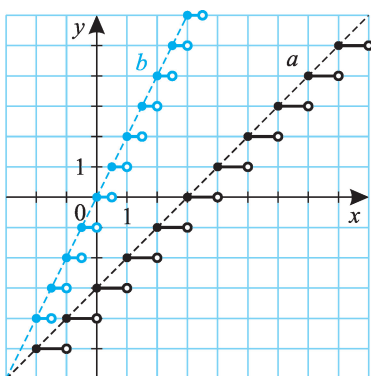
705.

705. (705. ábra)

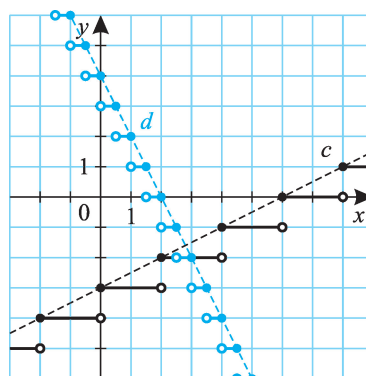


706. (706/I-II. ábra)

706/I.

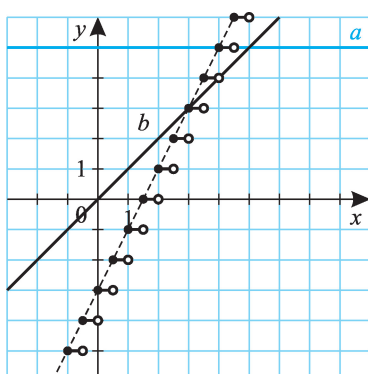


706/II.



707. Az egyenletek megoldásánál a minden valós  $z$  számra teljesülő  $z - 1 < [z] \leq z$  egyenlőtlenségeket használjuk fel.

707/I.



$$a) \quad 2x - 4 < [2x - 3] \leq 2x - 3, \text{ vagyis} \\ 2x - 4 < 5 \leq 2x - 3. \text{ Innen } 4 \leq x < 4,5.$$

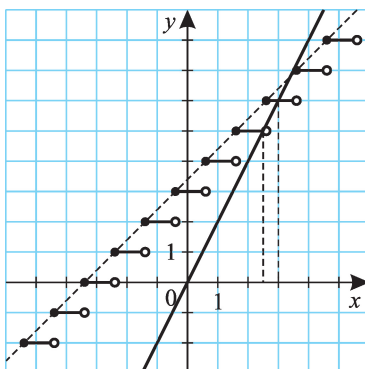
(707/I. ábra)

(Egy másik lehetőség:  
ha  $[2x - 3] = 5$ , akkor  $5 \leq 2x - 3 < 6$ , innen  
 $4 \leq x < 4,5$ .)

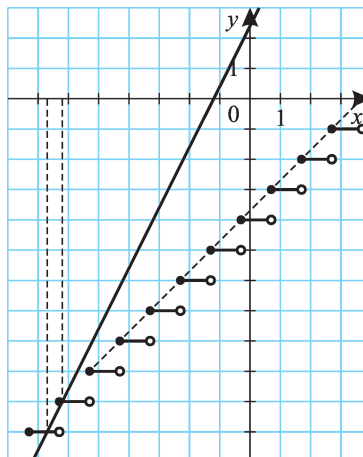
$$b) \quad 2x - 4 < [2x - 3] \leq 2x - 3, \text{ vagyis} \\ 2x - 4 < x \leq 2x - 3. \text{ Innen} \\ 3 \leq x < 4, \text{ s mivel } x \text{ egész, } x = 3.$$

(707/I. ábra)

707/II.



707/III.



c)  $x + 2,4 < [x + 3,4] \leq x + 3,4$ , vagyis  $x + 2,4 < 2x \leq x + 3,4$ . Innen  $2,4 \leq x < 3,4$ ,  $4,8 \leq 2x < 6,8$ , s mivel  $2x$  egész,  $2x = 5$  vagy  $2x = 6$  lehetséges csak. Megoldás:  $x_1 = 2,5$ ,  $x_2 = 3$ . (707/II. ábra)

d) Legyen  $z = 2x + 2,4$ , ekkor  $\left\lfloor \frac{z}{2} - 4,9 \right\rfloor = z$  a megoldandó egyenlet, ahol

$$z \text{ egész szám. } \frac{z}{2} - 5,9 < \left\lfloor \frac{z}{2} - 4,9 \right\rfloor \leq \frac{z}{2} - 4,9, \text{ vagyis } \frac{z}{2} - 5,9 < z \leq$$

$$\leq \frac{z}{2} - 4,9. \text{ Innen } -11,8 < z \leq -9,8. \text{ A lehetséges } z \text{ értékek } -11, \text{ illetve } -10, \text{ s mivel}$$

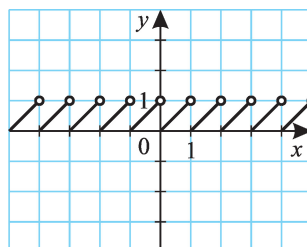
$$\text{vel } x = \frac{z - 2,4}{2}, x_1 = -6,7 \text{ és } x_2 = -6,2.$$

(707/III. ábra)

e)  $x \leq 2,5$  vagy  $2,6 \leq x \leq 3$ .

f)  $-6,7 \leq x < -6,3$  vagy  $-6,2 \leq x$ .

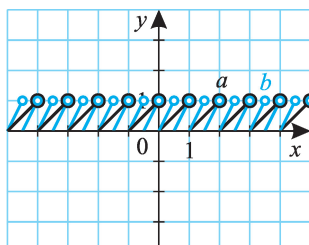
708.



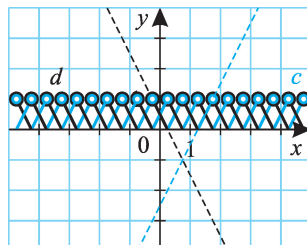
708. (708. ábra)

709. (709/I-II. ábra)

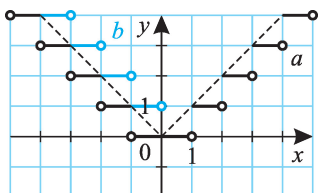
709/I.



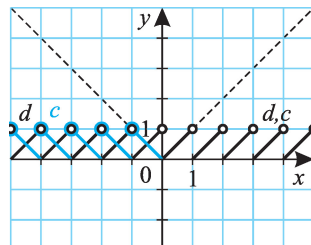
709/II.



710/I.



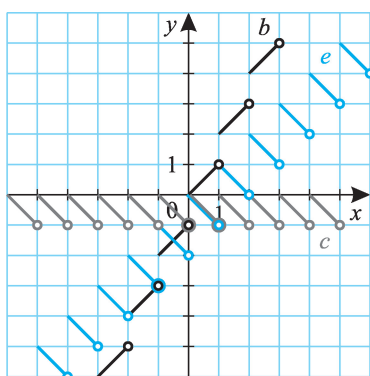
710/II.



**710.** Ha  $x \geq 0$ , akkor  $a(x) = b(x) = [x]$ ,  $c(x) = d(x) = \{x\}$ . Ha  $x < 0$ , akkor a grafikonok: 710/I. ábra, 710/II. ábra. ( $|\{x\}| = \{x\}$  negatív  $x$ -ekre is.)

**711.** a) Definíció szerint  $a(x) = x - [x] = \{x\}$ .

711.



b)

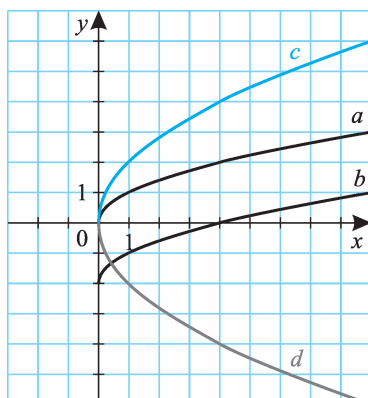
c)  $c(x) = -\{x\}$ .

d)  $d(x) = [x] + \{x\} = x$ .

e)  $e(x) = x - 2\{x\}$  vagy  $e(x) = 2[x] - x$ .

### Négyzetgyökfüggvények

712.



**712.** a)  $D_a = [0; \infty[$ ,  $R_a = [0; \infty[$ .

b)  $D_b = [0; \infty[$ ,  $R_b = [-2; \infty[$ .

c)  $D_c = [0; \infty[$ ,  $R_c = [0; \infty[$ .

d)  $D_d = [0; \infty[$ ,  $R_d = ]-\infty; 0]$ .

**713.** (713. ábra)

**713.**

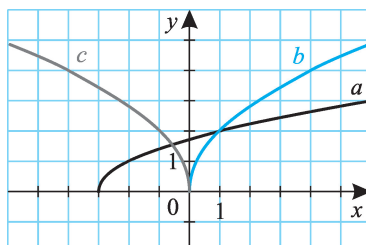
**714.** Az  $x$  és  $y$  tengelymetszeteket az  $y = f(x)$  függvény egyenletében  $y = 0$ , illetve  $x = 0$  helyettesítéssel kaphatjuk meg.

a)  $D_a = [-3; \infty[$ ,  $R_a = [0; \infty[$ , a tengelymetszetek:  $(0; 2\sqrt{3})$ , illetve  $(-3; 0)$ .

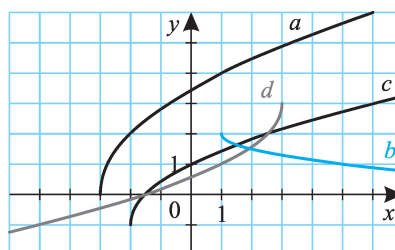
b)  $D_b = [1; \infty[$ ,  $R_b = ]-\infty; 2]$ , az  $x$  tengelymetszet:  $(17; 0)$ .

c)  $D_c = [-2; \infty[$ ,  $R_c = [-1; \infty[$ , a tengelymetszetek:  $(0; 1)$ , illetve  $(-1,5; 0)$ .

d)  $D_d = ]-\infty; 3]$ ,  $R_d = ]-\infty; 3]$ , a tengelymetszetek:  $(0; 3 - \sqrt{6})$ , illetve  $(-1,5; 0)$ .



**714.**

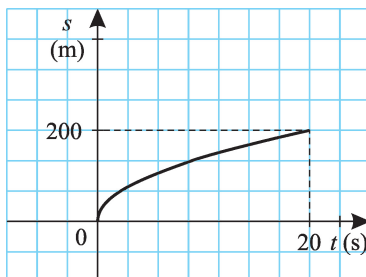


**715.** a)  $a(x) = \sqrt{x-2}$ ;

b)  $b(x) = 2\sqrt{x+3} - 1$ ;

c)  $c(x) = \sqrt{-2x+2} - 2$ .

**716.**



**716.** Az  $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$  összefüggésből  $a = \frac{2s}{t^2} = \frac{400}{400} = 1 \text{ m/s}^2$ . A menetidőt az út

függvényében a  $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2s}$  képlettel írhatjuk le. (Az időt másodpercben, az utat méterben mérjük.)

**717.** a) A matematikai inga egy modell, s a modell soha nem szolgáltat pontos eredményt. Annál pontosabban közelíti meg az elméleti  $T$  érték a gyakorlatit, minél inkább teljesülnek az alábbiak:

- a test aránylag nagy tömegű;
- a fonál tömege elhanyagolható;
- a fonál nyújthatatlan;
- a test pontszerű;
- a mozgás folyamán nem lép fel energiavesztés, vagyis pl. nincs közegellenállás;
- kis  $\alpha$  kezdeti kitéréssel indítjuk az ingát.





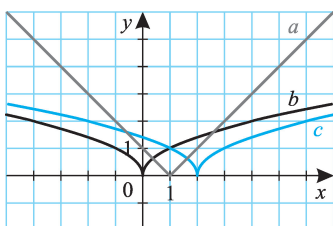
- b) A lengésidő függ a fonal hosszától és a nehézségi gyorsulástól, s természetesen rengeteg dologtól, jelenségtől nem függ. Fizikai szemléletünk szempontjából talán az az érdekes, hogy a lengésidő nem függ a test  $m$  tömegétől és a kezdeti kitérés  $\alpha$  nagyságától. (Ez utóbbi pl. azt jelenti, hogy akár viszonylag magasabbról, akár alacsonyabbról engedjük el az ingát, megközelítőleg ugyanannyi idő alatt érkezik vissza eredeti helyére.)

*Megjegyzés:* Az elméleti érték levezetésekor a  $\sin \alpha \approx \alpha$  közelítést alkalmazták. Ha  $\alpha < 10^\circ$ , a  $\sin \alpha$  és  $\alpha$  közötti relatív eltérés kisebb, mint 0,5%.

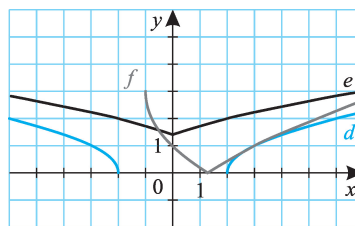
- c) Megnö a lengésidő, így az óra késni fog.  
 d) A Holdon a nehézségi gyorsulás kb. hatoda a földinek. A lengésidő  $\sqrt{6}$ -szorosára nő, az óra késni fog. (Ezt „könnyű” elképzelni: kis gravitáció esetén igen lassan leng az inga.)

**718.** (718/I–II. ábra)

**718/I.**



**718/II.**

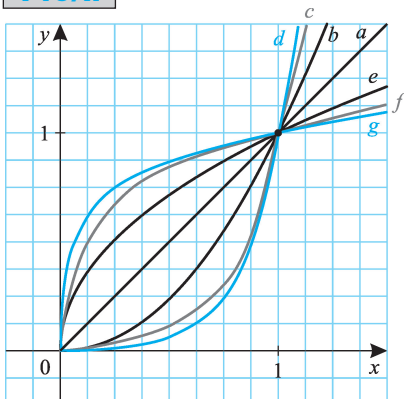


## Magasabb fokú és gyökös függvények

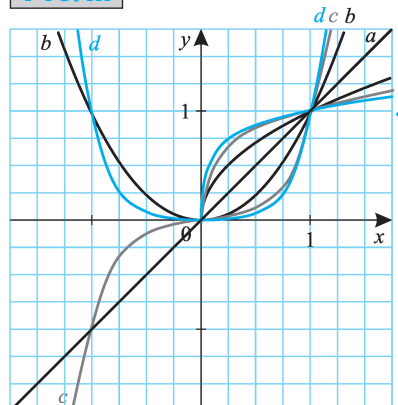
### Hatványfüggvények, gyökfüggvények

**719.** Általában elmondhatjuk a függvényekre, hogy ha a  $]0; 1[$  intervallumon  $f(x) < g(x)$ , akkor az  $]1; 2[$  intervallumon  $f(x) > g(x)$ . (719/I–II. ábra)

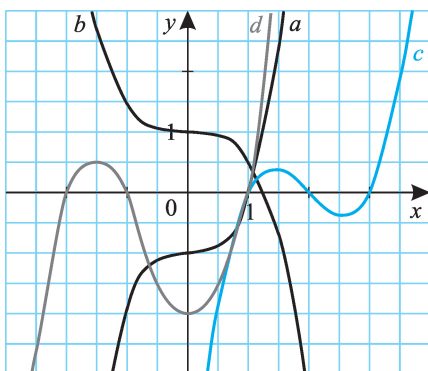
**719/I.**



**719/II.**

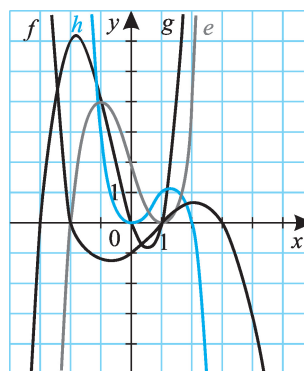


720/I.



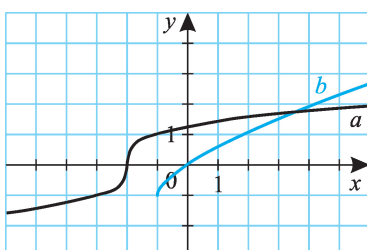
720. (720/I-II. ábra)

720/II.

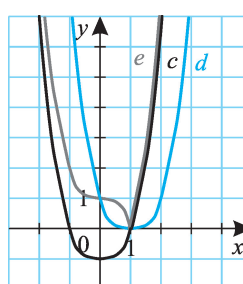


721. (721/I-II. ábra)

721/I.



721/II.



722. a)  $a(x) = \frac{(x+2)^3}{2}$ ;  
 b)  $b(x) = -(x-1)(x+1)(x-2)$ ;  
 c)  $c(x) = \frac{(x-2)(x-2)(x+1)}{2}$ .

### Exponenciális függvények

723. A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

- a)  $R_a = \mathbf{R}^+$ , az y tengelymetszet: (0; 1).
- b)  $R_b = \mathbf{R}^+$ , az y tengelymetszet: (0; 4).
- c)  $2^{x+2} = 4 \cdot 2^x$ , vagyis  $b(x) = c(x)$ .  $R_c = \mathbf{R}^+$ , az y tengelymetszet: (0; 4).
- d)  $R_d = ]-1; \infty[$ , a tengelymetszetek:  $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$ , illetve (2; 0).
- e)  $2 \cdot 2^{x-1} = 2^x$ .  $R_e = ]1; \infty[$ , az y tengelymetszet: (0; 2).



f)  $R_f = ]-\infty; 5[$ , a tengelymetszetek:  $\left(0; -\frac{13}{3}\right)$ , illetve  $\left(\log_2 \frac{15}{2}; 0\right)$ .

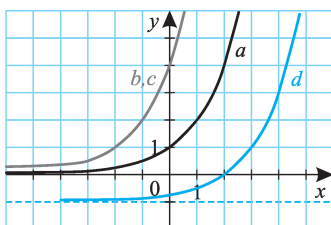
g)  $g(x) = 5^{x-2} - 2$ ;  $R_g = ]-2; \infty[$ , az y tengelymetszet:  $(0; -1,96)$ .

h)  $h(x) = 2 \cdot 10^x - 3$ ;  $R_h = ]-3; \infty[$ , az y tengelymetszet:  $(0; -1)$ .

i)  $i(x) = -h(x)$ ;  $R_i = ]-\infty; 3[$ , az y tengelymetszet:  $(0; 1)$ .

j)  $\sqrt{3^{2x-2}} + 1 = 3^{x-1} + 1$ ;  $R_j = ]1; \infty[$ , az y tengelymetszet:  $\left(0; \frac{4}{3}\right)$ .

723/I.



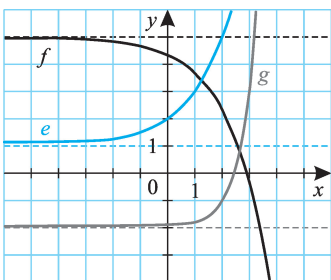
k)  $k(x) = 3^{-x+2} - 3 = 3^{-(x-2)} - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 3$ ;

$R_k = ]-3; \infty[$ , az y tengelymetszet:  $(0; 6)$ .

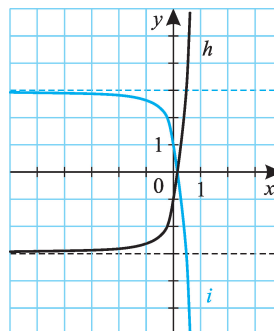
l)  $-16^{-\frac{x}{2}} + 1 = -\left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$ ;  $R_l = ]-\infty; 1[$ ,

az y tengelymetszet:  $(0; 0)$ .

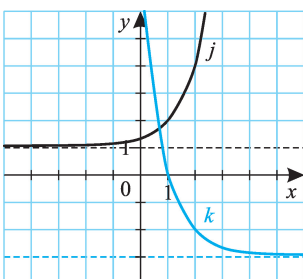
723/II.



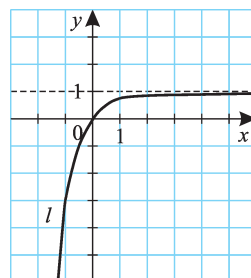
723/III.



723/IV.



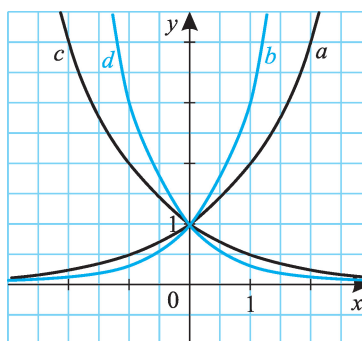
723/V.



**724.** Ha  $x > 0$ , akkor  $b(x) > a(x)$  és  $c(x) > d(x)$ ; ha  $x < 0$ , akkor  $b(x) < a(x)$  és  $c(x) < d(x)$ .

Az  $a)$  és  $c)$ , valamint  $b)$  és  $d)$  függvények képei az  $y$  tengelyre tükrös helyzetűek.

Általában is igaz, hogy az  $x \mapsto a^x$  és  $x \mapsto a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  ( $a > 0$ ) függvények képei tükrös helyzetűek.



724.

**725.** Azonos átalakításokkal megmutathatjuk, hogy  $a(x) = b(x) = c(x) = d(x)$ ; a függvények azonosak, képük megegyezik.

**726.** A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

a)  $2^{1-x} - \frac{3}{2^x} = -\frac{1}{2^x} = -2^{-x}$ .

$R_a = \mathbf{R}^-$ , az  $y$  tengelymetszet:  $(0; -1)$ .

b)  $2^{2-x} = 4 \cdot 2^{-x}$ .  $R_b = \mathbf{R}^+$ , az  $y$  tengelymetszet:  $(0; 4)$ .

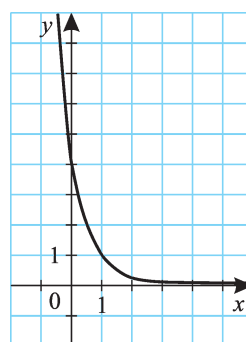
c)  $R_c = [1; \infty[$ , az  $y$  tengelymetszet:  $(0; 1)$ .

d)  $2^{|2-x|} = 2^{2-x} = 4 \cdot 2^{-x}$ , ha  $x \leq 2$ ; és  $2^{|2-x|} = 2^{x-2} = \frac{1}{4} \cdot 2^x$ , ha  $x > 2$ .

$R_d = [1; \infty[$ , az  $y$  tengelymetszet:  $(0; 4)$ .

e)  $2^{2-|x|} = 2^{2-x} = 4 \cdot 2^{-x}$ , ha  $x \geq 0$ ; és  $2^{2-|x|} = 2^{2+x} = 4 \cdot 2^x$ , ha  $x < 0$ .

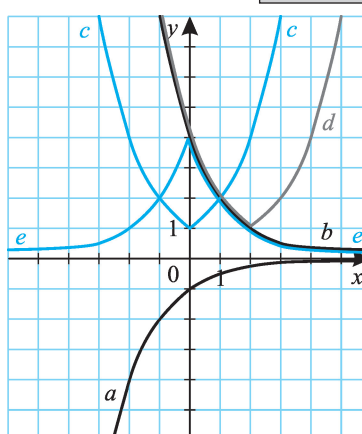
$R_e = ]0; 1]$ , az  $y$  tengelymetszet:  $(0; 4)$ .



725.

**727.** a) 19 nap; b) 18 nap; c) 17 nap.

d) A tavirózsa által fedett terület arányát az  $a)$  esetben az  $F = 2^{t-20}$  függvény írja le, ahol  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 20$  a napok száma (a  $t = 0$  időpont azt jelzi, hogy a tavirózsa kezdetben mekkora arányú területet fed le); ugyanez a  $c)$  esetben  $F = 8 \cdot 2^{t-20} = 2^{t-17}$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, 17$ .



726.



**728.** a) A baktériumok száma  $t$  perc elteltével  $2^t$ . A  $2^t \leq 10^8$  egyenlőtlenség megoldása  $t \leq 26,58$ . Az élettér 27 perc alatt telítődik.

b) A baktériumok száma  $t$  perc elteltével  $10 \cdot 2^t$ .  $10 \cdot 2^t \leq 10^8$  egyenlőtlenségből  $t \leq 23,25$ . Az élettér 24 perc alatt telítődik.



**729.** Az  $a^{-1} = \frac{5}{6}$  egyenletből  $f(x) = \left(\frac{6}{5}\right)^x$ ,  $x \in [-5; 5]$ .  $\left(\frac{6}{5}\right)^{-5} \approx 0,40$ ,  $\left(\frac{6}{5}\right)^5 \approx 2,49$ ;  $R_f = \left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-5}; \left(\frac{6}{5}\right)^5\right] \approx [0,40; 2,49]$ .

**730.** Az  $a^2 + b = 0$ ,  $1 + b = -\frac{5}{4}$  egyenletrendszer megoldása  $(a; b) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$ .

$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{9}{4}$ ,  $R_f = ]-2,25; \infty[$ .

Mivel  $f(3) = \frac{9}{8} > 1$ , a  $(3; 1)$  pont a függvénygörbe alatt van.

### Logaritmusfüggvények

**731.** A függvények értékészlete a valós számok halmaza.

a)  $D_a = \mathbf{R}^+$ , az  $x$  tengelymetszet:  $(1; 0)$ .

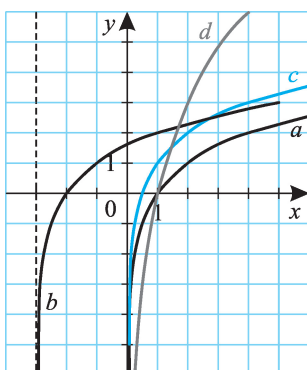
b)  $D_b = ]-3; \infty[$ , a tengelymetszetek:  $(-2; 0)$ , illetve  $(0; \log_2 3)$ .

c)  $D_c = \mathbf{R}^+$ , az  $x$  tengelymetszet:  $(0,5; 0)$ .

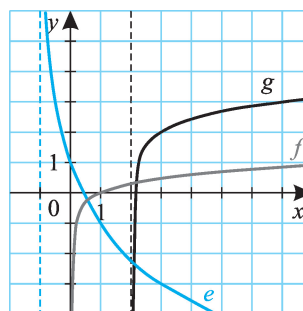
d)  $D_d = \mathbf{R}^+$ , az  $x$  tengelymetszet:  $(1; 0)$ .

e)  $D_e = ]1; \infty[$ , a tengelymetszetek:  $(-1 + \sqrt{2}; 0)$ , illetve  $(0; 1)$ .

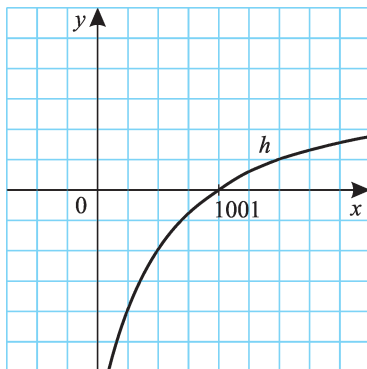
731/I.



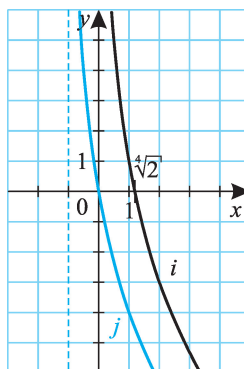
731/II.



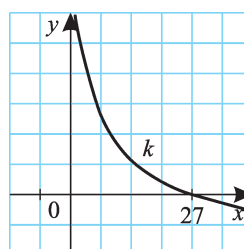
731/III.



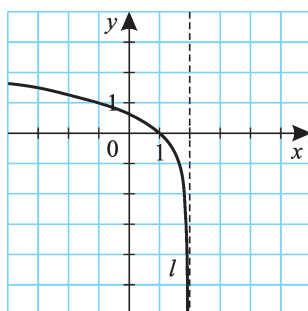
731/IV.



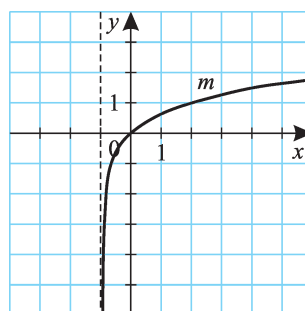
731/V.



731/VI.



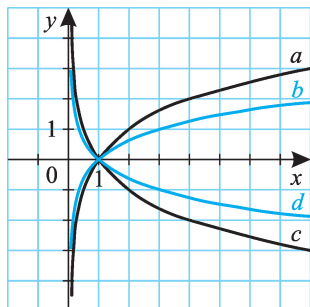
731/VII.



- f)  $D_f = \mathbf{R}^+$ , az  $x$  tengelymetszet:  $(1; 0)$ .
- g)  $D_g = ]2; \infty[$ , az  $x$  tengelymetszet:  $\left(\frac{51}{25}; 0\right)$ .
- h)  $\lg(2x - 2) + \lg 0,5 = \lg(x - 1)$ .  $D_h = ]1; \infty[$ , az  $x$  tengelymetszet:  $(1001; 0)$ .
- i)  $D_i = \mathbf{R}^+$ , az  $x$  tengelymetszet:  $(\sqrt[4]{2}; 0)$ .
- j)  $D_j = ]-1; \infty[$ , a tengelymetszet:  $(0; 0)$ .
- k)  $D_k = \mathbf{R}^+$ , az  $x$  tengelymetszet:  $(27; 0)$ .
- l)  $D_l = ]\infty; 2[$ , a tengelymetszetek:  $(0; \log_3 2)$ , illetve  $(1; 0)$ .
- m)  $-2 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} = -\log_{\frac{1}{3}}(x+1) = \log_3(x+1)$ .  $D_m = ]-1; \infty[$ , a tengelymetszet:  $(0; 0)$ .



732.

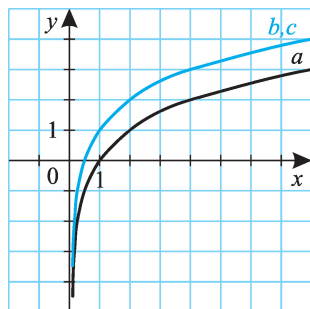


732.

Ha  $x < 1$ , akkor  $b(x) > a(x)$  és  $c(x) > d(x)$ ;  
ha  $x > 1$ , akkor  $b(x) < a(x)$  és  $c(x) < d(x)$ .

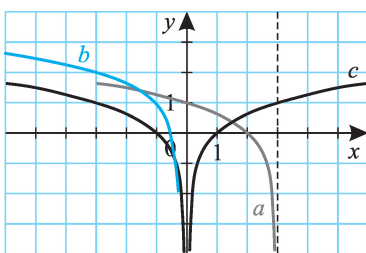
Az  $a)$  és  $c)$ , valamint  $b)$  és  $d)$  függvények képei az  $x$  tengelyre tükrös helyzetűek. Általában is igaz, hogy az  $x \mapsto \log_a x$  és  $x \mapsto \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) függvények képei tükrös helyzetűek.

733.



733. A logaritmus azonosságai miatt  $\log_2(2x) = 1 + \log_2 x$ , a  $b)$  és  $c)$  függvények megegyeznek.

734/I.



734. a) (734/I. ábra)

$D_a = ]-\infty; 3]$ ,  $R_a = \mathbf{R}$ , a tengelymetszetek:  $(2; 0)$ , illetve  $(0; 1)$ .

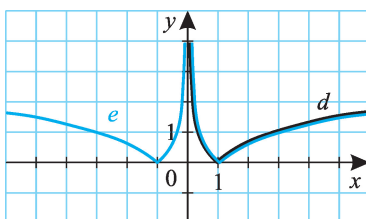
b) (734/I. ábra)

$D_b = ]-\infty; 0[$ ,  $R_b = \mathbf{R}$ , az  $x$  tengelymetszet:  $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ .

c) (734/I. ábra)

$D_c = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $R_c = \mathbf{R}$ , az  $x$  tengelymetszetek:  $(1; 0)$ , illetve  $(-1; 0)$ .

734/II.



d) (734/II. ábra)

$D_d = \mathbf{R}^+$ ,  $R_d = [0; \infty[$ , az  $x$  tengelymetszet:  $(1; 0)$ .

e) (734/II. ábra)

$D_e = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $R_e = [0; \infty[$ , az  $x$  tengelymetszetek:  $(1; 0)$ , illetve  $(-1; 0)$ .

**735.** A logaritmus azonosságaival  $\frac{1}{2} \log_2 x^2 =$

$= \log_2 |x|$ ,  $\frac{1}{3} \log_2 x^3 = \log_2 x$ . Az  $x > 0$  félsíkban az  $a$ ) és  $c$ ) képe, valamint  $b$ ) „félképe” megegyezik; a  $b$ ) függvény képe az  $y$  tengelyre tükrös helyzetű.

**736.** A logaritmus azonosságaival  $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$ , a  $b$ ) és  $c$ ) függvények egyenlők.

Ha  $x < 1$ , akkor  $b(x), c(x) > a(x)$ ; ha  $x > 1$ , akkor  $b(x), c(x) < a(x)$ .

**737. a)**  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ , így  $D_a = ]3; \infty[$ , és  $a(x) = \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lg(x - 3)$ , ha  $x > 3$ .

$R_a = \mathbf{R}$ , az  $x$  tengelymetszet  $(4; 0)$ .

**b)**  $D_b = ]0; \infty[$ .  $b(x) = \log_2 x - 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + 6 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 8} + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} =$

$= \log_2 x - \log_2 x + 2 \log_2 x - \log_2 x = \log_2 x$ .  $R_b = \mathbf{R}$ , az  $x$  tengelymetszet  $(1; 0)$ .

**c)**  $D_c = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ,  $R_c = \mathbf{R}$ , a tengelymetszetek  $(0; 0)$ ,  $(2; 0)$ .

**d)**  $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ , így  $d(x) = \log_3 |x + 2|$ .  $D_d = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$ ,  $R_d = \mathbf{R}$ , a tengelymetszetek  $(-3; 0)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; \log_3 2)$ .

**e)**  $10^{\lg x} = x$ , ha  $x > 0$ .  $D_e = \mathbf{R}^+$ ,

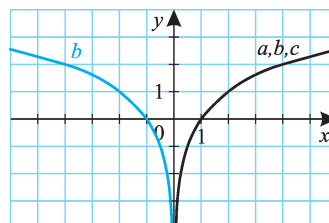
$R_e = \mathbf{R}^+$ , tengelymetszet nincs.

**f)**  $f(x) = 2x$ .  $D_f = \mathbf{R}$ ,  $R_f = \mathbf{R}$ , a tengelymetszet  $(0; 0)$ .

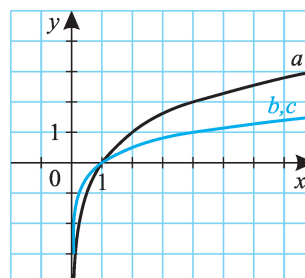
**g)**  $g(x) = 10^{\frac{1}{2} \lg x^2} = 10^{\lg |x|} = |x|$ .  $D_g = \mathbf{R}$ ,  $R_g = [0; \infty[$ , a tengelymetszet  $(0; 0)$ .

**h)**  $h(x) = 4 - x^2$ , ha  $4 - x^2 > 0$ .  $D_h = ]-2; 2[$ ,  $R_h = ]0; 4[$ , az  $y$  tengelymetszet  $(0; 4)$ .

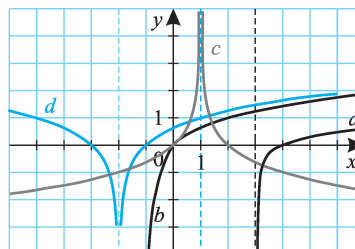
735.



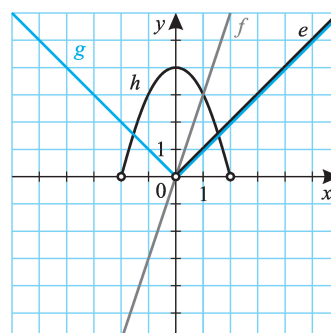
736.



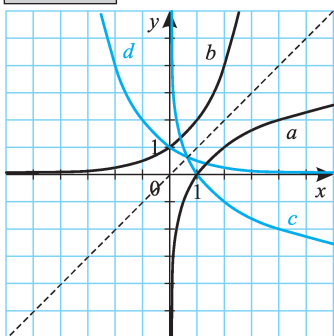
737/I.



737/II.



738.



**738.** Az  $a$ ) és  $c$ ) görbék tükrös helyzetűek az  $x$  tengelyre; a  $b$ ) és  $d$ ) görbék pedig az  $y$  tengelyre. Továbbá az  $a$ ) és  $b$ ), valamint  $c$ ) és  $d$ ) görbék tükrös helyzetűek az  $y = x$  egyenletű egyenesre. (A függvények egymás inverzei.)

**739.** Ha egy  $n$  pozitív egész szám  $(k+1)$  jegyű, akkor  $10^k \leq n < 10^{k+1}$ , s a logaritmusára  $k \leq \lg n < k+1$  teljesül; vagyis a szám tízes alapú logaritmusának értékéből a szám jegyeinek számára következtethetünk. (Pontosabban: az  $n$  pozitív egész szám számjegyeinek száma  $[\lg n] + 1$ .)

**740.**  $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$ ,  $x \in ]0; 5]$ .  $\log_{\frac{3}{2}} 5 \approx 3,97$ ,  $R_f = ]-\infty; 3,97]$ .

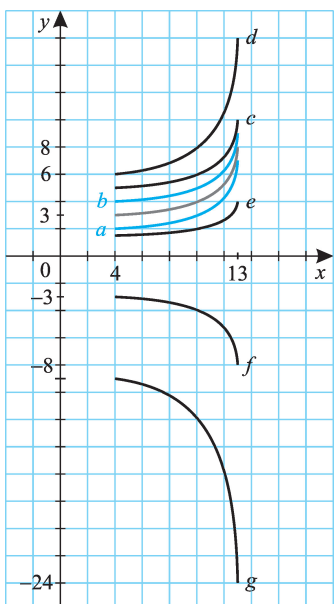
**741.** A  $0 = \log_a 2 + b$ ,  $1 = \log_a 1 + b$  egyenletrendszer megoldása  $(a; b) = (0,5; 1)$ .

$f(x) = \log_{0,5} x + 1$ ,  $x \in ]0; 5]$ .  $\log_{0,5} 5 \approx -2,32$ ,  $R_f = [-2,32; \infty[$ .

Mivel  $f(3) \approx -0,58$ , a  $(3; -1)$  pont a függvénygörbe alatt van.

## Függvénytranszformációk

742.



742.

$D_f = [4; 13]$ ,  $R_f = [3; 8]$ . Lineáris transzformáció során ha a függvényértéket transzformáljuk  $(x \mapsto a \cdot f(x) + c)$ , az értelmezési tartomány nem változik. Az értékészletek:

a)  $[2; 7]$ ; b)  $[4; 9]$ ; c)  $[5; 10]$ ; d)  $[6; 16]$ ;

e)  $[1,5; 4]$ ; f)  $[-8; -3]$ ; g)  $[-24; -9]$ .

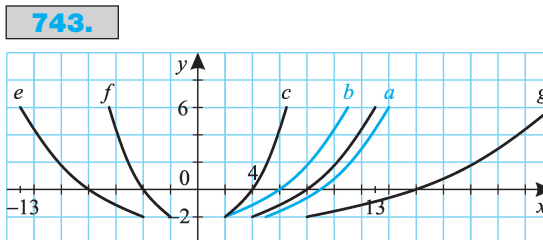
**743.** (743. ábra)

$$D_f = [4; 13],$$

$$R_f = [-2; 6].$$

Ha a függvényváltozót transzformáljuk, az értékkészlet nem változik. Az értelmezési tartományok:

- a)  $[5; 14]$ ; b)  $[2; 11]$ ; c)  $[2; 6,5]$ ; d)  $[8; 26]$ ;  
 e)  $[-13; -4]$ ; f)  $[-6,5; -2]$ .



**743.**

**744.** (744. ábra)

- 745. a)** 1.  $x \mapsto x^2$ ;  
 2.  $x \mapsto (x - 3)^2$ ;  
 3.  $x \mapsto 2(x - 3)^2$ ;  
 4.  $x \mapsto 2(x - 3)^2 - 4$ .

(745/a. ábra)

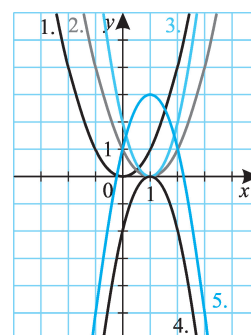
- b) 1.  $x \mapsto x^2$ ;  
 2.  $x \mapsto (x + 2)^2$ ;  
 3.  $x \mapsto \frac{1}{2}(x + 2)^2$ ;  
 4.  $x \mapsto \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$ .

(745/b. ábra)

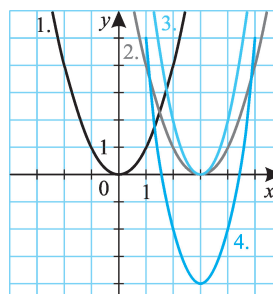
c)  $2x^2 + 3x - 5 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$ .

1.  $x \mapsto x^2$ ;  
 2.  $x \mapsto \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$ ;  
 3.  $x \mapsto 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$ ;  
 4.  $x \mapsto 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$ .

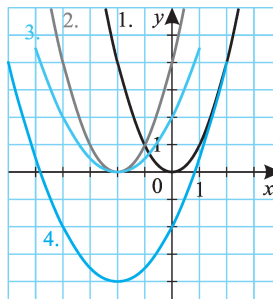
**744.**



**745/a.**

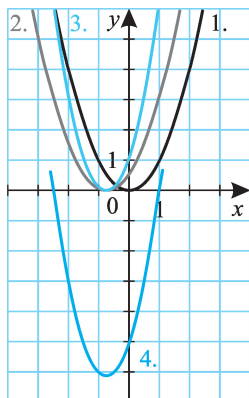


**745/b.**





745/c.

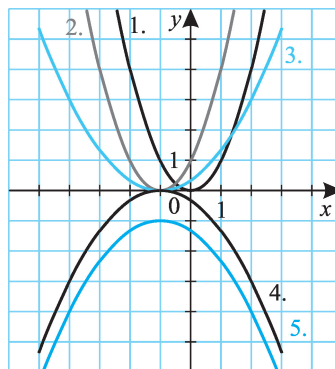


(745/c. ábra)

- d)
1.  $x \mapsto x^2$ ;
  2.  $x \mapsto (x + 1)^2$ ;
  3.  $x \mapsto \frac{1}{3}(x + 1)^2$ ;
  4.  $x \mapsto -\frac{1}{3}(x + 1)^2$ ;
  5.  $x \mapsto -\frac{1}{3}(x + 1)^2 - 1$ .

(745/d. ábra)

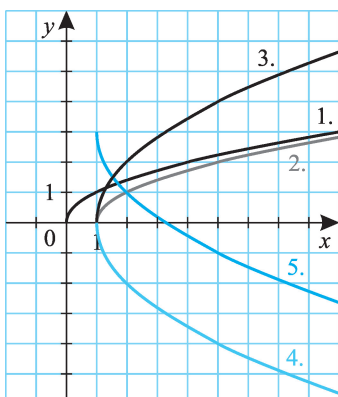
745/d.



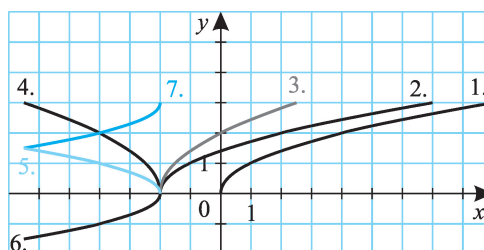
746. (746. ábra)

747. (747. ábra)

746.



747.



- 748. a)** 1.  $x \mapsto \sqrt{x}$ ;  
 2.  $x \mapsto \sqrt{x+1}$ ;  
 3.  $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{3}(x+1)}$ ;  
 4.  $x \mapsto 2\sqrt{\frac{1}{3}(x+1)}$ ;  
 5.  $2\sqrt{\frac{1}{3}(x+1)} - 2$ .

(748/a. ábra)

- b)** 1.  $x \mapsto \sqrt{x}$ ;  
 2.  $x \mapsto \sqrt{x+1}$ ;  
 3.  $x \mapsto \sqrt{2(x+1)}$ ;  
 4.  $x \mapsto -\sqrt{2(x+1)}$ ;  
 5.  $x \mapsto -\sqrt{2(x+1)} + \sqrt{2}$ .

(748/b. ábra)

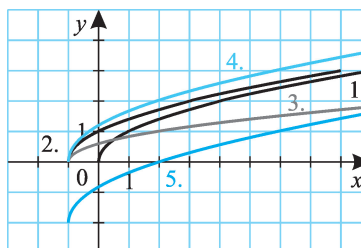
- c)** 1.  $x \mapsto \sqrt{x}$ ;  
 2.  $x \mapsto \sqrt{x-3}$ ;  
 3.  $x \mapsto \sqrt{2(x-3)}$ ;  
 4.  $x \mapsto \sqrt{-2(x-3)}$ ;  
 5.  $x \mapsto 2\sqrt{-2(x-3)}$ ;  
 6.  $x \mapsto -2\sqrt{-2(x-3)}$ ;  
 7.  $x \mapsto -2\sqrt{-2(x-3)} + 3$ .

(748/c. ábra)

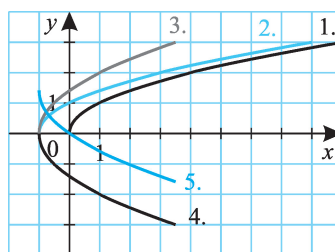
- 749.** a) (3; -2); b) (-3; 2); c) (-3; -2); d) (1; 4); e) (6; 4); f) (1,5; 1);  
 g) (-9; -4); h) (6; 2); i) (3; 0); j) (4; 4); k) (3; 0); l) (0; 2); m) (2; 3);  
 n) (3; 4); o) (3; 1); p) (6; 2); q) (1,5; 2); r) (3; -4); s) (-6; 2).

- 750.** a)  $a(x) = -x^2$ ;  
 b)  $b(x) = x^2$ ;  
 c)  $c(x) = -x^2$ ;  
 d)  $d(x) = -(x-4)^2 + 6$ ;  
 e)  $e(x) = (x-2)^2$ ;

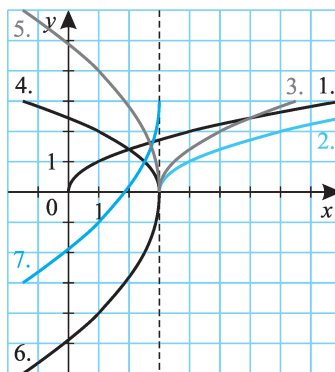
748/a.



748/b.



748/c.



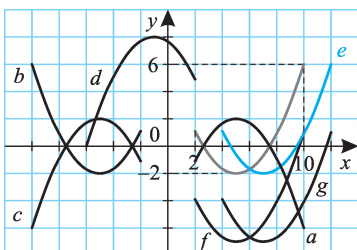


- f)  $f(x) = x^2 - 1$ ;  
 g)  $g(x) = (x - 2)^2 - 1$ ;  
 h)  $h(x) = 2x^2$ ;  
 i)  $i(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$ ;  
 j)  $j(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ ;  
 k)  $k(x) = (2x)^2$ ;  
 l)  $l(x) = -2x^2$ ;  
 m)  $m(x) = \left(-\frac{1}{2}x\right)^2$ .

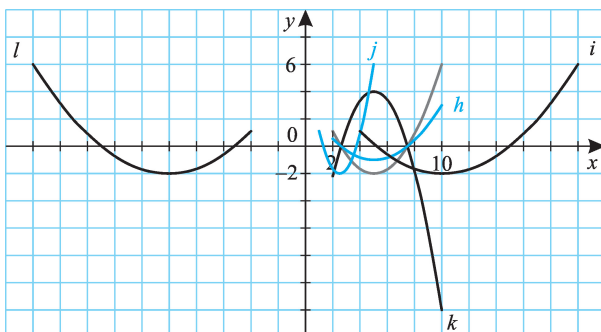
**751.**  $D_f = [2; 10]$ ,  $R_f = [-2; 6]$ . Az új függvények értelmezési tartományai és értékkészletei:

- a)  $D_a = [2; 10]$ ,  $R_a = [-6; 2]$ ;  
 b)  $D_b = [-10; -2]$ ,  $R_b = [-2; 6]$ ;  
 c)  $D_c = [-10; -2]$ ,  $R_c = [-6; 2]$ ;  
 d)  $D_d = [-7; 2]$ ,  $R_d = [0; 8]$ ;  
 e)  $D_e = [4; 12]$ ,  $R_e = [-2; 6]$ ;  
 f)  $D_f = [2; 10]$ ,  $R_f = [-5; 3]$ ;  
 g)  $D_g = [4; 12]$ ,  $R_g = [-5; 3]$ ;  
 h)  $D_h = [2; 10]$ ,  $R_h = [-1; 3]$ ;  
 i)  $D_i = [4; 20]$ ,  $R_i = [-2; 6]$ ;  
 j)  $D_j = [1; 5]$ ,  $R_j = [-2; 6]$ ;  
 k)  $D_k = [2; 10]$ ,  $R_k = [-12; 4]$ ;  
 l)  $D_l = [-20; -4]$ ,  $R_l = [-2; 6]$ .

**751/I.**



**751/II.**



**752.** a)  $y = \frac{x^2}{2}$ ; b)  $y = 2x^2$ ; c)  $y = -\frac{x^2}{3}$ .

d) Az  $y = x^2$  görbét az  $y = x$  egyenletű egyenesre tükrözve nem kapunk függvénygörbét. Ha az  $f(x) = x^2$  függvény értelmezési tartományát a nemnegatív valós számokra szűkítjük le, akkor a tükörkép egyenlete  $y = \sqrt{x}$ .

*Megjegyzés:*

A d) esetben tükrözés után kapott görbének  $y = f(x)$  alakú egyenlete nincs (mivel nem függvénygörbe), de egyenletét más alakban megadhatjuk. Pl.:  $x = y^2$  vagy  $y = \pm\sqrt{x}$ .

**753.** a)  $a(x) = 2x^2 + 3x - 5 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$ .

(753/a. ábra)

b)  $b(x) = 1,5\sqrt{3x-1} + 2 =$   
 $= 1,5\sqrt{3\left(x - \frac{1}{3}\right)} + 2.$

(753/b. ábra)

c)  $c(x) = \frac{x+2}{2x+6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x+3} =$   
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3}.$

A transzformációs lépések:

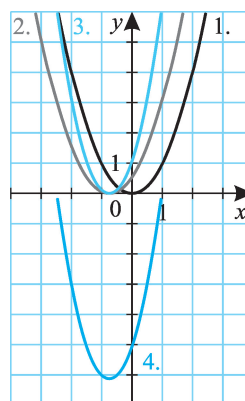
1.  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ;
2.  $x \mapsto \frac{1}{x+3}$ ;
3.  $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3}$ ;
4.  $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3}$ ;
5.  $x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3}.$

*Megjegyzés:*

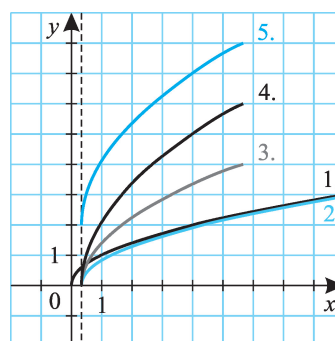
A lépések más sorrendben is elvégezhetők. Pl.:

3.  $x \mapsto -\frac{1}{x+3}$ ;

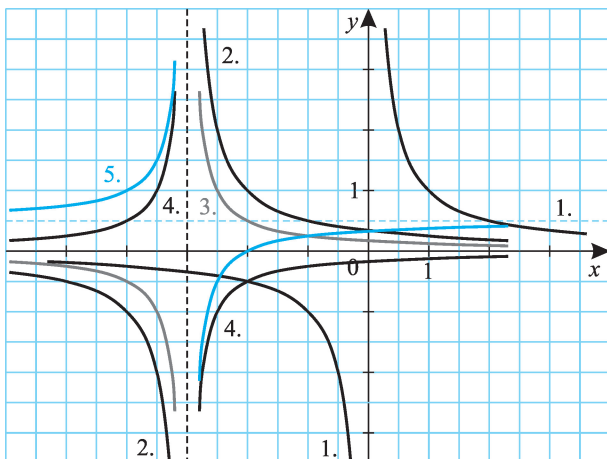
**753/a.**



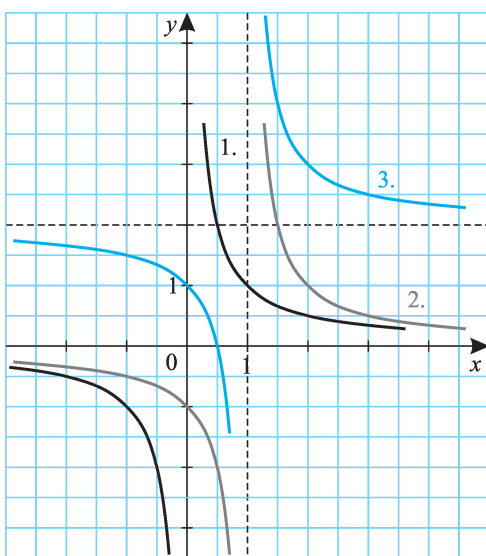
**753/b.**



753/c.



753/d.



$$4. x \mapsto 1 - \frac{1}{x+3};$$

$$5. x \mapsto \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{x+3} \right).$$

(753/c. ábra)

$$d) d(x) = \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1};$$

(753/d. ábra)

e) A transzformációs lépések:

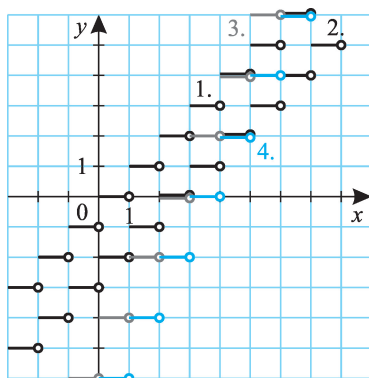
$$1. x \mapsto [x];$$

$$2. x \mapsto [x-2];$$

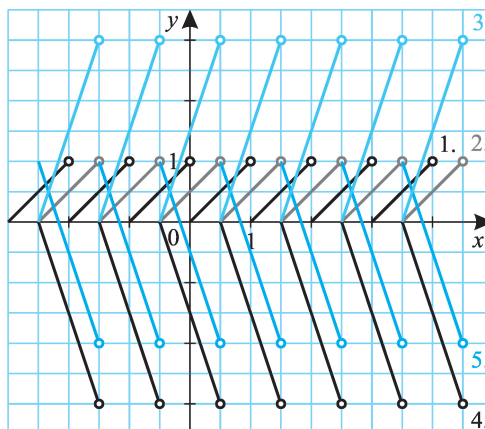
$$3. x \mapsto 2[x-2];$$

$$4. 2[x-2]-2.$$

753/e.



753/f.



Egy másik lehetőség:

$$3. x \mapsto [x - 2] - 1;$$

$$4. x \mapsto 2([x - 2] - 1).$$

(753/e. ábra)

f) A transzformációs lépések:

$$1. x \mapsto \{x\};$$

$$2. x \mapsto \{x + 0,5\};$$

$$3. x \mapsto 3\{x + 0,5\};$$

$$4. x \mapsto -3\{x + 0,5\};$$

$$5. x \mapsto -3\{x + 0,5\} + 1.$$

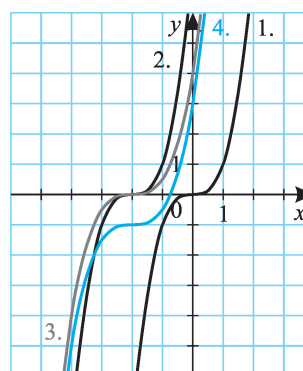
(753/f. ábra)

g) (753/g. ábra)

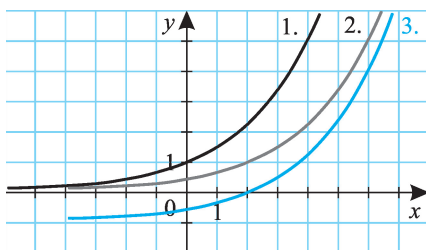
h) (753/h. ábra)

i) (753/i. ábra)

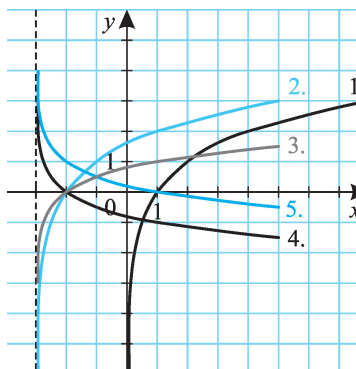
753/g.



753/h.



753/i.





**754.** a)  $y = -\sqrt{x}$ ;  
 b)  $y = -\sqrt{-(x-2)+4}$ ;  
 c)  $y = \sqrt{x+2} + 1$ ;  
 d)  $y = -2\sqrt{x}$ .

**755.** a)  $y = -\frac{1}{x}$ ;  
 b)  $y = \frac{1}{x+2} + 4$ ;  
 c)  $y = \frac{1}{x-2} - 1$ ;  
 d)  $y = \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$ .

**756.** a)  $y = -x^3$ ; b)  $y = (x-4)^3 + 2$ ; c)  $y = (x-4)^3 + 2$ ; d)  $y = 2x^3$ .

**757.** a)  $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ; b)  $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$ ; c)  $y = 2^{x-2} + 3$ ;  
 d)  $y = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$ .

**758.** a)  $y = -\log_2 x$ ; b)  $y = -\log_2(-(x+2))-4$ ; c)  $y = \log_2(x+2) - 3$ ;  
 d)  $y = \log_2 \frac{x}{2} = -1 + \log_2 x$ .

**759.** Az új függvények:

a)  $y = 4x^2$ ;  
 b)  $y = (2x)^2$ .

**760.** a)  $y = 2\sqrt{x}$ ;  
 b)  $y = \sqrt{4x}$ .

**761.** a)  $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$ ;  
 b)  $y = \frac{1}{2x}$ .

**762.** a)  $y = 2^{x+1}$ ;  
 b)  $y = 2 \cdot 2^x$ .

**763.** a)  $y = \log_2 x + 1$ ;  
 b)  $y = \log_2(2x)$ .

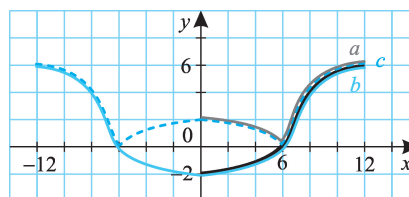
A függvények párosával megegyeznek:  $a = b$ ,  $c = d$ ,  $e = f$ ,  $g = h$ ,  $i = j$ . (Ezt könnyen beláthatjuk a megfelelő műveletek tulajdonságai vagy az algebrai azonosságok alapján.)

Összetett függvények

**764.** (764. ábra)

$R_f = [-2; 6]$ , ezért  $R_a = [0; 6]$ ,  
 $R_b = [-2; 6]$ ,  $R_c = [0; 6]$ .

**764.**

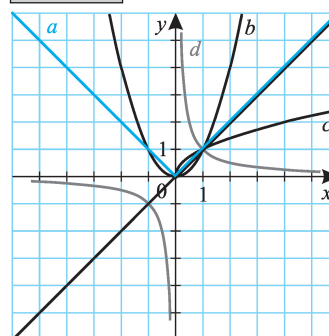


**765.** Az  $f \circ g$  függvények ún. „elemi” függvények; alakjuk jól ismert, így ábrázolásukat közvetlenül, egy lépésben is elvégezhetnénk. Ez a feladat és a néhány soron következő azt mutatja, hogy az összetett függvény ábrázolási módszerével lényegében egyforma nehézségű az elemi függvények, illetve ezek egyes transzformációinak ábrázolása; míg a transzformációs lépésekkel való ábrázolás az utóbbi esetben bonyolultabb lehet.

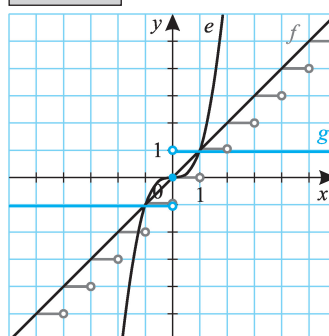
Először a  $g(x) = x$  függvényt ábrázoljuk.

- a) Ha  $x \geq 0$ , akkor  $g(x) \geq 0$ , így ezen az intervallumon  $f(g(x)) = g(x)$ ,  $f \circ g$  és  $g$  képe megegyezik. Ha  $x < 0$ , akkor  $g(x) < 0$ , így  $f(g(x)) = -g(x)$ ,  $f \circ g$  és  $g$  képe az  $x$  tengelyre tükrös helyzetű.
- b)  $g(0) = 0$  és  $g(1) = 1$ , ezeken a helyeken  $g(x) = g^2(x) = f(g(x))$ . 0 és 1 közötti számok négyzete magánál a számnál kisebb, itt  $f \circ g$  képe a  $g$  képe „alatt” halad,  $1 < x$  esetén pedig „fölött”. Végül pedig ha  $g(x) < 0$  (vagyis  $x < 0$ ), akkor az  $x^2 = (-x)^2$  azonosság alapján a parabolát  $g$ -nek az  $x$  tengelyre vett tükörképére „illesztjük”.
- c)  $g(0) = 0$  és  $g(1) = 1$  ismét pontjai  $f \circ g$ -nek. 0 és 1 között  $f \circ g$  a  $g$  fölött,  $1 < x$  esetén  $g$  alatt halad.
- d)  $g(-1) = -1$  és  $g(1) = 1$  a fix pontok.
- e)  $g(-1) = -1$ ,  $g(0) = 0$  és  $g(1) = 1$  a fix pontok; 1-nél kisebb abszolútértékű szám köbének kisebb lesz az abszolútértéke.
- f) Amikor a  $g$  függvényértékek az  $[n; n + 1[$  intervallumba esnek ( $n \in \mathbf{Z}$ ), akkor  $f \circ g$  értéke  $n$ .
- g) Ha  $g(x) > 0$ , akkor  $f(g(x)) = 1$ ; ha  $g(x) = 0$ , akkor  $f(g(x)) = 0$ ; végül ha  $g(x) < 0$ ,  $f(g(x)) = -1$ .

**765/I.**



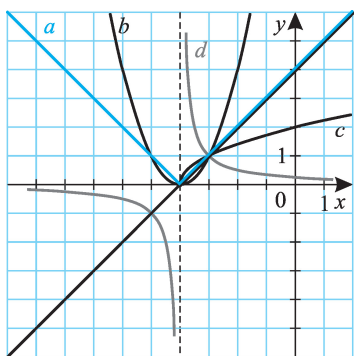
**765/II.**



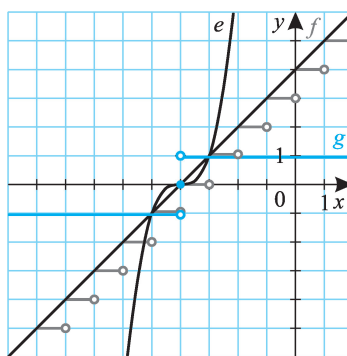


766. (766/I-II. ábra)

766/I.

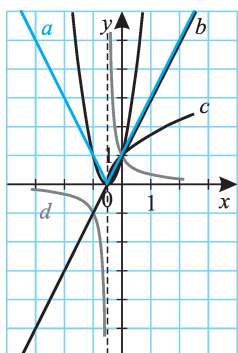


766/II.

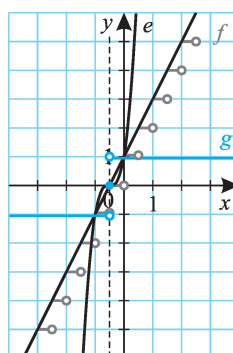


767. (767/I-II. ábra)

767/I.

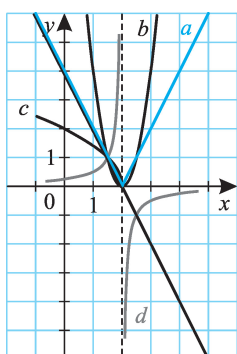


767/II.

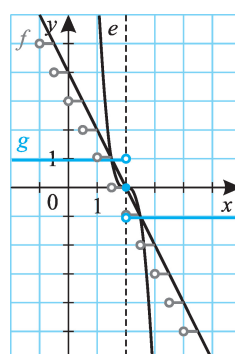


768. (768/I-II. ábra)

768/I.

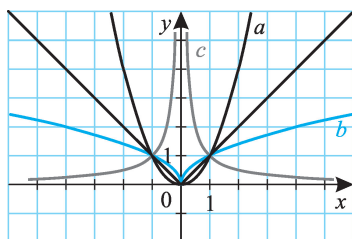


768/II.

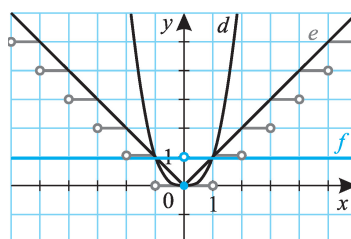


769. (769/I-II. ábra)

769/I.

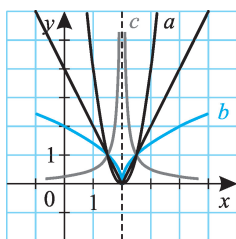


769/II.

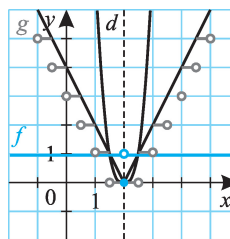


770. (770/I-II. ábra)

770/I.



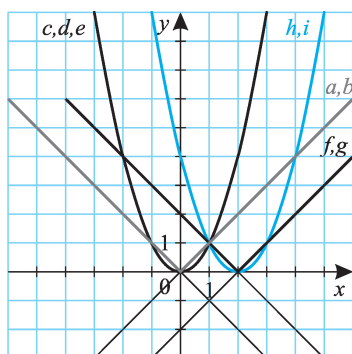
770/II.



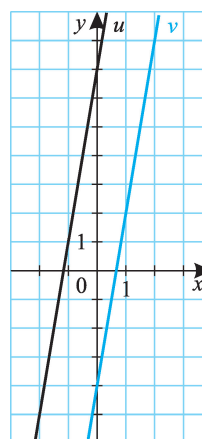
771.  $|x| = |-x|$  miatt az  $a)$  és  $b)$  függvények képe megegyezik. Hasonló igaz a  $c), d), e);$  valamint az  $f)$  és  $g);$  végül a  $h)$  és  $i)$  függvényekre is.

772.  $a)$   $2 \cdot (3x + 5) - 3 = 6x + 7$ , így a hozzárendelési szabály  $u: x \mapsto 6x + 7$ . Az értelmezési tartomány és az értékkészlet a valós számok halmaza.  
 $3 \cdot (2x - 3) + 5 = 6x - 4$ , így  $v: x \mapsto 6x - 4$ ,  $D_v = R_v = \mathbf{R}$ . (772/I. ábra)

771

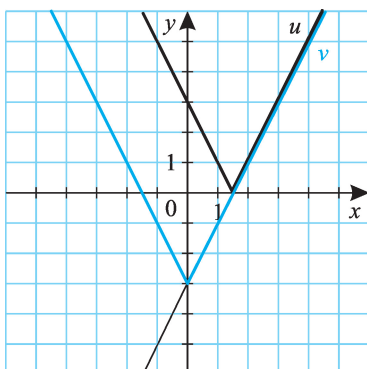


772/I.

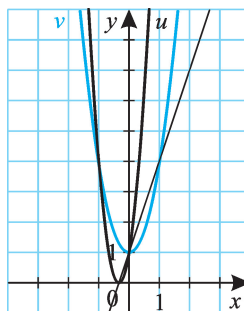




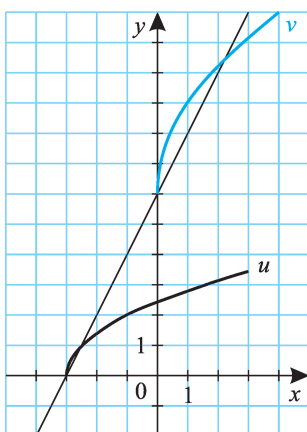
772/II.



772/III.



772/IV.



b)  $u: x \mapsto |2x - 3|$ ;  $D_u = \mathbf{R}$ ,  $R_u = [0; \infty[$ .

$v: x \mapsto 2|x| - 3$ ;  $D_v = \mathbf{R}$ ,  $R_v = [-3; \infty[$ .

(772/II. ábra)

c)  $u: x \mapsto (3x + 1)^2$ ;  $D_u = \mathbf{R}$ ,  $R_u = [0; \infty[$ .

$v: x \mapsto 3x^2 + 1$ ;  $D_v = \mathbf{R}$ ,  $R_v = [1; \infty[$ .

(772/III. ábra)

d)  $u: x \mapsto \sqrt{2x + 6}$ ;  $D_u = [-3; \infty[$ ,  $R_u = [0; \infty[$ .

$v: x \mapsto 2\sqrt{x} + 6$ ;  $D_v = [0; \infty[$ ,  $R_v = [6; \infty[$ .

(772/IV. ábra)

e)  $u: x \mapsto \frac{1}{-2x + 2}$ ;  $D_u = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ,  $R_u = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,

$v: x \mapsto -2 \cdot \frac{1}{x} + 2$ ;  $D_v = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $R_v = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ .

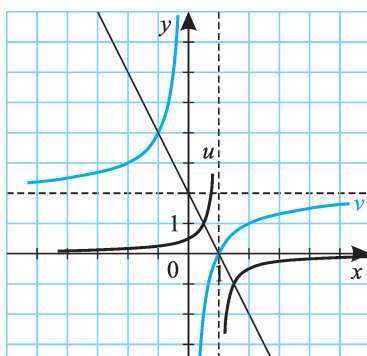
(772/V. ábra)

f)  $u: x \mapsto 2^{-2x+3}$ ;  $D_u = \mathbf{R}$ ,  $R_u = ]0; \infty[$ .

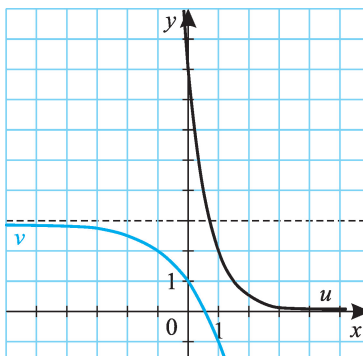
$v: x \mapsto -2 \cdot 2^x + 3$ ;  $D_v = \mathbf{R}$ ;  $R_v = ]-\infty; 3[$ .

(772/VI. ábra)

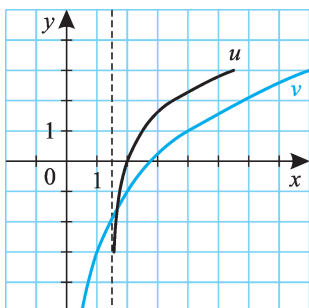
772/V.



772/VI.



772/VII.



g)  $u: x \mapsto \log_2(2x - 3)$ ;  
 $D_u = ]1,5; \infty[$ ,  $R_u = \mathbf{R}$ ;  
 $v: x \mapsto 2 \cdot \log_2 x - 3$ ;  
 $D_v = ]0; \infty[$ ,  $R_v = \mathbf{R}$ .  
 (772/VII. ábra)

773. a)  $a(x) = |2x - 3|$ .  
 b)  $b(x) = |2(x + 2) - 4| = |2x|$ .  
 c)  $c(x) = |x - 2|^2 = (x - 2)^2$ .

d)  $d(x) = \sqrt{|2x + 1|}$ .

e)  $e(x) = \left| \frac{1}{x - 2} + 1 \right|$ .

(773/I. ábra)

f)  $f(x) = \operatorname{sgn} \left( \frac{1}{x - 2} + 1 \right)$ .

(773/I. ábra)

g)  $g(x) = |2^{x-2} - 3|$ .

(773/II. ábra)

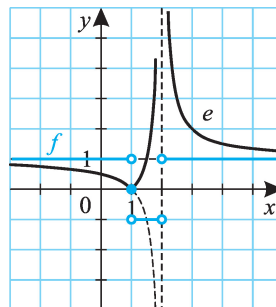
h)  $h(x) = |2^{x-2} - 3| = g(x)$ .

i)  $i(x) = |\log_2(x + 2) - 1|$ .

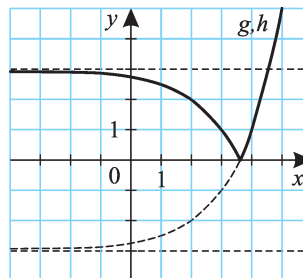
(773/III. ábra)

774. (774. ábra)

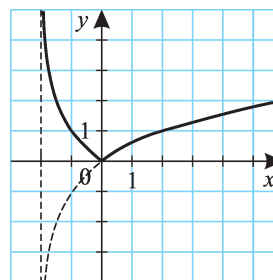
773/I.



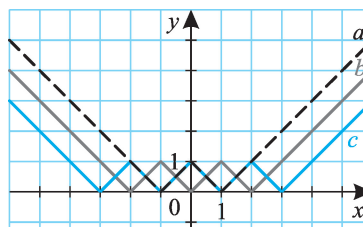
773/II.



773/III.

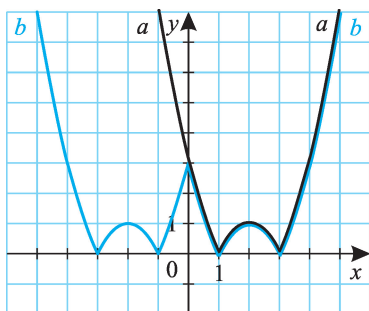


774.

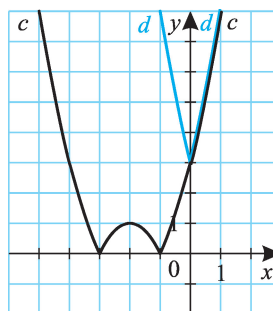


775. (775/I-II. ábra)

775/I.

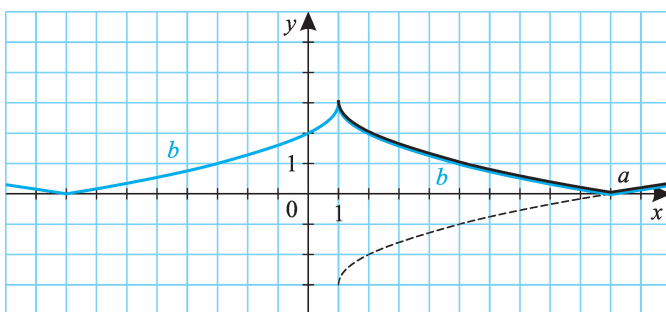


775/II.

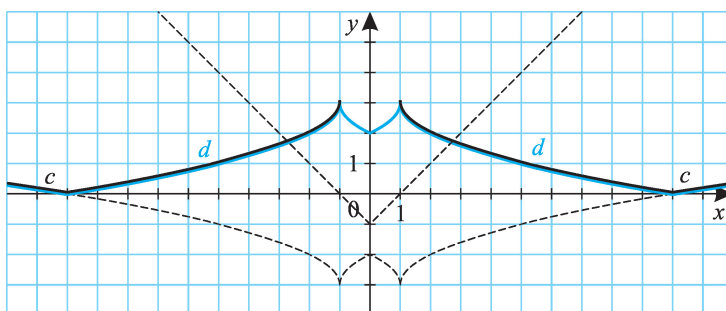


776. (776/I-II. ábra)

776/I.

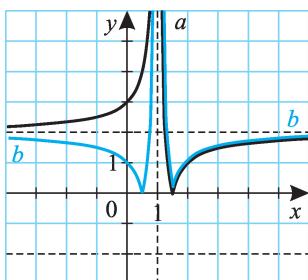


776/II.

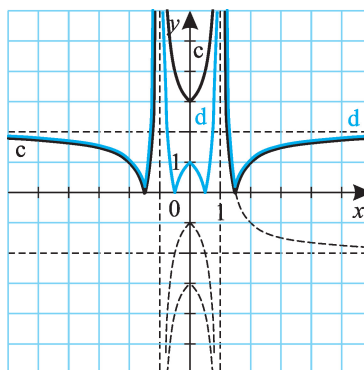


777. (777/I-II. ábra)

777/I.



777/II.



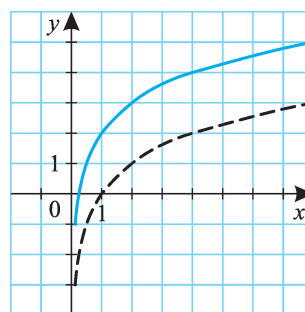
778. (778. ábra)

778.



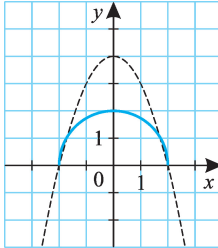
779. (779. ábra)

779.

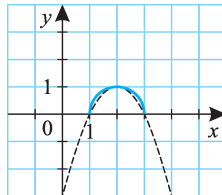




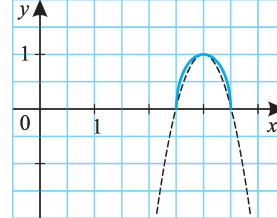
780/a.



780/b.



780/c.



780. a) A görbe egyenlete  $x^2 + y^2 = 4$ , ha  $y \geq 0$ ; ez egy origó középpontú, 2 egység sugarú félkör egyenlete. (780/a. ábra)

b)  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ , ha  $y \geq 0$ ; a görbe  $(2; 0)$  középpontú, 1 egység sugarú félkör. (780/b. ábra)

c)  $y^2 + 4(x - 3)^2 = 1$ , ha  $y \geq 0$ . Ez egy  $(3; 0)$  centrumú, függőleges nagytengelyű félellipszis egyenlete. A két tengely hossza  $a = 1$ ,

$b = 0,5$ ; az excentricitás  $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . A fókuszok:

$$F_1\left(3; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ és } F_2\left(3; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \text{ (780/c. ábra)}$$

d)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$ . (780/d. ábra)

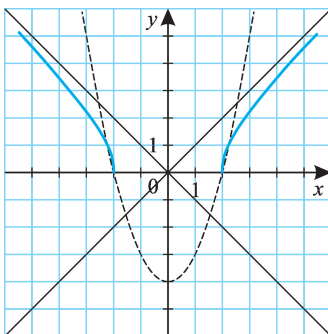
e)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ , ha  $y \geq 0$ ; origó középpontú, fekvő helyzetű hiperbola.

Fél tengelyei  $a = b = 2$ , innen  $c = 2\sqrt{2}$ . A fókuszok:  $F_1(2\sqrt{2}; 0)$  és  $F_2(-2\sqrt{2}; 0)$ . (780/e. ábra)

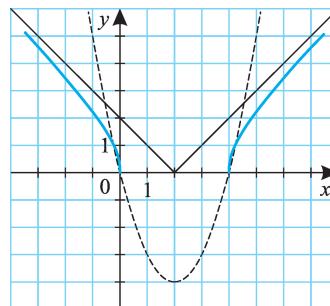
f)  $\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ .  $(2; 0)$  centrumú hiperbolát kaptunk;

$F_1(2\sqrt{2} + 2; 0)$  és  $F_2(2 - 2\sqrt{2}; 0)$ . (780/f. ábra)

780/e.



780/f.



## Függvények tulajdonságai

### Függvények tulajdonságai, műveletek függvényekkel

- 781.**  $D_u = [-4; \infty[$ ,  $D_v = ]-\infty; 5[$ .  
 a)  $D_a = D_u$ ; b)  $D_b = D_v$ ; c)  $D_c = D_u \cap D_v = [-4; 5[$ ; d)  $D_d = D_c$ ;  
 e)  $D_e = D_c$ ; f)  $D_f = D_u$ ; g)  $D_g = D_u$ ; h)  $D_h = D_v \setminus \{4\}$ ; i)  $D_i = D_c \setminus \{4\}$ ;  
 j)  $D_j = ]-\infty; 4[$ .

- 782.** Jelölje  $Z_f$ ,  $Z_g$ ,  $Z_h$  a három polinomfüggvény zérushelyeinek halmazát; ekkor  $Z_f = \{1, 2, 3\}$ ,  $Z_g = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Z_h = \{0, 1, 2\}$ .

- a)  $f(x) + g(x) = (x - 1)(2x^2 - 4x + 6) = 0$ , ha  $x = 1$ ;  
 b)  $Z_f \cup Z_g = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ;  
 c)  $Z_f \setminus Z_g = \{2, 3\}$ ;  
 d)  $Z_f \cap Z_g = \{1\}$ ;  
 e)  $f(x) + g(x) + h(x) = (x - 1)(3x^2 - 6x + 6) = 0$ , ha  $x = 1$ ;  
 f)  $Z_f \cup Z_g \cup Z_h = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ;  
 g)  $(Z_f \cup Z_g) \setminus Z_h = \{-1, 3\}$ ;  
 h)  $Z_f \setminus (Z_g \cup Z_h) = \{3\}$ ;  
 i)  $Z_f \cap Z_g \cap Z_h = \{1\}$ .

- 783.** a)  $D_f$ ; b)  $D_f \cap D_g$ ; c)  $D_f \cap D_g$ ; d)  $D_f \setminus Z_f$ ; e)  $(D_f \cap D_g) \setminus Z_g$ .

- 784.** a)  $u: x \mapsto 2 + x$ ,  $v: x \mapsto 2x$ .  
 b)  $u: x \mapsto 3x - 3$ ,  $v: x \mapsto 2(x - 2)(x + 1)$ .  
 c)  $u: x \mapsto -x - 2$ ,  $v: x \mapsto -2x(x - 2)$ .  
 d)  $u: x \mapsto x^2 + 2x$ ,  $v: x \mapsto 2x^3$ .  
 e)  $u: x \mapsto |x - 3| + |x - 4|$ ,  $v: x \mapsto |(x - 3)(x - 4)|$ .  
 f)  $u: x \mapsto x + \frac{1}{x}$ ,  $v: x \mapsto 1$  ( $x \neq 0$ ).

Mivel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt  $x > 0$

esetén  $x + \frac{1}{x} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$ , így  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ , s egyenlőség az  $x = 1$

helyen van. Ha  $x > 0$ , az  $u$  függvény minimuma  $x = 1$  helyen  $y = 2$ .

0-hoz közelítve az  $\frac{1}{x}$  hiperbolaághoz közelít (felülről) a függvénygörbe;

$+\infty$ -hez tartva pedig az  $y = x$  függvénygörbéhez (szintén felülről); végül a görbe az origóra tükrös helyzetű.

- g)  $u: x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ ,  $v: x \mapsto x$  ( $x \neq 0$ );





$$\text{Ha } x > 0, \frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \text{ innen } x^2 + \frac{1}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

$$\text{A minimumhely } x^2 = \frac{1}{2x} \text{ miatt } x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

$$h) u: x \mapsto x + \frac{1}{x^2}, \quad v: x \mapsto \frac{1}{x};$$

$$\text{Ha } x > 0, \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \text{ innen } x + \frac{1}{x^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

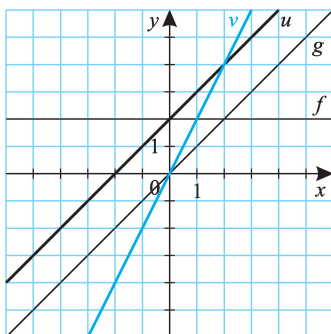
$$\text{A minimumhely } \frac{x}{2} = \frac{1}{x^2} \text{ miatt } x = \sqrt[3]{2}.$$

$$i) u: x \mapsto 2\sqrt{x-2}, \quad v: x \mapsto x-2 \ (x \geq 2);$$

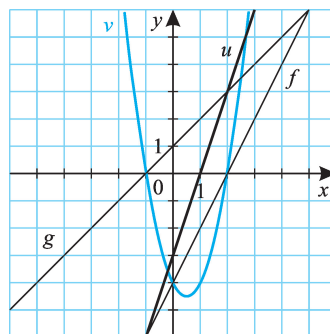
$$j) u: x \mapsto 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad v: x \mapsto 1.$$

(Az ábrázolást  $f$ -hez hasonlóan hajthatjuk végre.) (784/a-j. ábra)

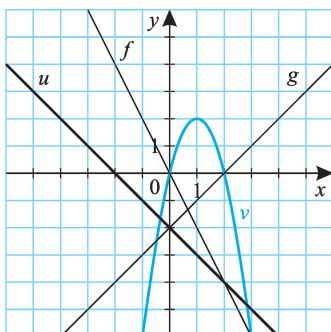
784/a.



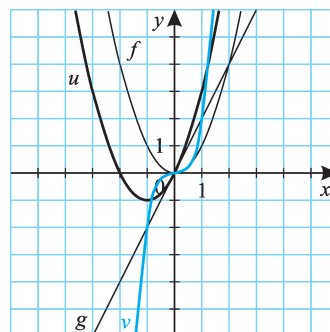
784/b.



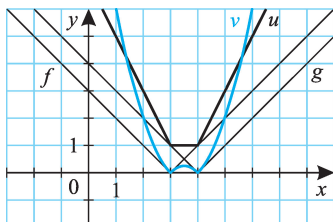
784/c.



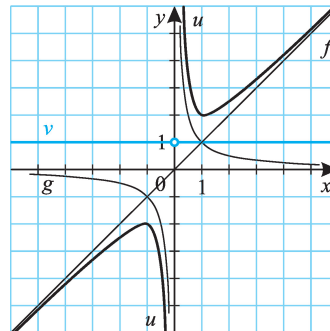
784/d.



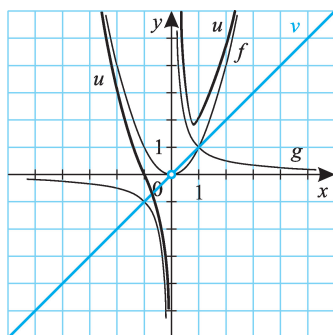
784/e.



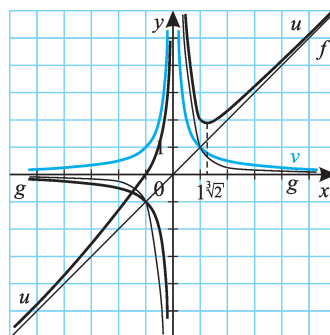
784/f.



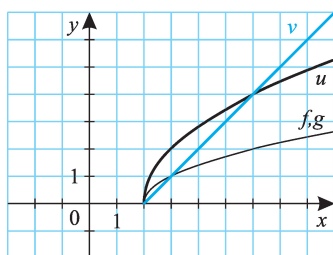
784/g.



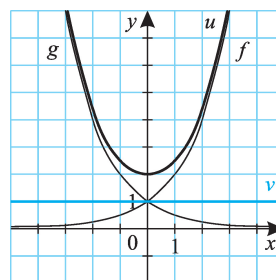
784/h.



784/i.



784/j.



- 785.**  $D_f = \mathbf{R}$ . A leszűkítések:  
 a)  $[-6; 2]$ ;    b)  $]-10; 0]$ ;    c)  $\{x = 2k; k = -3, -2, -1, \dots\}$ ;  
 d)  $\{x = 2k; k \in \mathbf{Z}\}$ ;    e)  $x \in \mathbf{Q}$ .
- 786.** Több megoldás lehetséges.  
 a)  $D_f = ]2; 3]$ . (Pl.  $[-3; -2[$  is jó.)    b)  $D_f = [\sqrt{7}; 4]$ .  
 c)  $D_f = ]-\infty; -5]$ .



## Inverz függvények

**787.** a)  $f$  inverze:  $(a, 1)$ ,  $(b, 2)$ ,  $(c, 3)$ ; b)  $g$  inverze:  $(1, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(9, 3)$ .

**788.** a) Igaz. b) Igaz. c) Hamis. (Ellenpélda pl. az egészrészfüggvény.) d) Igaz.

**789.** Az inverz függvény hozzárendelési utasítását az  $x \leftrightarrow y$  változócserével kaphatjuk meg.

a)  $x = y + 2$ , innen  $y = x - 2$ .

b)  $x = 2y - 3$ , innen  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

c)  $x = -y + 1$ , innen  $y = -x + 1$ . Az inverz függvény megegyezik az eredeti függvénnyel.

d) A  $[-1; 3]$  intervallumon  $|x + 2| = x + 2$ .  $x = y + 2$ , innen  $y = x - 2$ ,  $x \in [1; 5]$ .

e)  $x = y^2 - 4y$ ,  $y \geq 2$ ,  $x \geq -4$ ; innen  $x + 4 = (y - 2)^2$ ,  $y = \sqrt{x + 4} + 2$ .

f)  $x = \sqrt{2y - 3}$ , innen  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$ ,  $x \geq 0$ .

g)  $x = \frac{1}{y}$ ,  $y \leq -1$ , innen  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \geq -1$ . Az inverz függvény hozzárende-

lési szabálya megegyezik az eredeti függvényével, de az alaphalmaz más.

h)  $x = \frac{4}{y}$ , innen  $y = \frac{4}{x}$ ; az inverz függvény megegyezik az eredeti függvénnyel.

i)  $x = \sqrt[3]{y - 2}$ , innen  $y = x^3 + 2$ .

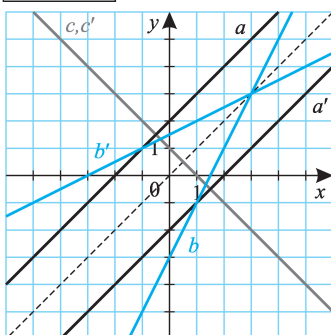
j)  $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ , innen  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ .

k)  $x = \log_2 y$ , innen  $y = 2^x$ ,  $x \in [-1; 3]$ . (789/I–IV. ábra)

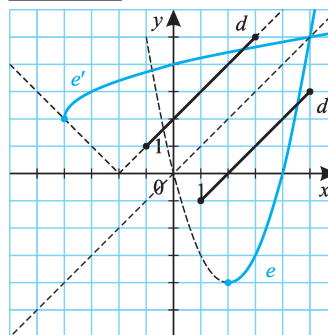
Alulról korlátos függvények: d), e), f), g), j), k).

Felülről korlátosak: d), g), k).

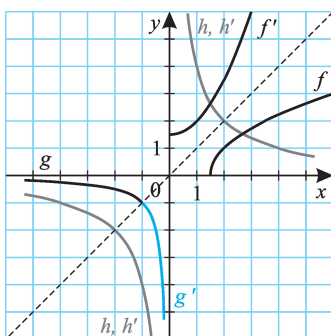
789/I.



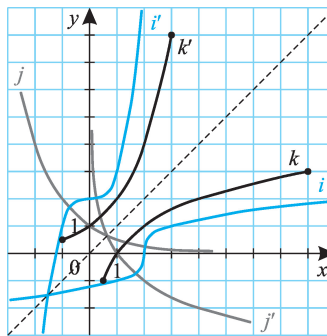
789/II.



789/III.



789/IV.



**790.** Pl.: az  $x \mapsto x$  bármely leszűkítése; az  $x \mapsto -x + c$  ( $c \in \mathbf{R}$ );  $x \mapsto \frac{c}{x}$ .  
A függvények grafikonja tükrös helyzetű az  $y = x$  egyenesre.

Páros és páratlan függvények

- 791.** a) Igaz.  
 b) Igaz.  
 c) Hamis.  
 d) Hamis; ellenpélda pl. az  $x \mapsto 0$  függvény.  
 e) Igaz.  
 f) Hamis; az  $x \mapsto 0$  függvény bármely, a 0-ra szimmetrikus leszűkítése páros és páratlan is.  
 g) Igaz.  
 h) Hamis.  
 i) Igaz; pl. az  $x \mapsto \frac{x^3}{x}$ , illetve  $x \mapsto \frac{x^2}{x}$ ,  $x \neq 0$  függvények.  
 j) Igaz.  
 k) Hamis; ha  $f$  páros vagy páratlan függvény, definíció szerint ha  $-1 \in D_f$ , akkor  $1 \in D_f$  is.  
 l) Igaz; a 0-ra szimmetrikusan kell elhelyezkednie a  $k$  darab  $x$  értéknek.
- 792.** Páros függvények: a), b), e), g).  
 Páratlan függvények: b) (páros és páratlan is), c).  
 Sem páros, sem páratlan: d), f), h), i).
- 793.** Páros függvények: a), c), h).  
 Páratlan függvények: d), e), j), k).  
 Sem páros, sem páratlan: b), f), g), i).
- 794.** Páros függvények: b), f), g).  
 Páratlan függvények: a), c), d), h).  
 Sem páros, sem páratlan: e), i), j).
- 795.** a)  $D_a = \mathbf{R}$ . Ha  $x \in D_a$ , akkor  $-x \in D_a$ ; valamint  $a(x) = a(-x)$  minden  $x \in D_a$  esetén, ezért az  $x \mapsto a(x)$  függvény páros.  
 b) Páratlan;  $b(x) = -b(-x)$ .  
 c) Páros.

d) Páros.

$$e) e(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}; e(-x) = -\frac{2x}{x^2-1}; \text{ az } x \mapsto e(x) \text{ függvény páratlan.}$$

$$f) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -\frac{2x}{x^2-1}; \text{ páratlan.}$$

**796.** Páros függvények: c), h), j).

Páratlan függvények: a), d), g), i), k).

Sem páros, sem páratlan: b), e), f).

**797.** a) Igaz. b) Igaz. c) Igaz. d) Igaz.

e) Ha van olyan  $x \in D_f$ , amelyre  $f(x) \neq f(-x)$ .

f) Ha van olyan  $x \in D_f$ , amelyre  $f(x) \neq -f(-x)$ .

**798.** Mindegyik függvény páros. (Az f) esetben esetleg leszűkül az alaphalmaz.)

**799.** Az e) esetben páros függvényt kapunk, a többi páratlan. (Az f) esetben esetleg leszűkül az alaphalmaz.)

**800.** Az a) esetben kapott függvény általában sem páros, sem páratlan.

A b), c), d) esetekben páratlan függvényt kapunk. Pl.:  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} =$

$$= \frac{f(-x)}{-g(-x)} = -\frac{f(-x)}{g(-x)} = -\frac{f}{g}(-x). \text{ (Előfordulhat, hogy leszűkül az alaphalmaz.}$$

Ha pl.  $0 \in D_g$ , akkor  $g(0) = 0$ , így az  $\frac{f}{g}$  függvényt az  $x = 0$  helyen nem értelmezzük.)

**801.** Páros függvények: a), c), d), e), f).

Sem páros, sem páratlan: b).

**802.** Igaz.

Tegyük fel, hogy van az állítást kielégítő  $g$  páros és  $h$  páratlan függvény, melyek értelmezési tartománya  $[-a, a]$ , s  $f(x) = g(x) + h(x)$ , ha  $x \in [-a, a]$ . Ekkor  $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ , s innen  $g$  és  $h$  előállítható:  $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ ,  $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ . Ezek a függvények pedig megfelelnek.

**803.** Jelöljük  $g$ -vel a páros,  $h$ -val a páratlan függvényeket!

$$a) \text{ Az előző feladat alapján } g(x) = \frac{a(x) + a(-x)}{2}, h(x) = \frac{a(x) - a(-x)}{2};$$

$$\text{innen } g(x) = 3, h(x) = -2x.$$

$$b) 2(x-3)^2 - 4 = 2x^2 - 12x + 14, \text{ így } g(x) = 2x^2 + 14, h(x) = -12x.$$

$$c) c(x) = 2 + \frac{3}{x+1}, g(x) = 2 + \frac{3}{1-x^2}, h(x) = \frac{3x}{x^2-1}.$$

$$d) g(x) = \frac{[x] + [-x]}{2}, h(x) = \frac{[x] - [-x]}{2}. \text{ (A } g \text{ függvény az egész helyeken 0-t, egyébként } -0,5\text{-et vesz fel; a } h \text{ függvény az } x \text{ egész helyeken } x\text{-et, egyébként } [x] + 0,5\text{-et vesz fel.)}$$

$$e) g(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}, h(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2};$$

$$f) g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Megjegyzés: a  $g(x) = ch(x)$  a koszinusz hiperbolikus és  $h(x) = sh(x)$  a szinusz hiperbolikus függvények. (A koszinusz hiperbolikus képe az ún. láncgörbe.)



### Monoton függvények

- 804.** a) Minden  $x_1, x_2 \in ]a; b[$ ,  $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .  
 b) Minden  $x_1, x_2 \in ]a; b[$ ,  $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) < f(x_2)$ .  
 c) Minden  $x_1, x_2 \in ]a; b[$ ,  $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .  
 d) Minden  $x_1, x_2 \in ]a; b[$ ,  $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) > f(x_2)$ .  
 e) Van olyan  $x_1, x_2 \in ]a; b[$ ,  $x_1 < x_2$ , amelyre  $f(x_1) > f(x_2)$ .  
 f) Van olyan  $x_1, x_2 \in ]a; b[$ ,  $x_1 < x_2$ , amelyre  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

**805.** Monoton növekvő függvények: a), b), e), f), g), h). (Ebből szigorúan monoton növekvő a), f), g), h).)

Monoton csökkenő függvények: c), e). Egyik sem szigorúan monoton csökkenő.

**806.** a) Hamis. b) Igaz, pl.  $x \mapsto 1$ . c) Hamis.

**807.** Monoton növekvő függvények: a), d), e), g).

Ha  $a > 1$ , akkor a h) és i) függvények monoton növekvők; ha  $a < 1$ , akkor monoton csökkenők. Ha  $a = 1$ , akkor a h) függvény monoton növekvő és csökkenő is.

Alulról korlátos függvények: b), c), d), e), h).

Felülről korlátos függvények: b), d), h) (ha  $a = 1$ ).

**808.** a) Ha  $x < 2$ , monoton csökkenő; ha  $x > 2$ , monoton növekvő.

b) Ha  $x \neq 3$ , akkor monoton csökkenő.

c) Ha  $x \leq -3$ , monoton növekvő; ha  $x \geq -3$ , monoton csökkenő.

d) Ha  $x < 2$  vagy  $3 < x$ , monoton csökkenő; ha  $2 < x < 3$ , monoton növekvő.

e) Ha  $x < -3$  vagy  $-3 < x < 0$ , monoton növekvő; ha  $0 < x < 3$  vagy  $3 < x$ , akkor monoton csökkenő.

**809.** a), b), c), e): szigorúan monoton növekvő; d), f): szigorúan monoton csökkenő függvények.

**810.** a), b), c), e): szigorúan monoton csökkenő; d), f): szigorúan monoton növekvő függvények.

**811.** A hozzárendelési szabályok lehetnek például:

$$a) x \mapsto -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2.$$

$$b) x \mapsto x - 3.$$

$$c) x \mapsto 2\log_3(x - 2).$$

d) Az előző függvényt kiterjesztjük; legyen pl.

$$x \mapsto \begin{cases} 2 \log_3(x-2), & \text{ha } x \in ]2; 5], \\ 1, & \text{ha } x = 2. \end{cases}$$

e)  $A ]k; 1+k[$  intervallumban (ahol  $k \in \mathbf{Z}$ ),  $x \mapsto 6x - 2 - 6k$ ; egyébként (az egész helyeken)  $x \mapsto 0$ .

Vagy:  $x \mapsto \frac{6}{\pi} \arctg x + 1$ .

f)  $x \mapsto -\sqrt{x-2} + 2$ .



### Periodikus függvények

**812.** Bármelyik függvény lehet periodikus, ha az ábrán látható részük periodikusan ismétlődik.

A  $p$  alapperiódus (legkisebb periódus) lehet:

a)  $p = 6$  (lehet  $p = 4$  is, ha a  $[-8; -4]$  szakaszon ábrázolt függvénykép ismétlődik);

b)  $p = 2$ ;

c)  $p = 4$ ;

d)  $p = 4$ ;

e)  $p = 4$ ;

f)  $p = 7$  (ha a  $[6; 13]$  szakaszon ábrázolt függvénykép ismétlődik).

g) Nincs legkisebb periódus.

**813.** Az  $f$  függvény nem periodikus, ha tetszőleges  $p \neq 0$  valós szám esetén létezik olyan  $x \in D_f$ , amelyre  $f(x+p) \neq f(x)$ .

Az  $x \mapsto [x]$  függvény nem periodikus, mert pl. tetszőleges  $p > 0$ ,  $x \in \mathbf{Z}$  esetén  $[x-p] \neq [x+p]$ . (A bal oldal értéke  $x-1-[p]$ , a jobb oldalé  $x+[p]$ .)

**814.** Hamis állítás: d).

**815.** A függvények periodikusak. Alapperiódusaik: a)  $p$ ; b)  $p$ ; c)  $p$ ; d)  $\frac{p}{c}$ .

**816.** Nem periodikus függvények: h), i).

Az alapperiódusok: a) nincs; b) 1; c) 1; d)  $2\pi$ ; e)  $\pi$ ; f)  $3\pi$ ; g)  $\frac{\pi}{2}$ .

**817.** Nem periodikus függvények: c), g).

a)  $\cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$ , az alapperiódus  $p = \pi$ .

b)  $p = 1$ .

d)  $p = \pi$ .

e)  $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin(2x)}{2}$ ,  $p = \pi$ .

f)  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) =$

$$= \sqrt{2} \left( \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right), \quad p = 2\pi.$$

## Függvények alkalmazása

**818.** Az alábbi táblázatban rendre feltüntettük az  $s(0), s(1), s(2), \dots, s(18)$  értékeket.

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	8	9
$s(x)$	4,5	7,2	13,1	18	22,1	25,6	28,6	31	33,5	35,5	37,3	38,9	33,5	35,5

$x$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$s(x)$	37,3	38,9	40,4	41,6	42,8	43,9	44,9	45,8	46,6

Az értékek valósághűek, az értelmezési tartomány lehet  $\{0, 1, 2, \dots, 18\}$ .

**819. a)**  $t = 3xy = 1200$ , innen  $y = \frac{400}{x}$ ,

$$k = 2(3x + y) = 6x + \frac{800}{x}, \quad x > 0.$$

A függvény képe: (819/a. ábra).

A számtani és mértani közép közötti

$$\text{egyenlőtlenség miatt } \frac{6x + \frac{800}{x}}{2} \geq$$

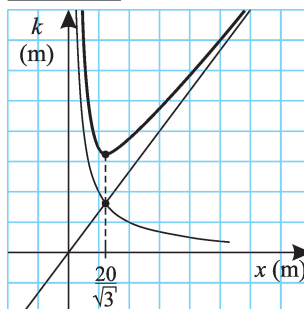
$$\geq \sqrt{6x \cdot \frac{800}{x}}, \text{ innen } k \geq 80\sqrt{3} \text{ (m). A}$$

minimális kerület a  $6x = \frac{800}{x}$  egyenlet-

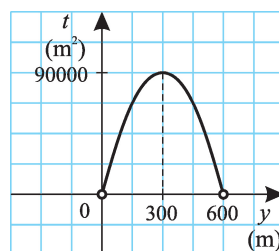
$$\text{ből } x = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ (m) esetén áll fenn.}$$

b)  $k = 2(3x + y) = 1200$ , innen  
 $x = \frac{600 - y}{3}$ ,  $t = 3xy = 3y \frac{600 - y}{3} =$   
 $= y(600 - y)$ ,  $0 < y < 600$ .  
 (819/b. ábra)

**819/a.**



**819/b.**

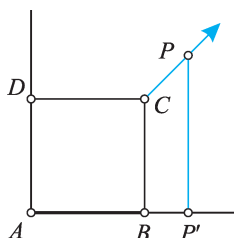


A terület az  $y = 300$  helyen maximális, ekkor  $t = 90\,000 \text{ (m}^2\text{)}$ .

**820. a)** Ha az eltelt idő  $t$ , akkor  $PC = vt$ ,  $PP' = BC + \frac{PC}{\sqrt{2}} = 10 + \frac{vt}{\sqrt{2}}$ , s a

$$\text{terület } T = 50 + \frac{5vt}{\sqrt{2}} \text{ (területegység).}$$

820.



A koszinusztételből

$$PB^2 = BC^2 + CP^2 - 2 \cdot BC \cdot CP \cdot \cos 135^\circ, \text{ innen}$$

$$BP = \sqrt{100 + v^2 t^2 - 2 \cdot 10 \cdot vt \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{ a háromszög kerülete}$$

$$K = AB + AP + PB = 10 + 10\sqrt{2} + v \cdot t + \sqrt{100 + v^2 \cdot t^2 + 2 \cdot 10 \cdot v \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ egység.}$$

b) A  $P$  pont és az  $AD$  egyenes távolsága megegyezik  $PP'$ -vel. Ha  $PP' = z$ , akkor  $AP = \sqrt{2z}$ ,  $CP = \sqrt{2}(z - 10)$ ,  $BP =$

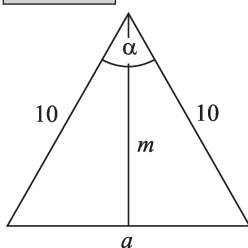
$$= \sqrt{100 + 2(z - 10)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{2}(z - 10) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2z^2 - 20z + 500}.$$

A terület  $T = 5z$ , a kerület  $K = 10 + \sqrt{2}z + \sqrt{2z^2 - 20z + 500}$  egység.

821. a) 10 (egység); b)  $f(5) = 2,5$  (egység).

822.

822.



$$a) m = \sqrt{10^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \text{ így } s = a + m = a + \sqrt{10^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

$$b) a = 2\sqrt{10^2 - m^2}, \text{ így } s = 2\sqrt{10^2 - m^2} + m.$$

$$c) s = 20 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 10 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

d) Pl. a b) összefüggés alapján alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sqrt{10^2 - m^2}}{2} + \frac{\sqrt{10^2 - m^2}}{2} + \frac{\sqrt{10^2 - m^2}}{2} + \frac{\sqrt{10^2 - m^2}}{2} + m \leq 5$$

$$\leq \sqrt{\frac{10^2 - m^2}{4} + \frac{10^2 - m^2}{4} + \frac{10^2 - m^2}{4} + \frac{10^2 - m^2}{4} + m^2}, \text{ innen}$$

$$\frac{s}{5} \leq \sqrt{20}, s \leq 5\sqrt{20}, \text{ ez } s \text{ maximuma. Mivel } 0 < m < 10, \text{ az}$$

értékkészlet  $]10; 5\sqrt{20}]$ .

823. Az  $x \mapsto x - x^3$ ,  $x \in ]0; 1[$  függvény maximumát keressük, a számtani-mér-tani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk. A  $K = x(1 - x^2)$  kifejezés mindkét tényezője pozitív;  $K$  helyett  $2K^2$  maximumát határozzuk meg. (Nem változik sem a szélsőérték helye, sem a típusa.)

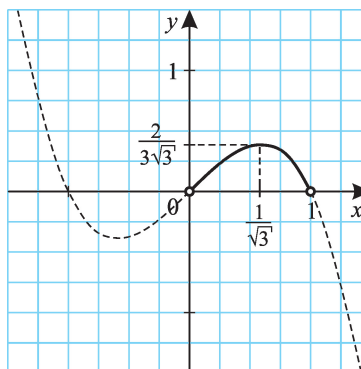
$$2K^2 = 2x^2(1-x^2)(1-x^2) \leq \left( \frac{2x^2 + (1-x^2) + (1-x^2)}{3} \right)^3, \text{ innen}$$

$$2K^2 \leq \frac{8}{27}, K \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Mivel  $2x^2 = 1 - x^2$ , ha  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , így a  $K$  kifejezés maximuma  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ , s ezt az értéket az

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  helyen veszi fel. (823. ábra)

823.



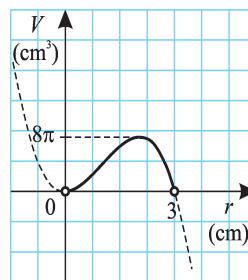
824. a)  $4r + 2m = 12$ , innen  $m = 6 - 2r$ ,  
 $V(r) = (6 - 2r)\pi r^2$ ,  $0 < r < 3$ .

$$b) r^2(6 - 2r) \leq \left( \frac{r + r + (6 - 2r)}{3} \right)^3 = 8,$$

így  $V_{\max} = 8\pi$ ; az értékkészlet  $]0; 8\pi]$ .

(824. ábra)

824.



$$c) V(m) = \pi m \left( \frac{6 - m}{2} \right)^2, \quad 0 < m < 6.$$

825.  $0,0001N^3 + 0,0002N < 0,002N^2 + 0,004N$ , innen  $0,0001N^3 - 0,002N^2 - 0,0038N < 0$ .

$N(N + 1,75)(N - 21,75) < 0$ , ha  $N < -1,75$  (a feladat szempontjából ez érdektelen), vagy ha  $0 < N < 21,75$ . Tehát az  $N \leq 21$  értékekre gyorsabb az I. módszer.

826. a)  $V = x(20 - 2x)(10 - 2x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$  ( $0 < x < 5$ ).

b) (826. ábra)

$$c) D_V = ]0; 5[. \quad 4(x^3 - 15x^2 + 50x) =$$

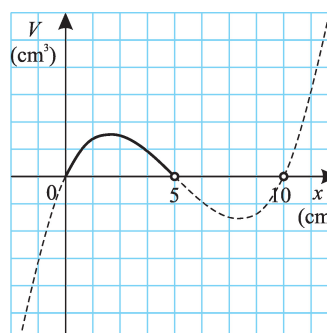
$$= 4[(x - 5)^3 - 25x - 125] =$$

$$= 4[(x - 5)^3 - 25(x - 5)] =$$

$$= 4[25(5 - x) - (5 - x)^3].$$

Helyettesítsük  $5 - x$ -et  $z$ -vel ( $z > 0$ ), ekkor  $V = 4z(25 - z^2)$  maximumát keressük.

826.





A 823. feladat megoldása alapján  $\frac{V^2}{8} = 2z^2(25 - z^2)(25 - z^2) \leq \left( \frac{2z^2 + (25 - z^2) + (25 - z^2)}{3} \right)^3$ , innen  $V^2 \leq 8 \cdot \frac{50^3}{3^3}$ ,  $V \leq \frac{1000}{3\sqrt{3}}$ . Ha  $2z^2 = 25 - z^2$ , akkor  $z = \frac{5}{\sqrt{3}}$ ,  $x = 5 - \frac{5}{\sqrt{3}}$ . Tehát  $V$  maximuma  $\frac{1000}{3\sqrt{3}} \approx 192,45 \text{ cm}^3$ , s ezt akkor veszi fel, ha  $x = 5 - \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2,11 \text{ cm}$ . A térfogat a 0-t tetszőlegesen megközelítheti, így az értékkészlet  $]0; 192,45]$ .

**827. a)**  $a(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = x + 1$ , ha  $x \neq 2$ . (827/I. ábra)

b)  $b(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{2 - x} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} + \frac{1}{x - 2} = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$ .  
(827/I. ábra)

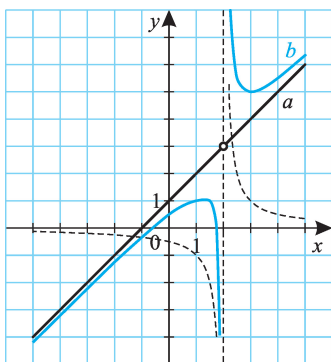
c)  $c(x) = \frac{x^3 + x^2}{x - 1} = x^2 + 2x + 2 + \frac{2}{x - 1}$ . (827/II. ábra)

d)  $d(x) = \frac{|x^2 - x|}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x}$ , ha  $x^2 - x > 0$ , vagyis

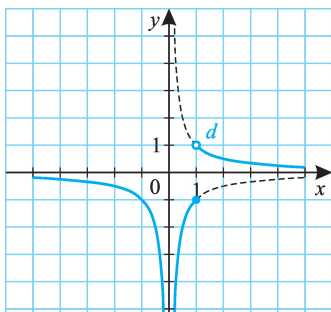
$x < 0$  vagy  $1 < x$ ; egyébként  $d(x) = -\frac{1}{x}$ .

(827/III. ábra)

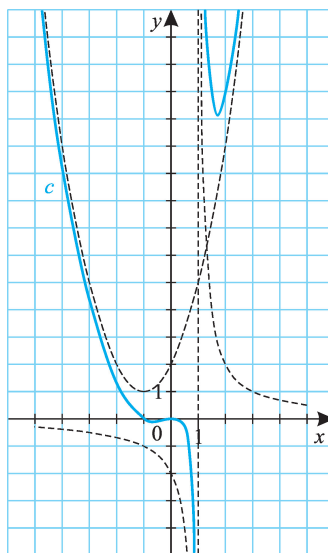
**827/I.**



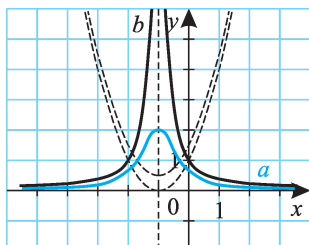
**827/III.**



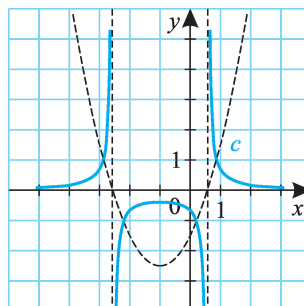
**827/II.**



828/I.



828/II.



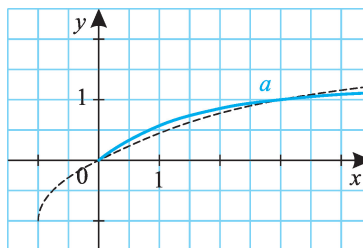
828. (828/I-II. ábra)

829. a) Először az  $x \mapsto -1 + \sqrt{x+1}$  belső függvényt ábrázoljuk: (829/a. ábra)

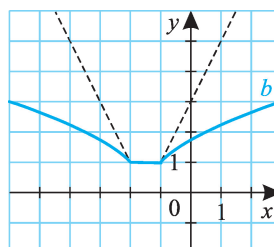
Nagy  $x$  értékekre a függvénygörbe (alulról) megközelíti az  $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$  függvénygörbét.

b) Először az  $x \mapsto |x+1| + |x+2|$  függvényt ábrázoljuk: (829/b. ábra)

829/a.



829/b.



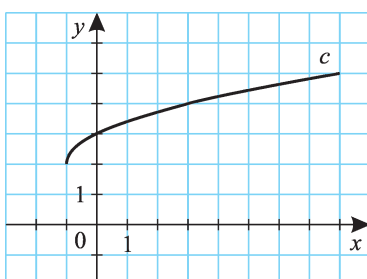
$$\begin{aligned} c) \sqrt{x+4\sqrt{x+1}+5} &= \sqrt{(2+\sqrt{x+1})^2} = \\ &= |2+\sqrt{x+1}| = 2+\sqrt{x+1}. \end{aligned}$$

(829/c. ábra)

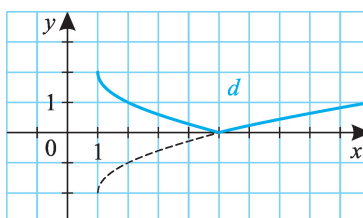
$$d) \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1}-2|.$$

(829/d. ábra)

829/c.



829/d.





A jobb oldal képe 1-merevedekségű párhuzamos egyenesekből álló egyenessereg. A 833. ábráról leolvashatjuk, hogy a  $p > 4$  esetben van egy (határ)helyzet, amikor a két görbének három közös pontja lesz; ehhez az szükséges, hogy az  $x + p = -x^2 - 6x - 8$  egyenletnek egyetlen megoldása legyen. Ennek feltétele, hogy az  $x^2 + 7x + 8 + p = 0$  egyenlet diszkriminánsa zérus legyen:

$$D = 49 - 4(8 + p) = 0, \text{ innen } p = 4,25.$$

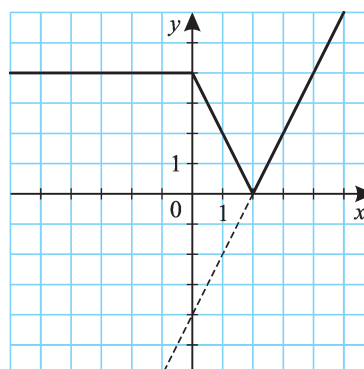
Tehát az ábra alapján:

$p$ értéke	gyökök száma
$p < 2$	0
$p = 2$	1
$2 < p < 4$	2
$p = 4$	3
$4 < p < 4,25$	4
$p = 4,25$	3
$4,25 < p$	2



**834.** A hagyományos algebrai eljárásnál lényegesen gyorsabb, ha grafikus segítséget alkalmazunk. Ha  $x < 0$ ,  $||x| + x - 4| = 4$ ; ha  $x \geq 0$ ,  $||x| + x - 4| = |2x - 4|$ . A bal oldal képe: (834. ábra)

**834.**



A jobb oldal képe tetszőleges egyenes lehet, így végtelen sok megoldás van, ha:

1.  $a = 0, b = 4$ ;
2.  $a = -2, b = 4$ ;
3.  $a = 2, b = -4$ .

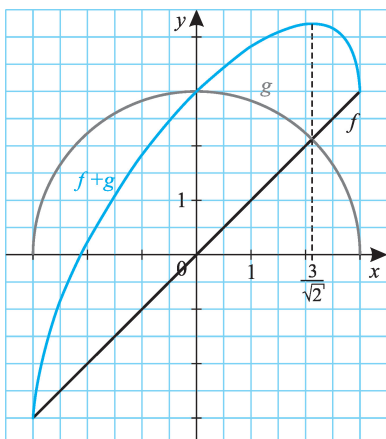
**835.** a)  $R_a = [1; 7]$ ; b)  $R_b = [2; 9]$ ; c)  $R_c = [4; 14]$ .

d) A függvények összegének képzése miatt a minimumhely csak „töréspontban” lehet, a maximumhely pedig az értelmezési tartomány valamelyik végpontjában. Mivel  $d(-1) = 34, d(0) = 24, d(1) = 14, d(2) = 8, d(3) = 8, d(4) = 16, d(5) = 26, R_d = [8; 34]$ .

**836.** Ha  $n = 2k + 1$  alakú ( $k \in \mathbb{N}$ ), akkor a minimumhely  $x = k + 1$ , a minimális érték  $2(k + k - 1 + k - 2 + \dots + 1) = k(k + 1)$ .

Ha  $n = 2k$  alakú, akkor a  $[k; k + 1]$  intervallum pontjai adják a minimumhelyeket, s a minimális érték  $k + 2(k - 1 + k - 2 + \dots + 1) = k^2$ .

837.



837. a), b) (837. ábra)

c) A  $h = f + g$  függvény minimuma  $-3$ , maximumát a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség segítségével határozhatjuk meg.

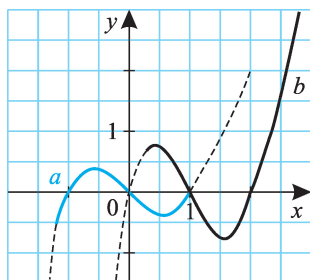
$$x > 0, \text{ így } \frac{x + \sqrt{9 - x^2}}{2} \leq \\ \leq \sqrt{\frac{x^2 + (9 - x^2)}{2}}, \text{ innen } h \leq 3\sqrt{2}.$$

(Egyenlőség az  $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$  helyen

lép fel.)

Az értékkészlet  $R_h = [-3; 3\sqrt{2}]$ .

838/I.



838. a)  $x^3 - x = x(x + 1)(x - 1)$ , a függvény képe: (838/I. ábra).

A 823. feladat megoldása alapján a  $[-1; 0]$ , illetve  $[0; 1]$  közötti lokális szélsőérték helyek  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

nál vannak, a felvett értékek  $\pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx \pm 0,385$ .

$a(-1,2) = -0,528$ ,  $a(1,1) = 0,231$ , így az értékkészlet  $R_a = [-0,528; 0,385]$ .

b) (838/I. ábra)

$$b(3) = 12, b\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx -0,770, R_b = [-0,770; 12].$$

c) A 823. feladat megoldásában leírt módszert követjük.

Az  $x(x - 2)(x + 5) + 1 = x^3 + 3x^2 - 10x + 1 = (x + 1)^3 - 13(x + 1) + 13$  átalakítás után a  $C(z) = 13z - z^3$  függvény lokális maximumát keressük meg. (A  $z = x + 1$  helyettesítést alkalmaztuk.)

$$2C^2 = 2z^2(13 - z^2)(13 - z^2) \leq \left(\frac{26}{3}\right)^3, \text{ innen } C \leq 18,04; \text{ egyenlőség a } z = 2,08$$

helyen van. Mivel  $c(x) = (x + 1)^3 - 13(x + 1) + 13 = z^3 - 13z + 13$ , a  $c$  függvény

lokális minimuma az  $x = 1,08$  helyen van, értéke  $-5,04$ ; a lokális maximumhely  $x = -3,08$ , a felvett érték  $31,04$ .

**838/II.**

(838/II. ábra)

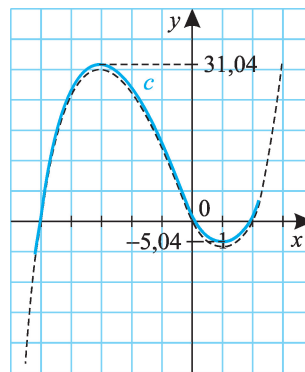
$c(-5,2) = -6,49$ ,  $c(2,2) = 4,168$ , így  $R_c = [-6,49; 31,04]$ .

d) Az  $x - 5 = z$  helyettesítéssel  $d(x) = D(z) = (z + 3)(z + 1)(z - 1)(z - 3) = (z^2 - 9)(z^2 - 1) = z^4 - 10z^2 + 9 = (z^2 - 5)^2 - 16$ . A  $z = \pm\sqrt{5}$ , vagyis az  $x = 5 + \sqrt{5}$ , illetve  $x = 5 - \sqrt{5}$  helyeken a függvénynek (abszolút) minimuma van, ennek értéke  $-16$ .

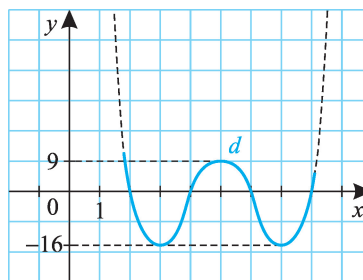
A  $z = 0$  ( $x = 5$ ) helyen lokális maximuma van a függvénynek,  $d(5) = 9$ .

(838/III. ábra)

$d(1,8) = 11,46$ ,  $d(8,1) = 5,25$ ,  $R_d = [-16; 11,46]$ .



**838/III.**



**839.** Több megoldás lehetséges. Pl. megfelelő:

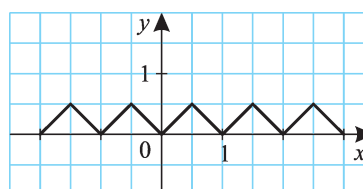
- a) az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvény  $]0,1]$  intervallumra vett leszűkítése, kiegészítve az  $f(0) = 0$  hozzárendeléssel;
- b) az  $f(x) = x$  függvény  $[0,1[$  intervallumra vett leszűkítése, kiegészítve  $f(1) = 0$ -val.  
(Az elemi függvények közül megfelelő az  $f(x) = \{x\}$ .)

**840.** Ábrázoljuk az  $x$  valós számnak a legközelebbi egész számtól való távolságát! (840. ábra)

Az  $x \mapsto \{x\}$  függvény megfelelő transzformációival ez valóban az

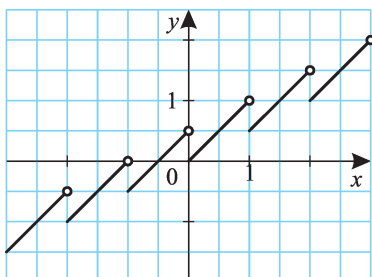
$$x \mapsto \frac{1}{2} - \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right| \text{ függvény képe.}$$

**840.**



**841.** Néhány lehetséges megoldás:

**841/I.**



*Első megoldás:*

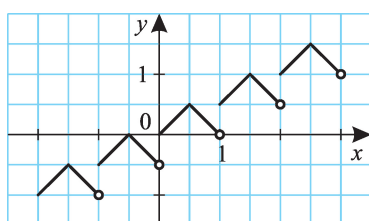
Megfelelő pl. az  $x \mapsto x - \frac{[x]}{2} = \frac{x + \{x\}}{2}$  függvény. (841/I. ábra)

*Második megoldás:* Az előző megoldásban tulajdonképpen egy szakaszt eltoltunk az  $(1; 0,5)$  vektor egész számszorosaival. Hasonlóan okoskodhatunk más kezdőgörbék esetén. Pl. az  $x \mapsto 1 - |x - 1|$  függvényt le-szűkíthetjük a  $[0; 2[$  intervallumra, s ezt a

görbét eltolhatjuk a  $(2; 1)$  vektor egész számszorosaival.

(Képlettel:  $f(x) = f(x - 2) + 1$  minden  $x$ -re.) (841/II. ábra)

**841/II.**



De „tologathatunk” egyéb görbékét is (a 841/III. ábrán félkörök szerepelnek;

$$f(x) = \sqrt{1 - (x - 1)^2}, \text{ ha } x \in [0; 2];$$

$$f(x) = f(x - 2) + 1 \text{ egyébként.}$$

**842.** Nincs ilyen függvény. Az értékkészlete megszámlálhatóan végtelen halmaz lenne, azonban a nem konstans folytonos függvény értékkészlete nem megszámlálható halmaz.

**843.** A polinomfüggvényt  $f(x) = ax + b$  alakban keressük ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).

$$a) f(x) + f(x + 1) = ax + b + a(x + 1) + b = 2ax + a + 2b \equiv 2x + 4.$$

Az egyenletnek minden  $x$ -re teljesülnie kell; s ez csak úgy lehetséges, ha  $2a = 2$  és  $a + 2b = 4$ .

Eredmény:  $f(x) = x + 1,5$ .

$$b) f(x + 1) - f(x - 1) = a(x + 1) + b - (a(x - 1) + b) = 2a = 6, \text{ innen } a = 3. f(x) = 3x + b, \text{ } b \in \mathbf{R} \text{ tetszőleges.}$$

$$c) f(x) + f(x + 2) = ax + b + a(x + 2) + b = 2ax + 2a + 2b \equiv 10x, \text{ innen } f(x) = 5x - 5.$$

$$d) f(2x) + f(x + 1) = 2ax + b + a(x + 1) + b = 3ax + a + 2b \equiv 12x + 4. f(x) = 4x.$$

**844.** Alkalmazzuk az  $x = 0$  helyettesítést!

a) Az  $x = 0$  helyettesítésből  $c = 0$  következik, innen  $f(x) = f(-x)$  minden  $x$ -re, vagyis bármely páros függvény megoldás.

b) Az  $x = 0$  helyettesítésből a  $0 = 1$  ellentmondást kapjuk; nincs ilyen függvény.





- c) Az  $x = 0$  helyettesítésből  $c = 0$ . Ezután alkalmazzuk az  $x = 1$ , majd  $x = -1$  helyettesítést! Ekkor (1)  $f(1) - f(-1) = a$ , valamint (2)  $f(-1) - f(1) = a$ , s innen  $f(x) \equiv f(-x)$ . Bármely páros függvény megfelel.

*Megjegyzés:*

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha az egyenlet jobb oldalán  $ax^2 + c$  helyett tetszőleges páros polinomfüggvény áll. (Vagyis olyan polinomfüggvény, amelyben csak páros kitevőjű tag szerepel.)

*Más megoldási lehetőség:*

Mivel a függvényegyenleteknek minden  $x$ -re teljesülniük kell, írjunk  $x$  helyébe  $-x$ -et!

- a) Ekkor az eredeti egyenlettel együtt két egyenletünk lesz: (1)  $f(x) - f(-x) = c$ , (2)  $f(-x) - f(x) = c$ . Innen  $c = -c = 0$ , vagyis az egyenletet bármely páros függvény kielégíti.
- b) (1)  $f(x) - f(-x) = x + 1$ , (2)  $f(-x) - f(x) = -x + 1$ . Innen az  $x + 1 = -(-x + 1)$  összefüggést kapjuk, ami lehetetlen. Nincs ilyen függvény.
- c) (1)  $f(x) - f(-x) = ax^2 + c$ , (2)  $f(-x) - f(x) = ax^2 + c$ . Innen  $ax^2 + c \equiv 0$ ,  $a = c = 0$ ,  $f$  páros függvény.

- 845.** a) Írjunk  $x$  helyébe  $1 - x$ -et! Ekkor (1)  $2f(x) + 3f(1 - x) = c$ , (2)  $2f(1 - x) + 3f(x) = c$ . (2) háromszorosából vonjuk ki (1) kétszeresét, kapjuk:

$$5f(x) = c, \text{ innen } f(x) = \frac{c}{5}.$$

- b) Írjunk ismét  $x$  helyébe  $1 - x$ -et! (1)  $2f(x) + 3f(1 - x) = 6x - 1$ , (2)  $2f(1 - x) + 3f(x) = -6x + 5$ . (2) háromszorosából vonjuk ki (1) kétszeresét, kapjuk:  $5f(x) = 3(-6x + 5) - 2(6x - 1) = -30x + 17$ . Innen
- $$f(x) = -6x + \frac{17}{5}.$$

- c) Írjunk  $x$  helyébe  $2 - x$ -et!  $f(x) = -2x + 1$ .

- d) Írjunk  $x$  helyébe  $1 - x$ -et! (1)  $f(x) + (x + 1)f(1 - x) = 1$ , (2)  $f(1 - x) + (2 - x)f(x) = 1$ . (2)  $(x + 1)$ -szereséből vonjuk ki (1)-et, kapjuk:
- $$((2 - x)(x + 1) - 1)f(x) = x, \text{ innen } f(x) = \frac{x}{-x^2 + x + 1}.$$

(Az alaphalmaz leszűkül,  $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .)

- e) Írjunk  $x$  helyébe  $1 - x$ -et! (1)  $7f(x - 1) + 5f(-x) = 12x - 10$ ; (2)  $7f(-x) + 5f(x - 1) = -12x + 2$ . (1) ötszöröséből vonjuk ki (2) hét-szeresét, ekkor  $-24f(-x) = 144x - 64$ ,  $f(-x) = -6x + \frac{8}{3}$ , s innen

$$f(x) = 6x + \frac{8}{3}.$$

- 846.** Nincsenek ilyen függvények. Alkalmazzuk a  $z = x - 1$  helyettesítést, majd írjunk  $z$  helyébe  $-z$ -t!

**847.** Helyettesítsünk  $x$  helyébe  $\frac{1}{x}$ -et.

a) Ekkor (1)  $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ , (2)  $2f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Az egyenlet-

rendszer megoldásából  $f(x) = \frac{3 - 2x^4}{5x^2}$ .

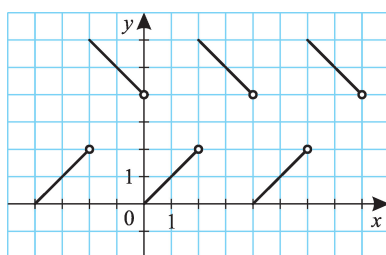
b) (1)  $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 2$ , (2)  $2f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = \frac{1}{x} + 2$ . Az egyenlet-

rendszer megoldásából  $f(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 3}{5x}$ .

**848. a)** Nincs. A polinomnak végtelen sok zérushelye lenne:  $x = 0, 1, 2, \dots$  stb.

b) Az  $x = 0, 1, -1$  zérushelyei  $f$ -nek, így  $f(x) = x(x-1)(x+1)g(x)$  alakba írható. Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe  $(x-1)(x+1)x(x+2)g(x+1) = (x+2)x(x-1)(x+1)g(x)$ , innen  $g(x) = g(x+1)$ . Ez utóbbi egyenletből következik, hogy  $g(x)$  konstans polinom (egyébként a  $g(x+1) - g(x)$  polinomnak végtelen sok zérushelye lenne), vagyis  $f(x) = c(x^3 - x)$ , ahol  $c \in \mathbf{R}$ .

**849.**



**849.**  $f(x) + f(x+2) = f(x+2) + f(x+4)$ , innen  $f(x) = f(x+4)$ . Végtelen sok ilyen függvény van  $P = 4$  alapperiódussal. Pl. a  $[0, 4[$  alapperiódusban a  $[0, 2[$  és  $[2, 4[$  intervallumokhoz tartozó szakaszokat felvehetjük a 849. ábra szerint ( $c = 6$ ).

**850. Első megoldás:** Mivel  $g(x)$  nyilván másodfokú, legyen  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , ekkor  $h(x) = 3(ax^2 + bx + c)^2 - 2(ax^2 + bx + c) + 5 = 12x^4 + 56x^2 + 70$  minden  $x$ -re. Innen

$3a^2x^4 + 6abx^3 + (3b^2 + 2ac - 2a)x^2 + (6bc - 2b)x + 3c^2 - 2c + 5 = 0$ , s ez minden  $x$ -re csak akkor teljesülhet, ha (1)  $3a^2 = 12$ , (2)  $6ab = 0$ , (3)  $3b^2 + 6ac - 2a = 56$ , (4)  $6bc - 2b = 0$ , (5)  $3c^2 - 2c + 5 = 70$ . (1)-ből  $a = \pm 2$ , (2)-ből és (4)-ből  $b = 0$ ,

(5)-ből  $c = 5$  vagy  $c = -\frac{13}{3}$ . A (3)-at kielégítő számhármások:  $(a, b, c) = (2, 0, 5)$

vagy  $(a, b, c) = \left(-2, 0, -\frac{13}{3}\right)$ . Az együtthatók összege  $a + b + c = 7$  vagy  $a + b +$

$+ c = -\frac{19}{3}$ .

**Második megoldás:** Bármely polinomban az  $x = 1$  helyen felvett érték az együtthatók összegét adja, tehát  $g(1)$ -et keressük. Mivel  $h(x) = 3g^2(x) - 2g(x) + 5 = 12x^4 + 56x^2 + 70$  minden  $x$ -re, az  $x = 1$  helyettesítéssel  $h(1) = 3g^2(1) - 2g(1) + 5 = 12 + 56 + 70 = 138$ , s innen  $g(1) = 7$  vagy  $g(1) = -\frac{19}{3}$ .

**851.** Ez az  $(x; y) \mapsto \max(x; y)$  maximumfüggvény. A két változó közül értéként a nagyobbikat rendeljük az  $(x; y)$  párhoz. (Ha  $x = y$ , akkor bármelyiküket.)

**852.** a) 41; b) 21;

c) ha  $c \in \mathbf{Z}$ , akkor végtelen sok, egyébként egyetlen rácsponton sem halad át az egyenes;

d) ha  $d \in \mathbf{Q}$ , akkor végtelen sok, egyébként egyetlen rácsponton sem halad át az egyenes.

e) Mivel  $x$  egész szám,  $y = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$  egész szám, ha  $x-1$  osztója 2-nek.  $x$  lehetséges értékei 3; 2; 0; -1.

f)  $\frac{3x+1}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}$ , innen  $x-2 \in \{-7; -1; 1; 7\}$ ,  $x \in \{-5; 1; 3; 9\}$ , s ebből három érték felel meg.

g) Az  $y = \frac{3x+1}{2x-2}$  egyenletből  $2y = \frac{3x+1}{x-1} = 3 + \frac{4}{x-1}$ , s innen  $x-1$  osztója 4-nek. Foglaljuk táblázatba a lehetséges értékeket!

$x-1$	-4	-2	-1	1	2	4
$x$	-3	-1	0	2	3	5
$2y$	2	1	-1	7	5	4

Két rácsponton megy át a  $g$  függvénygörbe, ezek:  $(-3; 1)$  és  $(5; 2)$ .

h) Ha  $x \in \mathbf{Z}$ , akkor  $y = h(x) \in \mathbf{Z}$  szintén. Az intervallumban 41 rácsponton halad át a parabola.

i)  $x \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$ ; 5 megoldás van.

j) Mivel  $x$  egész,  $j(x)$  is egész, ha  $x-3 \geq 3$ , vagyis  $x \geq 6$ . 15 megoldás van.

k)  $y = \frac{2^{x+1}}{2^x+1} = 2 - \frac{2}{2^x+1}$ . Látható, hogy  $0 < y < 2$ , így csak  $y = 1$  lehetséges (ekkor  $x = 0$ ). Egy megoldás van.

**853.** Igen, lehet. Tekintsük pl. az  $f(x) = 3^{-\frac{x}{2}} - 3$  és  $g(x) = -2\log_3(x+3)$  függvényeket!

Míndkét görbe átmegy a  $(-2; 0)$  és  $(0; -2)$  pontokon. A függvények egymás inverzei, tükrös helyzetűek az  $x \mapsto x$  egyenesre, így ugyanabban a pontban metszik az  $y = x$  egyenletű egyenest is; tehát van harmadik közös pontjuk. (Közelítő értékekkel számolva az  $x = -2\log_3(x+3)$  egyenlet megoldása  $x \approx -1,13$ , így a harmadik közös pont  $(-1,13; -1,13)$ .)

