

V. Az egyváltozós valós függvények analízisének elemei

Sorozat határértéke

V

1142. Legyen $a_n = n$, és $b_n = \frac{1}{n}$.

1143. Legyen $a_n = -\frac{1}{n}$, és $b_n = -n$.

1144. Igen. Legyen $a_n = -n$, és $b_n = -n$.

1145. Nem. Legyen $a_n = -\frac{1}{n}$, és $b_n = -\frac{1}{n}$.

1146. Nem. Legyen $a_n = -\frac{1}{n^2}$, és $b_n = -\frac{1}{n}$.

1147. Nem. Legyen $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, és $b_n = \frac{1}{n^2}$.

1148. Igen. Legyen $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, és $b_n = \frac{1}{n^2}$.

1149. Mivel az a_n sorozatnál minden ε -hoz van olyan n_0 küszöbindex, amely-nél nagyobb indexű elemek $\mathcal{A}$ -tól ε -nál kevésbé térnek el, ezekre igaz az is, hogy a b_n sorozat elemei is ε -nál kevésbé térnek el, hiszen $n_0 + 100 > n_0$.

1150. Nem. Legyen $a_n = (-1)^n$, és $b_n = (-1)^n$.

1151. Nem. Legyen $a_n = (-1)^n$, és $b_n = (-1)^n$.

1152. a) Nem. Legyen $a_n = (-1)^n$, és $b_n = \frac{1}{n^2}$.

b) Nem. Legyen $a_n = \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right)$, és $b_n = \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right)$.

1153. Mivel az a_n sorozatnál minden ε -hoz van olyan n_0 küszöbindex, amely-nél nagyobb indexű elemek 3-tól ε -nál kevésbé térnek el, ezért igaz az is, hogy a b_n sorozat elemei is ε -nál kevésbé térnek el 3-tól, ha pl. $n_1 > n_0 + 2$.

1154. Mivel az a_n sorozatnál minden ε -hoz van olyan n_0 küszöbindex, amely-nél nagyobb indexű elemek 5-től ε -nál kevésbé térnek el, ezért igaz az is, hogy a b_n sorozat elemei is ε -nál kevésbé térnek el 5-től, ha pl. $n_1 > n_0$.

1155. Bizonyítsuk indirekt módon. Tegyük fel, hogy b_n sorozat konvergens, és határértéke B ; a $c_n = a_n + b_n$ sorozat határértéke pedig legyen C . Két konver-

gens sorozat különbsége is konvergens, és határértéke a sorozatok határértékeinek a különbsége, tehát az $a_n = c_n - b_n$ sorozat konvergens, ami ellentmond a feltevésnek.

Például legyen $a_n = (-1)^n$, és $b_n = (-1)^{n+1}$, ekkor összegük az azonosan 0 sorozat.

1156. Az a_n sorozatnak csak véges sok eleme lehet nulla, különben az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozatnak lenne olyan részsorozata, ami nullához konvergál, ami ellentmond annak, hogy a határértéke 1. Tekintsük akkor a legnagyobb indexű nullelem utáni részsorozatot! Legyen $c_n = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat, aminek tehát nincs nulleleme.

Átrendezve $b_n = \frac{a_n}{c_n}$, ahonnan $\lim b_n = \lim \frac{a_n}{c_n} = \frac{0}{1} = 0$, amit bizonyítani kellett. Két ilyen sorozat például $a_n = \frac{1}{n}$, és $b_n = -\frac{1}{n}$.

1157. Legyen $c_n = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat, ahonnan $a_n = b_n \cdot c_n$,

és $\lim a_n = \lim b_n \cdot \lim c_n = 0 \cdot 1 = 0$.

1158. Nem. Pl. $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n = 2k \\ -n, & \text{ha } n = 2k-1 \end{cases}$ és $b_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n = 2k-1 \\ -n, & \text{ha } n = 2k \end{cases}$,

ekkor egyik sorozatnak sincs határértéke.

1159. a) Nem. Pl. $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n = 2k \\ 1, & \text{ha } n = 2k-1 \end{cases}$ és $b_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n = 2k-1 \\ 1, & \text{ha } n = 2k \end{cases}$.

b) Igen. Tegyük fel, hogy mindkét sorozat korlátos. Ekkor $\exists$ olyan A és B valós szám, amelyre $|a_n| < A$ és $|b_n| < B \quad \forall n \in \mathbb{N}$ -re. Ebből viszont az következik, hogy $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < AB < \infty$, ami ellentmondás.

1160. Nem. Pl. $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n = 2k \\ 1, & \text{ha } n = 2k-1 \end{cases}$ és $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n = 2k-1 \\ 1, & \text{ha } n = 2k \end{cases}$,

így egyik sorozatnak sincs határértéke.

1161. Nem. Pl. $a_n = -5$ és $b_n = \frac{1}{n}$, így a hányadossorozatnak határértéke $-\infty$.

1162. a) $(a_n + b_n) = \left(\frac{n^2-1}{n}\right) + \left(\frac{2n-1}{n^2+1}\right) = \left(\frac{n^2-1}{n}\right) + \frac{2n-1}{n^2+1} =$

$$= \frac{n^4-1+2n^2-n}{n(n^2+1)} = \frac{n^4+2n^2-n-1}{n(n^2+1)} = \frac{\frac{n^4}{n^3} + 2\frac{n^2}{n^3} - \frac{n}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

A számlálóban és a nevezőben tagonként véve a határértéket, világos, hogy a nevező 1-hez, a számláló n -nel $+\infty$ -hez tart.

$$\begin{aligned} b) (a_n \ b_n) &= \left(\frac{n^2-1}{n} \right) \left(\frac{2n-1}{n^2+1} \right) = \\ &= \frac{n^2-1}{n} \left(\frac{2n-1}{n^2+1} \right) = \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{n^2-1}{n^2+1} = \left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right). \end{aligned}$$

Az első tényező 2-höz, a második számlálója és nevezője is 1-hez tart, ezért $\lim a_n b_n = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$.

1163. $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 + (n-1)d} = \frac{1}{n \cdot d + a_1 - d}.$

Mivel a nevező magasabb fokú, mint a számláló, ezért a határérték nulla.

1164. Használjuk fel a számtani sorozatra és a határértékre ismert összefüggéseket.

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \frac{a_1 + (n-1)d}{n} = \frac{2}{n} + d - \frac{d}{n}. \text{ Tehát } a_1 = 2 \text{ és } d = 5. \\ \lim \frac{a_n}{n} &= \lim \left(\frac{2}{n} + d - \frac{d}{n} \right) = d = 5 \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2 + (n-1) \cdot 5] = \frac{5n^2}{2} - \frac{3n}{2}.$$

1165. Ha $0 < |q| < 1$, akkor a tagok abszolútértéke szigorúan monoton csökken, így

$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} > a_1 + a_1 q$, ha $n > 2$, és $a_1 \neq 0$. Ezért $|b_n| = |S_1 + S_2 + \dots + S_n| > n \cdot a_1 + a_1 q(n-1) = n(a_1 + a_1 q) - a_1 q$. Ez a sorozat viszont nem korlátos, tehát nem is konvergens, ha $a_1 \neq 0$ és $0 < |q| < 1$.

1166. Tudjuk, hogy $a_n - b_n = a_1 - b_1 + (n-1)(d_1 - d_2)$, ahol d_1 az a_n , d_2 a b_n sorozat differenciáját jelöli. Ez a sorozat viszont nem korlátos, tehát nem is konvergens, ha $(d_1 \text{ az } a_n, d_2) \neq 0$. Ha tehát konvergens, akkor d_1 az a_n , d_2 a két sorozat differenciája egyenlő. Ekkor viszont a határértéke $a_1 - b_1$, ami csak akkor nulla, ha a két sorozat első eleme is egyenlő. Tehát a két számtani sorozat minden eleme megegyezik.

1167. Használjuk fel a számtani sorozatra ismert összefüggéseket.

$$\frac{S_n}{a_n^2} = \frac{\frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]}{(a_1 + (n-1)d)^2} = \frac{n^2 d + n(2a_1 - d)}{2[(n-1)^2 d^2 + 2a_1(n-1)d + a_1^2]}.$$

Ennek határértéke a legmagasabb fokú tagok hányadosa, tehát $\frac{d}{2d^2} = 2, \Rightarrow d = \frac{1}{4}$.

1168. $\frac{S_n}{n} = \frac{\frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]}{n} = n \frac{d}{2} + a_1 - \frac{d}{2}$. Ez a sorozat viszont nem korlátos, tehát nem is konvergens, ha $d \neq 0$. $\Rightarrow d = 0 \Rightarrow a_1 = 2$.

1169. Használjuk fel a számtani sorozatra ismert összefüggéseket.

Tudjuk, hogy $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + (n-1)d_1}{b_1 + (n-1)d_2}$, ahol d_1 az a_n , d_2 a b_n sorozat differenciáját jelöli.

V

Ennek határértéke $\frac{d_1}{d_2} = 3$. $\frac{S_n}{R_n} = \frac{\frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2} [2b_1 + (n-1)d_2]} = \frac{nd_1 + 2a_1 - d_1}{nd_2 + 2b_1 - d_2}$ ennek

határértéke $\frac{d_1}{d_2}$, ami a feltétel szerint 3.

1170. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$. A sorozat minden tagja pozitív, ezért elég a $\frac{2}{n+1} < \frac{1}{100}$ egyenlőtlenséget megoldani, $\Rightarrow n+1 > 200$, $n > 199$ már jó.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 - \frac{5}{n}} = \frac{2}{3}$, mivel a számlálóban és a nevezőben

is a második tag nullához tart. Az $\varepsilon = 0,01$ -hez tartozó küszöbindex

meghatározása: $\left| \frac{2n+3}{3n-5} - \frac{2}{3} \right| < 0,01 \Rightarrow \left| \frac{6n+9-6n+10}{3(3n-5)} \right| =$

$= \left| \frac{19}{9n-15} \right| < 0,01$. A tört biztosan pozitív, ha $n > 15$, ezért csak azt

kell nézni, hol lesz $\frac{19}{9n-15} < 0,01$. Megoldás: $n = 213$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n^2+2n-15} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{(n-3)(n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+5} = 0$.

Az $\varepsilon = 0,01$ -hez tartozó küszöbindex meghatározása: A tört biztosan pozitív, ezért csak azt kell nézni, hol lesz $\frac{1}{n+5} < 0,01$. Megoldás: $n = 95$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{5-2n+n^2} = 0$, mivel a nevező magasabb fokú, mint a számláló. Az $\varepsilon = 0,01$ -hez tartozó küszöbindex meghatározása:

$\left| \frac{1-n}{5-2n+n^2} \right| < 0,01$. $-0,01 < \frac{1-n}{5-2n+n^2} < 0,01$. A nevező felírható $\left[(n+1)^2 + 4 \right]$ alakban, ami mindig pozitív, ezért az egyenlőtlenséget végig lehet vele szorozni. $-n^2 + 2n - 5 < 100 - 100n < n^2 - 2n + 5$. Mivel $(100 - 100n) < 0$, ha $n > 1$, így csak a bal oldali egyenlőtlenséget kell megoldani. $0 < n^2 - 102n + 105 \Leftrightarrow n \leq 1$ vagy $n \geq 101$. Megoldás tehát: $n = 101$.

1171. Az alábbi feladatokban a nevező legmagasabb fokú hatványával leosztva jutunk eredményre. Ha a nevező a magasabb fokú, a határérték nulla, ha a számláló, akkor a határérték a főegyütthatók hányadosával megegyező előjellel $+\infty$ vagy $-\infty$, míg ha megegyeztek a foksámok, akkor a határérték a főegyütthatók hányadosa.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3-5n^2} = 0$, mert a nevező a magasabb fokú.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 7n + 3}{2n^2 + 3n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 7\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2}}{2 + 3\frac{1}{n} - 5\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$.

c) Hasonlóan leosztva a nevező legmagasabb hatványával

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^4}{9n^4 + n^3 - 2n + 5} = -\frac{1}{9}.$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 12}{3n^3 - n^2 - 5n - 1} = \frac{2}{3}$.

e) Mivel $n > 0$, helyes a következő átalakítás:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n\sqrt{1+5\frac{1}{n^2}}} = 2.$$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{2\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1-2(n^2-1)}{\sqrt{n^4-1}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+3}{n^2\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}} = -1.$

1172. A következő példánál először az összegeket zárt alakra kell hozni.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3}{1+2+3+\dots+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+6}{n^2+n} = 4.$

V

$$b) \lim \frac{2 + 4 + \dots + 2n}{3n - 5} = \lim \frac{n \frac{2 + 2n}{2}}{3n - 5} = \lim \frac{n^2 + n}{3n - 5} = +\infty.$$

$$c) \lim \frac{n^3 - 2n^2 + 3}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2} = \lim \frac{n^3 - 2n^2 + 3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = 6.$$

$$d) \lim \frac{1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + n! \cdot n}{(n+1)!} = \lim \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} =$$

$$= \lim \left(1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1.$$

1173. Ezeknél a feladatoknál a számláló vagy a nevező, esetleg mindkettő gyöktelenítése segít.

$$a) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \text{ ezért a sorozat határértéke nulla.}$$

$$b) \lim \left(\sqrt{n^2 + n - 1} - n \right) = \lim \frac{\sqrt{n^2 + n - 1} + n}{n^2 + n - 1 - n^2} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n^2 + n - 1} + n}{n - 1} = \lim \frac{n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + n}{n - 1} = 2.$$

c) Lásd b).

$$d) a_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} = \frac{\sqrt{n^2 + n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}}{(n^2 + n - 1) - (n^2 - n + 1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{n^2 + n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}}{2n - 2}.$$

Az n -nel tagonként elosztva, a határérték 1.

e) Itt elég azt mondani, hogy n -nel tagonként elosztva a számlálót és a nevezőt is, a határérték nulla.

$$f) a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{((n+1) - (n-1))(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})(n+1-n)} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}. \text{ Itt } \sqrt{n} \text{-et kiemelve a számlálóból és a nevezőből adódik, hogy a határérték 2.}$$

1174. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N_0 küszöbindex, hogy az annál nagyobb indexű elemek az A határérték körül az $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ intervallumba esnek, tehát legfeljebb N_0 darab elem van azon kívül. Ez véges sok elem (valós szám), hozzávéve az $(A - \varepsilon)$ és az $(A + \varepsilon)$ számokat még mindig véges, tehát van közöttük legkisebb és legnagyobb. Ezek megfelelnek alsó és felső korlátoknak. Az állítás megfordítása nem igaz, pl. $a_n = \cos(n\pi)$.

1175. Tegyük fel, hogy az a_n sorozat szigorúan monoton nő. Tekintsük a sorozat legkisebb felső korlátját (a felső határát), jelölje H . Bizonyítandó, hogy van olyan A szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz található küszöbindex, amely utáni elemek már az $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ intervallumba esnek. Vizsgáljuk az $[a_1; H]$ intervallumot. A feltételek szerint a sorozat valamennyi eleme ebbe az intervallumba esik. Ha $[a_1; H]$ hossza kisebb ε -nál, akkor készen vagyunk, ha nem, akkor nézzük az $[a_2; H]$ intervallumot. A monotonitás miatt $[a_1; H] \supset [a_2; H]$, és ha ennek hossza kisebb ε -nál, akkor készen vagyunk, ha nem, akkor nézzük az $[a_3; H]$ intervallumot, ami része az előző intervallumnak... Az eljárást folytatva egymásba skatulyázott intervallumsorozatot kapunk, ekkor ugyanis a Cantor-axióma szerint van olyan A szám, amely minden intervallumnak pontja. Csak azt kell igazolni, hogy az intervallum hossza 0-hoz tart, mert akkor egyetlen ilyen szám van, és ez lesz a határérték. A bizonyítást indirekt módon végezzük. Tegyük fel, hogy van olyan minden $\delta > 0$ szám, amelynél minden intervallum hossza nagyobb, tehát az $[A - \varepsilon; A]$ intervallumba egyetlen elem sem esik. Ekkor A nem lehetett a legkisebb felső korlát. Ezzel ellentmondásra jutottunk, és kész.

1176. Mivel konvergens a sorozat, ezért korlátos, tehát van A alsó és F felső határa. Tegyük fel, hogy egyik sem eleme a sorozatnak. Az $\left[A; A + \frac{F-A}{4}\right]$ in-

tervallumban tehát végtelen sok elem van, különben véges sok elem közül kiválasztható lenne a legkisebb, ami jó lenne alsó határnak is, és eleme a sorozatnak. Válasszunk az intervallum elemei közül egyet. Azután egy ettől különbözőt a $\left[A; A + \frac{F-A}{8}\right]$ intervallumból stb... Ezzel egy olyan részsorozatot definiáltunk, aminek a határértéke A . Hasonló gondolatmenettel és eljárással definiálhatunk egy olyan sorozatot is, ami F -hez tart, csak most az $\left[F - \frac{F-A}{4}; F\right]$

intervallumból kell kiindulni. Egy konvergens sorozatnak viszont nem lehet két különböző torlódási pontja, itt pedig ha $A \neq F$, akkor a két részsorozatnak nincs is közös eleme, mert az intervallumoknak nincs közös pontja. Ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti állítás igaz. ($A = F$ esetén minden elem egyenlő, és megegyezik a határokkal.)

Az alsó határ eleme a sorozatnak: $a_n = -\frac{1}{n}$.

A felső határ eleme a sorozatnak: $b_n = \frac{1}{n}$.

Mindkét határ eleme a sorozatnak: $c_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

V

1177. Jelöljük az a_n sorozat egy alsó korlátját A_0 -al, egy felső korlátját F_0 -al. Az $[A_0; F_0]$ intervallumot a K_0 felezőpontja két olyan részre bontja, amelyek közül legalább az egyikben a sorozatnak végtelen sok eleme van. Válasszuk ki azt a részintervallumot, és onnan egy elemet. Ez lesz a konvergens b_n sorozat első eleme. Feltehető, hogy mondjuk az $[A_0; K_0]$ intervallumba esik végtelen sok elem. Mivel b_1 előtt az a_n sorozatnak csak véges sok eleme van, ezért ezeket elhagyva még mindig végtelen sok eleme van az a_n sorozatnak az $[A_0; K_0]$ intervallumban. Legyen most $A_1 = A_0$ és $F_1 = K_0$. Ismételjük meg az előzőeket most az $[A_1; F_1]$ intervallumra, így kapjuk b_2 -t, és egy új $[A_2; F_2]$ intervallumot stb. Ezzel előállítottunk egy sorozatot, amely bármely eleméről tudjuk, hogy $A_k \leq b_{k+1} \leq F_k$, és az intervallumok egymásba vannak skatulyázva, hosszuk 0-hoz tart, mivel minden lépésben feleződik. Egyetlen szám van tehát, amit minden intervallum tartalmaz, ez a b_n sorozat határértéke. És ez valóban jó is, mert minden $\varepsilon > 0$ számhoz található küszöbindex, amelynél nagyobb indexű intervallumok hossza pl. kisebb ε -nál, és ezért az ezekbe az intervallumokba eső elemek benne vannak a határérték ε sugarú környezetében.

1178. a) A sorozat minden tagja pozitív, tehát alulról korlátos.

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 5}{3^n} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{3^n} < 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{3} = 3, \text{ tehát felülről is}$$

korlátos. A sorozat szigorúan monoton csökken, mert az összeg mindkét tagja csökken, ha n nő.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3^n} = 0. \text{ Ebből következik, hogy a}$$

sorozatnak egy torlódási pontja van.

$$b) \ a_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^n} = 3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow 2 < a_n < 4, \text{ tehát korlátos soro-}$$

zat. A sorozat nem monoton, hiszen minden páros indexű elem nagyobb 3-nál, minden páratlan indexű pedig kisebb, mint 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] = 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 3 + 0 = 3$$

. Ebből következik, hogy a sorozatnak egy torlódási pontja van.

$$c) \ a_n = \frac{5^{n+1}}{n!} = 5 \cdot \left(\frac{5}{1}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right) \cdots \left(\frac{5}{n}\right) < \frac{5^5}{24},$$

hiszen a többi tényező kisebb 1-nél. Mivel minden tag pozitív, így a sorozat korlátos. A sorozat monoton csökken, mert ha n -ről $(n+1)$ -re lépünk, mindig 1-nél kisebb számmal szorzunk.

$$\lim \frac{5^{n+1}}{n!} = \lim \left[5 \cdot \left(\frac{5}{1}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right) \cdots \left(\frac{5}{n}\right) \right] < \\ < \frac{5^5}{24} \lim \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} = 0, \text{ a határérték viszont csak nemnegatív szám le-}$$

het, tehát $\lim \frac{5^{n+1}}{n!} = 0$. Egy torlódási pont van.

$$d) a_n = \frac{n+2}{2n} + \frac{2}{(-1)^n} = \frac{n+2}{2n} + 2 \cdot (-1)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + 2 \cdot (-1)^n. \text{ A so-}$$

rozat korlátos, mert minden tagja biztosan benne van a $\left[-\frac{3}{2}; 3\right]$ in-
tervallumban. Nem monoton, minden tagja ellenkező előjelű, mint
az előző. ($n > 2$) Mivel $\frac{1}{n}$ nullához tart, ezért két torlódási pontja
van, a $-\frac{3}{2}$ és az $\frac{5}{2}$. Határértéke nincs.

e) Osszuk le a számlálóban és a nevezőben tagonként 4^n -nel!

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{3^n + 4^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4} < 1, \text{ mert a számláló kisebb, mint 1, a ne-}$$

vező nagyobb, mint 1. Tehát a sorozat korlátos. Könnyen látható,
hogy szigorúan monoton fogy, határértéke 0, egy torlódási pontja
van.

f) Osszuk le a számlálóban és a nevezőben tagonként n -nel!

$$a_n = \frac{n + 2(-1)^n}{2n + (-1)^{n-1}} = \frac{1 + (-1)^n \frac{2}{n}}{2 - (-1)^n \frac{1}{n}}. \text{ Azonnal látható, hogy a soro-}$$

zatnak van határértéke, ami $\frac{1}{2}$, tehát akkor korlátos is. Nem mo-
noton.

$$g) a_n = 1 + (-1)^n \frac{n+1}{n} = (-1)^n + 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}. \text{ Mivel az utolsó tag 0-}$$

hoz tart, ezért két torlódási pontja van, a 0 és a 2. Határértéke nincs,
de korlátos, egyszerű durva becsléssel -1 és 3 között van minden
elem.

Mértani sorozat határértéke

1179. Ha $|q| < 1$, akkor az $a_n = a \cdot q^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) mértani sorozat konvergens. Így konvergens sorozatokat kapunk az $i), j), k), l), m), q), r)$ esetekben. Az (i_n) sorozat határértéke 1, a többi 0-hoz tart.

1180. $s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Mivel $q^n \rightarrow 0$, így $s_n \rightarrow \frac{1}{1 - q}$. Tehát $S = \frac{1}{1 - q}$.

1181. Az $1 + q + q^2 + \dots + q^n \rightarrow \frac{1}{1 - q}$ összefüggést alkalmazzuk.

V

$$a) A = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2;$$

$$b) B = 10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 20;$$

$$c) C = 18 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 27;$$

$$d) D = -4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = -5;$$

$$e) E = -6 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -4;$$

$$f) F = -4 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = -3;$$

$$g) G = 2 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}.$$

Alkalmazhatunk speciális megoldási módszereket is.

$$\text{Pl. } -\frac{1}{2}G = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \pm \dots + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots, \text{ így } -\frac{1}{2}G = G - 2,$$

$$\text{s innen } G = \frac{4}{3}.$$

1182. $S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = a(1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots) =$
 $= a \cdot \frac{1}{1-q}.$

a) $S = 5$; b) $S = \frac{15}{7}$; c) $S = -\frac{20}{9}$; d) $S = -\frac{20}{11}.$

1183. A megoldásokban felhasználhatjuk, hogy konvergens sorokat tetszőlegesen átrendezve összegük nem változik meg.

a) $A(q) = \frac{1}{1-q^2}$; $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}.$

b) $A B(q)$ összeget mértani sorok összegeként állítjuk elő:

$$B(q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) + (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + \dots) +$$

$$+ (q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n-1} + \dots) + \dots, \text{ innen } B(q) = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} +$$

$$+ \frac{q^2}{1-q} + \dots + \frac{q^{n-1}}{1-q} + \dots = \frac{1}{1-q} \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) =$$

$$= \left(\frac{1}{1-q}\right)^2; B\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4}.$$

c) $C(q) = 3 + 6q + 9q^2 + \dots + 3nq^{n-1} + \dots = 3B(q) = 3 \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)^2;$
 $C\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{75}{16}.$

d) $D(q) = B(q) + 4(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2 + \frac{4}{1-q} =$
 $= \left(\frac{1}{1-q}\right)^2 + \frac{4-4q}{(1-q)^2} = \frac{5-4q}{(1-q)^2}; D\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{28}{9}.$

e) $E(q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) + 2(q + q^3 + q^5 + \dots + q^{2n-1} + \dots) =$
 $= (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) + 2q(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n-2} + \dots) =$
 $= \frac{1}{1-q} + 2q \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{1+q}{1-q^2}; E\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$

f) Az általános tagot parciális törtek összegeként állítjuk elő.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ így } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Mivel $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1, F = 1.$

V

V

$$\begin{aligned}
 g) \frac{1}{(2n+3) \cdot (2n+5)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right), \text{ így} \\
 \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n+3) \cdot (2n+5)} &= \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n}{5(2n+5)} \right) = \frac{n}{10n+25} \rightarrow \frac{1}{10}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} &\equiv \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \text{ azonosságból} \\
 n^2(A+B+C) + n(3A+2B+C) + 2A &\equiv 1, \text{ innen } A = \frac{1}{2}, B = -1, \\
 C = \frac{1}{2}. \text{ Az általános tagot } \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\
 \text{alakba írhatjuk. } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{1}{2} \cdot \\
 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) &= \\
 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right). \text{ (A közbülső tagok kiesnek.) Innen } H &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

1184. Ha a kezdetben beírt természetes számot k -val jelöljük, akkor az n . osztás után kapott szám $\frac{k}{9^n}$. Ez a mértani sorozat – bár minden tagja pozitív

– 0-hoz tart. Minden számológép számábrázolásának van egy pontossági határa, mely kb. a legkisebb (abszolútértékű) ábrázolható számmal egyezik meg. Az utolsó osztás után az történt, hogy az eredményül kapott szám kisebb lett, mint a számológép által ábrázolni tudott legkisebb szám, ezért a gép a kapott eredményt 0-nak értelmezte, s ezt is írta ki. (A jelenség neve alulcsordulás.)

1185. Mindhárom esetben 0-hoz tartó mértani sorozatot kapunk, előbb vagy utóbb 0 lesz a kiírt szám.

1186. A tizedes törtek periodikusan ismétlődő részét mértani sornak is tekinthetjük.

$$\begin{aligned}
 a) a = 0,4 &= \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots + \frac{4}{10^n} + \dots = \\
 &= \frac{4}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots \right) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{9}.
 \end{aligned}$$

Technikailag egyszerű az ismétlődő szakaszt „eltüntető” eljárás:

Ha $a = 0,4$, akkor $10a = 4,4$; a kettő különbségéből $9a = 4$, innen

$$a = \frac{4}{9}.$$

$$b) b = 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}.$$

$$\begin{aligned} c) c = 0,3\dot{9} &= \frac{39}{100} + \frac{39}{10\,000} + \frac{39}{10^6} + \dots + \frac{39}{10^{2n}} + \dots = \\ &= \frac{39}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \dots + \frac{1}{10^{2n}} + \dots \right) = \frac{39}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \\ &= \frac{39}{99} = \frac{13}{33}. \end{aligned}$$

Vagy: $c = 0,3\dot{9}$, $100c = 39,3\dot{9}$, innen kivonás után $99c = 39$ stb.

$$d) d = -12 - \frac{13}{33} = -\frac{409}{33}.$$

$$e) \text{ Ha } x = 0,15\dot{7}, \text{ akkor } 1000x = 157,15\dot{7}, \text{ s innen } 999x = 157, x = \frac{157}{999}.$$

$$\text{Tehát } e = x + 2 = \frac{2155}{999}.$$

$$f) f = \frac{43}{10} + \frac{1}{90} = \frac{388}{90} = \frac{194}{45}.$$

$$g) g = \frac{123}{100} + \frac{45}{9900} = \frac{12\,222}{9900} = \frac{1358}{1100}.$$

$$h) h = 0,12345, 1000h = 123,45345, 999h = 123,33,$$

$$h = \frac{12\,333}{99\,900} = \frac{4111}{33\,300}.$$

1187. Első megoldás: Az r sugarú félkör hossza $r\pi$. Az $r = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ értékek behelyettesítésével kapott $\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \dots = \pi \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)$

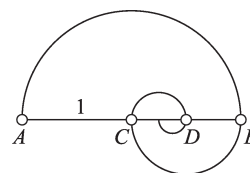
végtelen sor összege 2π .

Második megoldás: Kicsinyítsük felére az ábrát! Ekkor az AB ív megfeleltethető a BC ívnek; a BC ív megfelel a CD ívnek stb. Az eredeti görbe az AB félkörívvel hosszabb, mint a kicsinyített. Ha a görbe kezdeti hossza x volt, akkor a kicsinyített görbe hossza $\frac{x}{2}$, in-

nen $x = \frac{x}{2} + \pi, x = 2\pi$.

1188. Egyik eredmény sem jó. A sor nem konvergens, így nincs összege.

1187.



1189. A nem színezett terület nagysága az első lépésben $\frac{3}{4}$, a második lépés után $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, a harmadik lépés után $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ és így tovább. A mértani sorozat 0-hoz tart, tehát a beszínezett terület nagysága tetszőlegesen megközelíti az 1-et.

1190. *Első megoldás:* A piros háromszögek területének összege $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$, s szimmetriaokok miatt ennyi

V

a sárga és kék háromszögek területösszege is.

Második megoldás: Az n . lépés után a színezetlen háromszög területének nagysága $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, ami 0-hoz tart. Így a színezett háromszögek összterülete 1-hez tart, s innen egy-egy szín $\frac{1}{3}$ -nyi területet fed le.

1191.

A kerületek összege $k = 3 \cdot \left(x + \frac{x}{n} + \frac{x}{n^2} + \dots \right) = 3x \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{3nx}{n-1}$.

A területek összege $t = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(x^2 + \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{x}{n^2}\right)^2 + \dots \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{3} x^2 n^2}{4(n^2 - 1)}$.

1192. Az okoskodás alapján a teknősbéka által megtett út

$b = \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \dots + \frac{1}{12^n} + \dots$, Akhilleusz megtett útja pedig

$a = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \dots + \frac{1}{12^n} + \dots$. A mértani sorok konvergensek, vagyis az a probléma, hogy Zenon mindkét futó útját csak egy korlátozott, véges (idő- és út-) intervallumon vizsgálja. A két összeg értéke: $b = \frac{1}{11}$, $a = \frac{12}{11} = 1 + b$; vagyis éppen a találkozási pont a végtelen sorok határértéke. Zenon vizsgálatában soha nem jutnak el a futók a találkozási pontig. (Az ókorban még nem ismerték a végtelen sorokra vonatkozó műveleti szabályokat.)

Függvény határértéke. Folytonosság

Függvény határértéke

1193. A feladatoknál a nevező legmagasabb fokú tagjával kell leosztani. (1 együttthatóval!)

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{x-7x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{1}{x} - 7} = 0;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-5x+7}{4x-5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-5\frac{1}{x}+7\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5} = -\frac{3}{5};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4-7x^3+3x^2-5x+7}{4x-5x^2-x^4} = -2;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2-5x+7)(x^2+x-2)}{(4x-5)(x^3-5x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(4-\frac{5}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{3}{4};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2-5x+7}{4x^2-x^3} = 0;$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+7}}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}}{4} = \frac{1}{4};$$

$$g) \text{ Ez a függvény nincs is értelmezve, ha } x \geq \frac{4}{5}.$$

1194. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-15x+13}{3x^2-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}+\frac{13}{x^3}}{\frac{3}{x}-1} = 0;$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2x+7}{4x^2-x+9} = \frac{1}{2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x - x) = -\infty;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-9}}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{9}{x^2}}}{3x-1} = -3, \text{ mert } |x| = -x, \text{ ha } x < 0;$$

V

V

$$\begin{aligned}
 e) \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 7} \right) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 8x + 3) - (x^2 + 4x + 7)}{\left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 7} \right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 4}{\left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 7} \right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} \frac{4 - \frac{4}{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}} \right)} = (-1) \frac{4}{2} = -2.
 \end{aligned}$$

1195. a) A függvény folytonos $x = 0$ -ban, ezért határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 5}{x + 6} = -\frac{5}{6}$;

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) = -2;$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 7x}{x + 1} = 0;$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 7x}{5x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 7}{5x^2 - x}$, a tört számlálója -7 -hez, a nevezője 0 -hoz tart, ezért nincs határértéke. Jobb és bal oldali határértéke tággabb értelemben van, és az $-\infty$, illetve $+\infty$;

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{\sqrt{x + 4} + 2} = 0.$$

1196. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x - 1)}{x^2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x} = 2$;

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{(3 - x)(3 + x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{x + 1}{3 + x} \right) = -\frac{2}{3};$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 6)}{(x - 2)(x - 4)} = 2;$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x + 5)}{(x + 2)(x + 3)} = 3;$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{3};$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x - 2} = 32;$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[2(x^2+x+1) - 3(x+1)]}{(1-x)(x+1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(2x+1)(x-1)]}{(1-x)(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{2};$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)}{x - 1} = n.$$

1197. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{(3x)} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3;$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{5}{2};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1;$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\frac{\sin 7x}{\cos 7x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} \cdot \frac{\cos 7x}{\cos 3x} = \frac{3}{7};$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0;$$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x} = 1;$

h) Hasonlóan f -hez: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2};$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x + 4} - \sqrt{4 - \sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + 4) - (4 - \sin x)}{x(\sqrt{\sin x + 4} + \sqrt{4 - \sin x})} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} \cdot \frac{1}{(\sqrt{\sin x + 4} + \sqrt{4 - \sin x})} = \frac{2}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \frac{1}{2};$$

j) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} =$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} = \cos a.$$

V

1198. $\lim_{t \rightarrow 0} f = f(0) = \frac{t}{2} = -6$, tehát $t = -12$.

1199. A függvények képéből kiindulva:

a) $\lim_{x \rightarrow 3-0} [x] = 2$;

b) $\lim_{x \rightarrow 3-0} [x] = 3$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x+1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5x} \right) = +\infty$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x+1}{5x} = -\infty$;

e) $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{(x+4)(x+3)}{(x+2)(x+3)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -2-0} \left(1 + \frac{2}{(x+2)} \right) = -\infty$;

f) $\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6} = \infty$;

g) $\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x^2-9}{x^2+6x+9} = \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^2} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -3-0} \left(1 - 6 \frac{1}{x+3} \right) = +\infty$;

h) $\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{x^2-9}{x^2+6x+9} = -\infty$;

i) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = +\infty$;

j) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x^2-5x+6} = -\infty$.

V

Folytonosság

1200. Akkor lesz folytonos, ha értelmezve van, létezik határértéke, és a határérték megegyezik a pontbeli helyettesítési értékkel. Tehát:

a) folytonos;

b) nem folytonos;

c) nem folytonos;

d) nem folytonos;

e) folytonos;

f) nem folytonos;

g) nem folytonos.

1201. Folytonos

- 1202.** a) Csak $x \geq 0$ -ra van értelmezve. $x = 3$ -nál nem folytonos, a másik két helyen igen.
 b) $x = 2$ -nél folytonos, a másik két helyen nem.
 c) Mindkét pontban folytonos.
- 1203.** a) Ez a függvény sehol sem folytonos.
 b) Ez a függvény csak $x = 0$ -ban folytonos, sehol másutt.
- 1204.** Akkor lesz folytonos, ha mindkét oldali határérték megegyezik a pontbeli helyettesítési értékkel.
 a) A bal oldali határérték $3 \cdot 5 - 2 = 13$, ezért a helyettesítési érték is ennyi kell legyen, ezért $5 + p = 13, \Rightarrow p = 8$.
 b) $p = 1$;
 c) $p = 3$;
 d) $p = -4$;
 e) $p = -6$.
 f) Ilyen p érték nincs, mert $f(1) = 3 = p - 1 \Rightarrow p = 4$, de ekkor $f(3) = 4 - 3 = 1$, és ez nem egyezik meg a jobb oldali határértékkel, ami $9 - 4 = 5$.
- 1205.** Nem, például $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}, \\ 1, & \text{ha } x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$
- 1206.** $a = 6$.
- 1207.** A tört számlálója az 5 helyen 0, ezért $a = 6$; $b = 4$.
- 1208.** a) Végtelen sok, amelyekre $5a + b = 15 - 7 = 8$.
 b) Végtelen sok, amelyekre $5a + b = 25 - 15 - 2 = 8$.
 c) Csak az $(1; 2)$ számpár felel meg.
 d) Csak az $(1,5; 6,5)$ számpár felel meg.
 e) Végtelen sok, amelyekre $3a - 3b = 5$.
 f) Csak a $(-4; 2)$ számpár felel meg.

V

Differenciálszámítás

- 1209.** $a = 2$.
- 1210.** $f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12, & \text{ha } x \notin [1; 2] \\ 0, & \text{ha } x \in [1; 2]. \end{cases}$
- 1211.** $a = 1$.
- 1212.** Csak $a = -1$ helyen lehetne probléma, de ott sincs, mert a jobb és a bal oldali derivált egyenlő (0).
- 1213.** $f'(1) = 2$.
- 1214.** A szorzat elsőfokú tagjának az együtthatóját kell meghatározni, az lesz a derivált értéke. $f'(0) = 10!$.
- 1215.** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (|x| \neq 1)$.

V

$$1216. \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$$

$$1217. \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4} (|x| \neq 1).$$

$$1218. \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} (x \neq 1).$$

$$1219. \frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}.$$

$$1220. \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} [p-(q+1)x-(p+q-1)x^2] (x \neq -1).$$

$$1221. 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x > 0).$$

$$1222. -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} (x > 0).$$

$$1223. \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} (x > 0).$$

$$1224. \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1225. \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}} (x \neq \sqrt[3]{-3}).$$

$$1226. \frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m) \cdot \sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}.$$

$$1227. \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} (|x| < |a|).$$

$$1228. \frac{2x^2}{1-x^6} \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} (|x| \neq 1).$$

$$1229. \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$1230. \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} (x > 0).$$

$$1231. \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}} \quad (x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8).$$

$$1232. -2 \cos x(1 + 2 \sin x).$$

$$1233. x^2 \sin x.$$

$$1234. -\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x).$$

$$1235. n \sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x.$$

$$1236. \cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)].$$

$$1237. \frac{2 \sin x (\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2} \quad (x^2 \neq k\pi; k = 1, 2, \dots).$$

$$1238. -\frac{1 + \cos^2 x}{2 \sin^3 x} \quad (x \neq k\pi; k = 0; \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$1239. \frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2} \pi, k \text{ egész} \right).$$

$$1240. \frac{1}{(\cos x + x \sin x)^2}.$$

$$1241. \frac{2}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi; k = 0; \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$1242. 1 + \operatorname{tg}^6 x \left(x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \dots \right).$$

$$1243. -\frac{8}{3 \sin^4 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} \quad (x \neq k\pi, k \text{ egész}).$$

V

Érintők

1244. Az x a $x^3 - 6x$ deriváltjának a zérushelyei: $\pm\sqrt{2}$, e helyeken adódik a keresett érintő. $E_1(\sqrt{2}; -4\sqrt{2}); E_2(-\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$.

1245. *Első megoldás:* Az érintők egyenletét $y + \frac{1}{4} = m(x+1)$ alakban keressük. Feladatunknak olyan m felel meg, amely esetén az $x^2 + \frac{1}{4} = m(x+1)$ egyenlet diszkriminánsa 0. $D = m^2 + 4m - 1 = 0$, itt a két gyök szorzata -1 , tehát az m_1 és az m_2 iránytangensű egyenes merőleges egymásra.

Második megoldás: Mivel a parabola paramétere $p = \frac{1}{2}$, ezért a $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ pont illeszkedik a direktrixre. Tudjuk viszont geometriából, hogy a direktrix bármely pontjából a parabolához húzott érintők merőlegesek egymásra.

1246. A π helyen vett érintő iránytangense $-\pi^2$, az egyenlet: $y = \pi^3 - \pi^2 x$.

1247. $P(0; 3)$; az érintő: $y = 2x + 3$.

1248. Az adott egyenes nem lehet érintő, mert illeszkedik a $P(0; 3)$ pontra, ami a parabola belső tartományában van. Ezért az állítás igaz.

1249. $\alpha = -\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

1250. Figyeljük meg a feladat megoldása előtt: $P(1, 3)$ a parabolán belüli, $P(3; 3)$ a parabolán kívüli síkrészben van, $P(-2; 5)$ pedig rajta van a görbén, s ebből már következik is a P ponton átmenő érintők száma.

Nincs ilyen érintő;

a) a két érintő: $y = (6 + \sqrt{28})x - 15 - 6\sqrt{28}$;

$y = (6 - \sqrt{28})x - 15 + 6\sqrt{28}$;

b) az érintő: $y = -4x - 3$.

1251. Két érintő halad át P -n, ha az a parabolán kívüli síkrészben van, vagyis ha $p^2 + 1 > q$, ahol $p^2 + 1$ a p abszcisszája parabolapont ordinátája. Hasonlóan: 1 érintő adódik, ha $p^2 + 1 \neq q$. A feladatnak nincs megoldása, ha $p^2 + 1 < q$.

1252. Az előzőknél valamivel nehezebb feladat. Minthogy a keresett érintő átmegy az $(1; 1)$ ponton, egyenlete $y = mx + (1 - m)$ alakba írható, ahol m az iránytangens. Ez az egyenes m olyan értéke esetén érinti az $y = x^3$ görbét, amely mellett az egyenes és a görbe egyenletéből alkotott egyenletrendszernek az $(1; 1)$ számpáron kívül csak egy megoldása van.

Oldjuk meg az

$$y = x^3,$$

$$y = mx + (1 - m)$$

egyenletrendszert, ha $x \neq 1$. Az összehasonlító módszer alkalmazása és megfelelő csoportosítás után az

$$x^3 - 1 = m(x - 1)$$

egyenlethez jutunk, amely az $x - 1 \neq 0$ kifejezéssel való osztás után egyszerű másodfokú egyenletet ad:

$$x^2 + x + (1 - m) = 0.$$

Ennek az egyenletnek akkor, és csak akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa nulla:

$$D = 1 - 4(1 - m) = 4m - 3; \quad D = 0, \quad \text{ha} \quad m = \frac{3}{4}.$$

Eszerint a keresett érintő egyenlete: $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

1253. a) $-3, 4$.

b) $-1, 1$

1254. $a = 1, b = 0, c = 1$.

1255. $(\cos^2 x + \sin 2x)' = -\sin 2x + 2 \cos 2x$,

$(-5x^2 + 2x + 1)' = -10x + 2$,

és az $x = 0$ helyen mindkét derivált értéke 2. Ebből csak az következik, hogy a két görbe megfelelő érintője párhuzamos. Mivel azonban az $x = 0$ helyen mindkét függvény értéke 1, azért a két érintő azonos, vagyis az adott görbék valóban érintik egymást az $E(0, 1)$ pontban.

1256. a) $9,5^\circ$;

b) $54,7^\circ$;

c) $40,9^\circ$.

1257. $80,5^\circ$; 90° .

1258. Első megoldás:

1. A metszéspontok meghatározása:

$4(y + 1) = -16(y - 4)$; $5y = 15$; $y = 3$; $x^2 = 16$; $x = \pm 4$.

Tehát az adott görbék az $A(4; 3)$ és a $B(-4; 3)$ pontban metszik egymást. Mindkét görbe az y tengelyre szimmetrikus parabola, ezért elég az A ponttal foglalkozni.

2. Az érintők iránytangensének kiszámítása:

$y = -\frac{1}{4}x^2 - 1$; $y' = -\frac{1}{2}x$; $y'(4) = -2$.

$y = -\frac{1}{16}x^2 + 4$; $y' = -\frac{1}{8}x$; $y'(4) = -\frac{1}{2}$.

3. Most az érintők és az x tengely szögének a meghatározása következ-
nék, jelen esetben azonban ez fölösleges, mert a merőlegesség megállá-
pítható az $m_1 \cdot m_2 = -1$ egyenlőség teljesüléséből.

$m_1 \cdot m_2 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \neq -1$ egyenlőség teljesüléséből.

Második megoldás:

Mindkét parabola tengelye az x tengely, és mindkettő fókusza az origó. Ismert geometriai tétel, hogy azonos tengelyű és fókuszú parabolák ha metszik egymást, akkor azt merőlegesen teszik.

1259. $a = \pm \sqrt{3}$.

Szélsőérték

1260. Legyen az egyik rész x , a másik $y = 8 - x$.

a) $4 = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq 16$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y = 4$.

b) $4 = \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \Rightarrow x^2+y^2 \geq 32$, és egyenlőség akkor, és csak akkor áll fenn, ha $x = y = 4$.

c) $x^2 - y^2 = x^2 - (8-x)^2 = 16(x-4)$. Ez lineáris függvény, szélsőértéke nincs a pozitív számok halmazán.

d) $x^3 + y^3 = x^3 + (8-x)^3 = 8(64 - 24x + 3x^2)$. Ez másodfokú függvény, szélsőértéke $x = 4$ -nél van, és ez minimumhely.

1261. Legyen $x = \sin \alpha$, és $y = \cos \alpha$. Ekkor a következő átalakításokat tehetjük: ami $\frac{1}{4}$ és 1 közé esik.

1262. Induljunk ki a $T = \frac{ab \cdot \sin \alpha}{2}$ területképletből. Látszik, hogy legkisebb területű nincs, legnagyobb területű van, a derékszögű háromszög.

1263. A terület akkor maximális, ha a befogók összege maximális, mivel az átfogó állandó. Tehát mindkét kérdésre ugyanaz a válasz.

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{20^2}{2}} = 10\sqrt{2} \text{ cm, és egyenlőség akkor és csak akkor áll}$$

V

fenn, ha $x = y = 10\sqrt{2}$ cm.

1264. Jelöljük x -szel és y -nal a téglalap oldalainak hosszát, legyen a a háromszög x -et tartalmazó oldala, m a hozzá tartozó magasság. A hasonlóság miatt

$$\frac{x}{a} = \frac{m-y}{m} = 1 - \frac{y}{m}. \text{ Ebből } y = m - \frac{m}{a}x.$$

A téglalap területét most már előállíthatjuk x függvényeként:

$$T(x) = x \left(m - \frac{m}{a}x \right) = \frac{m}{a} (ax - x^2),$$

ennek a másodfokú függvénynek akkor van maximuma, ha $x = \frac{a}{2}$, vagyis a téglalap egyik oldala a háromszögnek középvonala. Érdekes megfigyelni, hogy általános háromszög esetében a 3 középvonal más-más alakú téglalapot szolgáltat, területük azonban ugyanakkora: a háromszög területének a fele.

1265. Legyen a téglalap két oldala x és y . Mivel $\frac{K}{4} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{T} \Rightarrow K \geq 4\sqrt{T}$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y = \frac{K}{4}$.

1266. Jelöljük a téglalap oldalait x -szel és y -nal! A keresett terület ekkor

$$T = x \cdot y = x \sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 x^2 - x^4}.$$

$T(x)$ akkor és csak akkor maximális, ha a négyzete maximális, vagyis az $y = 4r^2 x^2 - x^4$ függvény szélsőértékét kell keresni.

Még egyszerűbb a megoldás, ha a téglalap átlója és egyik oldala által bezárt szöveget választjuk változónak, akkor ugyanis

$$T(\alpha) = 2r \sin \alpha \cdot 2r \cos \alpha = 2r^2 \sin 2\alpha.$$

Ez pedig akkor maximális, ha $\sin 2\alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$.

1267. $\frac{2p}{4} = \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{\text{átló}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{átló} \geq p \frac{\sqrt{2}}{2}$, maximuma nincs,

akármilyen közel lehet p -hez.

1268. Legyen a hosszabbik alapon fekvő hegyesszög x . A trapéz magassága $\sin x$, a hosszabb alap $(1 + 2\cos x)$, így a terület: $T = \frac{2 + 2\cos x}{2} \sin x = (1 + \cos x) \sin x$. Deriválva $T' = \cos x + \cos 2x$, ennek zérushelye $\cos x = -1$ és $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^\circ$.

1269. Ha a körcikk kerülete k , és a körív hossza i , akkor a sugár $r = \frac{k - i}{2}$, és a terület $T = \frac{i(k - i)}{4}$. Ez i -nek egyszerű másodfokú függvénye, maximuma van, ha $i = \frac{k}{2}$, vagyis a körív a sugár kétszerese, a középponti szög ívmértéké 2.

A két feladat matematikailag azonos. A 25 m-es adatnak nincs jelentősége. Ha a félkör sugara r , a téglalap alapja $2r$, magassága b , akkor a keresztmetszet területe $T = 2rb + \frac{1}{2}r^2\pi$, ahol $2r + 2b + r\pi = 18$.

Ez utóbbi egyenletből b -t kifejezzük, behelyettesítjük T előző alakjába, s megkapjuk a $T(r)$ függvényt.

1270. Az alagút hosszától függetlenül akkor lesz maximális a térfogat, ha a keresztmetszet területe maximális. A téglalap egyik oldala $2r$, a másik legyen x . $k = 2x + 2r + r\pi = 18$ és $t = 2rx + \frac{r^2\pi}{2}$. Az első egyenletből kifejezve, és a második összefüggésbe helyettesítve $2x$ -et $t = 18r - r^2\frac{4 - \pi}{2}$. Ennek maximuma van, ha $r = \frac{18}{4 + \pi}$.

1271. $r = \frac{p}{4 + \pi}$.

1272. Az ábrán látható PT távolság $4 - x^2$, eszerint a téglalap területe (aminek a maximumát keressük): $T(x) = 2x(4 - x^2)$. (1272. ábra)

1273. Tükrözzük pl. az A pontot az x tengelyre! $C(1, 5; 0)$

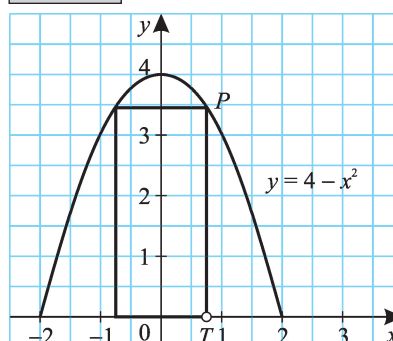
1274. Első megoldás: $A(0; 0)$ és $(4; 4)$ pontokat összekötő egyenes egyenlete $y = x$, tehát az említett szakasz P pontjának koordinátái $(u; u)$. Képezzük a P pontnak a $(2; 0)$ és $(9; 5)$ pontoktól való távolságai összegét, akkor a következő függvényt nyerjük:

$$y = \sqrt{(u-2)^2 + u^2} + \sqrt{(u-9)^2 + (u-5)^2},$$

$$y = \sqrt{2u^2 - 4u + 4} + \sqrt{2u^2 - 28u + 106}.$$

Ezen függvény minimumát keressük.

1272.



V

Állítsuk elő az első deriváltat:

$$y' = \frac{4u - 4}{2\sqrt{2u^2 - 4u + 4}} + \frac{4u - 28}{2\sqrt{2u^2 - 28u + 106}}.$$

Az első derivált azon az u helyen válik 0-vá, amelyre

$$0 = \frac{u - 1}{2\sqrt{2u^2 - 4u + 4}} + \frac{u - 7}{2\sqrt{2u^2 - 28u + 106}}.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mind a két oldalát 2-vel, majd rendezzük a következőképpen:

$$\frac{7 - u}{\sqrt{2u^2 - 28u + 106}} = \frac{u - 1}{\sqrt{2u^2 - 4u + 4}}. \quad 1 \leq u \leq 7.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kapott másodfokú egyenletet normálalakra hozva, nyerjük: $(u - 3)(u + 5) = 0$,

$$u^2 + 2u - 15 = 0.$$

Az egyenlet gyökei: $u_1 = 3$, $u_2 = -5$.

Ezek a helyeken lehet a függvénynek szélsőértéke. Az $u = 3$ helyen y' előjelet is vált ($x < 3$ helyeken negatív, $x > 3$ helyeken pozitív), tehát ezen a helyen a függvénynek minimuma van.

A keresett pont koordinátái: $(3; 3)$.

Második megoldás:

Tükrözzük a $(2; 0)$ pontot a megadott szakaszra ($y = x$), a tükrökép koordinátái $(0; 2)$. Ezt összekötve a $(9; 5)$ ponttal adódik a megoldás: $(3; 3)$

1275. A falak összhosszúsága

$$90 = 24x + 4y, \quad \text{ebből} \quad 4y = 90 - 24x.$$

A szobák együttes területe:

$$T = 8xy + 3x^2 = 180x - 45x^2 = 45x(4 - x).$$

T maximális, ha $x = 2$ (m).

1276. Legyen a levágott saroknégyzet oldala x , akkor a doboz térfogata

$$V(x) = x(24 - 2x)^2. \quad V'(x) = 12(48 - 16x + x^2) = 12(x - 4)(x - 12).$$

$V'(x) = 0$, ha $x = 4$ ($x < 12!$); ebben az esetben maximális a doboz térfogata.

1277. Maximálisnak kell lennie a

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{(R^2 - m^2) \pi m}{3}$$

térfogatnak. $V'(m) = \frac{\pi}{3} (R^2 - 3m^2)$; ez akkor nulla, ha $R^2 = 3m^2$, $r^2 = 2m^2$,

$r = m\sqrt{2}$. Ekkor $V(m)$ maximális, mert ezen a helyen növekedőből fogyóba (deriváltja pozitívba negatívba) megy át.

Meg kell még határoznunk az α középponti szöget:

$$\alpha = \frac{2\pi}{R} = \frac{2m\pi\sqrt{2}}{m\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}.$$

Fokokban kifejezve $\alpha = 294^\circ$.

1278. Ha a csomag alapja a oldalú négyzet, magassága pedig b , akkor a spár-
ga hossza: $10a + 26$. Ebből b -t kiküszöbölhetjük a $V = a^2b = 28$ egyenlőség fel-
használásával. A feladat megoldása ezután már nem okoz nehézséget.

1279. Jelölje AB a létrát; az ábrán éppen a maximális létrát szemléltetjük for-
dulás közben. Az AB szakasz x és y része α -val kifejezhető:

$$AB = \frac{2,4}{\cos \alpha} + \frac{1,6}{\sin \alpha} = f(\alpha).$$

A szélsőérték előállítására végezzük deriváljuk

$$f(\alpha)\text{-t: } f'(\alpha) = \frac{2,4 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{1,6 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{0,8}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} (3 \sin^3 \alpha - 2 \cos^3 \alpha).$$

$$f'(\alpha) = 0, \text{ ha } 3 \sin^3 \alpha = 2 \cos^3 \alpha; \operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\frac{2}{3}};$$

$$\alpha = 41^\circ,$$

$$AB = 3,2 + 2,4 = 5,6 \text{ (m)}.$$

1280. 335 m.

1281. A hajó 1 óra alatt v km-t tesz meg, ezalatt $A + B$ Ft a kiadás. A kilomé-
terenkénti költség $f(v) = \frac{A + B}{v} = 0,03v^2 + \frac{480}{v}$. $f(v)$ -nek minimuma van, ha
 $v = 20 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$.

1282. Ha a gerenda keresztmetszetének oldalait a -val és b -vel jelöljük, a szilárdság az $y = a^2b$ értékkel arányos. Pitagorasz tételéből $a^2 = d^2 - b^2$, ezért $y = d^2b - b^3$, ahol d adott szám, s ennek a harmadfokú függvénynek a szélső értékét keressük.

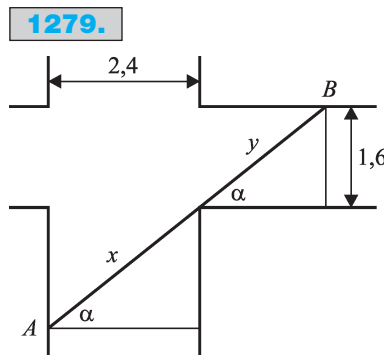
1283. a) 90° , tehát függőlegesen felfelé kell hajítani;

b) $\sin 2x = 1$ kell legyen, tehát 45° -ban kell hajítani.

1284. Az előző példa alapján 45° -ban kell elindítani, és a távolság:

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2x}{2g} = \frac{625 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 31,85 \text{ m} \approx 32 \text{ m}.$$

V



1285. Jelöljük az AB szakasz C pontjának A -tól való távolságát x -szel. Ekkor C -ben a megvilágítás erőssége (egy konstans szorzótól eltekintve):

$$m(x) = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{(d-x)^2}, m'(x) = \frac{-2\alpha}{x^3} + \frac{2\beta}{(d-x)^3}$$

(legjobb a $[c \cdot f^k(x)]' = c \cdot k \cdot f^{k-1}(x) \cdot f'(x)$ deriválási szabályt alkalmazni).

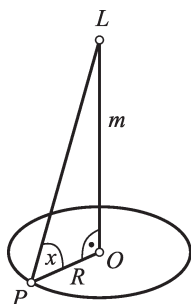
$$m'(x) = 0, \text{ ha } \frac{\alpha}{x^3} = \frac{\beta}{(d-x)^3}, \left(\frac{d-x}{x}\right)^3 = \frac{\beta}{\alpha}, \frac{d}{x} = 1 + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}, x = \frac{d \cdot \sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}},$$

s ezen a helyen $m(x)$ valóban minimális.

1286. Legyen x a beeső fénysugár és a pálya síkjának a szöge (választhatjuk változónak a lámpa és a sík távolságát is, de úgy a számítás valamivel bonyolultabb), ekkor a keresett magasság (l. az ábrát): $LO - m = R \cdot \tan x$; a megvilágítás

erőssége a P pontban: $g(x) = C \cdot \frac{\sin x}{PL^2} = C \cdot \frac{\sin x}{\left(\frac{R}{\cos x}\right)^2} =$

1286.



$$= \frac{C}{R^2} \cdot \sin x \cos^2 x = \frac{C}{R^2} (\sin x - \sin^3 x), \text{ ahol } C \text{ konstans, arányossági tényező.}$$

$$g'(x) = \frac{C}{R^2} (\cos x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x) = 0, \text{ ha } \sin^2 x = \frac{1}{3}, \text{ mivel } x \text{ hegyesszög. A jelváltás ellenőrzése megmutatja, hogy ezen a helyen } g(x) \text{ maximális. Ekkor } \cos^2 x = \frac{2}{3}, \tan^2 x = \frac{1}{2}, \tan x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ a keresett magasság pedig } m = R \tan x = R \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1287. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

1288. $a = 4$ (m); $M = 2$ (m).

1289. $m = 2r = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}.$

1290. A henger sugara és magassága is 1 m.

1291. $r = \frac{m}{2} = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$

1292. $m = r = \sqrt{\frac{F}{3\pi}}.$

1293. a) $m = r \sqrt{2} = \frac{2R\sqrt{3}}{3};$

b) $m = 2r = R\sqrt{2}.$

1294. Bizonyításként az adott kúpba írt maximális térfogatú henger méreteit érdemes kiszámítani [a hasonlóság felhasználásával adódik, hogy $m = \frac{M}{R} (R - r)$, amiből $V(r) = \frac{M\pi}{R} (r^2 R - r^3)$], s a megoldás egyúttal az állítás igazolását is megadja.

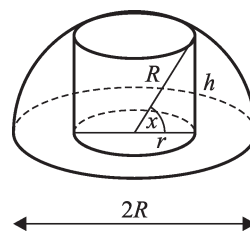
1295. a) Az ábra jelöléseivel a henger felszíne:

$$F = 2r\pi(r + h) = 2R^2\pi \cos x (\sin x + \cos x).$$

$$F'(x) = 2R^2\pi (\cos 2x - \sin 2x).$$

$F'(x) = 0$, ha $\sin 2x = \cos 2x$; $2x = 45^\circ$,
 $x = 22,5^\circ$, s ez az érték szolgáltatja a keresett maximumot.

b) Erre a gondolatmenetre épülhet a másik rész megoldása is, csak hogy itt a felszín az előző palásttal nagyobb. Ezért $\operatorname{tg} 2x = 2$, $x = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2$ adódik eredményül.

1295.**V**

1296. $R = 1,5r$; $M = 3m$.

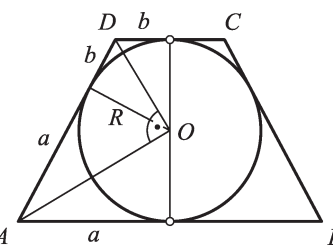
1297. $r = \frac{m}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\frac{P^2}{3\pi^2}}.$

1298. $r = R \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $m = \frac{4R}{3}.$

1299. $m = 24 - r$; $V(r) = \pi r^2(24 - r)$. $V'(r) = 0$, ha $r = 16$, ez maximumot szolgáltat. Ekkor $m = 8$.

1300. a) Ha R az adott gömb sugara, és m a kúp magassága, akkor

$$V(m) = \left(\frac{R^2 \pi}{3} \cdot \frac{m^2}{m - 2R} \right).$$

1300.

b) A csonka kúp keresztmetszete érintőnégyszög, ezért alkotója az alap- és a fedőkör sugarának összegével egyenlő. Mint az ábra mutatja, az AOD háromszög derékszögű, ezért $R^2 = ab$. Ennek felhasználásával a térfogatra a $V(b) =$

$$= \frac{2R\pi}{3} \left(\frac{R^4}{b^2} + R^2 + b^2 \right) \text{ függvényt kapjuk, amely akkor minimális,}$$

ha $a = b = R$.

1301. a) $4,8^\circ\text{C}$; b) $w(t) = 0,4(t + 5)$; c) $v(5) = 4^\circ\text{C/s}$.

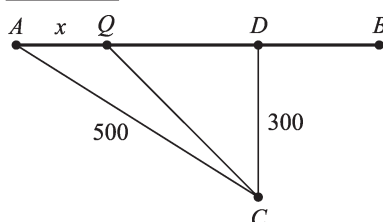
1302. a) $v(t) = 6t + 1$; b) 31.

1303. a) $0,8t - 0,1$; b) 1,5.

1304. a) v_0 ; b) $v_0 + at_0$.

1305. Jelöljük a kérdéses Q elágazási pontnak A -tól való távolságát x -szel. AD Pitagorasz-tétellel meghatározható: $AD = 400$ m.

1305.



$$QD = 400 - x.$$

$$QC = \sqrt{(400 - x)^2 + 300^2}.$$

Fejezzük ki a vezeték árát mint x függvényét!

$$y = 90x + 60(400 - x) + 50$$

$$\sqrt{(400 - x)^2 + 300^2}.$$

A függvény minimumát keressük:

$$y' = 90 - 60 - \frac{50(400 - x)}{\sqrt{(400 - x)^2 + 300^2}}.$$

Határozzuk meg a derivált függvény zérushelyeit, azaz oldjuk meg a

$$30 - \frac{50(400 - x)}{\sqrt{(400 - x)^2 + 300^2}} = 0 \text{ egyenletet!}$$

Osszuk el mindkét oldalt 10-zel, rendezzük az egyenletet a következőképpen:

$$3 = \frac{50(400 - x)}{\sqrt{(400 - x)^2 + 300^2}}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emeljük, majd a törtet eltávolítjuk:

$$9 = \frac{25(400 - x)^2}{(400 - x)^2 + 300^2},$$

$$9 \cdot 300^2 = 16(400 - x)^2,$$

$$\pm 3 \cdot 300 = 4(400 - x), \text{ innét}$$

$$x_1 = 175 \text{ és } x_2 = 625 \text{ adódik.}$$

Helyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy az $x = 175$ helyen a függvénynek minimuma van.

Az elágazást az A ponttól 175 m-re kell létesítenünk, ha azt akarjuk, hogy a csővezeték ára minimális legyen.

1306. Tekintsük független változónak az ODE háromszögnek DE oldalát (x), és legyen ezen oldalhoz tartozó magasság z , ekkor a területfüggvény:

$$T = \frac{xz}{2}.$$

Mivel $DEA \triangle \sim ABC \triangle$, fennáll, hogy

$$x : (m - z) = a : m.$$

Fejezzük ki ebből az egyenlőségéből z -t a többi változóval!

$$z = \frac{am - mx}{a}, \text{ ezt helyettesítve,}$$

$$T = \frac{-mx^2 + amx}{2a},$$

$$T = -\frac{m}{2a}x^2 + \frac{m}{2}x,$$

$$T' = -\frac{m}{a}x + \frac{m}{2}.$$

Keressük meg a derivált zérushelyeit! Oldjuk meg a

$$-\frac{m}{a}x + \frac{m}{2} = 0 \text{ egyenletet!}$$

Az egyenlet gyöke $x = \frac{a}{2}$, helyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy ezen a helyen maximuma van a függvénynek.

$ADEO$ háromszög területe tehát $x = \frac{a}{2}$ -ig nő, $x = \frac{a}{2}$ -nél maximális, ekkor x az eredeti háromszög középvonala, majd ismét csökken. A maximális terület az eredeti háromszög területének negyedrésze.

1307. A területfüggvény:

$$T = 2(a-x)\sqrt{2px}.$$

T függvény maximuma ugyanazon x helyen van, mint $y = \frac{T^2}{4p}$ függvényé ($T > 0$

és p állandó.)

$$y = 2x(a-x)^2$$

$$y' = 3x^2 - 4ax + a^2 = (3x - a)(x - a).$$

A derivált zérushelyei

$$x_1 = \frac{a}{3}, \quad x_2 = a.$$

Az $x = \frac{a}{3}$ helyen y' előjelet vált, ezen a helyen tehát van a függvénynek szélsőértéke, mégpedig maximuma.

A téglalap területe $x = \frac{a}{3}$ esetén lesz maximális.

1308. Legyen a négyzetes hasáb alapéle x , testmagassága m ; ekkor

$$F = 2x^2 + 4mx, \text{ ebből } m = \frac{F - 2x^2}{4x},$$

$$V = x^2m,$$

$$V = \frac{x(F - 2x^2)}{4}.$$

A függvényt csak pozitív V -re vizsgáljuk, tehát feltesszük, hogy

$$V > 2x^2, \text{ akkor } x < \sqrt{\frac{F}{2}}.$$

$$V' = \frac{1}{4} (F - 6x^2).$$

A függvénynek $x = \sqrt{\frac{F}{6}}$ -nál helyi maximuma van. Helyettesítéssel

$$m = \sqrt{\frac{F}{6}} \text{ adódik.}$$

V

Adott felszín mellett tehát a kockának van maximális térfogata.

1309. Legyen a kúp alapkörének sugara r , testmagassága m , a beírt henger alapkörének sugara ϱ , a testmagasság x , ekkor a henger palástjának a területe: $P = 2\varrho\pi x$.

Fejezzük ki ϱ -t x függvényeként.

A kúp tengelymetszetét elkészítve, látható, hogy van két hasonló derékszögű háromszög (az egyik befogói r és m , a másiké $r - \varrho$ és $m - x$.)

$FBC\Delta \sim EDC\Delta$, tehát

$$\varrho : (r - \varrho) = (m - x) : m,$$

ebből

$$\varrho = \frac{r(m - x)}{m}.$$

A vizsgálandó függvény

$$P = \frac{2r\pi \cdot mx - 2r\pi x^2}{m},$$

$$P' = -\frac{4r\pi}{m} x + 2r\pi,$$

$x = \frac{m}{2}$ helyen a függvénynek maximuma van.

Maximális palástú hengert akkor kapunk, ha a beírt henger magassága a kúp magasságának fele.

1310. Tekintsük a Földet gömbnek (középpontja O , sugara R)! Legyen a kérdéses szélességi kör k_1 a hosszúsági kör k_2 és a metszéspontok A és B !

a) Az A és B pontok távolsága a szélességi kör mentén k_1 kör kerületének fele, azaz

$r\pi = R \cdot \cos \varphi$, ahol φ a Föld sugarának az Egyenlítő síkjával bezárt szöge.

Az A és B pontok távolsága a hosszúsági kör mentén $R\pi - 2R\varphi$.

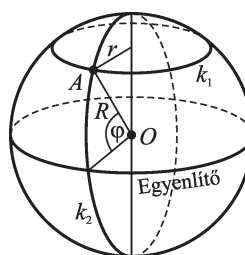
- b) A kérdés megválaszolásához vizsgáljuk a két távolság különbségét mint φ függvényét, és keressük ezen függvény minimumát.

$$y = R\pi \cos \varphi - R\pi + R\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -R\pi \sin \varphi + 2R.$$

A függvénynek $\varphi = \frac{2}{\pi} (36^\circ 29')$ esetén van maximuma, a két pont távolsága ekkor a szélességi kör mentén 16 100 km, a hosszúsági kör mentén 11 900 km.

1310.



V

Függvényvizsgálat

1311. a)–c) másodfokú függvények, a vizsgálatot ismétlésként végezzük el a III. fejezetben tanultak alapján. A d)–f) feladatok megoldása pedig hasonlóan történik, mint az 1312-es kidolgozott feladaté.

Például: $x \mapsto x^2 - x$, zérushelyei $x = 0$;

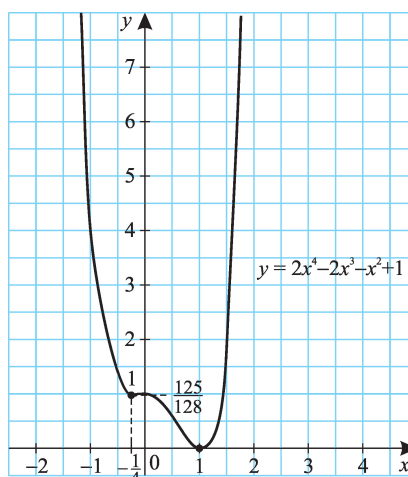
$x = \pm 1$; $y' = 3x^2 - 1$, melynek zérushelyei

$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, ahol a derivált előjelet is

vált. $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, előtt és $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ után

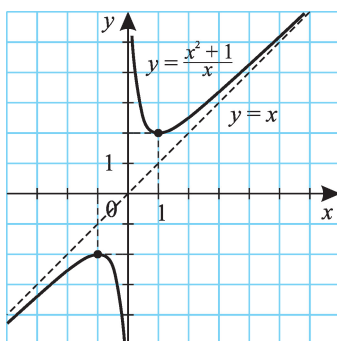
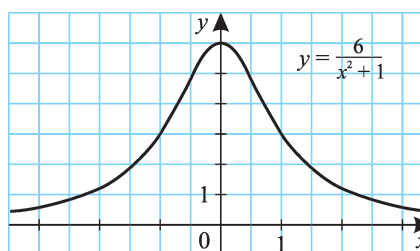
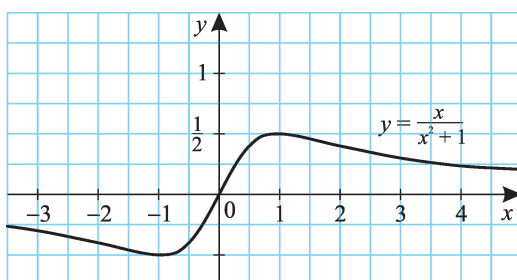
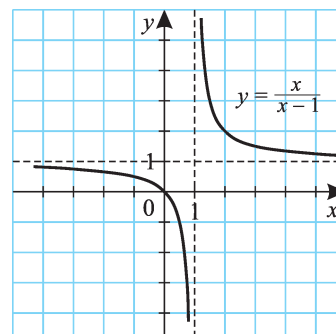
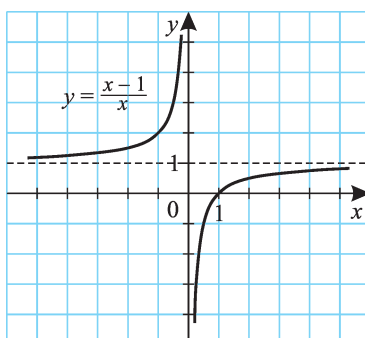
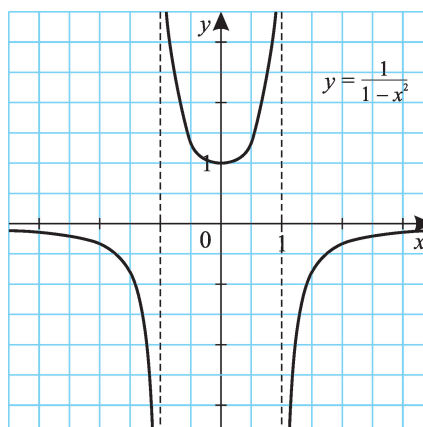
a derivált pozitív, a függvény nő, a derivált két zérushelye között a derivált negatív, a függvény csökken.

1312.

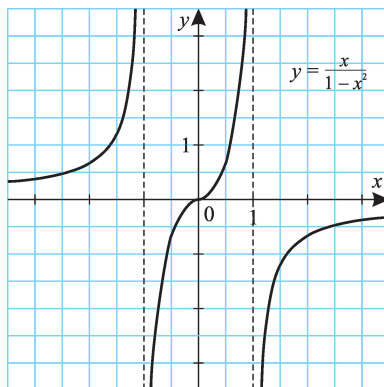


1312. Például: a) $y' = 8x^3 - 6x^2 - 2x$.

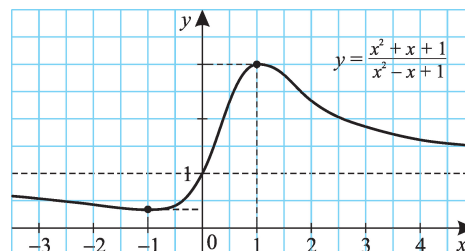
x	$x < -\frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
y'	negatív	0	pozitív	0	negatív	0	pozitív
y	$\searrow$	helyi minimum $\frac{125}{128}$	$\nearrow$	helyi maximum 1	$\searrow$	helyi minimum 0	$\nearrow$

1313.**1313/a.****1313/b.****1313/c.****1313/d.****1313/e.****1313/f.****V**

1313/g.

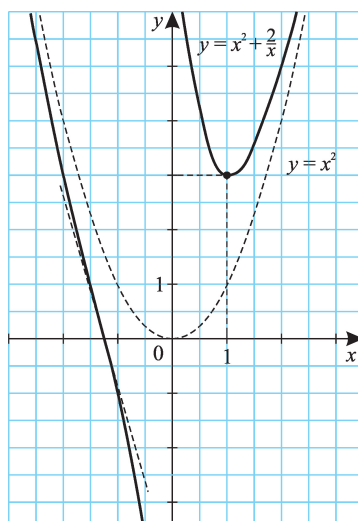


1313/h.

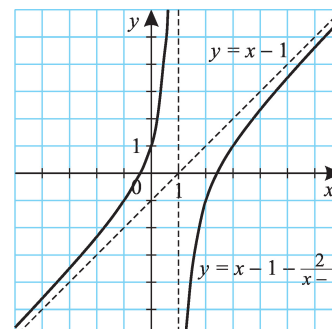


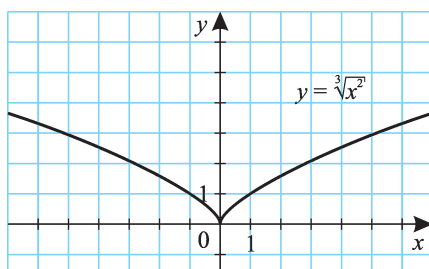
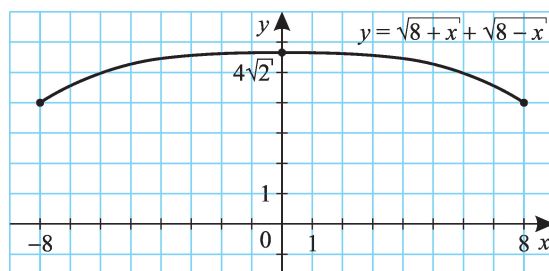
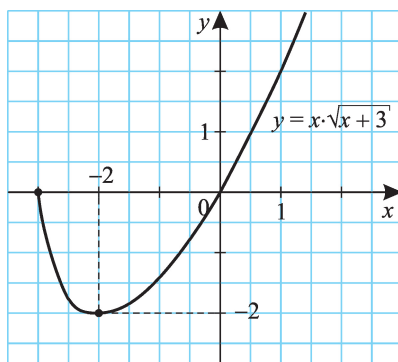
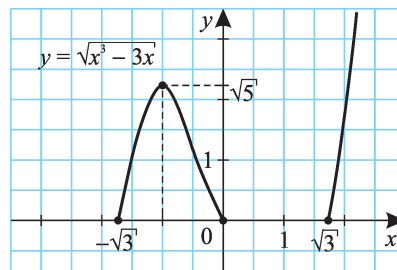
V

1313/i.



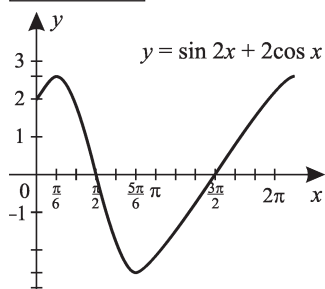
1313/j.



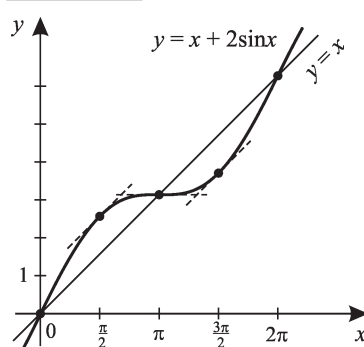
1314.**1314/a.****V****1314/b.****1314/c.****1314/d.**

1315.

1315/a.

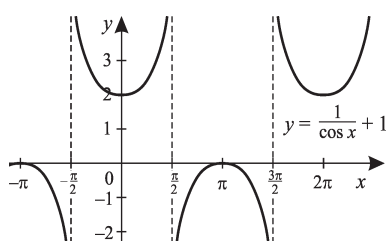


1315/b.

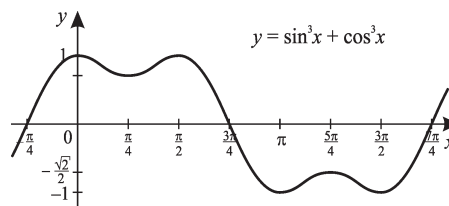


V

1315/c.



1315/d.



$$1316. y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{4x - 2}{(x - 3)(x - 1)} \quad x \neq 1, x \neq 3.$$

$$y' = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - (2x - 4)(x^2 + 1)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 4x + 4}{(x^2 - 4x + 3)^2} \quad x \neq 1, x \neq 3.$$

Határozzuk meg a derivált zérushelyeit:

$$y' = 0, \quad \text{ha} \quad -4x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \text{és} \quad x^2 - 4x + 3 \neq 0,$$

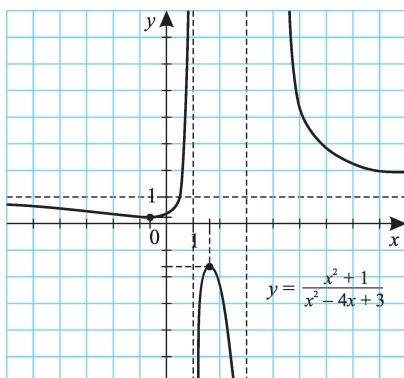
az egyenlet gyökei

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Helyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a függvénynek mindkét helyen van szélsőértéke.

A függvény menetét az alábbi táblázat és grafikon szemlélteti.

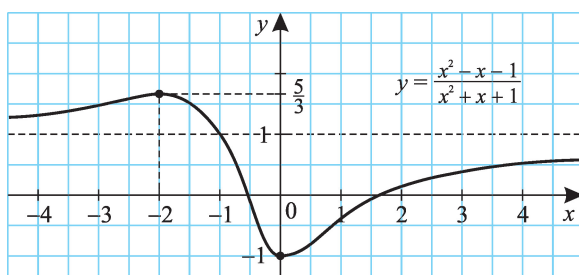
x	$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
y'	negatív	0	pozitív	nincs érték	pozitív	0	negatív	nincs érték	negatív
y	$\searrow$	helyi minimum	$\nearrow$	szakadás	$\nearrow$	helyi maximum	$\searrow$	szakadás	$\searrow$

1316.

A helyi minimum értéke behelyettesítéssel $y = \sqrt{5} - 2 \approx 0,236$.

A helyi maximum értéke behelyettesítéssel $y = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3} \approx -4,236$.

A függvény értelmezési tartományába $x = 1$ és $x = 3$ kivételével minden valós szám beletartozik, értékkészlete $y \leq \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3} \approx -4,486$, vagy $y \geq \sqrt{5} - 2 \approx 0,236$.

1317.

1317. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$.

A függvény értelmezési tartományába minden szám beletartozik, értékkészlete:

$$-1 \leq y \leq \frac{5}{3}.$$

$$y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

A függvény zérushelyei: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A függvény menete:

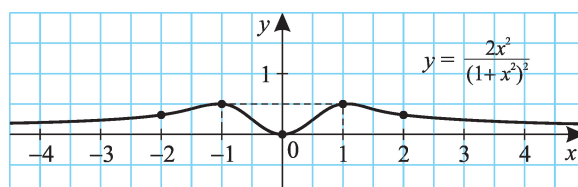
x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
y'	pozitív	0	negatív	0	pozitív
y	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$ helyi maximum	$\searrow$	-1 helyi minimum	$\nearrow$

1318. $y' = \frac{-4x^5 + 4x}{(1+x^2)^4}.$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
y'	pozitív	0	negatív	0	pozitív	0	negatív
y	$\nearrow$	helyi maximum $\frac{1}{2}$	$\searrow$	helyi minimum 0	$\nearrow$	helyi maximum $\frac{1}{2}$	$\searrow$

A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete $0 \leq y \leq \frac{1}{2}.$

1318.



1319. $y = \frac{2x^2 - 5ax + 8}{x - 2a}, x \neq 2a.$

Képezzük a függvény első deriváltját

$$y' = \frac{2x^2 - 8ax + 10a^2 - 8}{(x - 2a)^2}.$$

Monoton növekvő lesz a függvény olyan a értékek esetén, amelyekre y' x minden értéke mellett pozitív. Mivel a derivált függvény nevezője x minden szóba jöhető értékére pozitív, előjele csak a számlálóban szereplő kifejezéstől függ. Keressük azon a értékeket, amelyek mellett

$2x^2 - 8ax + 10a^2 - 8 > 0$ egyenlőtlenség x minden értékére pozitív, azaz az $y = 2x^2 - 8ax + 10a^2 - 8$ függvénynek nincs zérushelye (x^2 együtthatója pozitív). Tekintsük a $2x^2 - 8ax + 10a^2 - 8 = 0$ egyenletet! Osszuk el mindkét oldalt 2-vel, ekkor

$$x^2 - 4ax + 5a^2 - 4 = 0.$$

Képezzük az egyenlet diszkriminánsát:

$$D = 16a^2 - 20a^2 + 16 = 16 - 4a^2.$$

Az y függvénynek akkor nem lesz zérushelye, ha $D < 0$, azaz $|a| > 2$.

a) A függvény monoton növekvő lesz, ha $|a| > 2$.

b) A függvénynek szélsőértéke lesz, ha $|a| = 2$.

$|a| < 2$ esetén határozzuk meg a $2x^2 - 8ax + 10a^2 - 8$ függvény zérushelyeit:

$$x^2 - 4ax + 5a^2 - 4 = 0,$$

$$x_{1,2} = 2a \pm \sqrt{4 - a^2},$$

$$x_1 = 2a + \sqrt{4 - a^2}, x_2 = 2a - \sqrt{4 - a^2}.$$

V

Ugyanezekén válik 0-vá az y' függvény is, ugyanakkor előjelet is vált, tehát az

$x_1 = 2a + \sqrt{4 - a^2}$ helyen a függvénynek minimuma, az

$x_2 = 2a - \sqrt{4 - a^2}$ helyen a függvénynek maximuma van.

1320. Vizsgáljuk az $y = 2x^4 + x^3 - 2$ függvényt.

$$y' = 8x^3 + 3x^2.$$

Határozzuk meg a derivált zérushelyeit:

$$x^2(8x + 3) = 0, \quad x_1 = 0,$$

$$x_2 = -\frac{3}{8}.$$

V

$x_2 = -\frac{3}{8}$ -nál a derivált függvény előjelet is vált, itt van szélsőérték, minimum.

A minimum értéke

$$2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^4 - \left(\frac{3}{8}\right)^3 - 2 = 2 \cdot \frac{81}{4096} - \frac{27}{512} - 2 = \frac{81}{2048} - \frac{108}{2048} - 2 < 0.$$

$x = 0$ helyen y' nem vált előjelet, itt nincs szélsőérték. A függvény folytonos, határértéke a $+\infty$ -ben is és a $-\infty$ -ben is $+\infty$, a helyi minimum értéke negatív, ebből következik, hogy függvény grafikonja két helyen metszi az x tengelyt, azaz a $2x^4 + x^3 - 2 = 0$ egyenletnek két valós gyöke van.

1321. A harmadfokú egész függvény általános alakja:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

A feltétel szerint $x = 0$ helyen $y = 0$, ebből következik, hogy $d = 0$, $x = 1$ helyen

$$y = -\frac{10}{3}, \text{ tehát } a + b + c = -\frac{10}{3} \cdot x = 2 \text{ és } x = 1 \text{ szélsőérték helyek, ezek gyökei}$$

az $y' = 0$ egyenletnek.

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$; fenti értékek helyettesítésével nyerjük:

$$3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján:

$$\frac{c}{3a} = 2, \quad -\frac{2b}{3a} = 3.$$

Fenti két egyenlethez hozzákapcsolva az előzőleg nyert $a + b + c = -\frac{10}{3}$ egyenletet, a következő háromismeretlenes egyenletrendszerre jutunk:

$$c = ba,$$

$$2b = -9a,$$

$$3a + 3b + 3c = -10.$$

Fenti egyenletrendszer gyökei:

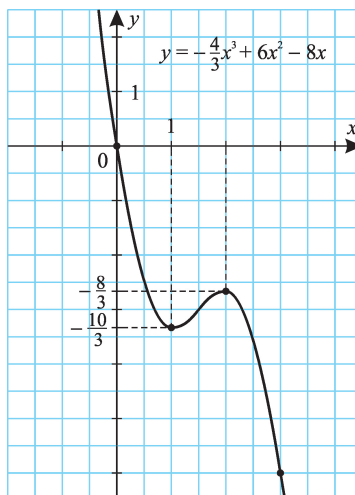
$$a = -\frac{4}{3}, \quad b = 6, \quad c = -8.$$

A keresett függvény

$$y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 8x.$$

Értelmezési tartománya is, értékkészlete is a valós számok halmaza.

1321.



V

1322. A függvény értelmezési tartománya $0 < x < 2\pi$, értékkészlete

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} \leq y \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$y' = 2 \cos 2x - 2 \sin x.$$

A függvényt a következő táblázattal és grafikonnal jellemezzük:

x	$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$	$x = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
y''	pozitív	0	negatív	0	pozitív	0	pozitív
y'	↗	helyi maximum $\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↘	helyi minimum $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↗	inflexiós pont	↗

A kérdés második felének megoldásához ábrázoljuk a derivált függvényt. Állítsuk elő a derivált függvény deriváltját (y''):

$$y'' = -4 \cdot \sin 2x - 2 \cdot \cos x.$$

x	$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < x < 3,3947$	$x = 3,3947$	$3,3947 < x < \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 6,03$	$x = 6,03$	$6,03 < x < 2\pi$
y''	negatív	0	pozitív	0	negatív	0	pozitív	0	negatív
y'	↘	helyi minimum -4	↗	helyi maximum $\frac{9}{4}$	↘	inflexiós pont	↗	helyi maximum $\frac{9}{4}$	↘

m csak a $-4 \leq m \leq \frac{9}{4}$ intervallumban veheti fel értékét.

Az érintők száma 1; 2; 3; 4 lehet.

ha $m = -4$,	1 érintő húzható,
$-4 < m < 0$,	2 érintő húzható,
$m = 0$,	3 érintő húzható,
$0 < m \leq 2$,	4 érintő húzható,
$2 < m < \frac{9}{4}$,	3 érintő húzható,
$m = \frac{9}{4}$,	2 érintő húzható.

V

1323. Annak feltétele, hogy az adott függvénynek ne legyen szélsőértéke, az, hogy y' állandó előjelű legyen.

$$y' = \frac{10x^2 + (2m - 10)x - (6m + 20)}{(x^2 + 4x + m)^2}.$$

Fenti kifejezés nevezője x minden olyan értékére, amelyre az eredeti függvény értelmezve van, pozitív. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy y' állandó előjelű legyen, az, hogy a számlálóban levő függvény ne váltson előjelet, azaz fennálljon a következő egyenlőtlenség:

$$(2m - 10)^2 + 40(6m + 20) \leq 0.$$

Szorzáttá alakítva:

$$(m + 5)(m + 45) \leq 0.$$

Ez kétféleképpen lehet:

a) $m + 45 \geq 0$, és egyidejűleg $m + 5 < 0$, azaz $-45 \leq m < -5$;

b) $m + 45 < 0$, és egyidejűleg $m + 5 \geq 0$, azaz $m \geq -5$, és $m < -45$.

A megoldás $m = -5$.

Az adott függvénynek nem lesz szélsőértéke, ha m -re a következő feltételek teljesülnek:

$$-45 \leq m \leq -5.$$

1324. A másodfokú egész függvény általános alakja:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

$$f(-1) = -6,$$

$$f(1) = 0 \text{ feltételekből adódik, hogy}$$

$$a - b + c = -6,$$

$$a + b + c = 0. \quad b = 3,$$

$$c = -3 - a.$$

Deriváljuk a függvényt:

$$y' = 2ax + b.$$

A függvénynek $x = -\frac{b}{2a}$ helyen van szélsőértéke, tehát

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{49}{8}, \text{ ebből a következő egyenletet kapjuk:}$$

$$8a^2 - 25a + 18 = 0,$$

$$a_1 = 2,$$

$$a_2 = \frac{9}{8}.$$

$$\text{Helyettesítéssel } c_1 = -5, c_2 = -\frac{33}{8}.$$

Az adott feltételeknek eleget tevő másodfokú függvények:

$$y = 2x^2 + 3x - 5,$$

$$y = \frac{9}{8}x^2 + 3x - \frac{33}{8}.$$

1325. Deriváljuk a függvényt:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b.$$

Szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az adott helyeken y' a 0 értéket vegye fel, azaz az $x = a$ és $x = b$ értékek gyökei legyenek a

$$3x^2 + 2ax + b = 0 \text{ egyenletnek.}$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján

$$ab = \frac{b}{3}, \quad a + b = -\frac{2a}{3}.$$

Ezekből $a = \frac{1}{3}$ és $b = -\frac{5}{9}$ értékek adódnak.

Mivel $x = -\frac{5}{9}$ helyen y' előjelet vált, mégpedig a $\left(-\frac{5}{9} - \delta; -\frac{5}{9}\right)$ intervallum-

ban pozitív és a $\left(-\frac{5}{9}; -\frac{5}{9} + \delta\right)$ intervallumban negatív ($\delta > 0$), azért az

$x = -\frac{5}{9}$ helyen a függvénynek maximuma van. Hasonló megfontolással $x = \frac{1}{3}$

helyen a függvénynek minimuma van. A keresett függvény:

$$y = x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{9}x.$$

1326. Képezzük a derivált függvényt:

$$y' = 3x^2 - 2x + 1.$$

A $3x^2 - 2x + 1 = 0$ egyenletnek diszkriminánsa negatív, tehát az eredeti függvénynek nincs szélsőérték-helye, y' x minden értékére pozitív, az eredeti függ-

vény a $(-\infty; +\infty)$ intervallumban monoton nő, s mivel *folytonos* függvény, ezért grafikonja csak egy helyen metszheti az x tengelyt.

$$\mathbf{1327.} \quad y' = \frac{qx^2 - px^2 + 4x + 5p - 3q}{(x^2 + qx + 5)^2}.$$

$y' = 0$, ha $(q-p)x^2 + 4x + 5p - 3q = 0$, és $x^2 + qx + 5 \neq 0$.

Az adott feltétel szerint $x = 2$ és $x = -1$ gyökei a $(q-p)x^2 + 4x + 5p - 3q = 0$ egyenletnek. Ebből adódik a következő egyenletrendszer:

$$-2 = \frac{5p - 3q}{q - p},$$

$$-1 = \frac{4}{q - p}. \quad \text{Az egyenletrendszer megoldása: } p = -2, q = -6.$$

Tehát $p = -2, q = -6$ esetén lesz az adott függvénynek az $x = 2$ és $x = -1$ helyen szélsőértéke, mégpedig az $x = 2$ helyen maximuma, és az $x = -1$ helyen minimuma.

(2) Az előző pontban meghatározott függvény

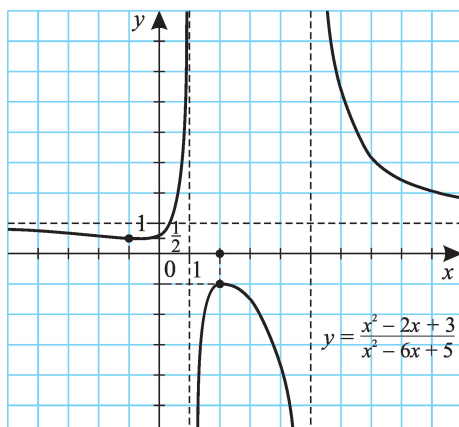
$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 6x + 5},$$

$$y' = -\frac{4x^2 - 4x + 8}{(x^2 - 6x + 5)^2}.$$

Értelmezési tartomány az összes valós szám $x = 5$ és $x = 1$ kivételével. Érték-készlet $y \geq 0,6$ és $y \leq -1$.

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x \neq 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 5$	$x \neq 5$	$x > 5$
y'	negatív	0	pozitív		pozitív	0	negatív		negatív
y	$\searrow$	helyi minimum 0,6	$\nearrow$		$\nearrow$	helyi maximum -1	$\searrow$		$\searrow$

1327.



Integrálszámítás

1328. a) $\int 5x^4 dx = x^5 + c;$

b) $\int 3x^4 dx = \frac{3}{5} x^5 + c;$

c) $\int 4 \sqrt{x^3} dx = \frac{5}{8} \sqrt{x^5} + c;$

d) $\int 8 \sqrt[3]{x^5} dx = 3 \sqrt[3]{x^8} + c;$

e) $\int \frac{5}{7} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^6}} = \frac{-25}{7 \sqrt[5]{x}} + c.$

1329. a) $\int \sqrt[3]{\sqrt{x}} dx = \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} + c;$

b) ugyanaz;

c) $\int \sqrt[3]{x \sqrt{x}} dx = \int \sqrt{x} dx = \frac{1}{2 \sqrt{x}} + c ;$

d) $\int \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}} dx = \int \sqrt[6]{x^5} dx = \frac{6}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + c;$

e) $\int \sqrt{x \sqrt[3]{x}} dx = \int \sqrt[3]{x^2} dx = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + c.$

1330. a) $\int \frac{\sqrt[3]{x \cdot 4 \sqrt{x^3 \cdot x^{-2}}}}{\sqrt[5]{x}} dx = \int x^{\frac{67}{60}} dx = \frac{-60}{7 \sqrt[60]{x^7}} + c;$

b) $\int \frac{y \sqrt[3]{\sqrt[5]{y}}}{10 \sqrt[4]{y^5}} dy = \int y^{\frac{109}{120}} dy = \frac{120}{229} \sqrt[120]{y^{229}} + c;$

c) $\int \frac{\sqrt[3]{z \sqrt{z \sqrt{z}}}}{z \sqrt{z}} dz = \int z^{-\frac{11}{12}} dz = 12 \sqrt[12]{z} + c.$

1331. a) $\int (2x^3 - 3x^2 + x - 4) dx = \frac{1}{2} x^4 - x^3 + \frac{x^2}{2} - 4x + c;$

b) $\int (5x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1) dx = x^5 + x^4 - \frac{2}{3} x^3 + x + c;$

c) $\int \left(4x^3 + 5x + 3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) dx = x^4 + \frac{5}{2} x^2 + 3x - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + c;$

V

$$d) \int (3-x)^2 dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + c;$$

$$e) \int (3-x)^3 dx = -\frac{x^4}{4} + 3x^3 - \frac{27}{2}x^2 + 27x + c;$$

$$f) \int (8x^3 - 2x + 3) dx = 2x^4 - x^2 + 3x + c;$$

$$g) \int (5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x + 2) dx = x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + c;$$

$$h) \int \left(\frac{2}{7}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x \right) dx = \frac{1}{21}x^6 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{5}x^2 + c;$$

$$i) \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + 5 \right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 5x + c;$$

$$j) \int \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^5} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5} \right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} + c.$$

$$1332. a) \int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx = \int (x + 1) dx = \frac{x^2}{2} + x + c \quad (x \neq 1);$$

$$b) \int \frac{4 - 4x + x^2}{3x - 6} dx = \int \frac{(x-2)^2}{3(x-2)} dx = \int \frac{1}{3} x dx - \frac{2}{3} dx = \\ = \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}x + c, \quad (x \neq 2);$$

$$c) \int \frac{x + x^{-1} + x^{-2}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx + \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \\ = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt{x^3}} + c, \quad (x \neq 0);$$

$$d) \int \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx = \int (x^2 - 2x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + c, \quad (x \neq -2);$$

$$e) \int \frac{x^3 - 8}{x - 2} dx = \int (x^2 + 2x + 4) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c, \quad (x \neq 2).$$

$$1333. a) \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c, \quad (x \neq 0);$$

$$b) \int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \right) dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + c, \quad (x \neq 0);$$

$$c) \int \left(\frac{x}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{x} \right) dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4x^{\frac{1}{4}} + c, \quad (x \neq 0).$$

$$1334. a) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 1 \right) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + x + c;$$

$$b) \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \\ = \int \left(x^{\frac{10}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{3}{13} x^{\frac{13}{3}} + \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + c, \quad (x \neq 0);$$

$$c) \int \frac{(x^a - x^b)^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{2a-\frac{1}{2}} dx - 2 \int x^{a+b-\frac{1}{2}} dx + \int x^{2b-\frac{1}{2}} dx = \\ = \frac{1}{2a+\frac{1}{2}} x^{2a+\frac{1}{2}} - \frac{2}{a+b+\frac{1}{2}} x^{a+b+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2b+\frac{1}{2}} x + c, \quad (x \neq 0);$$

$$d) \int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx = \int \frac{a^2 - 4a\sqrt{ax} + 6ax - 4x\sqrt{ax} + x^2}{\sqrt{ax}} dx = \\ = \int a^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx - \int \left(4a + 6\sqrt{a} x^{\frac{1}{2}} - 4x + \frac{1}{\sqrt{a}} x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \\ = 2a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - 4ax + 4\sqrt{a} x^{\frac{3}{2}} - 2x^2 + \frac{2}{5\sqrt{a}} x^{\frac{5}{2}} + c, \quad (ax \neq 0).$$

$$1335. a) \int (\sin x + 5) dx = x - \cos x + c;$$

$$b) \int (\cos x - 3, 7) dx = \sin x - 3, 7x + c;$$

$$c) \int (2 \sin x - 8 \cos x) dx = -2 \cdot \cos x - 8 \cdot \sin x + c;$$

$$d) \int (5 \cos x - 3 \sin x + 8) dx = 5 \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x + 8x + c;$$

$$e) \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \\ = \sin x + \cos x + c;$$

$$f) \int (\sin 2x + \cos 3x) dx = \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\cos 2x}{2} + c;$$

$$g) \int \left(\frac{\sin x}{5} - \frac{\cos x}{7} \right) dx = \frac{\cos x}{5} - \frac{\sin x}{7} + c;$$

$$h) \int \left(\frac{1}{3} \cos x - \frac{2}{3} \sin x \right) dx = \frac{\sin x + 2 \cdot \cos x + c}{3}.$$

V

1336. a) $\int \sin x \cos x dx = -\frac{\cos 2x}{4} + c;$

b) $\int 3 \sin 2x dx = -\frac{3 \cdot \cos 2x}{2} + c;$

c) a(1) $\int \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) dx = -\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + c;$

d) (2) $\int \sin(\pi - 2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \cos(\pi - 2x) + c = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + c;$

e) (3) $\int \cos \left(\frac{x}{3} - 1 \right) dx = 3 \sin \left(\frac{x}{3} - 1 \right) + c;$

f) (4) $\int \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \frac{1}{3} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + c;$

g) (5) $\int \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx = -\frac{1}{4} \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + c =$
 $= \frac{1}{4} \cdot \sin 2x + c.$

1337. a) $\int \frac{\sin x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \frac{1}{\cos x} + x + c;$

b) $\int \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} + c =$
 $= -\frac{1 + \cos x}{\sin x} + c;$

c) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x + c;$

d) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + c;$

e) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c;$

f) $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kx + c;$

g) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x} = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x + c;$

h) $\int \frac{dx}{\sin^2 nx} = -\frac{1}{n} \operatorname{ctg} nx + c.$

1338. a) $\int (t-5)^{-3} dt = \frac{-1}{2(t-5)^2} + c;$
 b) $\int (t+\sqrt{3})^{-2} dt = \frac{-1}{t+\sqrt{3}} + c;$
 c) $\int \left(t + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{(4t+1)^3}}{12} + c;$
 d) $\int \sqrt{t+8} dt = \frac{2\sqrt{(t+8)^3}}{3} + c;$
 e) $\int (t-2)\sqrt{t-2} dt = \frac{2\sqrt{(t+2)^5}}{5} + c.$

1339. A nevező deriváltja konstans, ezzel korrigáljuk a negatív hatványfüggvényeket.

a) $\int \frac{dx}{(2-x)^3} = \frac{1}{2(2-x)^2} + c;$
 b) $\int \frac{dx}{(3x+1)^4} = \frac{-1}{9(3x+1)^3} + c;$
 c) $\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \frac{-1}{2(x-2)^2} + c;$
 d) $\int \frac{dx}{(3x-1)^4} = \frac{1}{9(1-3x)^3} + c;$
 e) $\int \frac{dx}{(1-3x)^4} = \int \frac{dx}{(3x-1)^4} = \frac{1}{9(1-3x)^3} + c.$

1340. Vegyük észre, hogy a nevező deriváltja vagy annak számszorosa áll a számlálóban!

a) $\int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{(1+x^2)} + c;$
 b) $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x^3+x^2+x+5)^2} dx = -\frac{1}{(x^3+x^2+x+5)^2} + c;$
 c) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + c;$
 d) $\int \frac{3dx}{2\sqrt{5-4x}} = -\frac{3}{4}\sqrt{5-4x} + c;$
 e) $\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} = 4\sqrt{x^2+x+1} + c.$

V

1341. a) $\int \frac{adt}{\sqrt{1-t}} = -2a\sqrt{1-t} + c;$

b) $\int \sqrt{a-bt} dt = -\frac{2}{3b} (a-bt)^{\frac{3}{2}} + c;$

c) $\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} = \sqrt{t^2+1} + c;$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + c;$

e) $\int \frac{dx}{5\sqrt{x-1}} = \frac{2}{5}\sqrt{x-1} + c;$

f) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x-4}} = \sqrt{x-4} + c;$

g) $\int \frac{dx}{0,5\sqrt{3x-1}} = \frac{4}{3}\sqrt{3x-1} + c;$

h) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx = \sqrt{x^2+4x+3} + c.$

1342. Alakítsuk összeggé a szorzatokat!

a) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 8x - \sin 2x) dx =$
 $= -\frac{1}{16} \cdot \cos 8x + \frac{1}{4} \cdot \cos 2x + c;$

b) $\int \sin 10x \cdot \sin 15x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 25x dx =$
 $= \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{50} \sin 25x + c;$

c) $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx = \frac{5}{3} \sin \frac{5}{6} x + 3 \cdot \sin \frac{x}{6} + c;$

d) $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx = -\frac{5}{3} \cdot \cos \frac{5}{6} x - 3 \cdot \cos \frac{x}{6} + c;$

e) $\int \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx = -\frac{5}{3} \cdot \sin \frac{5}{6} x + 3 \cdot \sin \frac{x}{6} + c.$

1343. Vegyük észre, hogy a belső függvény deriváltja vagy annak szám-szorosa áll a trigonometrikus függvény előtt!

a) $\int 2x \sin x^2 dx = -\cos x^2 + c;$

$$b) \int \frac{x}{10} \cos(3x^2 - 1) dx = \frac{1}{60} \sin(3x^2 - 1) + c;$$

$$c) \int (3x^2 + 1) \cos(x^3 + x - 2) dx = \sin(x^3 + x - 2) + c;$$

$$d) \int (3x^2 + 1) \sin(x^3 + x - 2) dx = -\cos(x^3 + x - 2) + c;$$

$$e) \int (2x + 5) \cos(x^2 + 5x - 8) dx = \sin(x^2 + 5x - 8) + c.$$

1344. Van, az $x \mapsto x^3 + x^2 + x + 2$ függvény.

1345. $y = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{6}.$

1346. $y = x^3 - 4x - 3.$

1347. $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x + 47\frac{1}{6}.$

1348. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{23}{12}.$

1349. A primitív függvény érintőjének iránytangensét egyszerűen úgy kapjuk, hogy a megadott x értéket behelyettesítjük a függvénybe:

a) $m = 0, \quad \alpha = 0^\circ;$

b) $m = -10 \quad \alpha = 95,7^\circ;$

c) $m = 0, \quad \alpha = 0^\circ.$

1350. Mindhárom feladatban van olyan függvény.

a) $f(x) = 3 \sin x; x_0 = -\frac{\pi}{4}; y_0 = 2;$

Például: $F(x) = -3 \cos x + 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ függvény jó.

b) $f(x) = \sin x + \cos x; x_0 = 2,5; y_0 = 0;$

Például:

$F(x) = -\cos x + \sin x + \cos 2,5 - \sin 2,5 \approx -\cos x + \sin x - 1,4$ jó

c) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2; y_0 = 0; y_0 = 0;$

Például: $F(x) = \operatorname{tg} x + 2x$ megfelel.

1351. $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{15x^2 - 30x}.$

1352. $y = \frac{1}{2} \sin\left(x^4 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{7}{2}.$

Határozott integrál

V

$$1353. a) \int_0^a x \, dx = \frac{a^2}{2};$$

$$b) \int_0^a (x^2 - ax) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2} x^2 \right]_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} = -\frac{a^3}{6};$$

$$c) \int_2^3 \frac{5}{x^2} \, dx = \frac{5}{6};$$

$$d) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \, dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[-\sqrt{4-x^2} \right]_0^{\sqrt{3}} = 1;$$

$$e) \int_{2a}^{3a} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \left[\sqrt{x^2 - a^2} \right]_{2a}^{3a} = |a| \cdot (2\sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

$$1354. a) \int_1^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \left[\frac{1}{3} \sqrt{2x+1} \right]_1^2 = \frac{5}{3} \sqrt{5} - \sqrt{3};$$

$$b) \int_1^7 \sqrt{3x+1} \, dx = 22.$$

$$1355. a) \int_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{2}} \frac{-dx}{(1+x)^2} = \left[\frac{1}{(1+x)} \right]_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{2}} = -2;$$

$$b) \int_{-5}^5 \frac{-2x \, dx}{(1+x^2)^2} = \left[\frac{1}{(1+x^2)} \right]_{-5}^5 = 0.$$

$$1356. a) \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} \, dx = \int_1^4 \left(x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} \right) \, dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right]_1^4 = \frac{7}{4};$$

$$b) \int_0^1 (8-7x)^{\frac{1}{3}} \, dx = \left[-\frac{3}{28} (8-7x)^{\frac{4}{3}} \right] = \frac{45}{28}.$$

$$1357. a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1;$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \, dx = \left[-\frac{1}{4} \cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2};$$

$$c) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx = \left[\frac{1}{4} \sin 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$1358. a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin x + 3 \cos x) \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2;$$

$$b) \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx = 0;$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) \, dx =$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

$$d) \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x} = [\operatorname{tg} x]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

$$1359. a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4};$$

$$b) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Területszámítás

$$\mathbf{1360.} \ a) \ t = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3};$$

$$b) \ t = \left| \int_{-5}^1 (x^2 + 4x - 5) dx \right| = 36;$$

c) $t = 36$ (A b) feladat függvénye van eltolva a $\underline{y}$ (5; 0), és azután az x tengelyre tükrözve.);

d) $t = \frac{32}{3}$. (Az a) feladat függvénye van eltolva a $\underline{y}$ (-1; 0) vektorral.)

V

1361. Bármely két parabola hasonló, ezért elég az $y = x^2$ parabolára igazolni, mert egy hasonlósági transzformáció nem változtatja meg két terület arányát. Messük a parabolát az $y = c$ egyenessel ($c > 0$), ekkor a parabolával való metszéspontok $x = \pm \sqrt{c}$, a téglalap területe $T = 2c \sqrt{c}$. A parabola és az x ten-

gely közti terület $t = 2 \int_0^{\sqrt{c}} x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{c}} = \frac{2}{3} c \sqrt{c}$. A két terület különbsége

adja a parabolaszélet területét, ezért az állítás igaz.

1362. Az előző példa eredményét felhasználva a kérdéses területet úgy kapjuk meg, hogy a nagyobb parabolaszélet területéből kivonjuk a kisebb parabolaszélet területét. Tegyük fel, hogy $a > 0$ és $c > d > 0$, akkor az $y = c$, az $y = d$ és a megfelelő parabolaívek által határolt parabolaszélet területe

$$t = \frac{4\sqrt{a}}{3a} \cdot (c\sqrt{c} - d\sqrt{d}).$$

$$\mathbf{1363.} \ t = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

1364. a) A függvény páratlan, ezért a terület

$$t = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

b) A függvény páros, ezért elég a felét kiszámolni. A függvény és az x tengely metszéspontjai: $x \in \{\pm 1, \pm 2\}$. A terület tehát

$$\frac{1}{2} t = \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx + \left| \int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4) dx \right| = 4, \text{ ahonnan } t = 8.$$

c) Ez a függvény $x = 2$ -nél metszi, $x = 3$ -nál érinti az x tengelyt, így a terület

$$t = \int_2^3 (x-2)(x-3)^2 dx = \int_2^3 (x^3 - 8x^2 + 21x - 18) dx = \frac{1}{12}.$$

d) A függvény páratlan, elég a $[0; 1]$ intervallumra meghatározni a területet. $T = \frac{1}{6}$.

1365. A két függvény különbségét, az $x \mapsto -x^2 + 5x - 6$ függvényt kell integrálni 2-től 3-ig; $t = \frac{1}{6}$.

1366. a) A görbék metszéspontjai $x = 2$ és $x = 5$. A kért terület: $T = 4, 5$.

b) A görbék metszéspontjai $x = -3$ és $x = -1$. A kért terület:

$$T = \frac{4}{3}.$$

c) A görbék metszéspontjai $x = 2$ és $x = 6$. A kért terület: $T = 64$.

d) A görbék metszéspontjai $x = 2$ és $x = 9$. A kért terület:

$$T = \frac{343}{6}.$$

e) A görbék metszéspontjai $x = 1$ és $x = 4$. A kért terület: $T = 18$.

1367. Az 1 és 2 oldalú téglalap harmadrésze a vizsgált terület: $\frac{2}{3}$.

1368. A kérdéses terület egy 2 egység oldalú négyzet területének $\frac{2}{3}$ része,
 $T = \frac{8}{3}$.

1369. A kérdéses terület egy 2 egység oldalú négyzet területének $\frac{2}{3}$ része,
 $T = \frac{8}{3}$.

1370. Egy 2 egység oldalú négyzet területének $\frac{2}{3}$ része adódik: $T = 2 \frac{2}{3}$.

1371. $t_1 = \int_{-1}^0 -x^2 + x + 2 dx = \frac{7}{6}$; $t_2 = \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx = \frac{20}{6}$;

$t_1 : t_2 = 7 : 20$.

1372. $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Három síkidom keletkezik.

$$t_1 = \int_{-3}^{-2} f = \frac{7}{12}; \quad t_2 = \int_{-2}^1 |f| = 11 \frac{1}{4}; \quad t_3 = \int_1^2 f = 8 \frac{7}{12}.$$

$$\sum_{i=1}^3 t_i = \frac{245}{12}.$$

1373. Az érintő egyenlete: $y = -4x + 1$, ez a koordinátatengelyeket az $A(0; 1)$, illetve a $B\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ pontban metszi. $t = \frac{1}{8}$.

1374. Az érintő egyenlete: $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. Egy olyan derékszögű háromszög területét keressük, amelyben a befogók hossza $\frac{29}{3}$, illetve $\frac{29}{4}$.

$$\text{Területe: } \frac{\frac{29}{3} \cdot \frac{29}{4}}{2} = 35 \frac{1}{24}.$$

V

1375. Toljuk el az adott görbét a $(-2; 0)$ vektorral, ekkor egyenlete $y = (x - 1)x(x + 1) = x^3 - x$.

A lokális szélsőérték helyek: $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Két egybevágó síkidom adódik, közülük egynek a területe:

$$t = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x - x^3 dx = \frac{5}{36},$$

a két rész területének az összege $\frac{5}{18}$.

1376. A két parabola az $A(-3; 9)$ és a $B(5; 25)$ pontban metszi egymást. Az általuk határolt síkidom területe:

$$t = \int_{-3}^5 -\frac{1}{2}x^2 + x + 7,5 dx = 42 \frac{2}{3}.$$

Az $y = x$ egyenletű egyenes ebből $\frac{1}{6}$ területű részt vág le. A másik rész területe $42 \frac{1}{2}$.

1377. Az előző példából következik, hogy $t = 42 \frac{2}{3}$.

1378. A $P(3; 11)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete: $y = 6x - 7$, ez az x tengelyt az $A\left(\frac{7}{6}; 0\right)$ pontban metszi. Az $y = -2x + 20$ egyenletű egyenes az érintőt a $B\left(\frac{27}{8}; \frac{53}{4}\right)$, az x tengelyt a $C(10; 0)$ pontban metszi.

$$t = \frac{53}{6} \cdot \frac{53}{8} = 58 \frac{25}{48}.$$

1379. A parabola egyenlete: $y = \frac{1}{6}x^2 - x$; az érintő egyenlete: $y = \frac{2}{3}x - \frac{25}{6}$.

A keresett terület (a két lehetséges közül a kisebbik):

$$t = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} - \left| \int_5^6 \left(\frac{1}{6}x^2 - x \right) dx \right| = \frac{11}{144}.$$

1380. Zérushelyek: $x_1 = 3$ és $x_2 = 5$.

a) Az érintő: $y = -5x + 12,75$;

b) $t = \frac{99}{160}$;

c) $t = \frac{9}{8}$.

1381. A parabola egyenlete: $2x^2 - 12x + 9y = 0$, másik zérushelye:

$x_A = 6$. Az origóbeli érintő egyenlete: $y = \frac{4}{3}x$, az $A(6, 0)$ pontbeli érintő egyen-

lete: $y = -\frac{4}{3}x + 8$. – A két érintő metszéspontja:

$M(3, 4)$. – A háromszög területe $t = \frac{x_A \cdot y_M}{2} = 12$. – Az e) feladatban keresett terület:

$$T = t - \frac{2}{3} \cdot x_A \cdot y_C = 12 - 8 = 4,$$

ahol az $\int_0^6 \left(-\frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x \right) dx$ integrál kiszámítása helyett a 34-es példa állítását használtuk fel.

1382. Az $A(1, 0)$ pontbeli érintő egyenlete: $y = 4x - 4$, a $B(5;0)$ pontbeli érintő egyenlete: $y = -4x + 20$. Ezek metszéspontja: $M(3, 8)$. – A keresett terület:

$$T = \frac{4 \cdot 8}{2} - \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx = 5 \frac{1}{3}.$$

1383. A parabola egyenlete: $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 4$. A $P(-2; 1)$, illetve a $Q(4; 4)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete $y = 2x + 5$, illetve $y = -x + 8$. Ezek metszéspontja: $M(1, 7)$. A keresett terület:

$$T = \int_{-2}^1 (2x + 5) dx + \int_1^4 (-x + 8) dx - \int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + 4 \right) dx = 4,5.$$

Az első és a második integrál helyett egy-egy trapéz területét is kiszámíthatjuk.

1384. A két parabola egyenlete: $y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 1)^2$ és $y - 1 = \frac{2}{9}(x - 1)^2$; az általuk bezárt terület 20 egység.

1385. $t = \frac{25}{6}$.

1386. $a = -7$; $b = 20$; $c = -10$. A keresett területet a

$$T = \int_0^1 3x^2 dx - \int_0^1 (-7x^2 + 20x - 10) dx = 0,43$$

V

számítás szolgáltatja, ahol x_0 az $y = -7x + 20x - 10$ parabolának a kisebbik zérushelye ($x_0 = 0,65$).

Ugyancsak a feladatnak megfelelő eredményt kapunk, ha T -hez hozzáadjuk az $y = -7x^2 + 20x - 10$ parabola „alatti” területet ($x_1 = 2,2$ a parabola másik zérushelye):

$$T^* = T + \int_{x_0}^{x_1} (-7x + 20x - 10) dx = 0,43 + 3,4 = 3,8.$$

1387. *Első megoldás:* Az A és a B pont abszcisszáját a $k^2 = 4x^2$ és az $1 = \frac{4x^2}{k^2}$

egyenlet megoldásából kapjuk $\left(\begin{array}{l} \text{a két egyenlet gyökei azonosak: } \pm \frac{k}{2} \end{array} \right)$. A feltétel szerint

$$\int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} (k^2 - 4x^2) dx = 3 \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \left(1 - \frac{4x^2}{k^2} \right) dx, \text{ vagyis}$$

$$\int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} (k^2 - 4x^2) dx = \frac{3}{k^2} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} (k^2 - 4x^2) dx.$$

Ebből egyszerűsítés után azonnal adódik, hogy $1 = \frac{3}{k^2}$, $k^2 = 3$.

Második megoldás: az első parabola $y = k^2$ -nél, a második $y = 1$ -nél metszi az y tengelyt. Mindkét parabolaív és az x tengely közötti terület $\frac{2}{3}$ része egy-egy azonos (k) alapú k^2 , illetve 1 magasságú téglalapnak, tehát az első terület k^2 -szerese a másodiknak. Ha ugyanakkor háromszorosa is, akkor $k^2 = 3$, $k = \pm\sqrt{3}$.

1388. A parabolák a ± 2 abszcisszájú pontokban metszik egymást. A közrefogott terület:

$$T = \int_{-2}^2 |(x^2 + 3x + 4k) - (kx^2 + 3x + 4)| dx = \int_{-2}^2 |(1-k)(x^2 - 4)| dx =$$

$$= (k-1) \cdot \frac{32}{3}, \text{ s mivel } T = \frac{32}{3}, \text{ azt kapjuk, hogy } k-1 = 1, k = 2.$$

1389.

$$T = \int_m^2 |(-x^3 - 3x^2 + 20) - (-x^3 - 3x^2 + 5x + 10)| dx = \int_m^2 |10 - 5x| dx =$$

$$= \int_m^{2,5} (-10 - 5x) dx = 2,5 m^2 - 10m + 10.$$

Mivel a feladat feltételei szerint $T = 2,5 m$ -re a $2,5m^2 - 10m + 10 = 2,5$, vagyis az $m^2 - 4m + 3 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei: $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, de az $m < 2$ feltétel miatt csak $m_1 = 1$ felel meg a követelményeknek.

1390. Ha az $f(x)$ harmadfokú polinomot az $x - 1$ gyöktényezővel elosztjuk, az $x^2 - 8x + 15$ másodfokú polinomhoz jutunk, aminek zérushelyei: 3 és 5. Eszerint $f(x)$ abszolútértékét a 3 és 5 határok között kell integrálni, és ez az integrál szolgáltatja a keresett területet. Mivel $f(4) = 64 - 144 + 92 - 15 = -3 < 0$, és tudjuk, hogy a 3 és az 5 zérushelyek között a függvény nem válthat jelet, ebben az intervallumban $f(x) < 0$, és így $|f(x)| = -f(x)$. Ezek szerint

$$T = \int_3^5 (-f(x)) dx = \int_3^5 (-x^3 + 9x^2 - 23x + 15) dx = 4.$$

1391. a) $\frac{13}{3}$; b) $\frac{32}{15}$; c) 4,5.

1392. a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{64}{3}$; e) 4,5.

1393. A különbségfüggvényt kell integrálni. $t = 2$.

Forgástestek térfogata

1394. $V = \pi \int_0^2 (x^3 - 1)^2 dx = 12 \frac{2}{7} \pi.$

1395. Két egybevágó forgástest keletkezik. Egy ilyen test térfogata:

$$V_1 = \pi \int_0^3 (9x)^2 - (x^3)^2 dx = 416 \frac{4}{7} \pi,$$

a két test együttes térfogata: $V = 2V_1 = 833 \frac{1}{7} \pi.$

1396. $V = \pi \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \frac{2\pi}{15}.$

1397. Toljuk⁰ el az adott síkidomot a $(-2, 0)$ vektorral, a térfogat ezzel nem változik.

$$V = 2\pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = 34 \frac{2}{15} \pi \approx 107,2.$$

1398. Egy 5 sugarú $2\sqrt[3]{5}$ magasságú henger térfogatából kell kivonni a „görbe alatti terület” forgatásával nyert test térfogatát.

$$V = 50 \sqrt[3]{5} \pi - 2\pi \int_0^5 x^6 dx = 42 \frac{6}{7} \cdot \sqrt[3]{5} \pi; \quad V \approx 230,2.$$

1399. Toljuk⁰ el az adott síkidomot a $(-2; 0)$ vektorral, ekkor az $y = 3x^2 - 27$ egyenletű parabolából levágott szeletet kell megforgatnunk.

$$V = 2\pi \int_0^3 (3x^2 - 27)^2 dx = 18\pi \int_0^3 x^4 - 18x^2 + 81 dx = 2332 \frac{4}{5} \pi \approx 7329.$$

1400. A gömb térfogata $\frac{4}{3} \cdot 3^3 \pi = 36\pi$, az ellipszoidé $2\pi \int_0^4 9 - \frac{9}{16} x^2 dx = 48\pi$, a térfogatok aránya 3 : 4.

1401. A két függvény négyzetének a különbségét kell integrálni (-3) -tól 5-ig.

$$V = 631 \frac{7}{15} \pi \approx 1984.$$

1402. $V = \pi \int_0^5 (3x - x) dx = 25\pi.$

1403. A forgáspároloid térfogata a $\sqrt{10}$ sugarú, 5 magasságú henger térfogatának a fele. Integrállal:

$$V = \pi \int_0^5 2x dx = 25\pi.$$

1404. Egy csanakúp térfogatából kell kivonni a „görbe alatti” síkidom megforgatásakor kapott test térfogatát.

$$V = \frac{4 + 20 + 100}{3} \cdot 4\pi - \pi \int_{-1}^3 (x^2 + 1)^2 dx = 93 \frac{13}{15} \pi \approx 294,9.$$

1405. Ugyanaz, mint az előző feladat.

1406. Az adott parabola az 1 és a -5 abszcisszájú pontban metszi az x tengelyt. Toljuk el a $(2; 0)$ vektorral, ekkor a kapott parabola egyenlete $y = 9 - x^2$. A keresett térfogat:

$$V = \pi \int_{-3}^3 (9 - x^2)^2 dx = 250\pi. \text{ Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk}$$

$$\text{a } V = \pi \int_{-5}^0 (-x^2 - 4x + 5)^2 dx \text{ számítással is.}$$

1407. A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban keressük: Az adott pontok koordinátáinak a behelyettesítése után a $c = 9$, $2a + b = -8$, $a - b = 11$ egyenletrendszert kapjuk. Ebből $a = 1$, $b = -10$, tehát az $y = x^2 - 10x + 9 = (x - 1)(x - 9)$ egyenletű paraboláról van szó. Toljuk el ezt a $(-5; 0)$ vektorral, ekkor az $y = x^2 - 16$ egyenletű parabolához jutunk.

$$V = 2\pi \int_0^4 (x^2 - 16)^2 dx = 1092 \frac{4}{15} \pi \approx 3431.$$

1408. Toljuk el az adott parabolát a $(-5; 0)$ vektorral. Most az $y = ax^2 - 7$ egyenletből

$$a = \frac{7}{25} \text{ (a parabola a } (-5; 0) \text{ pontra illeszkedik!), tehát}$$

$$V = 2\pi \int_0^5 \left(\frac{7}{25} x^2 - 7 \right)^2 dx = 261 \frac{1}{3} \pi \approx 821.$$

1409. Vehetjük az adott parabola helyett az $y = 5 - \frac{5}{9} x^2$ egyenletű parabolát.

Ennek a $P(3; 0)$ -beli érintője az $y = 10 - \frac{10}{3} x$ egyenletű egyenes. Ez a $Q(10; 0)$ pontban metszi az ordinátatengelyt. A POQ háromszög x tengely körüli megforgatásával egy $v = 100\pi$ térfogatú kúp keletkezik, ezért a keresett térfogat

$$V = 2v - 2\pi \int_0^3 \left(5 - \frac{5}{9} x^2 \right)^2 dx = 120\pi.$$

1410. Toljuk el a vizsgált síkidomot a $(-4; 0)$ vektorral!

$$V = 2\pi \int_0^2 (8 - 2x^2)^2 - (4 - x^2)^2 dx = 6\pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \frac{512}{5} \pi \approx 321,7.$$

1411. A $P(2; 12)$ -beli érintő a $Q(1; 0)$ pontban metszi az x tengelyt.

$$V = \pi \int_0^2 9x^4 dx - V_{\text{kúp}},$$

ahol a kúp sugara 12, magassága 1, tehát térfogata 48π . Így

$$V = \frac{6}{5} \cdot 48\pi - 48\pi = 9,6\pi \approx 30,16.$$

1412. A parabolaszélet területe a megfelelő téglalap területének $\frac{2}{3}$ része:

$$12 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} c \cdot c^2, \text{ ebből } c = 3, \text{ tehát az } y = 9 - 9x^2 \text{ paraboláról van szó.}$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (9 - 9x^2)^2 dx = 162\pi \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 dx = 86 \frac{2}{5} \pi \approx 271,4.$$

V

1413. A hiperbola egyenletéből $y^2 = \frac{4}{9}x^2 - 4$, ezért

$$V = \pi \int_3^{10} \frac{4}{9}x^2 - 4 dx = 116 \frac{4}{27} \pi \approx 364,9.$$

$$\mathbf{1414.} \quad V = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} (x^3 - 2)^2 dx = 2 \frac{4}{7} \sqrt[3]{2} \pi \approx 10,18.$$

1415. Toljuk el az adott parabolát a $(-1; 0)$ vektorral, ekkor az $y = 4 - x^2$ egyenletű parabolához jutunk. $V = 34 \frac{2}{15} \pi \approx 107,2$.

1416. Az adott görbék metszéspontjai: $A(1; -2)$, $B(2; -1)$.

$$V = \pi \int_1^2 (2x^2 - 5x + 1)^2 - (x - 3)^2 dx = 1 \frac{2}{15} \pi \approx 3,560.$$

1417. A három egyenes páronkénti metszéspontjai: $A\left(3\frac{1}{2}; 6\right)$, $B(14; 6)$ és $C(7; 13)$. Az ABC háromszög megforgatásával létrejött test V térfogatát megkapjuk, ha két csonkakúp térfogatának az összegéből kivonjuk egy henger térfogatát. A csonkakúp sugarai: 6 és 13, magasságuk $3\frac{1}{2}$, illetve 7; a henger sugara 6, magassága $10\frac{1}{2}$.

$$V = 990 \frac{1}{2} \pi - 378\pi = 612,5\pi \approx 1924.$$

$$\mathbf{1418.} \quad V = \pi \int_0^1 x - x^6 dx = \frac{5\pi}{14} \approx 1,122.$$

1419. Az adott egyenes az $A(-5; 0)$ és a $B(4; 3)$ pontokban metszi az adott kört. A kisebbik körszelet forgatásakor létrejött test térfogata:

$$V_1 = \pi \int_{-5}^4 25 - x^2 dx - V_{\text{kúp}} = 162\pi - 27\pi = 135\pi \approx 424,1.$$

(Itt a kúp sugara 3, magassága 9.) – Ha a nagyobb körszeletet forgatjuk meg, akkor a teljes gömb áll elő:

$$V_2 = 166 \frac{2}{3} \pi \approx 523,6.$$

1420. 2π .

1421. $\frac{\pi^2}{4}$.

1422. Az $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ görbe az x tengelyt az origóhoz legközelebb az $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ és az $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$ abszcisszájú, az y tengelyt az $y = \frac{1}{2}$ ordinátájú pontban metszi. (x_1 -et az $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$, x_2 -t az $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ egyenlet megoldásából kaptuk.) Forgassuk meg az x tengely körül az előálló nagyobb síkidomot, vagyis azt, amelyet az x tengely $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$, az y tengely $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ szakasza és az $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right)$ görbe határol. A forgástestek térfogatképlete szerint

$$V = \pi \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) dx = \pi \left[\frac{x + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}{2} \right]_0^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= \frac{5\pi^2}{12} + \frac{\pi}{4} \cdot 0 + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi^2}{12} + \frac{\sqrt{3}\pi}{8} = 4,8.$$

A $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$ intervallumhoz tartozó test térfogata: $v = \frac{\pi^2}{2} - V = 0,1$,

ahol a $\frac{\pi^2}{2}$ értéket (egy fél koszinusz hullám megforgatásával létrejött test térfogatát) az 1421. feladat eredményének megkétszerezésével kaptuk.

1423. $V = \frac{4}{3} ab^2\pi$.

V

1424. Ha a feladatban adott végtelen forgásfelületet elmetsszük valamely, az x tengelyre az a , illetve a b abszcisszájú pontban merőleges két síkkal, akkor a keletkezett forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b (x-1)^3 dx = \frac{\pi}{4} \left[(x-1)^4 \right]_a^b = \frac{\pi}{4} \left[(b-1)^4 - (a-1)^4 \right].$$

Ha $a = 1$, $b = 2$, akkor $V = \frac{\pi}{4}$;

ha $a = 2$, $b = 3$, akkor $V = \frac{\pi}{4} (16 - 1) = \frac{15\pi}{4}$;

ha $a = 3$, $b = 4$, akkor $V = \frac{\pi}{4} (81 - 16) = \frac{65\pi}{4}$.

Még egyszerűbb a megoldás, ha az adott görbét és síkokat az x tengely mentén egy egységgel negatív irányban eltoljuk, ekkor ugyanis az $y^2 = x^3$ görbéről lesz szó, és

$$V = \pi \int_a^b x^3 dx = \frac{\pi}{4} (\bar{b}^4 - \bar{a}^4).$$

1425. Ha felcseréljük az x és az y változót, akkor az x tengely körül kell forgatnunk, ami mindjárt könnyen kezelhetővé teszi a feladatot.

a) Egy $r = 3$ sugarú, $m = 8\sqrt{2}$ magasságú hengerből hiányzik két végén

egy-egy forgástest, amelyeket az $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ görbe

$(-4\sqrt{2} < x < 4\sqrt{2})$ forgatásával állíthatunk elő.

b) Cseréljük fel a változókat! Ekkor az $y = \sqrt[3]{x^2} - 4$ görbe és az x tengely által határolt síkidomot az x tengely körül kell megforgatnunk. A kapott függvény páros, ezért célszerű a $[0; 8]$ intervallumra alkalmazni a forgástest térfogatképletét:

$$V = 2\pi \int_0^8 (\sqrt[3]{x^2} - 4) dx = 2\pi \int_0^8 \left[\sqrt[3]{x^4} - 8\sqrt[3]{x^2} + 16 \right] dx = 2\pi \left[\frac{3}{7} \cdot 2^7 - \frac{24}{5} \cdot 2^5 + 16 \cdot 2^3 \right] = 2^8 \pi \cdot \frac{8}{35} = \frac{2^{11} \pi}{35} = 184.$$

c) $V = 107$.

d) A változók felcserélésével kapott $y = a - \frac{x^2}{a}$ parabola és $y = a - x$ egyenes az $(a; 0)$ és a $(0; a)$ pontban metszi egymást, tehát

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^a \left(a - \frac{x^2}{a} \right)^2 dx - \pi \int_0^a (a-x)^2 dx = \\
 &= \pi \int_0^a \left[\left(a - \frac{x^2}{a} \right)^2 - (a-x)^2 \right] dx = \frac{a^3 \pi}{5}.
 \end{aligned}$$

e) lásd az a -hoz fűzött megjegyzést. $V = 6,14$.

1426. Egyenes körkúp keletkezik, sugara 2,5, magassága 5, alkotója 5,6 egység. A feladat integrálszámítással is, de anélkül is könnyen megoldható.

1427. A forgásparaboloid térfogata fele a köré írt hengernek. $K = \frac{r^2 \pi h}{2}$.

Eszerint a pohárban az eredeti $P = r^2 \pi h$ vízmennyiség és K különbsége marad. Mivel $P = 2K$, a pohárban maradó víz az eredeti mennyiség fele, vagyis

$$V = K = \frac{r^2 \pi h}{2}.$$

1428. Ez a feladat pl. a térfogatfüggvény vizsgálatával oldható meg. Jelöljük az x abszcisszája K ponton áthaladó keresztmetszet területét $T(x)$ -szel. Mint-hogy az $OCL\Delta \sim KCM\Delta$, azt kapjuk, hogy

$$DE = MK = \frac{OL \cdot KC}{OC} = \frac{21(30-x)}{30} = 21 - 0,7x. \text{ Ebből}$$

$$T(x) = \frac{2}{3} \cdot DE \cdot MK = \frac{2}{3} (21 - 0,7x)^2.$$

Jelentse $V(x)$ azt a térfogatot, amely az adott testből a DME síkmetszettel levágott testhez tartozik, és vizsgáljuk ennek a növekményét, ha x -ről valamely $(x + \Delta)x$ -re térünk át: $V(x + \Delta x) - V(x)$ egy olyan test térfogata, amelyet két párhuzamos síkban fekvő parabolaszélet, egy egyenlő szárú trapéz (az xy síkban) és egy görbe felület határol. Ez a test helyettesíthető egy vele azonos Δx magasságú, az itt szereplőkhöz hasonló (egyenlő magasságú és szélességű) parabolaszélet alapú hengerszerű testtel, amelynek térfogata megegyezik vele, alaplapja pedig valamely, x és $x + \Delta x$ közötti ξ helyhez tartozó keresztmetszet:

$$V(x + \Delta x) - V(x) = T(\xi) \cdot \Delta x.$$

Ebből, Δx -szel osztva, és elvégezve a $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenetet, azt kapjuk, hogy $V'(x) = T(x)$, vagyis, mivel

$$T(x) = \frac{2}{3} (21^2 - 29,4x + 0,49x^2),$$

$$V(x) = \frac{2}{3} \left(21^2 x - 14,7x^2 + \frac{0,49}{3} x^3 \right) + c.$$

Ha $x \rightarrow 0$, akkor $V(x) \rightarrow 0$, ebből következik, hogy $c = 0$. A szóban forgó test térfogata az $x = 30$ értékhez tartozik, vagyis

$$V = V(30) = \frac{2}{3} \cdot 30(21^2 - 147 \cdot 3 + 49 \cdot 3) = 20 \cdot 147 = 2940.$$

Fenti gondolatmenet helyett (kevésbé pontosan) azt is szokás mondani, hogy a

$$T(x) \text{ függvényt kell 0-tól 30-ig integrálnunk: } V = \int_0^{30} T(x) dx.$$

(Ha kúpszerű testekkel általánosságban is foglalkoztunk, akkor egyszerűbben:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 21^2 \cdot 30 = \frac{1}{3} \cdot T_{ABL} \cdot OC = 2940.)$$

Más alkalmazások

V

1429. a) $v = at + v_0 = 8t + 100 \frac{m}{s}$;

b) $s(t) = 4t^2 + 100t - 600 \text{ m}$;

c) $t_1 = -30$; $t_2 = 5$. Fizikai értelme (a kezdősebesség miatt) csak t_2 -nek van.

1430. Mivel $v = v_0 \cos \omega t$, és $x(0) = 0$, az $x(t)$ kitérésfüggvényt integrálással állíthatjuk elő:

a) $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$.

b) A periódus: $p = \frac{2\pi}{\omega}$; az átlagsebesség (annak szokásos definíciója értelmében):

$$v_{\text{átl.}} = \left[2 \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} v_0 \cdot \cos \omega t dt \right] : \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2v_0}{\omega} \left[\sin \omega t \right]_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} : \frac{2\pi}{\omega}.$$

Az integráljel előtti 2 szorzó az abszolútérték szerepeltetésének következménye; elég ugyanis egy fél perióduson vizsgálni a megtett utat (kitérést).

1431. A $[0, 1]$, illetve a $[3, 4]$ szakaszon végzett munka:

a) 1, illetve 1;

b) $\frac{1}{2}$, illetve $3 \frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{3}$, illetve $12 \frac{1}{3}$.

1432. A feladatban megadott $F(x)$ függvény a szóban forgó intervallumnak csak egy részén pozitív, ezért (hacsak nem értelmezzük a negatív munkát, ebben az esetben az összmunka 0-val egyenlő) $F(x)$ abszolútértékével kell dolgoznunk. A gyakorlatban ez az intervallum két részre bontását jelenti:

$$W = \int_0^{\pi} |10 \cos x| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 10 \cos x dx = 20 [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 20.$$

1433. Az erő arányos a kitéréssel, azaz $F(s) = -D \cdot s$, a munka pedig

$$W = \int_0^{0,04} |-D \cdot s| ds = \left[D \frac{s^2}{2} \right]_0^{0,04} = 8D \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

A D értékét abból kapjuk meg, hogy 1 N erő hatására 0,01 m lesz a megnyúlás. Tehát $W = 0,08 \text{ J}$.

1434. A feladatban levő láncot képzeljük el függőleges helyzetben, pl. úgy, hogy egyik vége a csigán, a másik a földön legyen. Valamely tetszőleges x_0 mélységben levő Δx hosszúságú láncdarab felemelése

$$\Delta W = (l - \xi) \cdot 50 \cdot \Delta x, \quad (x_0 \leq \xi \leq x_0 + \Delta x)$$

munkavégzéssel jár. Ebből

$$W'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta x} = (l - x_0) \cdot 50, \quad \text{és} \quad W'(x) = (l - x) \cdot 50.$$

Integrálással azt kapjuk, hogy $W(x) = 50lx - 25x^2$.

Az egész $l = 200$ (m) hosszúságú lánc felcsavarásához szükséges munkamenyiség:

$$W(l) = 25l^2 = 10^6 \text{ (Nm)}.$$

1435. Egy Δx magasságú, x_0 mélységben levő csonka kúp helyett vele egyenlő, $\Delta V = T(\xi) \cdot \Delta x$ térfogatú hengert vizsgálunk, ahol $T(x)$ az x mélységben vett keresztmetszet területe és $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$.

Ezt a vízmennyiséget ξ magasságra kell felemelni. Ekkor a végzett munka:

$$\Delta W = W(x_0 + \Delta x) - W(x_0) = \xi \cdot T(\xi) \Delta x,$$

ahol $W(x)$ az x mélység fölötti vízmennyiség kiemeléséhez szükséges munka. A levezetés a továbbiakban a szokásos:

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \xi \cdot T(\xi), \quad W'(x_0) = x_0 T(x_0), \quad W'(x) = x \cdot T(x).$$

Kúpról lévén szó, $T(x)$ könnyen meghatározható:

$$\frac{T(x)}{R^2 \pi} = \left(\frac{H - x}{H} \right)^2,$$

$$T(x) = \frac{R^2 \pi}{H^2} (H - x)^2.$$

Eszerint

$$W'(x) = \frac{R^2 \pi}{H^2} x(H - x)^2 = \frac{R^2 \pi}{H^2} (H^2 x - 2Hx^2 + x^3),$$

$$W(x) = \frac{R^2 \pi}{H^2} \left(\frac{H^2}{2} x^2 - \frac{2H}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) + c,$$

de $c = 0$, mivel $W(0) = 0$. A keresett $W(H)$ érték pedig:

$$W(H) = R^2 \pi \left(\frac{1}{2} H^2 - \frac{2}{3} H^2 + \frac{1}{4} H^2 \right) = \frac{R^2 \pi H^2}{12}.$$

A most és korábban már többször leírt eljárást fizikai számítások esetében általában ma következővel helyettesítik:

Az x mélységben levő Δx magasságú csonka kúpban levő $\Delta V = T(x) \cdot \Delta x$ vízmennyiség kiemeléséhez

$$\Delta W = x \cdot T(x) \Delta x$$

V

munka szükséges, ahol $T(x) = \frac{R^2 \pi}{H^2} (H - x)^2$, vagyis

$$\Delta W = \frac{R^2 \pi}{H^2} x(H - x)^2 \Delta x.$$

ΔW -t kell integrálnunk (összegeznünk) 0-tól H -ig, tehát a keresett W munka a következő:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^H \frac{R^2 \pi}{H^2} x(H - x)^2 dx = \frac{R^2 \pi}{H^2} \int_0^H (H^2 x - 2Hx^2 + x^3) dx = \\ &= \frac{R^2 \pi}{H^2} \left(\frac{1}{2} H^4 - \frac{2}{3} H^4 + \frac{1}{4} H^4 \right) = \frac{R^2 \pi H^2}{12}. \end{aligned}$$

1436. A kifolyási időt az

$$I = \int_0^h \frac{T dx}{t \mu \sqrt{2gx}} = 350 \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{2gx}} = \frac{350}{g} \sqrt{2gh}$$

integrál adja meg; a $h = 0,4\text{m}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ helyettesítéssel:

$$I = \frac{35}{98} \cdot \sqrt{2 \cdot 980 \cdot 40} = \frac{5 \cdot 280}{14} = 100 \text{ (s)}.$$

1437. a) $\Theta_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum a y^2 \Delta y = \int_0^h a y^2 \Delta y = \frac{a h^3}{3}.$

b) Cseréljük fel az x és az y tengelyt, ekkor szerepet cserél a és h is, te-

hát: $\Theta_y = \frac{a^3 h}{3}.$

1438. a) Itt az x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot az

$$\Theta_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum y^2 x \Delta y = \int_0^b y^2 x dy$$

integrál adja, ahol $x = a - \frac{a}{b}y$. Az x -nek ezt a kifejezését Θ_x -be helyettesítve, könnyen kiszámíthatjuk a keresett nyomatékot:

$$\Theta_x = \int_0^b y^2 \left(a - \frac{ay}{b} \right) dy = \frac{a}{b} \int_0^b (by^2 - y^3) dy = \frac{a}{b} \left(\frac{b^4}{3} - \frac{b^4}{4} \right) = \frac{a \cdot b^3}{12}.$$

b) Hasonlóan, a két tengely felcserélésével azt kapjuk, hogy

$$\Theta_x = \frac{a^3 b}{12}.$$

1439. $I_y = \int_0^2 x^2 y dx = \int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5} = 6,4.$

1440. $E = R \frac{a^2}{2}.$

V