Hortobágyi István – Marosvári Péter – Nagyné Pálmay Piroska –
Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András –
Vancsó Ödön – Windisch Klára

EGYSÉGES ÉRETTSÉGI FELADATGYŰJTEMÉNY

MATEMATIKA

MEGOLDÁSOK

III.

Konsept-H Könyvkiadó

A tankönyv engedélyszáma: TTI-39839-13/5-KT/20

Bírálók: dr. Korányi Erzsébet
dr. Megyesi László

Alkotószerkesztő: Környei László

Konsept-H Kiadó
2081 Piliscsaba, Fő út 197.
Tel./fax: 06 26 373-367
E-mail: konsept@konsept.hu
Internet cím: www.konsept.hu

Felelős kiadó: Simon István
Tipográfiai terv: Bíró Mária
Műszaki szerkesztés: Borbély Tamás
Számítógépes grafika: Borbély Tamás
Nyomás és kötés: Széchenyi Nyomda Kft., Győr
Felelős vezető: Nemere Zsolt ügyvezető igazgató
Terjedelem: 33,4 A/5 ív
ISBN 963 9362 43 3

5.2. Valószínűségszámítás

2755. a) $\{(1; 1), (1; 5), (5; 1), (5; 5)\}$.

b) $\frac{3}{4}$, mert a négy egyformán valószínű esemény között 3 kedvező van.

c) $\frac{1}{4}$, hiszen csak két egyes húzásakor következik be a leírt esemény.

d) $\frac{1}{2}$, mert a két 1-es és a két 5-ös húzása is kedvező esemény.

2756. a) fekete húzása = f, fehér húzása = F, piros húzása = p
(f ; f), (f ; F), (f ; p), (F ; f), (F ; F), (F ; p), (p ; f), (p ; F), (p ; p).
Megjegyzés:
Az egyes események valószínűsége rendre:
$\frac{3}{105}, \frac{6}{105}, \frac{12}{105}, \frac{6}{105}, \frac{6}{105}, \frac{16}{105}, \frac{12}{105}, \frac{16}{105}, \frac{28}{105}$.

b) $\frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \frac{4}{15} \approx 0,267$

c) Elsőre nem feketét húzunk: $\frac{12}{15}$ a valószínűsége.
Így annak a valószínűsége, hogy elsőre nem feketét húzunk és másodikra sem:
$\frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14} = \frac{22}{35} \approx 0,629$.

2757. Az utasok száma 54.

a) $\frac{24}{54} \approx 0,444$

b) $\frac{36}{54} \approx 0,667$

c) 0 (nincs orosz az utasok között)

d) 1 (minden utas „nem angol")

2758. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{22}$, ami kisebb, mint 0,000 14; tehát igen valószínűtlen,

b) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{22}$, ami nagyobb, mint 0,999 866, tehát nagyon valószínű.

2759. a) (1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)

b) $4 = 1 + 3 = 3 + 1$, ennek valószínűsége $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$ vagy

$4 = 2 + 2$, ennek valószínűsége $\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Tehát a keresett valószínűség: $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18} \approx 0{,}278$.

2760. A feltétel szerint az 1-es, illetve a 6-os dobásának valószínűsége $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{1}{12}$, a 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös dobások valószínűsége egyenlő: p. Mivel a kockadobások valószínűségének összege 1, ezért $\frac{1}{4} + 4 \cdot p + \frac{1}{12} = 1$, és így $p = \frac{1}{6}$. A 2-es, 4-es, 6-os dobás valószínűségei rendre $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$. A páros szám dobásának valószínűségét megkapjuk, ha ezeket összeadjuk: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$. Felhasználtuk, hogy egymást kizáró események összegének valószínűsége egyenlő a valószínűségek összegével.

2761. Szabályos tetraéder bármely lapjára egyenlő, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel esik.

a) A takart számok összege 6 csak akkor lehet, ha a két tetraéder alsó lapján 3 áll. Ennek valószínűsége: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Felhasználtuk, hogy egymástól független események együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő a két esemény valószínűségének szorzatával.

b) A letakart számok összege lehet: 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Ezek valószínűségeit táblázatba foglaltuk.
Ebből kiolvasható, hogy legnagyobb valószínűséggel a letakart számok összege 3.

összeg	lehetőségek	valószínűség
0	0 + 0	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
1	1 + 0; 0 + 1	$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$
2	2 + 0; 1 + 1; 0 + 2	$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$
3	3 + 0; 2 + 1; 1 + 2; 0 + 3	$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$
4	3 + 1; 2 + 2; 1 + 3	$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$
5	3 + 2; 2 + 3	$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$
6	3 + 3	$\frac{1}{16}$

2762. A leírt módon 5! féle szám húzható ki egyenlő valószínűséggel $\left(p = \frac{1}{5!}\right)$. Tehát a legnagyobb és legkisebb szám kihúzásának valószínűsége egyenlő.

2763. Ha a 24 db marcipános szaloncukor mellé x db az előbbiekkel azonos színű csomagolópapírban lévő kókuszos szaloncukrot teszünk, akkor annak a valószínűsége, hogy kókuszosat választunk a fáról: $\frac{x}{x+24} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 16$.
Tehát 16 db kókuszos szaloncukrot kell a fára tenni.

2764. Ha egy sorsjegy ára 100 Ft, akkor összesen $\frac{1\,000\,000}{100} = 10\,000$ db sorsjegy kerül forgalomba. Összesen 100 db sorsjeggyel lehet nyerni, így annak a valószínűsége, hogy egy sorsjeggyel nyereményhez jutunk: $\frac{100}{10\,000} = 0{,}01$.
Annak a valószínűsége, hogy egy sorsjeggyel értékes nyereményhez jutunk: $\frac{5}{10\,000} = 0{,}000\,5$.
Annak a valószínűsége, hogy egy sorsjeggyel kevésbé értékes nyereményhez jutunk: $\frac{95}{10\,000} = 0{,}009\,5$.

2765. 90 db kétjegyű szám van, ezek közül 4 db (21 ; 42 ; 63 ; 84) osztható 21-gyel. Így annak a valószínűsége, hogy a 90 db versenyző közül találomra kiválasztott versenyző sorszáma osztható 21-gyel: $\frac{4}{90} = 0{,}044$.

2766. A kihúzott számötösök egymástól függetlenek, így a kérdezett valószínűség: $\frac{1}{\binom{90}{5}}$.

Megjegyzés:
Ha azt az eseményt vizsgálnánk, mennyi annak a valószínűsége, hogy kétszer egymás után a 47, 60, 65, 81, 89 számötöst húzzák ki, akkor természetesen más lenne a válasz (az előző valószínűség négyzete). Ez az esemény azonban nem egyezik meg a feladatban megfogalmazottal, hiszen itt két egymást követő sorsolás együttes eredménye az esemény, szemben a feladatbeli egyetlen sorsolás eredményével.

2767. a) A két szabályos érme feldobásakor 0,25 valószínűséggel lesz két írás, 0,5 valószínűséggel egy fej – egy írás, és ismét 0,25 valószínűséggel két fej az eredmény. Dani tehát ekkora eséllyel indul az egyik, másik, harmadik úton. Annak valószínűsége, hogy az első úton megy, és ott dugóba kerül: $0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}075$; hogy a másodikon megy, és ott dugóba kerül: $0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$; végül, hogy a harmadikon megy, és ott dugóba kerül: 0,7 · 0,25 = 0,175. Így tehát összességében 0,075 + 0,1 + 0,175 = 0,35 az esélye annak, hogy dugóba kerül.

Megjegyzés:
A teljes valószínűség tételét használtuk.

b) Az, hogy Dani „nem kerül dugóba”, éppen a kiegészítő, komplementer eseménye annak, hogy „dugóba kerül”, ezért ennek valószínűsége 1 – 0,35 = 0,65.

Megjegyzés:
Ismét számolhatunk a teljes valószínűség tételével. A három úton a „dugóba nem kerülés” esélye a komplementer-tulajdonság miatt rendre 0,7, 0,8, 0,3; így a pénzfeldobás után összességében 0,7 · 0,25 + 0,8 · 0,5 + 0,3 · 0,25 = 0,65 ennek valószínűsége.

2768. a) Ha a négy bolt bármelyikébe indulás esélye azonos, akkor mindegyik esély 0,25, ezért annak valószínűsége, hogy Panni kap kenyeret szombat délben:
0,7 · 0,25 + 0,8 · 0,25 + 0,9 · 0,25 + 0,65 · 0,25 =
= (0,7 + 0,8 + 0,9 + 0,65) · 0,25 = 0,7625.
(Ez a négy rész-valószínűség egyszerű átlaga, számtani közepe.)

b) Ekkor 0,7 · 0,1 + 0,8 · 0,4 + 0,9 · 0,3 + 0,65 · 0,2 = 0,79 az esély.

2769. Az egyes felsorolt események valószínűségeit a tapasztalati, relatív gyakoriságokkal azonosítva (a nagy számok törvénye szerint ennek az azonosításnak annál nagyobb a megbízhatósága, minél hosszabb adatgyűjtés áll mögötte) az őszi ködös idő valószínűsége 0,2 (ekkor a nem ködös időé 0,8), a ködös időben bekövetkező balesete 0,0004; a nem ködös időben bekövetkezőé 0,0001. Az útnak induló autót tehát 0,0004 · 0,2 + 0,0001 · 0,8 = 0,00016 valószínűséggel éri baleset. (Feltételeztük, hogy csak az időjárástól függ a balesetek gyakorisága, a többi tényezőt elhanyagoltuk.)

2770. a) Az összes burgonyának $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{120}$ része, azaz kb. 41%-a első osztályú. Ennyi annak a valószínűsége, hogy első osztályú burgonyát választunk.

Megjegyzés:
Eredményünk közelítés, egyenlő tömegűeknek tekintjük a burgonyákat, míg a valóságban a burgonyaszemek tömege eltérő, így az egyes minőségi osztályokba tartozó burgonyaszemek számának aránya akár jelentősen is eltérhet az egyes osztályokba tartozó burgonyaszemek együttes tömegének arányától.

b) Az első osztályú burgonyának $\frac{10}{49}$ része (kb. 20%-a) származik a második termelőtől, mivel 1200 kg-ból $\frac{49}{120}$-ad rész, azaz 490 kg első osztályú, ebből a második termelőtől $1200\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=100$ (kg) származik. Ennyi tehát annak a valószínűsége is, hogy egy véletlenszerűen választott első osztályú burgonya a második termelőtől származik (most is éltünk az *a)* rész megjegyzésében leírt feltételezéssel).

Megjegyzés:
Az eredeti adatokkal:

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. termelő } 200:5=40\text{ kg}\\ \text{2. termelő } 300:3=100\text{ kg}\\ \text{3. termelő } 700:2=350\text{ kg}\end{array}\right\}\ \text{első osztályú; } P=100:(40+100+350)=\frac{10}{49}.$$

Feltételes valószínűség segítségével is megoldhatjuk ezt a feladatot. Legyen A az az esemény, hogy első osztályú burgonyaszemet választunk, B pedig az, hogy a második termelőtől származó burgonyát választunk. Ekkor AB az az esemény, hogy a második termelőtől származó első osztályú burgonyaszemet választunk.

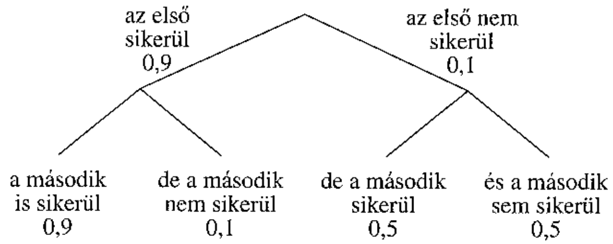
$$P(A)=\frac{49}{120},\quad P(AB)=\frac{1}{12},\quad \text{így } P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{49}{120}}=\frac{10}{49}.$$

2771. Mivel véletlenszerűen választok, ezért a három különböző palántát egyaránt $\frac{1}{3}$ eséllyel választom.

Megjegyzés:
Itt burkoltan az „Ockham borotvájának” nevezett elvet használjuk, amely szerint: ha nincs semmi, ami valamelyiket kitüntetné a kimenetelek közül, akkor egyenlőek az esélyek. Valójában a feladat szövege nem teljesen pontos, mert egyenletesen véletlenszerűt kellene mondani. Hiszen véletlenszerű az is, ha egy kockát dobok fel, és 1, 2, 3 esetén az első, 4, 5 esetén a második és 6 esetén a harmadikat választom. Ekkor is véletlenről van szó, csak $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ esélyekkel!
Mivel a kiválasztás és a kivirágzás vélhetően függetlenek (azon is el kell gondolkozni, miért lenne köztük kapcsolat), ezért az első palánta kiválasztása és kivirágzása $0,8\cdot\frac{1}{3}$ esélyű, hasonlóan a második $0,7\cdot\frac{1}{3}$, míg a harmadik $0,3\cdot\frac{1}{3}$.
Ez a három esemény egymást kizáró, tehát a kivirágzás esélye ezek összege, azaz $(0,8+0,7+0,3)\cdot\frac{1}{3}=0,6$.

Megjegyzés:
Valójában a teljes valószínűség tételéről van szó, a megoldással azt mutattuk meg, hogy közvetlenül is megadható a kérdéses esély. Természetesen a zárójeles megjegyzések teszik a teljes valószínűség tételét esetünkben alkalmazhatóvá.

2772. Rajzoljuk meg a lehetőségek fáját, és írjuk rá mindegyik ágra a bekövetkezés valószínűségét, amit most a tapasztalati, relatív gyakoriságokkal azonosítunk. Így a két vizsga lehetséges négyféle kimenetelének valószínűségét az ágakra írt esélyek szorzataként kapjuk.



Ezek közül az, hogy

a) mindkét teszt sikeres, $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$.

b) legalább az egyik teszt (amiben benne van, hogy akár mindkettő!) sikeres, $0,9 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,81 + 0,09 + 0,05 = 0,95$.

c) egyik teszt sem sikeres, $0,1 \cdot 0,5 = 0,05$ (vagy: $1 - 0,95 = 0,05$)

valószínűséggel következik be.

2773. a) $10^6 \cdot 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 8,4 \cdot 10^4$. Körülbelül 84 ezer szúnyog éli túl mindhárom permetezést (ez az eredeti számuknak 8,4%-a).

b) 8,4% éli túl, tehát $p = 0,084$.

c) $0,6 \cdot 0,7 = 0,42$ annak az esélye, hogy Döngicse mindkét permetezést túléli, tehát 0,58 valószínűséggel elpusztul.

2774. a) Azoknak a tanulóknak a száma, akiknek a két tantárgy közül legalább az egyik kedvenc tárgya: $18 + 15 - 5 = 28$.

Az osztály létszáma 34, így a keresett valószínűség: $\frac{28}{34} = \frac{14}{17} \approx 0,824$.

b) Azoknak a tanulóknak a száma, akiknek egyik tantárgy sem kedvence $34 - 28 = 6$.

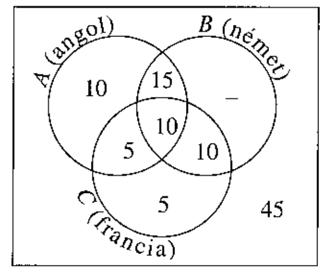
A keresett valószínűség: $\frac{6}{34} = \frac{3}{17} \approx 0,176$ vagy: $1 - 0,824$.

2775. Ha az osztály létszáma x, akkor $0,8x$ tanuló beszél angolul, $0,3x$ tanuló beszél németül és $0,1x$ tanuló beszéli mindkét nyelvet. A keresett valószínűség 0,1.

2776. a) Meg kell tehát számolnunk a legalább az egyik nyelven tudókat. Ha összeadjuk az angolul, németül, franciául tudók számát $(25 + 22 + 9)$, akkor kétszer is megszámoltuk a két nyelven, és háromszor a három nyelven tudókat. Ezért, ha kivonjuk az előbbi összegből a két nyelven tudók számát $(-12 - 4 - 3)$, akkor a pontosan két nyelven beszélők már csak pontosan egyszer lesznek megszámolva, viszont a(z egyetlen) három nyelven beszélő egyszer sem, tehát ezt a létszámot újra hozzá kell adni $(+1)$. Vagyis a társaságban $25 + 22 + 9 - 12 - 4 - 3 + 1 = 38$ ember beszéli a három nyelv valamelyikét. (Ezt az eljárást a halmazelméletből ismerhetjük, logikai szita-formula néven.) Tehát ekkor a társaságból véletlenszerűen kiválasztva egy embert, az $\frac{38}{45}$ eséllyel beszél a három nyelv valamelyikén.

b) Az előző eredményt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a társaságból véletlenszerűen kiválasztva egy embert, az $\frac{25}{45}$ valószínűséggel tud angolul, $\frac{22}{45}$ valószínűséggel németül, $\frac{9}{45}$ valószínűséggel franciául, $\frac{12}{45}$ valószínűséggel angolul és németül, $\frac{4}{45}$ valószínűséggel angolul és franciául, $\frac{3}{45}$ franciául és németül, $\frac{1}{45}$ valószínűséggel mindhárom nyelven, és $\frac{25}{45} + \frac{22}{45} + \frac{9}{45} - \frac{12}{45} - \frac{4}{45} - \frac{3}{45} + \frac{1}{45} = \frac{38}{45}$ valószínűséggel a három nyelv valamelyikén. Ezért általánosítva három esemény (A, B, C) közül legalább az egyik bekövetkezésének valószínűsége a $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$ formulával számolható. (Ez a Poincaré-tétel, és ilyen tulajdonságok miatt lehet a valószínűséget olyan mértéknek tekinteni, mint a területet vagy a térfogatot.)

2777. Vizsgáljuk Venn-diagrammal az események valószínűségét! Az egyszerűség kedvéért válasszunk 100 főt a vizsgálandó csoportból, ekkor $P(ABC) = 0,1$ azt jelenti, hogy 100 főből 10 fő tud mindhárom nyelven.



$P(AB) = 0,25$ azt jelenti, hogy 100 főből 25 fő angolul és németül, ebből már 10 fő franciául is tud, tehát csak angolul és németül 15 fő tud.
$P(AC) = 0,15$ azt jelenti, hogy 100 főből 15 fő tud angolul és franciául, ebből már 10 fő németül is tud, tehát csak angolul és franciául 5 fő tud.
$P(BC) = 0,2$ azt jelenti, hogy 100 főből 20 fő tud németül és franciául, ebből már 10 fő angolul is tud, tehát csak németül és franciául 10 fő tud.
$P(A) = 0,4$ azt jelenti, hogy 100 főből 40 fő tud angolul, a Venn-diagramból leolvasható, hogy csak angolul 10 fő tud.
$P(B) = 0,35$ azt jelenti, hogy 100 főből 35 fő tud németül, a Venn-diagramból leolvasható, hogy aki németül beszél, az legalább még egy nyelven tud.
$P(C) = 0,3$ azt jelenti, hogy 100 főből 30 fő tud franciául, a Venn-diagramból leolvasható, hogy csak franciául 5 fő tud.

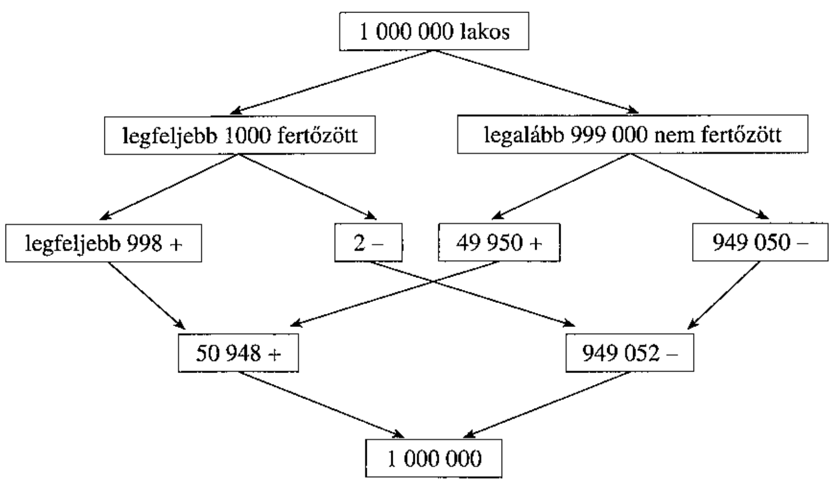
Így 100 fő közül 55 beszél a három nyelv közül valamelyik nyelven, 45 e három nyelv közül egyik nyelven sem beszél.
Így annak valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott diák a három nyelv közül legalább az egyik nyelven beszél: $\frac{55}{100} = 0,55$.

2778. A 9 millió bergengóc 85%-a, vagyis 7,65 millió fő szőke. Ez a Mesebolygó 150 milliós szőke népességének alig 5,1%-a, tehát szó sincsen arról, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott szőke mesebolygói ember nagy eséllyel bergengóc volna (sőt, elég kis eséllyel az). Tehát az érvelés teljesen téves, hamis, alaptalan.

Megjegyzés:
Sajnos, a hétköznapi életben is elég gyakori a csak egyik irányban érvényes következtetések könnyed, szinte rutinszerű megfordítása, amelyek azonban épp ilyen hamisak. Hozzá kell tenni, hogy nyilván van olyan eset is, amikor a megfordítás nem hamis, bár a fenti érveléssel mindenképpen helytelen. Ha az egyedi helyzet valahogy szimmetrikus, a fordított állítás is igaz. Esetünkben például akkor lenne így, ha alig volna szőke nem-bergengóc, pl. csak 8 millió szőke lenne összesen 150 millió helyett.

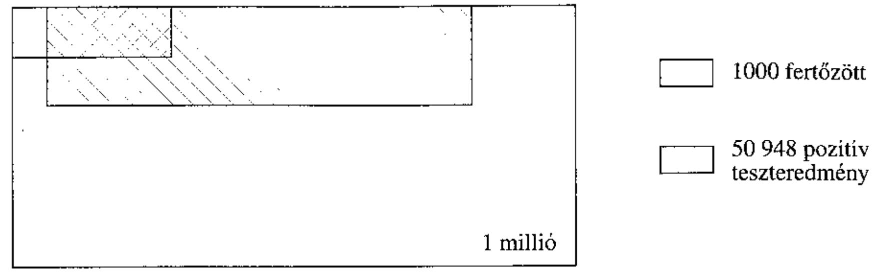
2779. A megoldást kétféleképpen mutatjuk meg.

Első megoldás:
Kettős fadiagrammal (1. ábra)



Tehát 1 000 000 lakossal végigszámolva $\frac{998}{50\,948}$ a fertőzöttség esélye, pozitív teszteredmény esetén, $P < 0,02$.

Szemléltetés
Venn-diagrammal (1. ábra)



Másik megoldás:
A Bayes-tételt alkalmazzuk. Legyen F a fertőzött, és T^+ a pozitív teszteredmény. Ekkor a feltételeink a következőket jelentik a feltételes valószínűségek „nyelvén": $P(T^+ \mid F) = 0{,}998$, $P(T^+ \mid \text{nem } F) = 0{,}05$; valamint $p = P(F) \le 0{,}001$.
A kérdés $P(F \mid T^+)$ valószínűség. A Bayes-tétel szerint:

$$P(F|T^+) = \frac{P(T^+|F)P(F)}{P(T^+|F)P(F) + P(T^+|\text{nem } F)P(\text{nem } F)} =$$

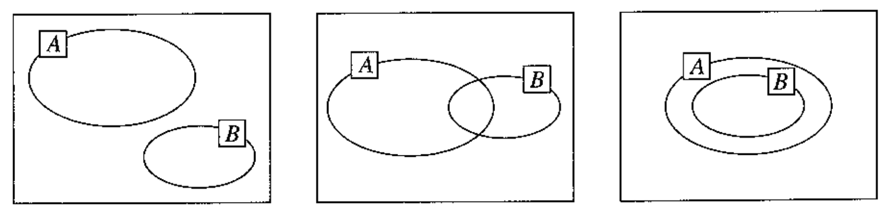
$$= \frac{0,998 \cdot p}{0,998 \cdot p + 0,05 \cdot (1-p)} = \frac{998}{998 + 50 \cdot \frac{1-p}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{50}{998}\left(\frac{1}{p} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{948}{998} + \frac{50}{998p}},$$

ha p-t növeljük a nevező nő, $\frac{50}{998p}$ csökken, azaz a tört értéke nő, tehát

$$\frac{1}{\frac{948}{998} + \frac{50}{998p}} \le \frac{1}{\frac{948 + 50000}{998}} = 0,0196.$$

Alig 2% annak az esélye, hogy tényleg beteg az illető.

2780. a) Mivel a viharos szél és esős idő a két esemény metszete, a kérdés ennek valószínűsége. Ez 0 és 0,2 között minden értéket felvehet, aszerint, hogy a két, 0,2 és 0,3 esélyű esemény hogyan helyezkedik el. Lásd a Venn-diagramot!



b) Ha 0,06 az esély, akkor az éppen a két megadott valószínűség szorzata. Akkor mondunk két eseményt függetlennek, ha együttes bekövetkezésük (metszetük) esélye az esélyeik szorzata. Tehát a függetlenséget feltételezte az illető.

Megjegyzés:

I. Valószínűleg a kettő nem független, ehhez statisztikákat kellene tanulmányozni, nyilván ilyenekből származtak a 0,2 és a 0,3 számok is.

II. Általában akkor független két esemény, ha az egyik bekövetkeztét feltételezve, nem változik a másik bekövetkezésének esélye, formálisan: $P(A|B) = P(A)$. Mivel a feltételes valószínűség definíciója (ami elég kézenfekvő az ábra alapján) szerint: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$, azaz $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

2781. a) A készülék akkor nem hibásodik meg, ha mindegyik alkatrésze ép marad. Ennek valószínűsége: $0{,}997^{50} \approx 0{,}86$. A készülék meghibásodásának valószínűsége tehát $1 - 0{,}86 = 0{,}14$.

b) A hibátlan készülékek aránya egy év után $960 : 1000 = 0{,}96$; kb. ennyi tehát legalább annak a valószínűsége, hogy egy éven belül egy készülék sem hibásodik meg.

Ha a kérdezett valószínűséget x-szel jelöljük, akkor $x^{50} \geq 0{,}96$, amiből $x \geq \sqrt[50]{0{,}96} \approx 0{,}9992$. Ez tehát annak a valószínűsége, hogy egy beépített alkatrész sem hibásodik meg egy év alatt.

Az egy éven belüli meghibásodási valószínűséget tehát legfeljebb 0,0008-re, azaz 0,08%-ra kell leszorítani az eredeti 0,3%-ról, azaz közel negyedére.

2782. Annak a valószínűsége, hogy egy éven belül a számítógépben ez a 3 rész nem hibásodik meg: $0{,}95 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}684$.

A meghibásodás valószínűsége tehát 0,316, azaz 31,6%, ami elég magas.

2783. $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Mivel az AB esemény azt jelenti, hogy a dobott szám kisebb mint 3 és páratlan, ezért csak egyetlen kedvező eset van, ha egyest dobunk.

$P(AB) = \frac{1}{6}$.

Az $A + B$ esemény akkor következik be, ha a dobott szám 1, 2, 3 vagy 5. Ennek valószínűsége: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2784. Két szabályos dobókocka feldobásakor az elemi események száma 36.
Az A esemény akkor következik be, ha 10, 11 vagy 12 a dobott számok összege.

Esemény	Valószínűsége
$10 = 4+6 = 5+5 = 6+4$	$\frac{3}{36}$
$11 = 5+6 = 6+5$	$\frac{2}{36}$
$12 = 6+6$	$\frac{1}{36}$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

A és B esemény egyszerre következik be, ha a dobott számok összege legalább 10 és legalább az egyik kockán 6 van felül. Ez 5 esetben valósul meg (lásd a táblázatot), ezért $P(AB) = \frac{5}{36}$.

Legalább az egyik kockával 6-ot dobunk 11 esetben.

A dobások: (1;6), (2;6), (3;6), (4;6), (5;6), (6;6), (6;5), (6;4), (6;3), (6;2), (6;1).

Ezért $P(B) = \frac{11}{36}$.

A $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ összefüggés felhasználásával:

$P(A+B) = \frac{1}{6} + \frac{11}{36} - \frac{5}{36} = \frac{1}{3}$.

2785. $P(A) = \frac{1}{4}$, mivel a 32 lap közül 8 zöld. $P(B) = \frac{1}{8}$, mivel a 32 lap között 4 király van. Annak a valószínűsége, hogy a zöld királyt húzzuk: $P(AB) = \frac{1}{32}$.

A $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ összefüggés felhasználásával:

$P(A+B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$, ez annak a valószínűsége, hogy zöldet vagy királyt húzunk.

2786. Az egyes események valószínűségét megkapjuk, ha a kedvező elemi események számát osztjuk az összes elemi esemény számával.

A négy zöldet a nyolc közül $\binom{8}{4}$-féleképpen húzhatjuk, míg négy tetszőleges lapot a 32 kártya közül $\binom{32}{4}$-féleképpen.

Ezért $P(A)=\dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{32}{4}}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}\approx 0{,}00195.$

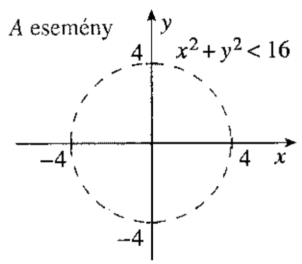
Hasonlóan okoskodva:

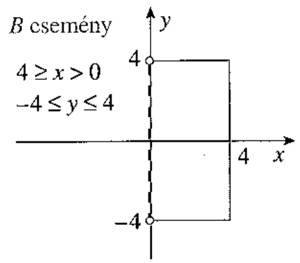
$$P(B)=\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{32}{4}}=\frac{8^4\cdot 4!}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}\approx 0{,}11390 \text{ és}$$

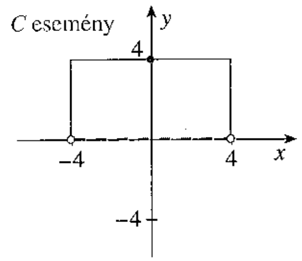
$$P(C)=\frac{\binom{24}{4}}{\binom{32}{4}}=\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}\approx 0{,}29549.$$

Mivel A és B, illetve A és C egymást kizáró események, ezért $P(AB)=0$, $P(AC)=0$, $P(A+B)=P(A)+P(B)\approx 0{,}11585$ és $P(A+C)=P(A)+P(C)\approx 0{,}29744$.

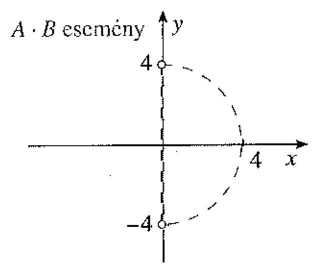
2787. Az alábbi ábrákon jelzett tartományok mutatják, hogy az egyes események során hol villannak fel a pontok.



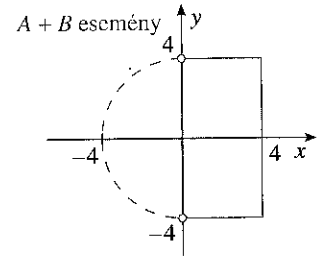




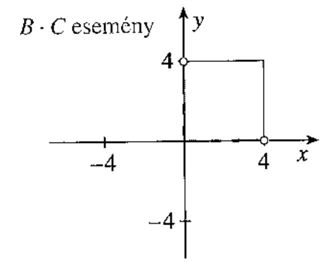
Az $A\cdot B$ esemény azt jelenti, hogy az origó középpontú 4 egység sugarú kör belsejében levő, a koordináta-rendszer I. és IV. síknegyedében lévő pontok az y tengely kivételével villannak fel.



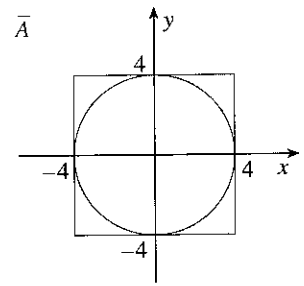
Az $A+B$ esemény azt jelenti, hogy az origó középpontú 4 egység sugarú kör belsejében levő pontok, valamint a koordináta-rendszer I. és IV. síknegyedében lévő jelölt pontok az y tengelyen lévő két jelölt pont kivételével villannak fel.

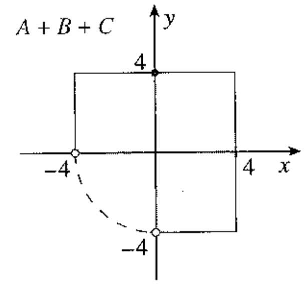


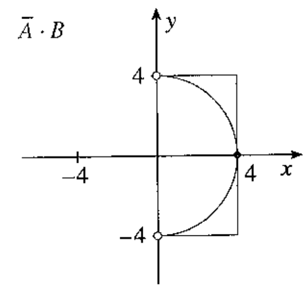
A $B\cdot C$ esemény azt jelenti, hogy a koordináta-rendszer I. síknegyedében lévő pontok a tengelyek kivételével villannak fel.

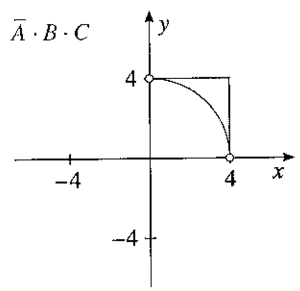


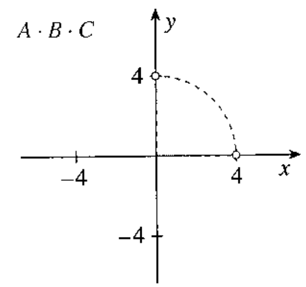
2788. Az A, B, C események a 2787. feladat 1., 2., illetve 3. ábráján láthatók.
Az alábbi ábrákon az egyes események során felvillanó pontok tartományait ábrázoltuk.



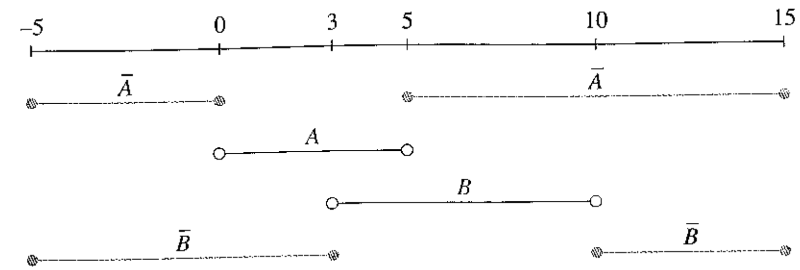








2789.



A felvillanó pont a következő intervallumokban lehet:

a) $A \cdot B$ esetén: $]3; 5[$

b) $A + B$ esetén: $]0; 10[$

c) Mivel $\bar{B}$: $[-5; 3] \cup [10; 15]$
$A \cdot \bar{B}$ esetén: $]0; 3]$

d) Mivel $\bar{A}$: $[-5; 0] \cup [5; 15]$
$\bar{A} + B$ esetén: $[-5; 0] \cup]3; 15]$

2790. a) A család vagy fogaskerekű vasúttal utazik vagy libegőznek, vagy fogaskerekű vasúttal is és libegővel is utaznak (azaz nem történhet meg, hogy egyik járművet sem próbálják ki).

b) Mindkettőn utaznak.

c) Libegőznek, de nem utaznak fogaskerekűvel.

2791. a) A család a kiránduláson vagy fogaskerekűvel utazik vagy libegőzik, vagy e két közlekedési eszköz közül egyiket sem használva kirándul. (Csak az van kizárva, hogy mindkét járművön utaznak.)

b) A család úgy kirándul, hogy sem fogaskerekűvel, sem libegővel nem utazik.

c) A család vagy fogaskerekű vasúttal utazik vagy libegőznek, vagy mindkét járművet kipróbálják.

2792. Vegyük észre, hogy A épp a B komplementere. Ezért

a) az $A + B$ a biztos esemény. (Hiszen a vizsgált 3 készülék közül vagy mindegyik készülék működik, vagy közülük 1 vagy 2 vagy mindhárom hibás.)

b) $A \cdot B$ a lehetetlen esemény. (Nem lehet, hogy egyszerre mindhárom készülék tökéletesen működjön úgy, hogy közülük legalább az egyik hibás.)

Megjegyzés:
$A + B$ bekövetkezésének valószínűsége 1.
$A \cdot B$ bekövetkezésének valószínűsége 0.

2793. Legyen pl. egy 20 fős társaság, amelynek minden tagja 1910 Ft-ot összedob egy összejövetel fedezetére, mégpedig mindenki 19 db 100-as és 1 db 10-es érmét tesz a közösbe. Válasszuk ki a társaság egy tagját, Frédit. Az ő pénzérméi közül egyet véletlenszerűen választva, az $\frac{19}{20} = 0,95$ valószínűséggel lesz 100-as. A társaság összes összedobott százasai közül egyet véletlenszerűen választva az $\frac{1}{20} = 0,05$ valószínűséggel származik Fréditől. Vagyis, ha A esemény az, hogy egy választott pénzérme 100-as címletű, a B pedig az, hogy egy választott pénzérme Fréditől származik, akkor $P(A \mid B) = 0,95$ és $P(B \mid A) = 0,05$.

Másik megoldás:
Egy mérkőzés nézői közül mindössze százan a vendégcsapat szurkolói, köztük azonban 95 nő van. A hazai szurkolók között (lehetnek akár több ezren is) 1805 nő van. Összesen így 1900 női szurkoló ül a nézőtéren. Válasszunk ki véletlenszerűen egy nézőt. Legyen A esemény az, hogy a választott néző nő, a B pedig az, hogy a választott néző vendégszurkoló. Ekkor $P(A \mid B)$ annak valószínűsége, hogy a vendégszurkolók közül nőt választottunk: ez $\frac{95}{100} = 0,95$; $P(B \mid A)$ pedig annak valószínűsége, hogy a nők közül vendégszurkolót választottunk: ez $\frac{95}{1900} = 0,05$.
(Persze számtalan további jó példa adható, így a bemutatott megoldások csak orientálóak. Az ilyen, ún. nyílt végű feladatok esetében ez természetes is.)

2794. a) Nem lehetnek, hiszen ha az egyik bekövetkezett, a másik nem következhet be ettől *függetlenül*; sőt, éppen ezáltal *meghatározott*, hogy már *nem* következhet be.

b) Ha A és B egymást kizárók, akkor $P(AB) = 0$.
Ha A és B függetlenek, akkor $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
Ha mindkét tulajdonság teljesül, akkor $P(A)$ és $P(B)$ valamelyike 0, azaz A és B egyike 0 valószínűségű, míg másika 1 valószínűségű esemény. Ezeket azonban definíció szerint kihagyjuk a független eseménypárok köréből, mivel fel szoktuk tenni, hogy a két esemény valószínűsége nem 0. A két tulajdonság tehát egyszerre nem teljesülhet.

2795. Lásd az előző megoldás b) részét. Csak úgy lehetnek egymást kizárók, ha valamelyik esélye 0, de akkor definíció szerint nem függetlenek, mivel annak feltétele, hogy mind A, mind B esélye 0-nál nagyobb legyen.

2796. a) Ha elsőre 1-et dobtunk, akkor másodikra 2, 3, 4, 5 vagy 6 a kedvező dobás.
Ennek valószínűsége: $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$.
Ha elsőre 2-t dobtunk, akkor másodikra 3, 4, 5 vagy 6 a kedvező dobás.

Ennek valószínűsége: $\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{36}$.
Ha elsőre 3-at dobtunk, akkor másodikra 4, 5 vagy 6 a kedvező dobás.
Ennek valószínűsége: $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{36}$.
Ha elsőre 4-et dobtunk, akkor másodikra 5 vagy 6 a kedvező dobás.
Ennek valószínűsége: $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{36}$.
Ha elsőre 5-öt dobtunk, akkor másodikra csak a 6-os a kedvező dobás.
Ennek valószínűsége: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.
Ha elsőre 6-ost dobtunk, akkor másodikra már nem dobhatunk nagyobbat.
A keresett valószínűség tehát: $\frac{5+4+3+2+1}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}\approx 0,417$.

Másik megoldás:
A kedvező eseteket fel tudjuk sorolni: (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 5), (4; 6), (5; 6). Tehát a kevező esetek száma 15. Így $P=\frac{15}{36}\approx 0,417$.

b) Kedvező, ha a dobott pontok összege 10, 11 vagy 12.

pontösszeg	valószínűsége
$10=4+6=5+5$	$2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$
$11=5+6$	$2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$
$12=6+6$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

A keresett valószínűség: $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Másik megoldás:
A dobott pontok összege 10 a következő esetekben lehet: (4; 6), (6; 4), (5; 5).
11 lehet az összeg: (5; 6), (6; 5), míg 12 csak a (6; 6). A kedvező esetek száma: 6.
A keresett valószínűség: $P=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

2797. Az 1-es dobás valószínűsége $P(A)=\frac{1}{6}$, a nem 1-es valószínűsége $P(\overline{A})=\frac{5}{6}$.
A dobások egymástól függetlenek. Annak a valószínűsége, hogy pl.: az első három dobás 1-es, a többi nem 1-es: $\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5$. A 8 dobás közül a három 1-es dobás $\binom{8}{3}$-féle „helyen” lehet, ezért a keresett valószínűség: $P=\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

2798. Teljesen mindegy, hogy az „első” dobáskor mit dobtunk. A keresett valószínűség: $\frac{1}{2}$.
(Itt az első dobást nem kell figyelembe vennünk. Ha az lenne a feladat, hogy először is és másodszor is írást és fejet dobtunk, akkor ennek a valószínűsége mindkét dobásnál $\frac{1}{2}$, s így a két dobást egyszerre tekintve a keresett valószínűség $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ lenne.)

2799. A fej és írás dobásának is $\frac{1}{2}$ a valószínűsége. Az első három dobás fej, ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, a negyedik írás, így annak a valószínűsége, hogy először a negyedik dobás lesz írás: $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

Megjegyzés:
Nem szabályos érme esetén, ha az írás dobásának valószínűsége p, a fej dobásának valószínűsége $1-p$, akkor annak a valószínűsége, hogy először a negyedik dobás lesz írás: $(1-p)^3\cdot p$.

2800. Annak a valószínűsége, hogy az első dobás 6-os: $\frac{1}{6}$.
Annak a valószínűsége, hogy az első dobás nem 6-os, de a második igen:
$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$.
Annak a valószínűsége, hogy az első és a második dobás nem 6-os, de a harmadik igen: $\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$.
Gondolatmenetünket folytatva a keresett valószínűség:
$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}$.
Ez pontosan $\frac{4651}{7776}$, ami körülbelül 0,598.

Másik megoldás:

Kedvezőtlen, ha az első öt dobás során nincs 6-os. Ennek valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

Tehát annak a valószínűsége, hogy az első öt dobás között lesz 6-os dobás:

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{4651}{7776}$.

2801. Bármelyik pénzérmével dobhatunk írást vagy fejet, így három pénzérmével dobva $2^3 = 8$ lehetőségünk van, melyek közül 1 a kedvező.

A keresett valószínűség tehát: $\frac{1}{8}$.

2802. Két szabályos játékkockával dobva összesen $6^2 = 36$ lehetőségünk van, melyek közül 6 eset a kedvező.

A keresett valószínűség tehát: $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

2803. A kapott számok „nem kisebbike 3" a következő eredménypárok esetén áll elő: 1-3, 3-1, 2-3, 3-2, 3-3. Ez 5 kedvező eset a két kockával dobható 36 összes eset közül, tehát a kérdéses valószínűség $\frac{5}{36}=0{,}13\dot{8}$.

„A kapott számok nagyobbika 3" esetben a 3-3 nem jó, így a valószínűség:

$\frac{4}{36}=0{,}\dot{1}$.

2804. a) A 6-os összeg a következő eredménypárok esetén áll elő: 1-5, 5-1, 2-4, 4-2, 3-3. Ez 5 kedvező eset a két kockával dobható 36 összes eset közül, tehát a kérdéses valószínűség $\frac{5}{36}=0{,}13\dot{8}$.

b) A 7-es összeg a következő eredménypárok esetén áll elő: 1-6, 6-1, 2-5, 5-2, 3-4, 4-3. Ez 6 kedvező eset a két kockával dobható 36 összes eset közül, tehát a kérdéses valószínűség $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}=0{,}1\dot{6}$.

2805. a) A dobott pontok összege legalább 5, ha az összeg 5 vagy 6 vagy 7 vagy 8 vagy 9 vagy 10 vagy 11 vagy 12.

Az elemi események száma 36. Jelöljük A_i-vel azt az eseményt, hogy a dobott pontok összege i, ahol $i \in \{2; 3; \ldots; 12\}$. Ezek páronként egymást kizáró események.

összeg	lehetőségek	valószínűség
5	1+4; 2+3; 3+2; 4+1	$P(A_5)=\frac{4}{36}$
6	1+5; 2+4; 3+3; 4+2; 5+1	$P(A_6)=\frac{5}{36}$
7	1+6; 2+5; 3+4; 4+3; 5+2; 6+1	$P(A_7)=\frac{6}{36}$
8	2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2	$P(A_8)=\frac{5}{36}$
9	3+6; 4+5; 5+4; 6+3	$P(A_9)=\frac{4}{36}$
10	4+6; 5+5; 6+4	$P(A_{10})=\frac{3}{36}$
11	5+6; 6+5	$P(A_{11})=\frac{2}{36}$
12	6+6	$P(A_{12})=\frac{1}{36}$

Annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege legalább 5:

$P(k \geq 5) = P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8) + P(A_9) + P(A_{10}) + P(A_{11}) + P(A_{12}) = \frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

Másik megoldás:

Számoljuk ki a komplementer esemény valószínűségét!

összeg	lehetőségek	valószínűség
2	1+1	$P(A_2)=\frac{1}{36}$
3	1+2; 2+1	$P(A_3)=\frac{2}{36}$
4	1+3; 2+2; 3+1	$P(A_4)=\frac{3}{36}$

$P(k < 5) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, ebből

$P(k \geq 5) = 1 - P(k < 5) = \frac{5}{6}$.

Másik megoldás:

Vegyünk egy 1×1- es négyzetet és egy csúcsba futó oldalait osszuk 6 egyenlő részre az egyik, illetve a másik kocka dobásának eredménye szerint, majd a keletkező 36 kis négyzetbe írjuk be a megfelelő összegeket.

A táblázatból kiolvashatók a különböző összegek-

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

hez tartozó valószínűségek: bármely esemény valószínűsége a neki megfelelő terület és az összes lehetséges terület hányadosa. Pl.: a 7-es összeg 6 mezőben szerepel, ezért annak a valószínűsége, hogy a dobott pontszámok összege 7, $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

A feladat megoldását a satírozott négyzetek és az összes négyzet területének aránya adja.

b) Számoljuk ki a komplementer esemény valószínűségét! Annak a valószínűsége, hogy legalább 10-et dobunk $P(k \geq 10) = P(A_{10}) + P(A_{11}) + P(A_{12}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$,

$P(k \leq 9) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Megjegyzés:

A szabályos dobókocka szemközti lapjain levő pontok összege 7, így ha a dobott számok összege pl.: 10, akkor az alul lévő számok összege $14 - 10 = 4$. Ha a dobott számok összege legfeljebb 9 (vagyis 2, 3, ... vagy 9), akkor a letakart számok összege (12, 11, ... vagy 5) legalább 5. Ezért az a) és b) feladatban vizsgált események valószínűsége egyenlő $\Rightarrow$ elég az egyiket kiszámolni.

2806. a) A 10-es összeg a következő eredménypárok esetén áll elő: 4-6, 6-4, 5-5. Ez 3 kedvező eset a két kockával dobható 36 összes eset közül, tehát 10-es összeget egyszer $\frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}08\dot{3}$ valószínűséggel dobunk. Kétszer egymás után ugyanezt dobni $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{144} = 0{,}0069\dot{4}$ valószínűséggel lehet. (A két dobás eredménye független egymástól, így valószínűségük összeszorzódik.)

b) Sorra vesszük az összes lehetséges eredményt, az azt előállító kedvező dobásokat megszámoljuk, így meghatározzuk a lehetséges összegek valószínűségét. Ekkor (lásd az a) részt!) ezek négyzeteinek összege adja a végeredményt. Két kockával dobva 2 és 12 közötti összeget érhetünk el, a táblázat szerint. Az egyes eredmények valószínűsége a jó lehetőségek száma osztva 36-tal, az összes lehetőségek számával.

összeg	lehetőségek	számuk
2	1+1	1
3	1+2; 2+1	2
4	1+3; 3+1; 2+2	3
5	1+4; 4+1; 2+3; 3+2	4
6	1+5; 5+1; 2+4; 4+2; 3+3	5
7	1+6; 6+1; 2+5; 5+2; 3+4; 4+3	6
8	2+6; 6+2; 3+5; 5+3; 4+4	5
9	3+6; 6+3; 4+5; 5+4	4
10	4+6; 6+4; 5+5	3
11	5+6; 6+5	2
12	6+6	1

Ezek négyzeteinek összszege:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2}{36^2} = \frac{146}{1296} = \frac{73}{648} \approx 0{,}113.$$

2807. A dobott számok összege 3, 4, ..., 18 lehet. Az elemi események száma: $6^3 = 216$.

összeg	lehetőségek	számuk	valószínűség	összeg	lehetőségek
3	1 + 1 + 1	1	$\frac{1}{216}$	18	6 + 6 + 6
4	1 + 1 + 2	3	$\frac{3}{216}$	17	6 + 6 + 5
5	1 + 1 + 3 1 + 2 + 2	3 3	$\frac{6}{216}$	16	6 + 6 + 4 6 + 5 + 5
6	1 + 1 + 4 1 + 2 + 3 2 + 2 + 2	3 6 1	$\frac{10}{216}$	15	6 + 6 + 3 6 + 5 + 4 5 + 5 + 5
7	1 + 1 + 5 1 + 2 + 4 1 + 3 + 3 2 + 2 + 3	3 6 3 3	$\frac{15}{216}$	14	6 + 6 + 2 6 + 5 + 3 6 + 4 + 4 5 + 5 + 4
8	1 + 1 + 6 1 + 2 + 5 1 + 3 + 4 2 + 2 + 4 2 + 3 + 3	3 6 6 3 3	$\frac{21}{216}$	13	6 + 6 + 1 6 + 5 + 2 6 + 4 + 3 5 + 5 + 3 5 + 4 + 4
9	1 + 2 + 6 1 + 3 + 5 1 + 4 + 4 2 + 2 + 5 2 + 3 + 4 3 + 3 + 3	6 6 3 3 6 1	$\frac{25}{216}$	12	6 + 5 + 1 6 + 4 + 2 6 + 3 + 3 5 + 5 + 2 5 + 4 + 3 4 + 4 + 4
10	1 + 3 + 6 1 + 4 + 5 2 + 2 + 6 2 + 3 + 5 2 + 4 + 4 3 + 3 + 4	6 6 3 6 3 3	$\frac{27}{216}$	11	6 + 4 + 1 6 + 3 + 2 5 + 5 + 1 5 + 4 + 2 5 + 3 + 3 4 + 4 + 3

A táblázatból kiolvasható, hogy a legvalószínűbb pontszámösszeg a 10 és a 11.

2808. a) Az elemi események száma 36. Ezek közül 6 esetben fordul elő, hogy a felül álló számok megegyeznek, és 30 esetben ezek különbözőek. Így a vizsgált esemény valószínűsége: $\frac{5}{6}$.

Másik megoldás:
Az első kockával bármit dobhatunk. A második kockával már nem dobhatjuk azt, amit az elsővel dobtunk, így az összesen hat lehetőség közül 5 a kedvező. A keresett valószínűség: $\frac{5}{6}$.

b) Az elemi események száma 6^3. Az első kockával bármit dobhatunk. A második kockával már csak 5-féleképpen végződhet a dobás ahhoz, hogy a felül levő számok különbözőek legyenek. A harmadik kockával csak 4-féleképpen dobhatunk, mert az előző két kockán lévő számok nem lehetnek felül. A dobások egymástól függetlenek, így a kedvező esetek száma $6 \cdot 5 \cdot 4$. Annak a valószínűsége, hogy a három kockán más-más szám áll felül: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$.

2809. Az összes elemi esemény száma: 6^6, a kedvező elemi események száma: 6! (lásd a 2808. b) megoldásának gondolatmenetét). Annak a valószínűsége, hogy hat különböző számot látunk a hat kockán: $p = \frac{6!}{6^6} = \frac{120}{7776} \approx 0{,}0154$.

Annak a valószínűsége, hogy 100 dobásból k-szor kapunk 6 különböző számot:

$$\binom{100}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{100-k} = \binom{100}{k} \cdot 0{,}0154^k \cdot 0{,}9846^{100-k}.$$

Így annak a valószínűsége, hogy

1-szer látunk 6 különböző számot felül $\binom{100}{1} \cdot 0{,}0154 \cdot 0{,}9846^{99} \approx 0{,}331$,

2-szer látunk 6 különböző számot felül $\binom{100}{2} \cdot 0{,}0154^2 \cdot 0{,}9846^{98} \approx 0{,}257$,

3-szor látunk 6 különböző számot felül $\binom{100}{3} \cdot 0{,}0154^3 \cdot 0{,}9846^{97} \approx 0{,}131$, stb.

Annak legnagyobb az esélye, hogy a 100 dobásból 1-szer látunk 6 különböző számot, tehát legvalószínűbb, hogy ez az esemény éppen egyszer fordul elő.

2810. a) Andrea első dobása nem hatos, 5-féleképpen, második dobása hatos, 1-féleképpen következik be. A dobások egymástól függetlenek, ezért a kedvező esetek száma $5 \cdot 1$, az összes eset száma 36, a keresett valószínűség: $\frac{5}{36}$.

Másik megoldás:
Andrea először nem dob hatost – ennek a valószínűsége $\frac{5}{6}$,
a második dobás hatos – ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$.
Ezek egymástól független események, a keresett valószínűség e két valószínűség szorzata: $\frac{5}{36}$.

Másik megoldás:
A jó esetek: (1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6), 5 eset.
Az összes eset 36, így a valószínűség $\frac{5}{36}$.

b) Az első négy dobás nem hatos, ezek valószínűsége dobásonként $\frac{5}{6}$. Az ötödik dobás hatos $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. A dobások egymástól független események, így a kérdéses esemény valószínűsége: $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^4}{6^5} \approx 0{,}08$.

Másként:
Az összes eset száma: 6^5.
A kedvező esetek száma 5^4, mert az első 4 dobás az 1, 2, 3, 4, 5 bármelyike lehet, az 5. dobás 6-os.

2811. a) Könnyebb azt kiszámolni, hogy egy hatos sem lesz (jelölje N), ami éppen ellentettje (komplementere) a keresett eseménynek, azaz nekünk az $1 - P(N)$ értéke kell. „Nincs hatos" esetén a kedvező esetek száma 5^3, míg az összes eset 6^3, azaz $P(N) = \frac{5^3}{6^3} \approx 0{,}5787$, tehát a „lesz legalább egy hatos" valószínűsége $1 - 0{,}5787 = 0{,}4213$.

b) Ez azt jelenti, hogy az első kettő nem hatos, míg a harmadik a hatos, tehát az esély $\frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}1157$.

c) Ezt már kiszámoltuk az a) részben, ha nem dob az első három esetben hatost, annak az esélye 0,5787, azaz ekkora eséllyel nem kerül játékba Éva.

2812. Annak a valószínűsége, hogy elsőre hatost dobunk: $\frac{1}{6}$. Annak a valószínűsége, hogy először a 4. dobás lesz hatos (a 2810. feladat gondolatmenetét felhasználva): $\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}$. Mivel $\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}<\frac{1}{6}$, ezért Borinak van igaza.

2813. a) Jelöljük A_k-val azt az eseményt, hogy a k-adik dobásnál kapjuk az első hatost.

$$P(A_1)=\frac{1}{6},\ P(A_2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6},\ P(A_3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5^2}{6^3},\ \ldots\ P(A_k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}.$$

(Felhasználtuk, hogy a hatos dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$, a nem hatos dobás valószínűsége $\frac{5}{6}$ és a dobások egymástól függetlenek.)

$\frac{5}{6}<1$ így $P(A_1)>P(A_2)>\ldots>P(A_{100})$, tehát a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy már elsőre hatost dobunk, ezért nem „véletlen", hogy a diák is ezt kapta.

b) Igen, a leírt számok között szerepelhet a 21-es, (azaz előfordulhat, hogy huszonegyedikre dob először hatost), ennek valószínűsége: $P(A_{21})=\frac{5^{20}}{6^{21}}\approx 0,0043$.

2814. a) Az elemi események száma: 6^3. Az A csapat rúg gólt, az (1; 1; 1), (3; 3; 3) és az (5; 5; 5) dobásnál, B pedig a (2; 2; 2), (4; 4; 4) és a (6; 6; 6) dobásnál, így annak a valószínűsége, hogy első dobásra gól születik: $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$.

b) Annak a valószínűsége, hogy a három kockán lévő pontok száma ne legyen azonos, azaz, hogy Lajcsi ne dobjon gólt: $\frac{35}{36}$.

Annak a valószínűsége, hogy a mérkőzés gól nélküli döntetlennel végződik:

$$p_0=\left(\frac{35}{36}\right)^{90}\approx 0,0792.$$

Annak a valószínűsége, hogy az első dobás gólt eredményez és a többi 89 dobás pedig nem: $\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{89}$. A mérkőzés alatt egy gól esik, ha csak az első vagy csak a második vagy csak a harmadik vagy ..., csak a 90. dobás esetén lesz ugyanaz a három szám felül. Ezért annak a valószínűsége, hogy a 90 perc alatt egy gól születik: $p_1=90\cdot\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{89}\approx 0,2037$.

Annak a valószínűsége, hogy az első két dobás gólt eredményez, a többi pedig nem: $\left(\frac{1}{36}\right)^2\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{88}$. A 90 dobás közül a két sikeres (gólt eredményező) dobás $\binom{90}{2}$-féleképpen választható ki. Annak a valószínűsége, hogy két gólos lesz a meccs: $p_2=\binom{90}{2}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^2\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{88}\approx 0,2590$.

Hasonlóan annak a valószínűsége, hogy a mérkőzés folyamán 3, 4, ..., n $(0\le n\le 90)$ gól esik:

$$p_3=\binom{90}{3}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^3\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{87}\approx 0,2171;$$

$$p_4=\binom{90}{4}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^4\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{86}\approx 0,1349;$$

$$\vdots$$

$$p_n=\binom{90}{n}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^n\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{90-n}.$$

Mindegyik esetben ki tudjuk számolni a keresett értékeket. Vegyük észre, hogy $p_2>p_3>p_4$. Érdemes megvizsgálni, igaz-e, hogy a gólok számának növelésével a bekövetkezések valószínűsége csökken (2 góltól kezdve).

Hasonlítsuk össze pl. p_3-at és p_4-et!

$$p_3=\frac{90\cdot 89\cdot 88}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{35^{87}}{36^{90}} \qquad p_4=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{35^{86}}{36^{90}};$$

a számlálók, illetve a nevezők azonos tényezőivel osztva kapjuk:

$$35 \quad > \quad \frac{87}{4}\ (*),$$

s így $p_3>p_4$.

n értékének növelésekor $(*)$ egyenlőtlenség bal oldala nem változik, a jobb oldali tört értéke viszont csökken, hiszen számlálója csökken, ugyanakkor nevezője nő. Tehát annak a valószínűsége a legnagyobb, hogy Lajcsi mérkőzésén két gól születik.

2815.

A dobott számok szorzata	Lehetőségek	Számuk
1	1×1	1
2	$1\times 2, 2\times 1$	2
3	$1\times 3, 3\times 1$	2
4	$1\times 4, 2\times 2, 4\times 1$	3
5	5×1	1
6	$2\times 3, 3\times 2, 6\times 1$	3
8	$2\times 4, 4\times 2$	2
9	3×3	1
10	5×2	1
12	$3\times 4, 4\times 3, 6\times 2$	3
15	5×3	1
16	4×4	1
18	6×3	1
20	5×4	1
24	6×4	1
összesen		24

A táblázatból

a) $P(\text{a szorzat páros}) = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$

b) $P(\text{a szorzat 15-nél nagyobb}) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$.

Második megoldás:

Vegyünk egy 1×1-es négyzetet! Az egyik oldalát osszuk 4 egyenlő részre! Az osztópontokon keresztül húzzunk párhuzamosokat az oldalakkal! A kapott részeket megfeleltetjük a tetraéderen levő számok esélyeinek. Hasonlóan a szomszédos oldalt osszuk hat egyenlő részre! A keletkező 24 téglalapba írjuk be a megfelelő szorzatokat! Majd válasszuk ki az a) és a b) kérdésnek megfelelő téglalapokat! Ezek számát $\dfrac{1}{24}$-del szorozva kapjuk a megoldásokat (vagy másképpen: a kis téglalapok területének összegét elosztva az egész négyzet területével, megkapjuk a keresett valószínűségeket).

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16
5	5	10	15	20
6	6	12	18	24

Megjegyzés:

Az a) feladat megoldható így is:

A dobott számok szorzata páros, ha vagy a kockával dobunk páros számot és a tetraéderrel bármit, vagy a kockával páratlant és a tetraéderrel párost. Ezért a jó esetek száma: $3\cdot 4 + 3\cdot 2 = 18$, az összes eset száma: $6\cdot 4 = 24$, a keresett valószínűség: $\dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$.

2816. Annak a valószínűsége, hogy az érmével fejet, a kockával 6-ost dobunk: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$.

Annak valószínűsége, hogy egy szabályos dobókockával kétszer dobva nem lesz hatos: $\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{25}{36}$.

Annak valószínűsége tehát, hogy az érmével írást, utána a kockával kétszer dobva (legalább egy) hatost dobunk: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{36} = \dfrac{11}{72}$.

A leírt kísérletben tehát $\dfrac{1}{12} + \dfrac{11}{72} = \dfrac{17}{72}$ (kb. 23,6%) a hatos dobásának valószínűsége.

2817. a) A fej vagy írás dobásának valószínűsége egyaránt $\dfrac{1}{2}$. Tehát ekkora valószínűséggel dobunk egyik, illetve másik kockával. Az első kockával $\dfrac{2}{6}$ valószínűséggel dobunk pirosat, a másodikkal $\dfrac{3}{6}$ valószínűséggel. A pirosat dobás teljes valószínűsége így $\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{12} = 0,41\dot{6}$.

b) Keressük tehát az „érmén fej volt; feltéve, hogy pirosat dobtunk a kockával", az rövidítve: $P(\text{fej}\,|\,\text{piros})$ feltételes valószínűséget. A definíció szerint ez $\dfrac{P(\text{fej}\cdot\text{piros})}{P(\text{piros})}$. A számlálót átírjuk az ellenkező sorrendű feltételes valószínűséggel, a nevezőt pedig a teljes valószínűség tételével:

$$\frac{P(\text{piros}\,|\,\text{fej})\cdot P(\text{fej})}{P(\text{piros}\,|\,\text{fej})\cdot P(\text{fej}) + P(\text{piros}\,|\,\text{írás})\cdot P(\text{írás})}.$$

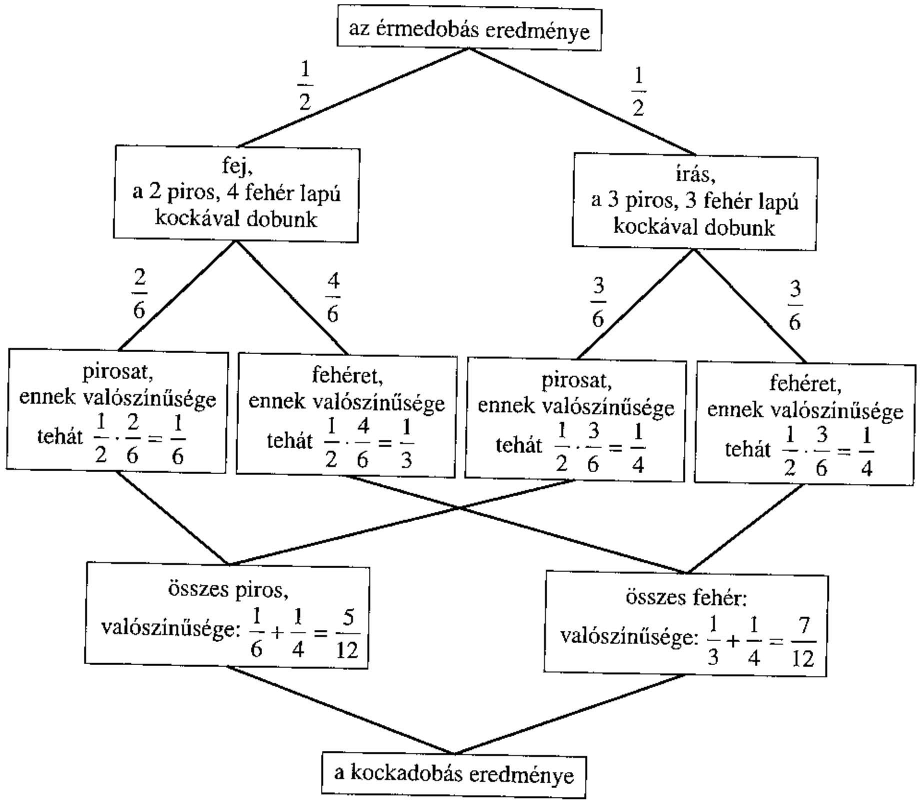
A nevezőben az a)-beli eredmény szerepel, a számlálóban annak első részlete, így a kérdéses valószínűség: $\dfrac{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{2}{5} = 0,4.$

Megjegyzés:

Az itt alkalmazott gondolatmenetet nevezik Bayes-tételnek.

Másik megoldás:

Mindkét kérdésre választ adhatunk egy ún. kettős fagráf felrajzolásával. Ez végigköveti a lehetséges kimeneteleket, előbb egyik szempont szerint elágaztatva, majd másik szempont szerint összegyűjtve azokat. Az így felírt valószínűségek birtokában az ellenkező irányból végigkövetve a lehetőségeket mindenféle feltételes valószínűséget meg tudunk határozni. A téglalapokban az egyes kimenetelek szerepelnek, a hozzájuk vezető szakaszokon pedig a megfelelő valószínűségek.



Az a) kérdésre egyszerű leolvasás a válasz: a piros eredmény valószínűsége $\frac{5}{12}$.
A b) kérdéshez pedig „alulról felfelé" kell követni a lehetőségeket: az összes pirosból annak valószínűsége, hogy azt a 2 piros, 4 fehér lapú kockával dobtuk (ekkor volt az érmén fej): $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$. (Általánosan is, az alsó két „szint" között futó élekre sorban felírhatjuk a valószínűségeket, ha az eredményeket „alulról felfelé" követjük végig. A kockadobás eredménye $\frac{5}{12}$ valószínűséggel piros, $\frac{7}{12}$ valószínűséggel fehér. A pirosból az $\frac{1}{6}$, illetve $\frac{1}{4}$ valószínűségű „részeredményekhez" ezért

$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$, illetve $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$ valószínűséggel vezet él, a fehérből pedig hasonlóan $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$, illetve $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$ valószínűséggel.)

2818. a) Kockával 1, 2, 3, 4 valamelyikét dobni $\frac{4}{6}$ valószínűséggel, 5-öt vagy 6-ot dobni $\frac{2}{6}$ valószínűséggel lehet. Tehát ekkora valószínűséggel húzunk egyik, illetve másik dobozból. Az első dobozból $\frac{3}{8}$, a másodikból $\frac{3}{5}$ valószínűséggel húzunk piros golyót. A piros golyó húzásának teljes valószínűsége tehát
$\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}=\frac{12}{48}+\frac{6}{30}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}=0,45.$

b) Az előző megoldás b) részének gondolatmenetét követve
$\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}=0,\dot{5}$ a kérdéses valószínűség.
(Illetve ugyanúgy felrajzolható a kettős fagráf.)

2819. a) A kockával az 1, 2, …, 6 eredmények dobásának valószínűsége egyaránt $\frac{1}{6}$. Az érmével 3 fejet dobni 1, illetve 2 dobásból lehetetlen (azaz 0 valószínűségű); 3 dobásból $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ valószínűségű (tulajdonképpen $\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3$); 4, 5, illetve 6 dobásból pedig rendre $\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$, $\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$, $\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64}$ valószínűségű.

Megjegyzés:
Itt a binomiális eloszlásra láthatunk példát, a p valószínűségű esemény n kísérletből k-szor következik be, $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ valószínűséggel.
Most $p = 1 - p = \frac{1}{2}$.

Ekkor a 3 fej dobásának teljes valószínűsége

$$0\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{16}\cdot\frac{1}{6}+\frac{10}{32}\cdot\frac{1}{6}+\frac{20}{64}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{16}+\frac{5}{16}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{16}{16}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}=0,1\dot{6}.$$

b) Ez természetesen lehetetlen, tehát a valószínűsége 0.

c) A 2817. megoldás b) részének gondolatmenetét követve

$$\frac{\frac{4}{16}\cdot\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{16}+\frac{5}{16}\right)\cdot\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{4}=0,25$$ a kérdéses valószínűség.

(Illetve ugyanúgy felrajzolható a kettős fagráf.)

2820. a) Mindegyik írás dobásának valószínűsége $\frac{1}{2}$, 20-szor egymás utáni dobásának pedig (mivel független eseményekről van szó) $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=\frac{1}{1\,048\,576}\approx 9,54\cdot 10^{-7}$.

b) Szabályos érmével $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ valószínűséggel, a hamissal viszont 1 valószínűséggel dobunk 20 írást egymás után. Az 1 000 000 érme közül $\frac{999\,999}{1\,000\,000}$ valószínűséggel választunk szabályos érmét a dobáshoz, és $\frac{1}{1\,000\,000}$ valószínűséggel akad a hamis a kezünkbe. Ezért a 20 írás egymás utáni dobásának teljes valószínűsége

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\cdot\frac{999\,999}{1\,000\,000}+1\cdot\frac{1}{1\,000\,000}\approx 1,95\cdot 10^{-6}.$$

c) A 2817. megoldás b) részének gondolatmenetét követve

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\cdot\frac{999\,999}{1\,000\,000}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\cdot\frac{999\,999}{1\,000\,000}+1\cdot\frac{1}{1\,000\,000}}\approx\frac{9,54\cdot 10^{-7}}{1,95\cdot 10^{-6}}\approx 0,488$$ a kérdéses valószínűség.

(Illetve ugyanúgy felrajzolható a kettős fagráf.)

2821. a) Egyformán $\frac{5}{10}$ a valószínűsége annak, hogy piros, illetve hogy fehér golyó esett ki.

Az első esetben (4 piros és 5 fehér golyó közül) $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ valószínűséggel húzunk 2 pirosat; a második esetben (5 piros és 4 fehér közül) $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$ valószínűséggel. A 2 piros golyó húzásának teljes valószínűsége tehát

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{10}+\frac{5}{18}\cdot\frac{5}{10}=\frac{480}{180}=\frac{2}{9}=0,\dot{2}.$$

b) Egyaránt $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$ a valószínűsége annak, hogy a dobozból 2 piros, illetve hogy 2 fehér golyó; és $\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$ a valószínűsége annak, hogy 1 piros és 1 fehér golyó esett ki. Ha 2 piros golyó hiányzik, a maradék 3 piros és 5 fehér közül $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$ valószínűséggel húzunk 2 pirosat. Ha 1 piros és 1 fehér hiányzik, a maradék 4 piros és 4 fehér közül $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{6}{28}$; ha pedig 2 fehér hiányzik, a maradék 5 piros és 3 fehér közül $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}$ valószínűséggel húzunk 2 pi-

rosat. A 2 piros golyó húzásának teljes valószínűsége tehát
$\frac{3}{28}\cdot\frac{2}{9}+\frac{6}{28}\cdot\frac{5}{9}+\frac{10}{28}\cdot\frac{2}{9}=\frac{56}{252}=\frac{2}{9}=0,\dot{2}.$

Megjegyzés:
Ezt összevetve az a)-beli eredménnyel az az igen érdekes megfigyelés adódik, hogy a dobozból 2 piros golyó húzásának a valószínűsége egyforma akkor, ha a 10 golyó közül 1 vagy 2 hiányzik.

c) A 2817. megoldás b) részének gondolatmenetét követve
$$\frac{\frac{10}{28}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{3}{28}\cdot\frac{2}{9}+\frac{6}{28}\cdot\frac{5}{9}+\frac{10}{28}\cdot\frac{2}{9}}=\frac{5}{14}=0,3\overline{571428}$$ a kérdéses valószínűség.
(Illetve ugyanúgy felrajzolható a kettős fagráf.)

Megjegyzés:
Annak valószínűsége tehát – minden vizsgálat előtt, egyszerű kombinatorikus meggondolással –, hogy két fehér golyó esett ki, $\frac{2}{9}$. Ha azonban végrehajtunk egy „mérést", elvégzünk egy kísérletet, és abban 2 piros golyót húzunk ki a dobozból, akkor már jócskán nagyobb, majdnem kétszer ekkora ugyanez a valószínűség. Már egyetlen vizsgálat is jelentősen befolyásolhatja tehát a pusztán elméleti véletlenszerűségre alapozott feltevésünket. Az ilyesfajta elemzések vezetnek a ma terjedőben lévő újfajta felfogáshoz, az ún. Bayes-statisztikához.)

2822. Ha a mackók egyformák, egy dobozba egy tehető: az összes eset $\binom{3}{2}=3$; a „kedvező", ha az első doboz üresen marad, vagyis mindkét mackó a másik két dobozban van: $\binom{2}{2}=1$. Ezek hányadosa $\frac{1}{3}$. Ha a mackók különbözők, de továbbra is csak egy tehető egy dobozba: nem mindegy, melyik mackó melyik dobozba kerül, így az összes és a kedvező esetek száma is az előzőnek 2-szerese. Ettől persze a hányados marad $\frac{1}{3}$. Ha a különböző mackókból több is tehető egy dobozba: ismétléses variáció, az összes eset $3^2=9$, a kedvező $2^2=4$, a valószínűség tehát $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.
Ha az egyforma mackókból tehető több egy dobozba: ismétléses kombináció, az összes eset $\binom{3+2-1}{2}=\binom{4}{2}=6$, a kedvező $\binom{(3-1)+2-1}{2}=\binom{3}{2}=3$, a hányasuk: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Megjegyzés:
A feladat általánosítható n dobozra és k ($\le n$) mackóra, ekkor sorban $\frac{n-k}{n}$, $\frac{n-k}{n}$, $\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$, $\frac{n-1}{n+k-1}$ az eredmény.

2823. Az ilyen feltételű geometriai esetekben a $\frac{\text{„kedvező terület"}}{\text{„összes terület"}}$ hányados adja a valószínűséget, tehát az a), b), c) esetben is $\frac{1}{2}$ a valószínűség. A d) esetben az A és B esemény által is lefedett terület a négyzet területének $\frac{1}{4}$-e, így ekkor igaz, hogy $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Viszont az A és C esemény által is lefedett terület csak a négyzet területének $\frac{1}{8}$-a, így ekkor a válasz nemleges, hiszen $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ne\frac{1}{8}$. (Vagyis az A és B események függetlenek, míg A és C nem azok.)

2824. Az 1 fej „másképpen" 2 írást jelent. Ennek a valószínűsége pedig (szimmetria miatt) megegyezik a 2 fej dobásának valószínűségével.
(A közös érték: $\frac{3}{8}$.)

2825. Ha a hét napjait véletlenszerűen összekevernénk, akkor 7!-féle különböző sorrend alakulhatna ki.

a) Azok a sorrendek a kedvezőek, amelyek hétfővel kezdődnek és vasárnappal fejeződnek be. Ezek száma: 5!.
A keresett valószínűség: $\frac{5!}{7!}=\frac{1}{42}$.

b) Azok a sorrendek a kedvezőek, amikor szerda és csütörtök egymás mellé kerül. Az ilyen sorrendek száma: $2\cdot 6!$, mivel lehet szerda, csütörtök vagy csütörtök, szerda is a sorrend.
A keresett valószínűség: $\frac{2\cdot 6!}{7!}=\frac{2}{7}$.

2826. A fekete bástya bármely elhelyezése esetén a fehér király elhelyezésére összesen 63 lehetőségünk van. A 63 lehetőség közül 49 esetben helyezhetjük a fehér királyt olyan mezőre, amikor nem lesz sakkban (azaz olyan mezőre helyeztük, amely nincs egy sorban vagy oszlopban a bástyával).

Tehát a keresett valószínűség: $\frac{49}{63}$.

2827. Az osztály létszáma 30, közülük 4-et $\binom{30}{4}$-féleképpen sorsolhatunk ki.

a) Azok az esetek a kedvezők, amikor 2 fiút és 2 leányt sorsolunk ki.

Ezek száma: $\binom{15}{2}\cdot\binom{15}{2}$.

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{15}{2}\cdot\binom{15}{2}}{\binom{30}{4}}\approx 0,402$.

b) Azok az esetek a kedvezők, amikor 4 leányt vagy 3 leányt és 1 fiút sorsolunk ki.

Az ilyen esetek száma: $\binom{15}{4}\cdot\binom{15}{0}+\binom{15}{3}\cdot\binom{15}{1}$.

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{15}{4}\cdot\binom{15}{0}+\binom{15}{3}\cdot\binom{15}{1}}{\binom{30}{4}}=\frac{26}{87}\approx 0,299$.

Megjegyzés:
Az a) feladat megoldásának ismeretében jóval kevesebb számolással is megkaphattuk volna eredményünket. Szimmetria okok miatt ugyanis a több lány kisorsolásának ugyanakkora a valószínűsége, mint a több fiúé. E két egymást kizáró esemény valószínűségének összege kb. 1 – 0,4 = 0,6, ezért a több lány (illetve a több fiú) kisorsolásának valószínűsége kb. 0,30.

2828. Az elemi események száma $4!\cdot 4^4$. Ugyanis a négy (különböző színű) betű 4! = 24-féleképpen rakható sorba, és mindegyik betű 4 különböző állásban szerepelhet (A ᗆ ∀ ᗉ B ꓭ ꓭ ᗺ). Az összes (egyenlően valószínű) elemi esemény száma ezért $24\cdot 4^4 = 6144$. Ezek közül négy esetben olvasható ki a BABA szó úgy, hogy mindegyik betűje helyesen áll (a különböző színű A, illetve B betűk egymás közti cseréje kedvező eseményből újabb kedvező eseményhez vezet). A kérdezett valószínűség tehát $\frac{4}{6144}\approx 0,000\,651$.

Megjegyzés:
Fenti okoskodásunk abban az esetben érvényes, amelyben a kockákon kirakott betűk sorrendjét mindig ugyanabban a síkban (pl. a vízszintes síkban) vizsgáljuk. Ekkor a feladat négy betűkártya helyes sorrendbe rakásának problémájával azonos.

2829. A 4 betű 4! = 24-féleképpen rakható sorba, de az A és a B betű mindegyik helyen 4-4, a H és az I pedig mindegyik helyen 2-2 állásban („függőlegesen” vagy „vízszintesen”) szerepelhet. Az összes sorba rendezések száma tehát $4!\cdot 4^2\cdot 2^2 = 1536$. Ezek közül egy esetben olvasható ki a HIBA szó úgy, hogy mindegyik betűje helyesen áll. A kérdezett valószínűség tehát $\frac{4}{6144}\approx 0,000\,651$.

Megjegyzés:
A H és az I esetén is mondhattuk volna, hogy 4-4 különböző állása lehet minden egyes helyen. Így az összes lehetséges, egyenlően valószínű sorbarendezések száma a fenti megoldásban megadottnak 4-szerese, azaz 6144 lenne. A kedvező esetek száma azonban szintén megváltozna (4-re), hiszen mind a H, mind az I betű 2-2 függőleges helyzete is helyes állást jelentene a kiolvasáskor. A HIBA helyes kirakásának valószínűsége tehát ezzel a gondolatmenettel számolva is $\frac{1}{1536}$-nak adódik (csupán más eseményeket választottunk elemi eseményeknek).

2830. a) $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

b) Ha a jó tojásokat és a rossz tojásokat nem különböztetjük meg egymástól, akkor egyetlen kedvező esetünk van: először a négy jót törjük fel, azután a két rosszat. Ekkor az összes eset számát ismétléses permutációval számíthatjuk ki:
$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$.

Tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{15}$.

2831. a) 0,5.

b) $0,5^5=\frac{1}{32}=0,03125$.

c) $\binom{5}{2}\cdot 0,5^5=0,3125$.

(Ugyanekkora a valószínűsége a 2 lány, 3 fiú esetnek is.)

2832. A valószínűségek eloszlása a 0-ra szimmetrikus. Pl. 3€ nyereség valószínűsége ugyanannyi, mint 3€ veszteségé: $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ (ugyanis a nyereséghez az kell, hogy a kék színű dobókockán 3-mal nagyobb legyen a pontok száma, mint a sárgán; ez pedig éppen 3-féleképpen valósulhat meg: $6-3$, $5-2$ vagy $4-1$). Hasonló okoskodással kapjuk a táblázat mezőibe írandó valószínűségeket.

nyeremény	valószínűsége	nyeremény	valószínűsége
5	$\frac{1}{36}$	-5	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{2}{36}$	-4	$\frac{2}{36}$
3	$\frac{3}{36}$	-3	$\frac{3}{36}$
2	$\frac{4}{36}$	-2	$\frac{4}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	-1	$\frac{5}{36}$
0	$\frac{6}{36}$		

2833. $\frac{\binom{10}{4}\binom{80}{1}}{\binom{90}{5}}\approx 0{,}000\,382.$

2834. a) $\frac{1}{3}$;

b) Zita nyer, ha:

– elsőre zöld golyót húznak; ennek valószínűsége $\frac{1}{5}$;

– elsőre fekete, másodikra zöld golyót húznak; ennek valószínűsége $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$;

– az első két kihúzott golyó fekete, a harmadik zöld; ennek valószínűsége $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$.

Minden más esetben nem Zita nyeri a fődíjat.

Zita nyerési esélye tehát $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, azaz változatlan maradt (ahogyan a másik két lányé is).

Megjegyzés:
Ezt józan okoskodással is megkaphatjuk, hiszen addig húzunk, amíg zöld, piros vagy kék eredmény nem lesz, aminek az esélye egyforma, hiszen mindegyikből 1 van. A feketék száma csak „időhúzás”, az esélyeket nem befolyásolja.

2835. a) $P(V_1)=P(V_2)=\frac{1}{2}$; $P(V_3)=P(V_5)=\frac{1}{4}$; $P(V_4)=\frac{1}{2}$;

$P(V_6)=P(V_9)=\frac{1}{8}$; $P(V_7)=P(V_8)=\frac{3}{8}$.

b) A V_1, V_3 virágok egymás utáni választásának valószínűsége $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. A V_3 virág után ismét $\frac{1}{2}$ a V_7 virág választásának valószínűsége, tehát a V_1, V_2, V_3 virágokból álló csokor valószínűsége $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

Megjegyzés:
Így is okoskodhatunk: összesen 8 különböző módon (8 különböző utat bejárva) választhatja ki Piroska a három virágból álló csokrot; mindegyik csokor választása egyformán valószínű, tehát a V_1, V_2, V_3 virágokból álló csokor valószínűsége $\frac{1}{8}$.

2836. a) 1. sor $P(S_1)=P(S_2)=\frac{1}{2}$;

2. sor $P(S_3)=P(S_5)=\frac{1}{4}$; $P(S_4)=\frac{1}{2}$;

3. sor $P(S_6)=P(S_9)=\frac{1}{8}$; $P(S_7)=P(S_8)=\frac{3}{8}$;

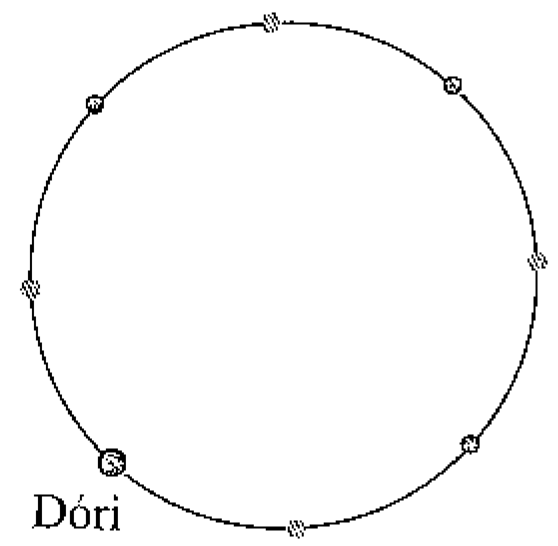
4. sor $P(S_{10})=P(S_{14})=\frac{1}{16}$; $P(S_{11})=P(S_{13})=\frac{4}{16}$; $P(S_{12})=\frac{6}{16}$.

b) A valószínűség és a relatív gyakoriság viszonya miatt rendre kb.
$\frac{1}{16}\cdot 1000\approx$ 62-63-szor, $\frac{4}{16}\cdot 1000=$ 250-szer, $\frac{6}{16}\cdot 1000=$ 375-ször,
$\frac{4}{16}\cdot 1000=$ 250-szer, $\frac{1}{16}\cdot 1000\approx$ 62-63-szor várhatók a kérdezett események.

2837. Az összes esetek száma 8! – ennyiféleképpen ülhet le 8 ember egymás mellé.
A kedvező esetekben Rozi balján ül Sári – elég megszámolni, hogy 7 ember hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett, mert Rozi leültetésével egyértelmű Sári helye is. Ezért a kedvező esetek száma: 7!, a keresett valószínűség: $\frac{7!}{8!}=\frac{1}{8}$.

Másik megoldás:
Ültessük le a többieket! Ez 6!-féleképpen lehetséges. Roziék mindegyik esetben 7 helyet választhatnak: . • . • . • . • . • . • . , így a kedvező esetek száma $7 \cdot 6! = 7!$.

2838. A kerek asztalnál az egyik személy helyét, pl.: Dóriét rögzítjük, s ehhez képest tekintjük a különböző sorrendeket. Két ülésrendet akkor tekintünk különbözőnek, ha a társaságnak van legalább egy olyan tagja, akinek vagy a bal oldali, vagy a jobb oldali szomszédja a két elrendezésben különböző. Ekkor az összes elrendezési lehetőség száma 7!.



Először leültetjük Dóri után a többi lányt is. Ők 3!-féleképpen ültethetők le. Ez után a fiúk ülhetnek le, mégpedig úgy, hogy két lány közé egy fiú üljön. A fiúk 4!-féleképpen ülhetnek, ezért a kedvező esetek száma 3!4!.
A keresett valószínűség: $\dfrac{3! \cdot 4!}{7!} = \dfrac{1}{35}$.

2839. a) Ha nincs két olyan tanuló, aki ugyanabban a hónapban született volna, akkor legfeljebb 12 tanuló járna az osztályba, mert ha ők különböző hónapban is születtek, a 13. tanuló már biztosan valamelyikükkel egy hónapban született. 25 tanuló esetén tehát biztosan van legalább két tanuló, akik egy hónapban születtek, $P = 1$. (Sőt 24-nél több tanuló esetén biztosan van olyan hónap, amelyikben legalább 3 tanuló ünnepli a születésnapját.)

b) A 25 tanuló mindegyike az 52 hét közül bármelyiken születhetett. Az összes elemi esetek száma: 52^{25}. Számoljuk meg a kedvezőtlen eseteket! Hány esetben születtek különböző heteken? Az 52 hét közül a 25-öt $\dbinom{52}{25}$-féleképpen választhatjuk ki.
A gyerekekhez e 25 hetet 25!-féleképpen rendelhetjük hozzá. Ezért a kedvezőtlen esetek száma $25! \cdot \dbinom{52}{25}$. A keresett valószínűség: $1 - \dfrac{25! \cdot \dbinom{52}{25}}{52^{25}}$ $(\approx 0{,}999)$,
azaz „majdnem” biztos, hogy akad két, egyazon héten született tanuló.

c) Hasonló gondolatmenettel adódik: $1 - \dfrac{25! \cdot \dbinom{365}{25}}{365^{25}}$ $(\approx 0{,}569)$, azaz kicsit több

mint $\dfrac{1}{2}$. Olyan évfolyamot néztünk, akik nem szökőévben születtek.

A szökőévben születteknél ez a valószínűség: $1 - \dfrac{25! \cdot \dbinom{366}{25}}{366^{25}}$ $(\approx 0{,}568)$ adódik.

2840. a) Az összes esetek száma $\dbinom{4}{2} = 6$; a kedvező eset, ha a két lány indul a versenyen – 1 eset. A keresett valószínűség: $\dfrac{1}{6}$.

b) Itt a kedvező eseteket megkapjuk, ha Anikó, Barna és Cili közül választunk ki két gyereket. Ezek száma: $\dbinom{3}{2} = 3$. Annak a valószínűsége, hogy Döme nem vesz részt a versenyen: 0,5.

Megjegyzés:
A feladat megoldható úgy is, hogy felsoroljuk az összes esetet, majd kiválasztjuk a számunkra érdekeseket, s megállapítjuk a keresett valószínűségeket. Itt: az összes eset: <u>*AB*</u>, <u>*AC*</u>, *AD*, <u>*BC*</u>, *BD*, *CD* – ezek egyenlő valószínűséggel következhetnek be. Innen a két kérdésre adandó válasz kiolvasható.

2841. Annyiféle ötjegyű számot kaphatunk, ahányféleképpen sorba tehetjük az öt különböző számot (ahány permutációja van ezeknek): 5!

a) A kapott ötjegyű szám páros, ha az utolsó számjegye páros, azaz 4-re vagy 8-ra végződik a szám. Az első 4 helyre 4!-féleképpen írhatjuk a számokat, ezért a kedvező esetek száma $2 \cdot 4!$, annak a valószínűsége, hogy a kapott ötjegyű szám páros $P(A) = \dfrac{2 \cdot 4!}{5!} = \dfrac{2}{5}$.

b) $1 + 3 + 4 + 8 + 9 = 25$ nem osztható 3-mal, így egyik ötjegyű szám sem lesz 3-mal osztható, $P(B) = 0$.

c) Két megfelelő végződés lehet 84, illetve 48. A 4-gyel osztható ötjegyű számok száma: $2 \cdot 3!$; $P(C) = \dfrac{2 \cdot 3!}{5!} = \dfrac{1}{10}$.

2842. A 7 számjegy 7!-féle sorrendbe állítható. A középső számjegy a 4, a többi tetszőleges sorrendben húzható ki, tehát 6!-féleképpen, ezért a kedvező esetek száma 6!. Annak a valószínűsége, hogy a hétjegyű szám negyedik számjegye négyes: $\dfrac{6!}{7!} = \dfrac{1}{7}$.

Ez egyszerűbben is megkapható, hiszen a 4. helyre hétféleképpen választható számjegy, és ebből 1 kedvező, tehát az esély $\frac{1}{7}$.

2843. Az adott számjegyekből képezhető hétjegyű számok száma 7!. 25-tel osztható egy egész szám, ha a végződése a végén álló kétjegyű szám: 00, 25, 50 vagy 75, itt 25 vagy 75. Mindkettő 5!-féleképpen valósulhat meg – ennyi ötjegyű szám képezhető a maradék 5 számjegyből, mivel mindegyiket csak egyszer használhatjuk fel. Így a kedvező esetek száma: $2 \cdot 5!$, és $\frac{2 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{21}$ annak a valószínűsége, hogy a kapott hétjegyű szám 25-tel osztható.

2844. A cédulákat 5!-féleképpen tehetjük egymás mellé – az összes esetek száma 5! = 120. Megszámoljuk, hány esetben kaphatunk ötjegyű páratlan számot. Az egyesek helyén páratlan számnak kell állnia, ezért itt csak az 1 vagy a 3 állhat. Mivel a tízezresek helyén nem állhat 0, ezért ide csak (5 – 2 =) 3 szám közül választhatunk, a többi 3 helyre rendre a „maradék" 3, 2, illetve 1 szám közül választhatunk.
Így az adott számjegyekből alkotható ötjegyű páratlan számok száma $2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$.
A keresett valószínűség $\frac{36}{120} = 0,3$.

2845. Az ötös lottón a 3-as találat valószínűsége:

$$\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{10\cdot\frac{85\cdot 84}{2}}{\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5!}} = \frac{600\cdot 85\cdot 84}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86} = \frac{428400}{527391216} \approx 0,0008123.$$

Kati jár közelebb a „valósághoz".

2846. a) A 35 számból 7-et $\binom{35}{7}$-féleképpen lehet kihúzni. Ezért egy húzásnál a hét találat valószínűsége $\frac{1}{\binom{35}{7}}$. Mivel kétszer húznak ki 7 számot, az általunk bejelölt hét számot akár az első, akár a második húzásnál kihúzhatják.
Mindkét esetben a hét találat esélye: $\frac{1}{\binom{35}{7}}$. A két húzás miatt tehát majdnem kétszeresére nő annak az esélye, hogy telitalálatos a szelvényünk. A $\frac{2}{\binom{35}{7}}$ kifejezésben kétszer vesszük figyelembe azt az eseményt, hogy mindkétszer a mi számainkat húzzák ki. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második húzásnál is hetesünk van: $\frac{1}{\binom{35}{7}^2}$.

Annak a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel hét találatot lehet elérni:

$$\frac{2}{\binom{35}{7}} - \frac{1}{\binom{35}{7}^2} \approx 2,97\cdot 10^{-7} - 2,21\cdot 10^{-14} \approx 2,97\cdot 10^{-7}.$$

b) Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy az első húzásnál 4 találatot érünk el, B-vel azt az eseményt, hogy a második húzásnál 4 találatot érünk el. Annak a valószínűségét keressük, hogy valamelyik húzásnál négyesünk van; jelöléssel: $P(A+B)$-t kell meghatároznunk.

Egy húzásnál a kedvező esetek száma: $\binom{7}{4}\cdot\binom{28}{3}$, mert a 7 kihúzott számból 4-et $\binom{7}{4}$-féleképpen, a másik 3 számot a maradék 28 számból $\binom{28}{3}$-féleképpen lehet kiválasztani. Az összes eset száma: $\binom{35}{7}$.

$$\text{Ezért } P(A) = P(B) = \frac{\binom{7}{4}\cdot\binom{28}{3}}{\binom{35}{7}},\quad P(AB) = \left(\frac{\binom{7}{4}\cdot\binom{28}{3}}{\binom{35}{7}}\right)^2.$$

Így annak a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel játszva négy találatot érünk el

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{28}{3}}{\binom{35}{7}} - \left(\frac{\binom{7}{4}\cdot\binom{28}{3}}{\binom{35}{7}}\right)^2 \approx$$

$$\approx 0,034102 - 0,000291 \approx 0,0338.$$

c) Előfordulhat. Az első húzás bárhogy végződhet, a második csak egyféleképpen $\Rightarrow$ a kedvező esetek száma: 1. Annak a valószínűsége, hogy a második húzás is ugyanazt a 7 számot eredményezi: $\frac{1}{\binom{35}{7}} \approx 1,49\cdot 10^{-7}$.

2847. a) A piros alsón kívül a magyar kártyában 3 alsó és 7 piros lap van. A lehetséges „jó esetek" száma, azaz, hogy alsót vagy pirosat húzunk (a piros alsón kívül) 10. Összesen 31 kártya közül választhatunk, mert a piros alsót kitettük. Így annak a valószínűsége, hogy ebből a csomagból húzva pirosat vagy alsót húzunk: $\frac{10}{31}$.

b) Teljes csomag esetén a lehetséges „jó esetek" száma, azaz, hogy alsót vagy pirosat húzunk 11 db (3 alsó, 7 piros és a piros alsó). Összesen 32 kártya közül választhatunk. Így annak a valószínűsége, hogy ebből a csomagból húzva pirosat vagy alsót húzunk: $\frac{11}{32}$.

2848. Egy családban 4 gyerek esetén a nemek megoszlása a következő lehet:
1) 4 fiú;
2) 3 fiú, 1 lány (LFFF; FLFF; FFLF; FFFL 4 eset);
3) 2 fiú, 2 lány (LLFF; LFLF; LFFL; FLLF; FLFL; FFLL 6 eset);
4) 1 fiú, 3 lány (FLLL; LFLL; LLFL; LLLF 4 eset);
5) 4 lány.
Így annak valószínűsége, hogy egy családban 4 gyerek születése esetén éppen kettő fiú (vagy éppen kettő lány) $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

Más gondolattal:

$$\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}.$$

2849. A 3 epres, 1-1 őszibarackos, almás, citromos és málnás (7 db) joghurtot $\frac{7!}{3!}=$ $=840$-féleképpen tudjuk egymás mellett elhelyezni. Ha a 3 epres joghurtot 1 elemnek tekintjük, azaz egymás mellett állnak, $5!=120$-féleképpen tudjuk a joghurtokat sorrendbe állítani. Így annak valószínűsége, hogy az elhelyezés során az epres joghurtok egymás mellé kerülnek: $\frac{120}{840}=\frac{1}{7}$.

2850. Számoljuk ki először annak a valószínűségét, amikor a kihúzott kesztyűk között nincs pár (ezt sokkal könnyebb), majd az eredményt vonjuk ki 1-ből. Annak a valószínűsége, hogy mind a 4 kesztyű különböző gyereké: $1\cdot\frac{22}{23}\cdot\frac{20}{22}\cdot\frac{18}{21}=0,745$, mert az elsőt akárhogy húzhatjuk, a másodikat 23 közül 22-féleképp húzhatjuk úgy, hogy ne egyezzen az előzővel, a harmadikat 22 közül választjuk, de már csak 20 olyan van, aminek a párját nem húztuk ki, majd pedig a maradék 21 közül 18-félét húzhatunk jól. Annak valószínűsége tehát, hogy van köztük pár, $1-0,745=0,255$.

2851. a) Ha mindkét szülő ++ homozigóta, akkor biztos, hogy a gyermekek is azok, tehát ekkor 1 eséllyel lesznek a gyerekek azonosak szüleikkel.

b) Ha mindkettő heterozigóta, akkor csak abban az esetben lesz a gyermek Rh^-, ha mindkét szülőtől az Rh^- gént örökli, azaz $\frac{1}{4}=0,25$ eséllyel. Azaz egy gyermek 0,75 eséllyel lesz Rh^+. Mindhárom gyermek – a függetlenséget feltételezve – $0,75^3=0,422$ eséllyel lesz Rh^+.

c) Ha az egyikük homozigóta, azaz ++, akkor tőle nem lehet mást örökölni, és a dominancia miatt ekkor a)-hoz hasonlóan ismét 1 valószínűséggel mindhárom gyermek Rh^+ lesz; igaz nem feltétlenül homozigóták, tehát az ő gyermekeik között felbukkanhat majd ismét Rh^-.

2852. a) Béla akkor nyer, ha 3-szor nyer vagy 2-szer. Az első eset $0,4^3$, a másik $3\cdot0,6\cdot0,4^2$ esélyű, hiszen András egyszer, Béla kétszer nyert, és András vagy az első vagy a második vagy a harmadik partit nyeri, azért a 3-as szorzó. A két esély összege: $0,064+0,288=0,352$, azaz majdnem egyharmad eséllyel nyerhet Béla.

b) Ez az előzőben számolt első esély, tehát 0,064.

2853. A legalább 2 túlélő helyett azt nézzük meg, hogy milyen eséllyel pusztul el mind, illetve marad csak 1. Ennek komplementere a keresett esély. Az első $0,6^6$, a második $6\cdot0,4\cdot0,6^5$ esélyű, együtt: 0,233. Tehát annak az esélye, hogy legalább két méhcsalád túlélő lesz: $1-0,233=0,767$, azaz több, mint háromnegyed.

2854. Ha feltesszük, hogy igazat állít a polgármester, akkor annak az esélye, hogy 20 véletlenszerűen kiválasztottból legfeljebb 9 támogatja: $\sum_{k=0}^{9}\binom{20}{k}\cdot0,6^k\cdot0,4^{20-k}$. Ezt grafikus kalkulátorral kiszámolva (zsebszámológéppel hosszabb, bár kiszámítható azzal is) kb. 0,1275. Azaz elég valószínűtlen esemény az ellentettjéhez képest, ami közel hétszer olyan valószínű, hogy több mint 9-nek kellene a polgármestert támogatnia, ha valóban igazat állít a polgármester.

2855. a) Az eddigi húzások két dologról győzhetnek meg minket: van a 100 golyó között fekete golyó, de nem „túl sok". Legvalószínűbbnek az tűnik, hogy 1 vagy 2 fekete golyó van az urnában. Ezért a 81. húzásra természetesen piros golyót várunk, hiszen a fekete húzásának valószínűségét 0,02 körülinek becsüljük.

b) Legjobb becslésnek azt tartjuk, amelyik mellett a legvalószínűbb, hogy a leírt esemény (a 80 húzásból egyszer volt fekete golyó) bekövetkezik.
1 fekete golyó esetén a fekete golyó húzásának valószínűsége 0,01, a pirosé 0,99. Annak a valószínűsége, hogy 80 húzásból pontosan egyszer húztunk feketét:
$\binom{80}{1}\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99^{79}\approx 0{,}362$ (azaz 36,2%).
2 fekete golyó esetén a fekete golyó húzásának valószínűsége 0,02, a pirosé 0,98. Annak a valószínűsége, hogy 80 húzásból pontosan egyszer húztunk feketét:
$\binom{80}{1}\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98^{79}\approx 0{,}324$ (azaz 32,4%).
Az 1 fekete és 99 piros golyó tehát jobb becslés, mint a 2 fekete és 98 piros.
A fekete golyók számának növelésével egyre kisebb lesz annak a valószínűsége, hogy 80-szor visszatevéssel húzva mindössze egyszer húzunk fekete golyót (pl. a 3 fekete golyó feltételezése esetén a bekövetkezett esemény valószínűsége:
$\binom{80}{1}\cdot 0{,}03\cdot 0{,}97^{79}\approx 0{,}216$ (azaz 21,6%),

4 fekete golyó feltételezése esetén: $\binom{80}{1}\cdot 0{,}04\cdot 0{,}96^{79}\approx 0{,}127$ (azaz 12,7%),

stb). A legjobb becslés tehát a 99 piros, 1 fekete golyó feltételezés.

Megjegyzés:
Fenti következtetésünk meglehetősen nyilvánvalónak tűnik, mégis hiányolható a szigorú bizonyítása, nevezetesen annak belátása, hogy az 1 fekete golyó feltételezése esetén legvalószínűbb a „80 húzásból egyszer volt fekete golyó" esemény bekövetkezése.
Ehhez elegendő bizonyítani, hogy ha $k\in\{1;2;3;\ldots;98\}$, akkor
$\binom{80}{1}\cdot\frac{k}{100}\cdot\left(1-\frac{k}{100}\right)^{79}>\binom{80}{1}\cdot\frac{k+1}{100}\cdot\left(1-\frac{k+1}{100}\right)^{79}$, azaz a fekete golyók számának növekedésével a bekövetkezett esemény (a 80 húzásból egyszer volt fekete golyó) valószínűsége egyre kisebb lesz.

A felírt egyenlőtlenség egyszerű ekvivalens átalakításával a $\left(\frac{100-k}{99-k}\right)^{79}>\frac{k+1}{k}$

egyenlőtlenséghez, majd ebből a vele ekvivalens $\left(1+\frac{1}{99-k}\right)^{79}>1+\frac{1}{k}$ egyenlőtlenséghez jutunk.
A bal oldalon álló hatvány (pozitív) alapja szigorúan monoton növekszik a k értékének növelésével, ezért a bal oldal legkisebb értéke a $k := 1$ választás esetén adódik: $\left(1+\frac{1}{98}\right)^{79}\approx 2{,}23$.

A jobb oldalon álló összeg legnagyobb értékét a $k := 1$ választással kapjuk: 2.
A bal oldalon álló hatvány legkisebb értéke nagyobb, mint a jobb oldalon álló összeg legnagyobb értéke, ezért az egyenlőtlenség minden $k\in\{1;2;3;\ldots;98\}$ esetén igaz. Igaz tehát ezen a halmazon a vele ekvivalens
$\binom{80}{1}\cdot\frac{k}{100}\cdot\left(1-\frac{k}{100}\right)^{79}>\binom{80}{1}\cdot\frac{k+1}{100}\cdot\left(1-\frac{k+1}{100}\right)^{79}$ egyenlőtlenség is.
Ezzel állításunkat igazoltuk.

2856. Az 5 kockával dobva $6^5 = 7776$ különböző, egyenlően valószínű esemény következhet be. Közülük bármelyik bekövetkezésének valószínűsége tehát $\frac{1}{7776}$.
– Ha „két pár"-t dobunk, akkor az 5 kockán 3 különböző pontszám fordul elő. Legyenek ezek a pontszámok például 4, 5 és 6. Ezek közül két pontszám 2-2 kockán, a harmadik pedig egy kockán fordul elő.
Ha például az 5 és a 6 fordul elő duplán és a 4 csak egy kockán, akkor ez az esemény $\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}=30$ különböző, egyenlően valószínű módon valósulhat meg.
Ugyancsak 30-30 különböző, egyenlően valószínű módon valósulhat meg az az esemény, hogy a 4 és a 6 fordul elő duplán, illetve a 4 és az 5 fordul elő duplán.
Tehát a „két párt dobunk és az öt kockán a háromféle pontszám a 4, 5 és 6" esemény $3\cdot 30 = 90$ egyenlően valószínű módon valósulhat meg.

A két pár dobásakor előforduló három különböző pontszámot $\binom{6}{3}=20$ különböző módon választhatjuk meg, tehát összesen $20\cdot 90 = 1800$ különböző két pár dobható és mindegyik esetnek $\frac{1}{7776}$ a valószínűsége, ezért a két pár dobásának valószínűsége $1800\cdot\frac{1}{7776}=\frac{25}{108}\approx 0{,}231$.

– A terc dobásakor is háromféle pontszám szerepel az 5 kockán. Az előbbihez hasonló gondolatmenettel azt kapjuk, hogy egy adott ponthármasból $3\cdot\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!}=60$ különböző, egyenlően valószínű terc állítható elő, az összes különböző terc száma pedig $\binom{6}{3}\cdot 60 = 1200$.

A terc dobásának valószínűsége így $1200\cdot\frac{1}{7776}=\frac{25}{162}\approx 0{,}154$.
A két pár dobása tehát (pontosan 1,5-szer) valószínűbb, mint a terc dobása.

2857. Minden húzásnál $\frac{3}{5} = 0,6$ a valószínűsége annak, hogy narancsot húzunk.

a) x lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3 és 4.
Készítsünk táblázatot!

x	p
0	$0,4^4 \approx 0,03$
1	$4 \cdot 0,6 \cdot 0,4^3 \approx 0,15$
2	$6 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 \approx 0,35$
3	$4 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 \approx 0,35$
4	$0,6^4 \approx 0,13$

b) A fenti táblázat szerint 0,03 annak a valószínűsége, hogy nem lesz, tehát 0,97 annak a valószínűsége, hogy lesz narancs a kihúzott gyümölcsök között. (A kerekítések miatt $2 \cdot 0,35 + 0,15 + 0,13 \neq 0,97$.)

c) 0,15.

2858. a) Ahhoz, hogy a katica visszaérkezzen a kiinduló pontra, ugyanannyi lépést kell jobbra tennie, mint balra, tehát csak akkor érkezhet vissza, ha lépéseinek száma páros. A katica 15 perc alatt 15-öt lép, ezért nem juthat vissza a kiinduló pontra, $p = 0$.

b) 30 lépés esetén akkor ér vissza a kiinduló pontra, ha 15-ször lép balra és 15-ször lép jobbra. A 30 lépés közül a 15 jobbra lépés $\binom{30}{15}$-féleképpen választható ki.

Ez a kedvező esetek száma. Az összes esetek szám 2^{30}, mert minden percben 2 irány közül választhat – ugyanolyan $\left(\frac{1}{2}\right)$ valószínűséggel. Tehát annak a valószínűsége, hogy fél óra múlva újra a kiinduló ponton látjuk a katicát $\frac{\binom{30}{15}}{2^{30}} \approx 0,144$.

2859. a) A számegyenes 5-ös pontjába csak úgy kerülhetett a bogár, ha mindegyik percben jobbra került egy-egy egységgel.
Ennek valószínűsége $0,6^5 \approx 0,078$.
A számegyenes 3-as pontjába úgy kerülhet a bogár, ha (összesen) 4-szer jobbra, 1-szer pedig balra került.
Ennek valószínűsége $5 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4 \approx 0,259$.

b) Ha minden percben jobbra mozdult, akkor a 10. perc végére a kezdőponttól jobbra, 10 egység távolságra lesz a bogár.
Ennek valószínűsége $0,6^{10} \approx 0,006$.

Ha 9 esetben jobbra, 1 esetben balra mozdult el egy-egy perc alatt, akkor a 10. perc végére a kezdőponttól jobbra, 8 egység távolságra lesz a bogár. Ennek valószínűsége $10 \cdot 0,6^9 \cdot 0,4 \approx 0,040$.
Ha 8 esetben jobbra, 2 esetben balra mozdult el egy-egy perc alatt, akkor a 10. perc végére a kezdőponttól jobbra, 6 egység távolságra lesz a bogár. Ennek valószínűsége $45 \cdot 0,6^8 \cdot 0,4^2 \approx 0,121$.
Ha a bogár 7, vagy kevesebb esetben mozdul jobbra egy-egy perc elteltével, akkor a 10. perc végére a kezdőponttól jobbra legfeljebb 4 egység távolságra lehet.
A keresett valószínűség tehát kb. $0,006 + 0,040 + 0,121 = 0,167$.

2860. Legyen n egy adott pozitív egész szám.
Annak a valószínűsége, hogy egy szabályos érmét n-szer feldobva a dobások között nincs fej: $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ha ennek a valószínűsége kisebb mint 0,1, akkor 0,9-nél nagyobb annak a valószínűsége, hogy a dobások között van fej.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,1 \iff n \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg 0,1 \iff n > \frac{\lg 0,1}{\lg 0,5} \approx 3,3 \text{ (mert } \lg 0,5 < 0\text{)}.$$

Tehát legalább 4-szer kell egy szabályos érmét feldobni ahhoz, hogy a dobások között 0,9-nél nagyobb valószínűséggel fej is előforduljon.

2861. a) $0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504$ (50,4%).

b) Ez az esemény akkor következik be, ha pontosan egy vizsgát nem teljesít a három közül. Ennek valószínűsége:
$0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,3 = 0,398$ (39,8%).

2862. a)

x	p
$3 = 1 + 2$	$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
$4 = 1 + 3$	$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
$5 = 1 + 4 = 2 + 3$	$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
$6 = 2 + 4$	$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
$7 = 3 + 4$	$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) A várható érték:

$$E(x) = \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 7 = \frac{3 + 4 + 10 + 6 + 7}{6} = 5.$$

$$\sigma^2(x)=\frac{1}{6}(3-5)^2+\frac{1}{6}(4-5)^2+\frac{1}{3}(5-5)^2+\frac{1}{6}(6-5)^2+\frac{1}{6}(7-5)^2,$$
$$\sigma^2(x)=\frac{4+1+0+1+4}{6}=\frac{5}{3},\text{ tehát }\sigma(x)=\sqrt{\frac{5}{3}}\approx 1,29.$$

2863. a) Mivel mindegyik kockával 1 és 6 közötti számot dobhatunk, két kockával 2 és 12 közötti összeg érhető el.

b) A mellékelt táblázatban felsoroltuk, melyik összeg milyen módokon állhat elő, és megszámoltuk, hogy hányféleképpen. Mivel két kockával dobva összesen 36-féle eredmény lehetséges (ez egyúttal a táblázat 3. oszlopában álló számok összege); így az egyes pontszám-összegek valószínűsége a harmadik oszlopban álló szám, osztva 36-tal.

összeg	lehetőségek	számuk
2	1+1	1
3	1+2, 2+1	2
4	1+3, 3+1, 2+2	3
5	1+4, 4+1, 2+3, 3+2	4
6	1+5, 5+1, 2+4, 4+2, 3+3	5
7	1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3	6
8	2+6, 6+2, 3+5, 5+3, 4+4	5
9	3+6, 6+3, 4+5, 5+4	4
10	4+6, 6+4, 5+5	3
11	5+6, 6+5	2
12	6+6	1

c) A várható értékhez a kimeneteleket kell a valószínűségeikkel szorozni, és ezt összegezni:

$$m=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+5\cdot 8+4\cdot 9+3\cdot 10+2\cdot 11+1\cdot 12}{36}=$$

$=\frac{252}{36}=7$. (Lévén páratlan számú kimenetel, és az eloszlás szimmetrikus, természetesen a középső kimenetel a várható érték. Más gondolatmenettel: egy kockán a várható érték 3,5, akkor két kockán az összeg az additivitás miatt 7.)

A szóráshoz a kimenetelek várható értéktől való négyzetes eltéréseinek valószínűségekkel súlyozott átlagából vonunk gyököt:

$$d=\sqrt{\frac{1\cdot(2-7)^2+2\cdot(3-7)^2+\ldots+1\cdot(12-7)^2}{36}}=\sqrt{\frac{210}{36}}=\sqrt{5,8\dot{3}}\approx 2,415.$$

Megjegyzés:

Nevezetes formula, hogy a szórásnégyzetet úgy is megkaphatjuk, hogy a változó négyzetének várható értékéből kivonjuk a várható érték négyzetét. Utóbbit már

tudjuk, a négyzet várható értéke pedig a változó négyzetének értékei szorozva az eredeti valószínűségekkel, azaz: $\frac{1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+1\cdot 12^2}{36}=\frac{1974}{36}=\frac{329}{6}=$

$=54,8\dot{3}$. Ebből kell levonni a várható érték négyzetét, a 7^2-et, azaz a szórásnégyzet: $5,8\dot{3}$, innen a szórás: 2,415.

2864. a) Egy dobókockával dobva a 0 dobásának valószínűsége $\frac{1}{6}$, a 3-as dobásának valószínűsége $\frac{1}{3}$ és a 6-os dobásának valószínűsége $\frac{1}{2}$.

Két kockával dobva:

a dobott pontok összege (x)	valószínűség (p)
$0=0+0$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$
$3=0+3$	$2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
$6=0+6=3+3$	$2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{18}$
$9=3+6$	$2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$
$12=6+6$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

b) A várható érték:

$$E(x)=\frac{1}{36}\cdot 0+\frac{1}{9}\cdot 3+\frac{5}{18}\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 9+\frac{1}{4}\cdot 12=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+3+3=8.$$
$$\sigma^2(x)=\frac{1}{36}(0-8)^2+\frac{1}{9}(3-8)^2+\frac{5}{18}(6-8)^2+\frac{1}{3}(9-8)^2+\frac{1}{4}(12-8)^2,$$
$$\sigma^2(x)=\frac{16}{9}+\frac{25}{9}+\frac{10}{9}+\frac{1}{3}+4=10,\text{ tehát }\sigma(x)=\sqrt{10}\approx 3,16.$$

2865. a) Öt közül a „több" természetesen 3, 4 vagy 5 lehet.

b) Öt dobás (ha tekintettel vagyunk a sorrendre is) $2^5=32$-féle eredményt hozhat. Közülük 5 egyforma jel 2-féleképpen fordulhat elő: vagy mind fej, vagy mind írás. Négy egyforma jel $2\cdot\binom{5}{4}=10$-féleképpen lehetséges. (A binomiális együttható megadja, hogy az 5 dobásból melyik 4 végződött pl. fejjel; a 2-es szorzó pedig épp azért kell, mert ugyanez fordítva is megtörténhet, 4 írással. Ilyen értelemben az előző, 5 egyforma jelet mutató eredmény $2\cdot\binom{5}{5}$ módon áll elő.) Az előzőekhez hasonlóan 3 egyforma jel pedig $2\cdot\binom{5}{3}=20$-féleképp lehetséges. (Az is jelzi, hogy jól számoltunk, hogy a három eset lehetőségeinek összege 2 + 10 + 20 = 32, kiadja az összes esetek számát.) Így tehát 3, 4, illetve 5 egyforma jel $\frac{20}{32}=\frac{5}{8}=0,625$; $\frac{10}{32}=\frac{5}{16}=0,3125$; $\frac{2}{32}=\frac{1}{16}=0,0625$ valószínűséggel van a sorozatban.

c) A várható érték: $m=\frac{20\cdot 3+10\cdot 4+2\cdot 5}{32}=\frac{110}{32}=\frac{55}{16}=3,4375.$

A szórás pedig

$$d=\sqrt{\frac{20\cdot(3-3,4375)^2+10\cdot(4-3,4375)^2+2\cdot(5-3,4375)^2}{32}}=\sqrt{\frac{190}{512}}=$$

$$=\sqrt{\frac{95}{256}}\approx\sqrt{0,371}\approx 0,609.$$

2866. a) Mivel összesen 9 cédula van, az „1” eredmény $\frac{5}{9}=0,\dot{5}$, a „2” $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}=0,\dot{3}$, a „3” pedig $\frac{1}{9}=0,\dot{1}$ valószínűséggel fordulhat elő.

b) Két „1”-t $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}=0,2\dot{7}$; két „2”-t $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=0,08\dot{3}$;

két „3”-t pedig 0 valószínűséggel húzunk. Ekkor összesen $\frac{5}{18}+\frac{1}{12}+0=\frac{13}{36}=$ $=0,36\dot{1}$ valószínűséggel húzunk két egyforma cédulát.

c) A várható érték: $m=\frac{5\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 3}{9}=\frac{14}{9}=1,\dot{5}$; a szórás pedig

$$d=\sqrt{\frac{5\cdot(1-1,\dot{5})^2+3\cdot(2-1,\dot{5})^2+1\cdot(3-1,\dot{5})^2}{9}}=\sqrt{\frac{38}{81}}\approx\sqrt{0,469}\approx 0,685.$$

A várható értékre és szórásra a szakirodalomban többféle jelölés használatos. Valószínűségi változó várható értékére az $E(x)$, $M(x)$, szórására $D(x)$ használatos; de egy konkrét esetben számszerűen kiszámolt eredményre az m vagy μ, illetve d vagy σ a jelölés.

2867. Két hatos dobásának a valószínűsége $\frac{1}{36}$, tehát $\frac{35}{36}$ annak a valószínűsége, hogy nem két hatost dobunk.

a) $\left(\frac{35}{36}\right)^4\approx 0,893.$ b) $\left(\frac{1}{36}\right)^4\approx 0,0000006.$

c) $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{36}\right)^2\left(\frac{35}{36}\right)^2\approx 0,0044.$

2868. Az összes eset száma (ahányféleképpen kihúzható az 50 golyó közül 5 golyó): $\binom{50}{5}$. Az 5 piros golyó közül egyet $\binom{5}{1}$-féleképpen lehet kihúzni, a 45 fekete közül 4-et $\binom{45}{4}$-féleképpen. Ezek a húzások egymástól függetlenek, a kedvező esetek száma: $\binom{5}{1}\cdot\binom{45}{4}$. Annak a valószínűsége, hogy pontosan egy pirosat húzunk ki, 5 golyó kihúzása esetén: $\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{45}{4}}{\binom{50}{5}}\approx 0,3516.$

2869. A piros golyó húzásának valószínűsége: $\frac{4}{10}$, a fehér golyó kihúzásának valószínűsége: $\frac{6}{10}$. Annak a valószínűsége, hogy egyszer húzunk piros golyót, háromszor fehéret: $\binom{4}{1}\cdot 0,4\cdot 0,6^3=4\cdot 0,4\cdot 0,216=0,3456$. Itt figyelembe kellett venni a kihúzások sorrendjét, a piros golyót kihúzhattuk először, másodszor, harmadszor vagy a negyedik húzáskor.

2870. A fehér golyó kihúzásának valószínűsége: $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, a pirosé: $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Az egyes húzások egymástól függetlenek. A kihúzott 5 golyó közül három fehér, kettő piros, ezek $\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\binom{5}{3}$-féle sorrendben állhatnak. Annak a valószínűsége, hogy pontosan három fehéret húzunk: $\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\approx 0,329.$

Másik megoldás:

Háromszor húzunk fehéret 8^3-féleképpen, kétszer pirosat 4^2-féleképpen. Az egyes húzások egymástól függetlenek. A kihúzások sorrendjét is figyelembe véve, a kedvező esetek száma: $\binom{5}{3} \cdot 8^3 \cdot 4^2$. Az összes eset száma 12^5, a keresett valószínűség: $\binom{5}{3} \cdot \frac{8^3 \cdot 4^2}{12^5} \approx 0,329$.

2871. a) Összesen 9-féle húzás lehetséges, a következő eredményekkel: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $0 \cdot 2 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$.

Lehetséges tehát a „0" eredmény $\frac{5}{9} = 0,\dot{5}$ valószínűséggel, az „1" eredmény $\frac{1}{9} = 0,\dot{1}$ valószínűséggel, a „2" eredmény $\frac{2}{9} = 0,\dot{2}$ valószínűséggel, és a „4" eredmény szintén $\frac{1}{9} = 0,\dot{1}$ valószínűséggel.

b) Háromszor húzva összesen 27-féle sorrend lehetséges, ezeket a fentiek szerint végig lehetne vizsgálni. Egyszerűbb azonban az előző eredményekhez egy újabb, harmadik számot húzni, és azzal szorozni. Ekkor mind a 9 esetben, amikor harmadszorra „0"-t húzunk, a szorzat 0 lesz; mind a 9 esetben, amikor „1"-et húzunk, a szorzat annyi marad, mint volt; és mind a 9 esetben, amikor „2"-t húzunk, a szorzat duplázódik. Ekkor továbbra is lehetséges „0" eredmény, mégpedig $\frac{9+5+5}{27} = \frac{19}{27} = 0,\overline{703}$ valószínűséggel; „1"eredmény $\frac{1}{27} = 0,\overline{037}$; „2" eredmény $\frac{2+1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9} = 0,\dot{1}$; „4" eredmény $\frac{1+2}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9} = 0,\dot{1}$; „8" eredmény pedig szintén $\frac{1}{27} = 0,\overline{037}$ valószínűséggel. (Ellenőrzésül összeadva e valószínűségek összege valóban $\frac{27}{27}$, azaz 1, ahogy kell.)

2872. A 32 lap közül 8 piros, ezért a piros lap húzásának a valószínűsége $\frac{1}{4}$, a nem piros húzás valószínűsége $\frac{3}{4}$. Annak a valószínűsége, hogy az első három húzással piros lapot, a második három húzással nem piros lapot húzunk, a húzások függetlenségét is felhasználva: $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$. Az ilyen húzások száma annyi, ahányféleképpen a 3 piros és 3 nem piros kártyát sorba lehet rendezni, vagy másképpen, ahányféleképpen 6 húzásból a 3 pirosat ki tudjuk választani: $\binom{6}{3}$; s minden ilyen húzássorozat valószínűsége: $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$. Annak a valószínűsége, hogy a hat húzás közül pontosan háromszor húzunk piros lapot: $\binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \approx 0,132$.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Másik megoldás:

Az elemi események száma: 32^6, mert minden húzásnál mind a 32 kártyából húzunk egyet. A kedvező esetekben háromszor (a kihúzott kártya visszatétele után) a 8 piros lap közül húzunk egyet-egyet – 8^3-féleképpen –, illetve háromszor a többi 24-ből is egyet-egyet –, 24^3-féleképpen. Ha a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor $8^3 \cdot 24^3$ számú eset lenne, viszont a három piros és a három más színű kártyát $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \binom{6}{3}$-féle sorrendben húzhatjuk ki, így a kedvező esetek száma $\binom{6}{3} \cdot 8^3 \cdot 24^3$, és a keresett valószínűség: $\binom{6}{3} \cdot \frac{8^3 \cdot 24^3}{32^6} = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{8}{32}\right)^3 \cdot \left(\frac{24}{32}\right)^3 = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$.

2873. a) A keresett esély: $\binom{100}{90} \cdot 0,9^{90} \cdot 0,1^{10} \approx 0,1319$.

Nyilván rosszul értelmezte a helyzetet, hiszen annak az esélye, hogy pontosan 90 hagyma hajt ki, csak 0,1319; de a „legalább 90" esélye is csak

$$\binom{100}{90} \cdot 0,9^{90} \cdot 0,1^{10} + \binom{100}{91} \cdot 0,9^{91} \cdot 0,1^{9} + \ldots + \binom{100}{100} \cdot 0,9^{100} \cdot 0,1^{0} = 0,5832.$$

Azaz, ha valóban nagy eséllyel (mondjuk 0,95) legalább 90 virágot szeretne látni, akkor 100-nál többet kell vennie.

b) Panasza jogos, érvelése viszont nem, hiszen semmi ok nincs arra, hogy éppen 90 keljen ki. A jó érvelés a következő: a pontosan 80 kikelésének esélye

$$\binom{100}{80} \cdot 0,9^{80} \cdot 0,1^{20} \approx 0,0012.$$

Viszont annak az esélye, hogy legfeljebb 80 kel ki, még mindig csak:

$$\binom{100}{0} \cdot 0,9^{0} \cdot 0,1^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0,9^{1} \cdot 0,1^{99} + \ldots + \binom{100}{80} \cdot 0,9^{80} \cdot 0,1^{20} \approx 0,002.$$

Ez elég valószínűtlen, amiért is jogosnak tűnik azt feltételezni, hogy nem 0,9 (90%) az egy mag kikelési esélye, azaz becsapták, és cserét kérhet.

2874. a) Ekkor a lehetséges nyerések X száma lehet: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Az esélyek, mivel nyilván binomiális eloszlásról van szó: $P(X=k)=\binom{5}{k}\cdot 0,2^k\cdot 0,8^{5-k}$.

Ennek értékei: 0,3277; 0,4096; 0,2048; 0,0512; 0,0064; 0,000 32.

b) Három pénzérme esetén a fejek száma lehet: 0, 1, 2, 3. Az esélyek (feltételezve a szabályosságot) 0,125, 0,375, 0,375, 0,125.

2875. a) Mivel csak a figurás lapok vannak, ezért összesen 16 lap van, s ebből 4 piros. Annak az esélye, hogy 4-ből éppen 2 pirosat talál:

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{16}{4}}=\frac{6\cdot 66}{1820}=\frac{396}{1820}\approx 0,2176.$$

b) Ennyi pirosat még „véletlenül" is egész nagy eséllyel lehet találni. Legalább 2 pirosat véletlenül is talál $\frac{445}{1820}\approx 0,24$ eséllyel. (Mind a négy piros: 1 eset; 3 piros, 1 nem piros: 48 eset; és az első részben kiszámolt 2 piros: 396 eset; azaz: $1+48+396=445$.) Akkor neveznénk szakértőnek, ha legalább 3, vagy esetleg csak akkor, ha mind a 4 piros. Legalább 3 találatra már csak $\frac{49}{1820}\approx 0,027$ esélye van, ami már tényleg kicsi. Ha mind a 4 piros, arra „hasból", véletlenül tippelve már csak $\frac{1}{1820}$, azaz kb. 0,000 55 esélye van, ami még egy ezrelék sincs. Azaz két pirossal még nem tekintenénk tapintással kártyaszín megkülönböztetőnek, de legalább három esetén már elgondolkoznánk, s ha mind a négyet eltalálja, akkor kezdenénk hinni valamiféle tapintásos színmegkülönböztető-képességben. Természetesen további kisérletekkel növelhetjük feltételezésünk helyességének bizonyosságát.

2876. a) Ha feltesszük, hogy a fiú- és lányszületés egyaránt 0,5 valószínűségű, akkor az, hogy a fiúk száma legalább 3-mal nagyobb, mint a lányoké, azt jelenti, hogy a 18-ból legalább 11 fiú van, mert a 10-nél még csak 2 a különbség. Tehát a következő összeget kell meghatározni, tudva, hogy binomiális eloszlással modellezhető a születendő fiúk száma: $\binom{18}{11}\cdot 0,5^{18}+\binom{18}{12}\cdot 0,5^{18}+\ldots+\binom{18}{18}\cdot 0,5^{18}$.

Mivel minden tagban szerepel ugyanaz a szorzó, csak a binomiális együtthatók összege kell. Tudjuk, hogy a szimmetria miatt az összeg ugyanaz, mint a $\binom{18}{0}\cdot 0,5^{18}+\binom{18}{1}\cdot 0,5^{18}+\ldots+\binom{18}{7}\cdot 0,5^{18}$ összeg.

A Pascal-háromszög teljes sorának összege éppen 2^{18}, amiből, ha a keresett összeget S jelöli, akkor $2S+X=2^{18}\cdot 0,5^{18}=1$. Ebben az egyenletben:

$$X=\binom{18}{8}\cdot 0,5^{18}+\binom{18}{9}\cdot 0,5^{18}+\binom{18}{10}\cdot 0,5^{18}=$$

$=(43758+48620+43758)\cdot 0,5^{18}=136136\cdot 0,5^{18}\approx 0,52.$

Ebből $2S+0,52=1$, ahonnan $2S=0,48$, azaz $S\approx 0,24$. Azaz kb. 24% az esélye, hogy legalább hárommal több fiú születik.

b) Ez a binomiális eloszlás középső tagja: $\binom{18}{9}\cdot 0,512^{18}$, azaz kb. 0,1855.

c) $\binom{18}{9}\cdot 0,512^9\cdot 0,488^9\approx 48620\cdot 0,00242\cdot 0,00157=0,185$, tehát csak egy kicsivel lesz kisebb az esély.

2877. A binomiális eloszlással modellezhetjük a helyzetet, feltételezve, hogy nincs kapcsolat azon emberek között, akiknek a katalógust küldik. Azaz, ha k jelöli azok számát, akik a 10 ember közül valamit rendelnek, akkor: $P(k)=\binom{10}{k}\cdot 0,6^k\cdot 0,4^{10-k}$.

Ezután nézzük a kérdéseket:

a) Annak esélye, hogy legfeljebb 4-en rendelnek árut:

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{10}{k}\cdot 0,6^k\cdot 0,4^{10-k}=0,4^{10}+10\cdot 0,6\cdot 0,4^9+\binom{10}{2}\cdot 0,6^2\cdot 0,4^8+$$
$$+\binom{10}{3}\cdot 0,6^3\cdot 0,4^7+210\cdot 0,6^4\cdot 0,4^6=0,1662.$$

b) Legalább 8 kb. 16,7% eséllyel rendel árut, mivel a következő összeget kell számolni: $\sum_{k=8}^{10}\binom{10}{k}\cdot 0,6^k\cdot 0,4^{10-k}=45\cdot 0,6^8\cdot 0,4^2+10\cdot 0,6^9\cdot 0,4^1+0,6^{10}=$

$=0,1673$. (Vagyis alig több, mint a legfeljebb 4 esetén. Ez azért lehet, mert az eloszlás nem szimmetrikus: $p\neq 0,5$.)

2878. Ez egy binomiális eloszlás, a színeknek megfelelően 0,25 vagy 0,5 paraméterrel.

a) A piros virágok száma (hasonlóan a többihez) 0 és 10 között lehet, annak az esélye, hogy éppen k darab lesz: $\binom{10}{k}\cdot 0,25^k\cdot 0,75^{10-k}$; hiszen ha a piros esélye 0,25, akkor a nem piros (fehér és rózsaszín) esélye 0,75.

b) Hasonlóan az a)-belihez: a fehérek száma is 0 és 10 között lehet, és az esélyek is azonosak, pontosan i darab $\binom{10}{i}\cdot 0,25^i\cdot 0,75^{10-i}$ eséllyel lesz köztük.

c) Ha a rózsaszínek száma j, ahol ismét 0 és 10 közötti értékek jöhetnek szóba, akkor most az esélyek mások: $\binom{10}{j}\cdot 0,5^j\cdot 0,5^{10-j}=\binom{10}{j}\cdot 0,5^{10}$ lesz az éppen j rózsaszín esélye.

2879. Mivel teljesen vakon tippel, a találat esélye 0,5. A 10 feltett kérdés esetén ismét binomiális eloszlás lesz a találatok száma, feltéve, hogy egymástól függetlenek a véletlenszerű tippek. Ekkor:

a) legalább 5-re helyesen válaszol: $\sum\limits_{k=5}^{10}\binom{10}{k}\cdot 0,5^{10}=0,623$;

b) legalább 7-re helyesen válaszol: $\sum\limits_{k=7}^{10}\binom{10}{k}\cdot 0,5^{10}=0,172$;

c) mind a 10-re helyesen válaszol: $0,5^{10}$ = 0,00098 (kb. 0,001) valószínűséggel.

2880. Tegyük fel ismét a dolgozatírások függetlenségét, ami sajnos nem feltétlenül igaz – gondoljunk arra, hogy a siker feldob, a kudarc lehangol, tehát a modell óvatosan kezelendő. Amennyiben ezt a függetlenséget mégis feltesszük, akkor

a) mind a 7 kísérlet 15 pontos $0,6^7\approx 0,028$, azaz mindössze 2,8% eséllyel;

b) pontosan 6 feladatsor 15 pontos: $\binom{7}{6}\cdot 0,6^6\cdot 0,4\approx 0,131$, azaz már 13,1% eséllyel;

c) pontosan 5 feladatsor 15 pontos: $\binom{7}{5}\cdot 0,6^5\cdot 0,4^2\approx 0,261$, tehát 26,1% (ez majdnem duplája a b)-belinek) eséllyel.

2881. Először is határozzuk meg az eloszlást: k találatot (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) elérni $\frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$ valószínűséggel lehet (hipergeometrikus eloszlás). A kedvező esetek ugyanis azok, amelyekben eltalálunk („kiválasztunk") az 5 jó szám közül k-t, a többi $5-k$ -t a 85 rossz szám közül „választjuk" – az összes eset száma pedig termé-

szetesen az összes lehetséges választás száma. A várható értékhez ekkor meg kell határozni az $m=\sum\limits_{k=0}^{5}\frac{k\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$ összeget.

Ez $\frac{0\cdot 32\,801\,517+1\cdot 10\,123\,925+2\cdot 987\,700+3\cdot 35\,700+4\cdot 425+5\cdot 1}{43\,949\,268}=$

$=\frac{12\,208\,130}{43\,949\,268}=\frac{5}{18}=0,2\dot{7}.$

2882. 0,16 · 0 + 0,42 · 1 + 0,28 · 2 + 0,07 · 3 + 0,05 · 4 + 0,01 · 5 + 0,01 · 6 = 1,5.
Az elektromos alkatrész várható élettartama 1,5 év.

2883. Hosszú távon, vagyis sok egymás utáni játék során nyilván annak előnyös a játék, akinek esetében a kapott számok várható értéke nagyobb. Gyöngyi az n cédula közül egyforma, $\frac{1}{n}$ valószínűséggel húzza bármelyiket, így e diszkrét egyenletes eloszlás várható értéke $m_{Gy}=\frac{1}{n}(1+2+\ldots+n)=$ $=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$.

	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

(Felhasználtuk az összegzéshez a számtani sorozat összegképletét, avagy a „kicsi Gauss módszerét".) Zsolti esetében előbb meghatározzuk az eloszlást. Két kockával dobva a kapott értékek maximuma 1, 2, ..., 6 lehet. A mellékelt táblázat szerint 1-es maximum csak 1 esetben (1-1), 2-es maximum 3 esetben (1-2, 2-1, 2-2) lehetséges, és így tovább: 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os maximum rendre 5, 7, 9, 11 esetben lehetséges. Az összes eset száma persze 36, így a várható érték:

$$m_{Zs}=\frac{1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 3+7\cdot 4+9\cdot 5+11\cdot 6}{36}=\frac{161}{36}=4,47\dot{2}.$$

Gyöngyinek tehát akkor előnyös hosszú távon a játék, ha $4,47\dot{2}<\frac{n+1}{2}$.
Ebből $7,9\dot{4}<n$, vagyis a dobozban legalább 8 cédula legyen.

Megjegyzés:
A táblázaton jól megfigyelhető az az algebrai tulajdonság, hogy a szomszédos négyzetszámok különbsége mindig páratlan szám, mégpedig az alapok összege; illetve másik oldalról közelítve, hogy 1-től összeadva a páratlan számokat, minden részösszeg négyzetszám.

2884. a) A grafikon az ordinátatengelyre szimmetrikus, tehát a várható érték 0.

b) 0,242 annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke legalább 0,7.

c) A görbe alatti teljes terület 1, ezért a satírozatlan terület 1 – 0,242 = 0,758.

2885. a) Mindegyik test esetében minden eredmény egyforma valószínűségű, így a tetraéder esetén az 1, 2, 3, 4 eredmények egyaránt $\frac{1}{4}$; az oktaéder esetén az 1, 2, ..., 8 eredmények egyaránt $\frac{1}{8}$; a dodekaéder esetén az 1, 2, ..., 12 eredmények egyaránt $\frac{1}{12}$; míg az ikozaéder esetén az 1, 2, ..., 20 eredmények egyaránt $\frac{1}{20}$ valószínűségűek.

b) Sok dobás esetén mondhatjuk, hogy a relatív gyakoriságok jó közelítéssel a valószínűségekkel egyeznek meg (épp ez a nagy számok törvénye). Ekkor a tetraéder esetén a dobások kb. $\frac{1}{4}$-e lesz 1, $\frac{1}{4}$-e lesz 2, $\frac{1}{4}$-e lesz 3, $\frac{1}{4}$-e lesz 4 – vagyis az átlag $\frac{1+2+3+4}{4} = 2,5$. Hasonló megfontolásból az oktaéder esetén $\frac{1+2+\ldots+8}{8} = 4,5$; a dodekaéder esetén $\frac{1+2+\ldots+12}{12} = 6,5$; az ikozaéder esetén $\frac{1+2+\ldots+20}{20} = 10,5$ lesz kb. az átlag.

Megjegyzés:
Ezek az átlagok valójában a szóban forgó diszkrét egyenletes eloszlások várható értékei. Az pedig – 1-től n-ig terjedő kimenetelek esetén – $\frac{n+1}{2}$, mint azt a 2883. feladat megoldásban levezettük.)

2886. a) Kombinatorikai meggondolások alapján k darab (k = 0, 1, 2) piros golyót húzni a 2 piros közül $\binom{2}{k}$-féleképpen lehet, és a 2 kihúzott golyó másik (2 – k) darabját pedig a 3 fehér közül húzzuk, $\binom{3}{2-k}$-féleképpen. Ezek szorzata adja a kedvező esetek számát, az összes esetek száma pedig természetesen $\binom{5}{2}$. Ennek megfelelően 0 pirosat $\frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1\cdot 3}{10} = 0,3$; 1 pirosat $\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2\cdot 3}{10} = 0,6$; 2 pirosat pedig $\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{1\cdot 1}{10} = 0,1$ valószínűséggel húzunk. (A valószínűségek összege 1, amint az egy teljes eseményrendszertől el is várható.)

b) Sok húzás esetén mondhatjuk, hogy a relatív gyakoriságok nagy eséllyel jó közelítését adják a valószínűségeknek (épp ennek a matematikai megfogalmazása a nagy számok törvénye). Ekkor az esetek 0,3 részében 0, 0,6 részében 1 és 0,1 részében 2 piros golyót húzunk, ezért ezek átlaga 0,3 · 0 + 0,6 · 1 + 0,1 · 2 = 0,8; leggyakoribb értéke pedig láthatóan az 1.

Megjegyzés:
Valójában ennek a hipergeometrikus eloszlásnak a várható értékéről és legvalószínűbb értékéről van szó, ezeknek a megvalósítás során nyert statisztika átlaga és módusza felel meg.

2887. a) Kiszámítjuk a dobható pontösszegek elméleti valószínűségét és ennek ismeretében megbecsüljük, hogy a 100 kísérletből hányszor várhatjuk a bekövetkezésüket.

pontösszeg	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
elméleti valószínűsége	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
100-ból várható	2-3	5-6	8	11	13-14	16-17	13-14	11	8	5-6	2-3
megvalósult	8	6	6	10	12	18	13	13	11	3	0

A táblázat alapján váratlannak mondható, hogy sokszor fordult elő a két egyes dobása és egyszer sem a két hatosé. Kevesellhetjük a 11-es pontösszeg gyakoriságát is, de egészében ez nem meglepő eredmény.

b) $\left(\frac{35}{36}\right)^{100} \approx 0,06$ annak a valószínűsége, hogy a 100 dobásból egyszer sem dobunk két hatost.

Megjegyzés:
Kb. 94% tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer két hatost dobunk a 100 dobás során. Sőt, még annak is kb. 77% a valószínűsége, hogy a 100 dobásból legalább kétszer dobunk két hatost.

c)

pontösszeg	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
relatív gyakoriság a kísérletben	0,028	0,055	0,082	0,114	0,144	0,165	0,133	0,110	0,084	0,059	0,027
elméleti valószínűség	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028

Nem tűnik megalapozottnak Vili véleménye, inkább az elvetése mellett érdemes dönteni.

2888. a) Pl. 20 érme esetén annak valószínűsége, hogy pontosan 10 írást dobunk:

$$\binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0,176;$$

30 érme esetén a pontosan 15 írás dobásának valószínűsége:

$$\binom{30}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{30} \approx 0,144.$$

Vali állítása tehát nem állja meg a helyét.

b) Vali inkább arra gondolhatott, hogy nagy valószínűséggel az írások száma a feldobott érmék számának körülbelül a fele lesz.
Valóban, például annak a valószínűsége, hogy a 20 feldobott érme közül legalább 8, de legfeljebb 13 mutat írást kb. 0,81; 30 feldobott érme esetén a „legalább 12, legfeljebb 18 írás" esemény valószínűsége is 0,8 körül van.

2889. a) $\dfrac{34!}{2!\cdot 1!\cdot 6!\cdot 13!\cdot 8!\cdot 1!\cdot 3!} \approx 1,361\cdot 10^{20}.$

b) $\dfrac{13}{34} \approx 0,382.$

c) $\dfrac{31}{34} \approx 0,912.$

2890. Szabályos kockával 6-ost dobni $\dfrac{1}{6} = 0,1\dot{6}$ valószínűséggel lehet. Az első kísérletben a relatív gyakoriság $\dfrac{85}{552} \approx 0,154$; a másodikban pedig $\dfrac{115}{674} \approx 0,171$. Ez utóbbi áll közelebb a valószínűséghez.

Megjegyzés:
Bár nem lényegesen nagyobb szám a 674, mint az 552, de nagyobb számú kísérlet esetén „várhatóan" közelebb kerülünk a valószínűséghez – mindenesetre ez gyakrabban fordul elő, mint a távolodás.

2891. Bár a szöveg visszatevés nélküli húzást sugall, megadjuk a megfelelő valószínűségeket a visszatevéses húzás esetére is.

a)

az első ászhoz szükséges húzások száma	valószínűsége (visszatevés nélküli esetben)	valószínűsége (visszatevéses esetben)
1	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2} = 0,5$
2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} = \frac{2}{7} \approx 0,286$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,25$
3	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{1}{7} \approx 0,143$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$
4	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{35} \approx 0,057$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0,063$
5	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4} = \frac{1}{70} \approx 0,014$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0,031$
6	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0,016$
7	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 0,008$
8	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^8 \approx 0,004$

b)

az első ászhoz szükséges húzások száma	az 5000 kísérletből kb. hányszor (visszatevés nélküli esetben)	az 5000 kísérletből kb. hányszor (visszatevéses esetben)
1	2500	2500
2	1429	1250
3	714	625
4	286	313
5	71	156
6	0	78
7	0	39
8	0	20

A szükséges húzások számának átlaga visszatevés nélküli esetben:

$$\frac{2500\cdot 1 + 1429\cdot 2 + 714\cdot 3 + 286\cdot 4 + 71\cdot 5}{5000} \approx 1,7998.$$

A visszatevéses esetben lehetséges, hogy az első ász húzásához 8-nál több kísérletre van szükség, csakhogy ennek valószínűsége mindössze kb. 0,004. Ezért a szükséges húzások számának átlagát a táblázatból számítva nem követünk el nagy hibát:

$$\frac{2500\cdot 1+1250\cdot 2+625\cdot 3+313\cdot 4+156\cdot 5+78\cdot 6+39\cdot 7+20\cdot 8}{5000}\approx 2,0.$$

Megjegyzés:
Ha nem pont 5000-szer, de sokszor végezzük el a leírt kísérletet és minden esetben feljegyezzük, hányadikra húztunk először ászt, akkor ezeknek a számoknak az átlagára a visszatevés nélküli esetben várhatóan 1,8-hez közeli értéket, a visszatevésesben pedig 2,0-hoz közeli értéket kapunk. (Az 1,8-től, illetve 2,0-től való „nagy" eltérés valószínűsége „kicsi".) Az 1,8, illetve 2,0 a kísérletre jellemző érték, az első ász eléréséhez szükséges húzások számának várható értéke.

2892. a) $\frac{35}{120}\approx 0,292.$

b) (Természetesen feltételezzük, hogy Judit a versenyen biztosan eljutott a 190 cm-es magasságig.)
Annak a valószínűsége, hogy Judit nem jut túl a 190 cm-es magasságon:
$(1-0,292)^3\approx 0,355$, tehát 0,645 annak valószínűsége, hogy sikeresen túljut rajta.

2893. A megadott valószínűség a 205 cm-es magasság legfeljebb 3 kísérlettel történő teljesítésére vonatkozik. Jelöljük p-vel annak a valószínűségét, hogy Zoltán egy ugrása során nem ugorja át a 205 cm-t. Annak valószínűsége, hogy Zoltán 3 sikertelen kísérletet tesz ezen a magasságon, a feladat szövege szerint 0,46, másrészt ez éppen p^3-nel egyenlő.
Tehát $p^3 = 0,46$, amiből $p=\sqrt[3]{0,46}\approx 0,772.$
A sikeres első ugrás valószínűsége tehát $1-0,772=0,228$.

2894. a) Egy darab kaparós sorsjegyet választva 100 Ft nyerésének 0,2 a valószínűsége, 200 Ft nyerésének 0,1 a valószínűsége, az 1000 Ft-os nyereményé 0,01, a 10 000 Ft-osé pedig 0,001 valószínűségű.

b) Egy kaparós sorsjegyet választva valamilyen nyeremény valószínűsége 0,311, tehát 0,689 annak a valószínűsége, hogy nem nyerünk.

(Modellezhetjük így a feladatot: A (nagy számú) kaparós sorsjegy gyártásakor minden 1000 db elkészítésekor az a szabály, hogy az 1000 db sorsjegy között 200 db 100 Ft-os, 100 db 200 Ft-os, 10 db 1000 Ft-os és 1 db 10 000 Ft-os nyerő sorsjegynek kell lenni, a nem nyerők száma pedig 689.)

2895. Ha a tanulók visszatevéssel húznak, akkor mindegyiküknek $\frac{1}{4}$ a nyerési valószínűsége (lehet, hogy egyikük sem nyer).
Visszatevés nélkül húzva az egyik tanuló biztosan nyer.
Az első tanuló nyerési esélye: $\frac{1}{4}$.
A negyedik tanuló akkor nyer, ha az első három tanuló nem nyer. A negyedik tanuló nyerési esélye ezért: $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$.
Nem igaz tehát, hogy az elsőnek nagyobb esélye van a nyerésre, mint a negyediknek.

Megjegyzés:
A második és a harmadik tanuló nyerési esélye is $\frac{1}{4}$.

2896. A játék előnyös, ha „nagyon sokszor" dobva a játékos egyenlege várhatóan pozitív lesz. Nagyon sok dobás esetén mindegyik szám dobásának ugyanannyi, azaz $\frac{1}{6}$ az esélye.
Így a játékos kb. a dobások hatodában nyer 200, hatodában 400 és hatodában 600 pontot, a dobások hatodában veszít 110, hatodában 330 és hatodában 550 pontot.
Ha összesen n dobás volt (és n „nagyon nagy"), akkor várhatóan
$\frac{n}{6}(200+400+600-110-330-550)=35n$ pont lesz a játékos egyenlege.
A játékos számára tehát előnyös a játék.

Megjegyzés:
Hétköznapi nyelven így is értelmezhetjük fenti eredményünket: az „előnyös" azt fejezi ki, hogy sok (egyenként n számú dobásból álló) dobássorozatot tekintve a játékos egyenlege „nagy valószínűséggel" $35n$ körüli érték lesz.
Konkrét dobássorozat esetén a játékos számára természetesen zárulhat veszteségesen is a játék („peches" sorozat), vagy akár a megadottnál nagyobb nyereséggel is („szerencsés" sorozat).

2897. a) Mivel 3 Ft-ot kell elnyernie a győztesnek a vesztestől, ezért legalább 3-szor kell dobniuk. Így 0, 1, 2 dobás után 0 valószínűséggel ér véget a játék. Pont 3 dobás után akkor ér véget, ha vagy 3 fej vagy 3 írás jött ki egymás után, ez
$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0,25$ valószínűséggel történhet meg. A 4. dobásra megint nem érhet véget a játék, mert ha a 3.-ra nem ért, akkor az első három dobás között 2 egyforma és 1 másmilyen eredmény született a fej vagy írás közül, és ekkor a játékosok 4, illetve 2 Ft tőkével rendelkeznek – márpedig ebből az állapot-

ból 1 dobással egyikük sem juthat el a 6 (illetve 0) Ft-os helyzetbe. Viszont 5 dobás után megint véget érhet a játék, ha a dobások az ÍFFFF, FÍFFF, FFÍFF sorrendben (vagy az eredmények egyszerű felcserélésével kapott másik 3 sorrendben) követik egymást, aminek $2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}=0{,}1875$ a valószínűsége.

Táblázatba foglalva tehát:

0	1	2	3	4	5	dobás után
0	0	0	0,25	0	0,1875	valószínűséggel ér véget a játék

b) Az a)-beli táblázatba foglalt néhány kezdeti érték után minden további páros dobáshoz is a 0 valószínűség tartozik, hiszen a 3 Ft-ról a 6 Ft-ra jutni (akárhány, mondjuk n „ide-oda" lépéssel tarkítva) csak $2n+3$, azaz páratlan számú dobással lehet. (Egy ilyen fej-írás sorozatban pontosan 3-mal több jel van a nyertes feléből, mint a másikból.) A páratlan dobásokra pedig azt állítjuk, hogy az előző páratlan dobás esetén érvényes valószínűség $\frac{3}{4}$-e tartozik hozzájuk (mint ahogy a táblázatban is látható, 3 dobáshoz $\frac{1}{4}$, 5-höz $\frac{3}{16}$ valószínűség tartozik), vagyis hogy a $2k+1$ alakú számokhoz tartozó p_k valószínűségek egy $\frac{1}{4}$ kezdőtagú, $\frac{3}{4}$ quotiensű mértani sorozatot alkotnak ($p_k=\frac{3^{k-1}}{4^k}$, $k\in\mathbf{N}^+$). Jelölje ugyanis q_k annak az esélyét, hogy $2k+1$ hosszú sorozattal még nem ért véget a játék. Ebben a sorozatban pontosan eggyel több egyik féle jel (fej vagy írás) van, mint másik. Kettő (és 4 stb.) nem lehet, hiszen páratlan összege és páros különbsége két egész számnak (a fejek és írások számának) nem lehet, törtszámnyi fejet vagy írást pedig nem lehet dobni. Három (és pláne nagyobb páratlan) különbség pedig azért nem lehet, mert akkor már véget ért volna a játék. Egy ilyen sorozat négyféle módon folytatódhat: ha abból a jelből következik két egyforma, amelyből már úgyis több van, akkor $2k+3$ lépés után véget ér a játék (ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$); minden más esetben még $2k+3$ lépés után sem ér véget (akár az eddig kevesebb jelből jön kettő, akár mindkettőből 1-1, egyik vagy másik sorrendben; ezek valószínűsége összesen $\frac{3}{4}$). Tehát $p_{k+1}=\frac{1}{4}q_k$ és $q_{k+1}=\frac{3}{4}q_k$, ekkor az is fennáll, hogy $3p_{k+1}=q_{k+1}$. Ez persze minden indexre igaz, visszafelé is, tehát pl. $3p_k=q_k$. De ekkor $p_{k+1}=\frac{1}{4}q_k=\frac{1}{4}(3p_k)=\frac{3}{4}p_k$, vagyis beláttuk, hogy a kérdéses valószínűségek egy $\frac{3}{4}$ quotiensű mértani sorozatot alkotnak.

(Ellenőrzésül összeadhatjuk a 3, 5, ..., $2k+1$, ... dobáshoz tartozó valószínűségeket, amelyek összege 1 kell legyen, hiszen az, hogy 3-tól kezdve (és végtelenig

folytatva) valamely páratlan számú dobás után véget ér a játék, teljes eseményrendszert alkot. Az $\frac{1}{4}$ kezdőtagú, $\frac{3}{4}$ quotiensű mértani sor összege pedig valóban $\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=1$.)

2898. Abban az értelemben, hogy *egyetlen* játék során *biztosan* nyerjünk, nincs jó taktika, mint az a következők során kiderül.

		1	2	3	4	5	6	átlag
1	–5,50	–12	–11	–10	–9	–8	–7	–9,50
2	–4,50	–11	–9	–7	–5	–3	–1	–6,00
3	–3,50	–10	–7	–4	–1	2	5	–2,50
4	–2,50	–9	–5	–1	3	7	11	1,00
5	–1,50	–8	–3	2	7	12	17	4,50
6	–0,50	–7	–1	5	11	17	23	8,00

Abban az értelemben viszont, hogy *hosszú távon*, sokszor játszva átlagosan (várhatóan) érhetünk-e el nyereséget, már van jó taktika. Ha az első dobás után felvesszük a nyereményünket, egyenlegünk az 1, 2, ..., 6 eredmény esetén rendre – 5,50; – 4,50; ...; – 0,50 picula. (Lásd a táblázat első két oszlopát.) Másodszorra dobva $6\cdot 6=36$ szorzat lehetséges, ezek közül persze több megegyezik. A 13 piculás összberuházás mellett az egyenleget a következő hat oszlop számai jelentik. Ezeket soronként átlagolva azt kapjuk (l. utolsó oszlop), hogy 1-es és 2-es első dobás után tovább játszva átlagban, várhatóan még többet vesztünk, mint ha megállnánk. Viszont 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os első dobás után a továbbjátszás előnyösebb. Ez a lehető legjobb taktika. Adjuk össze egyenlegeit: $-5{,}50-4{,}50-2{,}50+1+4{,}50+8=1$, vagyis pozitív. Sok játékon át ezt a taktikát követve várhatóan nyereségesek leszünk. (Egyetlen játék során pedig azért nem lehet „biztosra menni", mert egy dobás után mindenképpen veszteségünk van, és nincs olyan első dobás, hogy utána másodikra *mindenképpen* nyereségünk legyen.)

2899. a) A nyeremények összértéke (vagyis a cég kiadása)
10 000 000 + 1000 · 10 000 = 20 000 000, azaz húszmillió Ft.
Termékenként $8000\cdot 0{,}2=1600$ Ft a haszon, tehát $\frac{20\,000\,000}{1600}=12\,500$ terméket kell eladni, hogy ez fedezze a kiadást. Ehhez $\frac{12\,500}{0{,}6}=20\,833{,}\dot{3}$, azaz legalább 20 834 ügyfelet kell megkeresni.

b) A fődíjra az a)-beli eredmény miatt legfeljebb $\frac{1}{12\,500}\approx 8\cdot 10^{-5}$ az esélye egy megrendelőnek, míg a többi díjra $\frac{1000}{12\,499}\approx 0{,}08$. (A nevező azért csökken egygyel, mert aki a fődíjat megnyeri, a többi díjra már nem jöhet szóba. Ha a cég – mint azt a gyakorlatban teszi is – jóval több ügyfelet keres meg, mint a minimálisan szükséges, és abból az adott arányban valóban rendelnek is, akkor e valószínűségek jelentősen csökkennek.)

2900. a) A fele-fele arányú osztozkodás azt jelenti, hogy elsőre fejet, másodikra írást dobtak. Ennek valószínűsége $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

b) Ez akkor következik be, ha az első 3 dobás fej, a negyedik pedig írás volt. Ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

c) Legalább 80% jut Karcsinak, ha Juli legfeljebb 20%-ot kap, azaz az első írás dobásához legalább 5 kísérlet kell. Ez pontosan akkor következik be, ha az első négy dobás fej. Ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

d) Juli 10%-nál többet kap, ha legfeljebb 9 kísérlet kell az első írás dobásához. A megállapodás szerint tehát pontosan 10%-ot akkor kap, ha az első kilenc dobás mindegyike fej. Ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}\approx 0,002$.

e) Ha ezt az osztozkodást sokszor ismétlik, akkor Juli a csokoládénak átlagosan az $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}+\ldots\approx 0,693$ részét nyeri meg (ez a nyereményének várható értéke). Mivel ez több, mint a csoki fele, ezért az osztozkodás egyértelműen Juli számára előnyös (ha szereti a csokit és nem vigyáz a vonalaira).

2901. a) Fele-fele arányban osztoznak, ha elsőre legalább 5-öt dobnak. Ennek valószínűsége $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

b) Ez az eset nem következhet be, tehát valószínűsége 0.

c) Ez az eset akkor következik be, ha az első két kísérletben egyszer sem sikerül legalább 5-öst dobni. Ennek valószínűsége $\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{4}{9}\approx 0,444$.

d) Józsi akkor kapja a csoki legalább 90%-át, ha Kriszta legfeljebb a 10%-át nyeri. Ehhez szükséges és elégséges, hogy az első nyolc kísérlet során ne dobjanak sem 5-öst, sem 6-ost. Ennek valószínűsége $\left(\frac{4}{6}\right)^8=\frac{256}{6561}\approx 0,039$.

2902. a) Hat érmét dobnak fel. Annak valószínűsége, hogy Benjámin (pontosan) 4 egymást követő napon viszi sétálni a kutyust, megegyezik a négy fej dobásának valószínűségével: $\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^6\approx 0,234$.

b) Csilla 6-szor viszi sétáltatni a kutyust, ha a feldobott érmék mindegyikén írás „jön ki". Ez a kockadobás eredményétől függetlenül megtörténhet, csak különböző valószínűséggel:

– a kockával 1-est dobnak és a feldobott érme is írást mutat. Ennek valószínűsége $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$;

– a kockával 2-est dobnak és a feldobott két érme mindegyike írást mutat. Ennek valószínűsége $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$.

A gondolatmenet folytatásával adódik, hogy a kérdezett valószínűség

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{21}{128}\approx 0,164.$$

Tehát kb. 0,164 annak a valószínűsége, hogy egész héten Csilla sétáltatja a kutyust.

c) Ez akkor következik be, ha a feldobott érmék közül pontosan három mutat fejet. Ehhez először is az kell, hogy a kockával 3-at, 4-et, 5-öt vagy 6-ot dobjanak. Az egyes esetek valószínűsége:

– kockával 3-as és 3 fej: $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{48}$;

– kockával 4-es és a 4 érme közül 3 fej: $\frac{1}{6}\cdot\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{24}$;

– kockával 5-ös és az 5 érme közül 3 fej: $\frac{1}{6}\cdot\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{96}$;

– kockával 6-os és a 6 érme közül 3 fej: $\frac{1}{6}\cdot\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{96}$.

A kérdezett valószínűség tehát

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{6}\cdot\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{6}\cdot\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{6}\cdot\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{6}\approx 0,167.$$

d) Benjámin a soros a hét minden napján, ha 6 érme mutat fejet a kísérlet végén. Ez pontosan akkor történhet meg, ha a kockával 6-ost dobnak, majd a feldobott hat érme mindegyike fejet mutat. Ennek valószínűsége $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\approx 0,0026$.

2903. Az a) és b) kérdésre adott választ egyetlen táblázatban adjuk meg. Az összeg mindenütt petákban értendő.

k	dobássorozat	valószínűsége	eddig befizetett	visszakapott	nettó nyereség
1	F	$\frac{1}{2}$	1	2	1
2	I, F	$\frac{1}{4}$	$1+2=3$	4	1
3	I, I, F	$\frac{1}{8}$	$1+2+4=7$	8	1
4	I, I, I, F	$\frac{1}{16}$	$1+2+4+8=15$	16	1
5	I, I, I, I, F	$\frac{1}{32}$	$1+2+4+8+16=31$	32	1

c) A játékos 5 körben $\frac{31}{32}$ eséllyel nyer 1 petákot és $\frac{1}{32}$ eséllyel veszt 31 petákot. Átlagos nyeresége tehát 0. Azaz csak akkor nyerő a játék, ha ki tudja várni az első fejet, amihez a duplázás miatt sok pénz kell. Akinek viszont rengeteg (végtelen sok) pénze van, az miért akarna 1 petákot nyerni hozzá?

2904. Az összes lehetséges kimenetelek száma 9.

a) Nyerő esetek:
- mindkét henger 1-et mutat: 1 eset;
- egyik hengeren 1-es, a másikon 2-es: 2 eset;
- egyik hengeren 2-es, a másikon 3-as: 2 eset.

Összesen 5 nyerő eset van, tehát 4 esetben veszít a játékos ($1+3$, $3+1$, $2+2$, $3+3$).

b) $\frac{5}{9}$, illetve $\frac{4}{9}$.

c) Igen. Ha valaki pl. 900-szor egymás után játszott, akkor várhatóan 500 körül lesz a megnyert és 400 körül a vesztes játékok száma, azaz 100 érme körül lehet a nettó nyeresége. Természetesen ez nem jelenti azt, hogy előre meghatározott számú játék során a játékos nem nyerhet lényegesen többet, vagy jóval kevesebbet a vártnál. Az sem lehetetlen, hogy kénytelen veszteséggel befejezni a játékot.

2905.

dobott pontok	nyeremény	valószínűsége $\times 6^3$
5, 5, 1	11	3
5, 5, 2	12	3
5, 5, 3	13	3
5, 5, 4	14	3
5, 5, 5	15	1
5, 6, 1	12	6
5, 6, 2	13	6
5, 6, 3	14	6
5, 6, 4	15	6
5, 6, 5	16	3
6, 6, 1	13	3
6, 6, 2	14	3
6, 6, 3	15	3
6, 6, 4	16	3
6, 6, 5	17	3
6, 6, 6	18	1

b) A táblázat 3. oszlopában álló számok összege megadja a kérdezett valószínűség 6^3-szorosát. Az összeg: $2\cdot 1+10\cdot 3+4\cdot 6=56$, tehát a játékos nyerési valószínűsége $\frac{56}{6^3}=\frac{7}{27}\approx 0{,}259$.

c) Az esetek több, mint negyedrészében várhatóan a játékos nyer, esetenként több, mint 10 dollárt. Ha pl. 400-szor játszik egy játékos egymás után, akkor ezért 800 dollárt fizet, várható nyeresége pedig 1000 dollár feletti. Ez azt jelenti, hogy a játékbarlang tulajdonosa számára (hosszú távon igen nagy valószínűséggel) veszteséges ez a játék. Az egy játékért fizetendő összeget emelni kell.

2906. A játék véget érhet egy lépésben $\frac{1}{3}$ valószínűséggel úgy, hogy Melcsi elnyeri Szabolcs egyetlen sütijét. Ha nem ez történik, akkor elsőre Szabolcs nyer egy sütit ($\frac{2}{3}$ a valószínűsége, hogy ez történik), így mindkettejüknél 2-2 sütemény van. Ezért azonban másodjára mindenképp véget ér a játék, hiszen ekkor már 2 süti cserél gazdát. Hogy ezt Melcsi nyeri meg, az megint $\frac{1}{3}$ valószínűségű, így összesen $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}=0{,}\dot{5}$ a valószínűsége, hogy minden sütemény nála legyen.

2907. Együtt kezelve mindhárom (és az összes többi, elvileg feltehető) kérdést: k selejtet a 10 közül $\binom{10}{k}$-féleképpen választhatunk, a többi $(20-k)$ darabot pedig a jó 490 közül $\binom{490}{20-k}$-féleképpen. Az összes választási lehetőség száma természetesen $\binom{500}{20}$, így a k selejt előfordulásának valószínűsége $\dfrac{\binom{10}{k}\binom{490}{20-k}}{\binom{500}{20}}$. Ennek értéke $k = 0, 3, 5$ esetén rendre kb. 0,66; 0,005; $1{,}3 \cdot 10^{-5}$.

Megjegyzés:
Ha k végigfut 0-tól 20-ig, akkor ez egy hipergeometrikus eloszlás. Nem biztos, hogy az egyszerűbb számológépek gombnyomásra boldogulnak az ekkora binomiális együtthatókkal, ekkor a definíció szerinti képletet az egyes konkrét eseteknek megfelelően egyszerűsíteni kell, és tényezőnként bebillentyűzni a megmaradt szorzást.

2908. A sorsolást elvégezheti a tanár pl. úgy, hogy a tanulók nevét egy-egy cédulára írja, majd a cédulák közül választ ki hármat (véletlenszerűen).

a) A tanár egyszerre három cédulát választ (véletlenszerűen).
A 27 tanuló közül $\binom{27}{3} = 2925$-féleképpen lehet kiválasztani 3 tanulót.
Senki nem felel, ha a hiányzók közül választott a tanár hármat. Ezeknek az eseteknek a száma $\binom{5}{3} = 10$.
A keresett valószínűség: $\dfrac{10}{2925} = \dfrac{2}{585} \approx 0{,}0034$ (azaz mindössze 3,4 ezrelék körüli érték.)

b) Egy felelő lesz, ha a jelen lévő 22 tanuló közül 1-et, a hiányzó 5 tanuló közül 2-t sorsol ki a tanár. Ezeknek az eseteknek a száma: $\binom{22}{1}\binom{5}{2} = 22 \cdot 10 = 220$.
Összesen $\binom{27}{3} = 2925$ lehetőség van, így a kérdezett valószínűség:
$\dfrac{220}{2925} = \dfrac{44}{585} \approx 0{,}075$.

Megjegyzés:

2 felelő valószínűsége: $\dfrac{\binom{22}{2}\binom{5}{1}}{\binom{27}{3}} = \dfrac{77}{195} \approx 0{,}39$,

3 felelő valószínűsége: $\dfrac{\binom{22}{3}}{\binom{27}{3}} = \dfrac{308}{585} \approx 0{,}53$

(ez persze kedvezőtlen lehet a diákok nézőpontjából).

2909. Az 500 tombolajegy közül $\binom{500}{30} \approx 1{,}45 \cdot 10^{48}$-féleképpen lehet 30 nyerő jegyet kiválasztani.

a) Nem nyerünk, ha abból a 490 db tombolajegyből kerül ki mind a 30 darab nyertes jegy, amely nem a mi birtokunkban van. Ennek valószínűsége: $\dfrac{\binom{490}{30}}{\binom{500}{30}} \approx 0{,}535$,
tehát kb. 0,465 annak a valószínűsége, hogy nyerünk.

b) Pontosan 2 ajándékot akkor nyerünk, ha a mi 10 darab tombolajegyünk közül 2-t sorsolnak ki, de a többi 28 nyertes jegy a 490 darab, más tulajdonában lévő jegy közül kerül ki.
Ennek valószínűsége: $\dfrac{\binom{10}{2}\binom{490}{28}}{\binom{500}{30}} \approx 0{,}098$.

2910. b) Annak valószínűsége, hogy a 200 diák között nincs zseni: $0{,}985^{200} \approx 0{,}049$.

a) Az előzőek miatt $1 - 0{,}049 = 0{,}951$ annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott diákok között van zseni.

c) $\binom{200}{2} \cdot 0{,}015^2 \cdot 0{,}985^{198} \approx 0{,}225$.

2911. a) $\frac{4880}{5000}=\frac{122}{125}=0,976.$

b) Annak a valószínűsége, hogy a három gomb között nincs hibás:

$\frac{\binom{4880}{3}}{\binom{5000}{3}}\approx 0,930$, tehát 0,070 annak valószínűsége, hogy van köztük hibás

Megjegyzés:
Kielégítően pontos eredményt kaphatunk, ha a visszatevéses mintavétellel számolunk. Ekkor ugyanis $0,976^3\approx 0,930$ adódik annak a valószínűségére, hogy a három gomb között nincs hibás. Ez 3 tizedes jegyre megegyezik a fentiekben kapott eredménnyel, viszont jóval egyszerűbb kiszámítani. Az egyezőség oka, hogy $\frac{4880}{5000}=0,976$; $\frac{4879}{4999}\approx 0,976$ és $\frac{4878}{4998}\approx 0,976.$

c) Az elméletileg pontos válasz: $\frac{\binom{4850}{3}}{\binom{4970}{3}}\approx 0,929.$

A b) megoldásához fűzött megjegyzés szerint megfelelő pontosságú eredményhez jutunk, ha egyszerűen a $\left(\frac{4850}{4970}\right)^3$ tört közelítő értékét határozzuk meg. Ekkor ismét $\left(\frac{4850}{4970}\right)^3\approx 0,929$ adódik (jóval kevesebb számolással).

2912. A cseresznyék között 114 egészséges és 6 kukacos szem van.

a) $\frac{\binom{114}{10}}{\binom{120}{10}}\approx 0,586.$

b) $\frac{\binom{114}{4}\binom{6}{6}}{\binom{120}{10}}\approx 5,75\cdot 10^{-8}$, ami gyakorlatilag 0 valószínűséget jelent.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

c) $\frac{\binom{104}{10}}{\binom{110}{10}}\approx 0,557.$

2913. a) $\frac{\binom{30}{2}}{\binom{100}{2}}=\frac{29}{330}\approx 0,088.$

Megjegyzés:
Más gondolatmenettel is dolgozhatunk. Az első 40 W-os égő kiválasztására 30, a második kiválasztására 29 lehetőség van. Összesen $100\cdot 99$ lehetőség van, tehát a kérdezett valószínűség: $\frac{30\cdot 29}{100\cdot 99}=\frac{29}{330}.$

b) $\frac{\binom{70}{2}}{\binom{100}{2}}=\frac{161}{330}\approx 0,488.$

c) $\frac{30\cdot 70}{\binom{100}{2}}=\frac{14}{33}\approx 0,424.$

2914. a) $\left(\frac{30}{100}\right)^2=0,09.$

b) $\left(\frac{70}{100}\right)^2=0,49.$

c) $2\cdot\frac{30}{100}\cdot\frac{70}{100}=0,42.$

Megjegyzés:
A 2911., 2913. és 2914. feladat eredménye is mutatja, hogy ha „nagyon sok” darab közül kell „néhányat” kiválasztani, akkor nincs jelentős eltérés a visszatevéses, illetve a visszatevés nélküli mintavétel eredménye között.

2915. Az összes eset száma: $\binom{32}{4}$ – ennyiféleképpen lehet 4 lapot 32 lap közül visszatevés nélkül kihúzni. Kedvező esetben kihúzzuk a piros ászt és még hozzá 3 lapot a többi 31 közül; a kedvező esetek száma: $1 \cdot \binom{31}{3}$.

A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{31}{3}}{\binom{32}{4}} = 0,125.$

2916. Az összes eset száma: $\binom{32}{8}$ – ennyiféleképpen lehet 8 lapot 32 lap közül visszatevés nélkül kihúzni. Számítsuk ki a komplementer esemény valószínűségét. Ha nem húzunk zöldet, akkor a 8 lapot a 24 más színű lap közül húzzuk; ezt $\binom{24}{8}$ -féleképpen tehetjük. Annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között nincs zöld: $\dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$. Annak a valószínűsége, hogy legalább egy zöldet húztunk: $1-\dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} \approx 0,930.$

Megjegyzés:
Ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha a kedvező eseteket számoljuk össze. Legalább 1 zöldet húzunk, ha 1 zöldet és 7 nem zöldet, 2 zöldet és 6 nem zöldet, 3 zöldet és 5 nem zöldet és így tovább, végül 8 zöldet húzunk. Ennek a valószínűsége:

$$\left[\binom{8}{1}\cdot\binom{24}{7}+\binom{8}{2}\cdot\binom{24}{6}+\binom{8}{3}\cdot\binom{24}{5}+\binom{8}{4}\cdot\binom{24}{4}+\binom{8}{5}\cdot\binom{24}{3}+\binom{8}{6}\cdot\binom{24}{2}+\right.$$

$$\left.+\binom{8}{7}\cdot\binom{24}{1}+\binom{8}{8}\cdot\binom{24}{0}\right]:\binom{32}{8}=(2\,768\,832+3\,768\,688+2\,380\,224+$$

$$+743\,820+113\,344+7728+192+1):10\,518\,300\approx 0,930.$$

2917. Először a komplementer esemény valószínűségét határozzuk meg: kiszámítjuk, mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között nincs piros, azaz mind a négy golyó fekete. Az összes kihúzás száma: $\binom{40}{4}$, a 32 feketéből 4 feketét $\binom{32}{4}$-féleképpen húzhatunk ki, tehát a komplementer esemény valószínűsége:

$$\frac{\binom{32}{4}}{\binom{40}{4}}=\frac{35960}{91390}\approx 0,3935.$$

A vizsgált esemény valószínűsége: $1-\dfrac{\binom{32}{4}}{\binom{40}{4}}\approx 0,6065.$

2918. A 100 csavar közül 8 selejtes, 92 jó. Az elemi események a 100-ból 20 csavar kiválasztása az összes lehetséges módon, ezek száma: $\binom{100}{20}$. Ezek közül kedvező esemény az, ha a 20 csavart a 92 hibátlan csavar közül választjuk ki, ezt $\binom{92}{20}$-féleképpen tehetjük. A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{92}{20}}{\binom{100}{20}}\approx 0,156.$

2919. Ha a 10 000 alkatrész 3%-a hibás, akkor 300 hibás és 9700 hibátlan van közöttük. Az elemi események a 10 000 alkatrész közül 2000 kiválasztása az össze lehetséges módon, számuk $\binom{10\,000}{2000}$. Kedvező esemény: a 300 hibás alkatrész közül 80, s ettől függetlenül a 9700 hibátlan alkatrész közül 1920 kiválasztása. Ez $\binom{300}{80}\cdot\binom{9700}{1920}$-féleképpen történhet. Annak a valószínűsége, hogy a 2000 alkatrész közül 80 hibásat kap a kisüzem: $\dfrac{\binom{300}{80}\cdot\binom{9700}{1920}}{\binom{10\,000}{2000}}$.

2920. A cipőket egymás után is kivehetjük. Ekkor az elsőként kivett cipő bármilyen lehet. Például kivettünk egy fekete ballábast. Jó esetben a 4 fekete jobblábas valamelyikét vesszük ki másodikként a szekrényben levő 15 fél pár cipő közül. Tehát az összes eset száma 15, a kedvezőké 4, a keresett valószínűség: $\dfrac{4}{15}\approx 0,267.$

2921. Először számoljuk össze, hányféleképpen tudunk 14 közül 4-et kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Az első helyre 14 közül választhatunk, a második helyre az előzőtől függetlenül 13 közül választhatunk, a harmadik helyre az előzőtől függetlenül 12 közül választhatunk, a negyedik helyre az előzőtől függetlenül 11 közül választhatunk. Mivel a kiválasztás sorrendje nem számít, az így kapott értéket el kell osztani annyival, ahányféleképpen a kiválasztott 4 elemet különböző sorrendbe tudjuk állítani, azaz az összes eset száma: $\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=1001$.
A feltételnek megfelelő – jó esetek – száma: a kiválasztott 4 autóból 2-t, a maradék 10-ből is 2-t kell kiválasztanunk úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. A bemutatóra kiválasztott 4 autó közül az első helyre 4 közül választhatunk, a második helyre az előzőtől függetlenül 3 közül választhatunk. Mivel a kiválasztás sorrendje nem számít, az így kapott értéket el kell osztani 2-vel. Ezektől függetlenül a bemutatón nem szereplő 10 autó közül az első helyre 10 közül választhatunk, a második helyre az előzőtől függetlenül 9 közül választhatunk. Mivel a kiválasztás sorrendje nem számít, az így kapott értéket el kell osztani 2-vel. Így a kedvező esetek száma: $\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{10\cdot 9}{2}=270$.
Annak a valószínűsége, hogy a bemutató futamon a kisorsolt indulók fele motorhiba miatt nem tud elindulni: $\frac{270}{1001}\approx 0,270$.

Másik megoldás:

Az összes eset száma: $\binom{14}{4}=1001$.

A feltételnek megfelelő – jó esetek – száma: $\binom{4}{2}\cdot\binom{10}{2}=270$.

Annak a valószínűsége, hogy a bemutató futamon a kisorsolt indulók fele motorhiba miatt nem tud elindulni: $\frac{270}{1001}\approx 0,270$.

2922. A 153 ember közül 6-an tagjai a jelen lévő 3 házaspárnak, tehát annak valószínűsége, hogy valamelyik házaspár egyik tagja nyeri az utazást: $\frac{6}{153}\approx 0,0392$.

2923. a) Mind az 5 dobozban $0,95^5\approx 0,774$ eséllyel lesz pontosan 50 szál gyufa, a dobozok egymástól független, véletlenszerű kiválasztását feltételezve.

b) A keresett esély (ami megegyezik azzal, hogy legfeljebb 3 doboz szabványos):
$\sum_{k=0}^{3}\binom{5}{k}\cdot 0,95^k\cdot 0,05^{5-k}\approx 0,0226$. Elég kicsi, nincs 2,3%.
Másképp: $1-(0,95^5+5\cdot 0,95^4\cdot 0,05)\approx 0,0226$.

c) $\binom{100}{95}\cdot 0,95^{95}\cdot 0,05^5\approx 0,18$, tehát 18% eséllyel lesz éppen 95 szabványos. (Ez a legvalószínűbb érték a lehetséges 101 esetből.)

2924. a) Ha 10-ből 7 magasabb 165 cm-nél, akkor $(4\cdot 10=)$ 40-ből $(4\cdot 7=)$ 28-ra tippelünk. Ez a legvalószínűbb, de természetesen bármi más is lehet.

b) Erre a kérdésre nem lehet válaszolni, hiszen abból, hogy a kiválasztott 10-ből 7 magasabb 165 cm-nél nem lehet következtetni a többi 30 tanulóra.
Megjegyzés:
Kiszámítható viszont, hogy ha 37 tanuló magasabb 165 cm-nél, akkor mi az esélye, hogy a 10 tanuló kiválasztásakor mind a három alacsonyabbat kiválasztottuk: $\frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{37}{7}}{\binom{40}{10}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{40\cdot 39\cdot 38}=0,0121$; tehát igen kicsi esélyű. De ebből a fordított valószínűségre semmi nem következik.

2925. $\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{24}{45}=0,533$, azaz kb. 53,3% eséllyel lesz egy fiú és egy lány köztük. A klasszikus „kedvező esetek száma osztva az összes esetek száma" képlettel számoltunk, amely feltételezi, hogy bárkit ugyanolyan eséllyel választunk ki, és a kihúzottat már nem lehet újra húzni.

2926. a) $\sum_{k=8}^{10}\binom{10}{k}\cdot 0,8^k\cdot 0,2^{10-k}=\binom{10}{8}\cdot 0,8^8\cdot 0,2^2+\binom{10}{9}\cdot 0,8^9\cdot 0,2^1+\binom{10}{10}\cdot 0,8^{10}\approx$
$\approx 0,3020+0,2684+0,1074\approx 0,6778$, tehát közel 68% eséllyel elérnek legalább 8 embert a 10-ből.

b) Hasonlóan most is egy összeg kell:
$\sum_{k=15}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0,8^k\cdot 0,2^{20-k}=$
$=\binom{20}{15}\cdot 0,8^{15}\cdot 0,2^5+\binom{20}{16}\cdot 0,8^{16}\cdot 0,2^4+\ldots+\binom{20}{20}\cdot 0,8^{20}\approx 0,8042$;
azaz ennek már több, mint 0,8 (80%) az esélye.

2927. a) 1) Pontosan 2 potyautas $\binom{50}{2}\cdot 0,06^2\cdot 0,94^{48}=0,2262$ eséllyel utazik a kocsiban.

2) A „legalább 3 potyautast találunk" esemény komplementere a „legfeljebb 2 potyautast" találunk eseménynek. Az utóbbi esélyét könnyebb kiszámolni, hiszen mindössze három diszjunkt részre bontható: 0, 1 vagy 2 potyautas, amelyeknek az esélyei: $\binom{50}{0}\cdot 0,06^0\cdot 0,94^{50}$, $\binom{50}{1}\cdot 0,06^1\cdot 0,94^{49}$ és $\binom{50}{2}\cdot 0,06\cdot 0,94^4$.

Ezek összege adja a komplementer valószínűségét: 0,4162. Ekkor a keresett esély: 1 – 0,4162 = 0,5838. Vagyis kb. 58,4% eséllyel találunk legalább 3 potyautast.

b) Ha n utas van a kocsiban, akkor annak az esélyét könnyebb felírni, hogy nincs potyautas, ez ugyanis $0{,}94^n$. Ekkor legalább egy potyautas van $1-0{,}94^n$ eséllyel. Erről tudjuk, hogy 90%, azaz 0,9, és keressük a megfelelő n értéket. Tehát $1-0{,}94^n=0{,}9$; azaz $n=\frac{\lg 0,1}{\lg 0,94}\approx 37,21$. Azaz 37 utas esetén még kisebb, mint 90% a legalább 1 potyautas esélye; 38, illetve annál több utas esetén már nagyobb.

2928. A „legfeljebb 1 hibás kabát lesz 10-ből" két egymást kizáró esemény összege: 0 vagy 1 hibás.

Ezek esélyei: $\frac{\binom{950}{10}}{\binom{1000}{10}}$, $\frac{\binom{950}{9}\cdot\binom{50}{1}}{\binom{1000}{10}}$, hiszen 950 jó, és 50 szövési hibás kabát van (a klasszikus „kedvező esetek száma per összes eset száma" képletet használtuk). Ezek összege: 0,5973 + 0,3174 = 0,9147. Azaz közel 91,5% az esélye, hogy legfeljebb egy hibás kabát lesz a 10 között.

Megjegyzés:
Mivel a 10 sokkal kisebb, mint 1000, meg lehet próbálni visszatevéses modellel is közelíteni, azaz a binomiális eloszlással számolni, $n := 10$, és $p := 0{,}05$ hibás valószínűség mellett. Ekkor $\binom{10}{0}\cdot 0,05^0\cdot 0,95^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0,05^1\cdot 0,95^9\approx$

$\approx$ 0,5987 + 0,3151 = 0,9138, azaz 91,4% adódik.
Mindössze 1 ezred körül van az eltérés.

2929. $\binom{30}{0}\cdot 0,17^0\cdot 0,83^{30}+\binom{30}{1}\cdot 0,17^1\cdot 0,83^{29}+\binom{30}{2}\cdot 0,17^2\cdot 0,83^{28}=0,095$; azaz kb. 9,5%. Ez még elfogadható esélynek tűnik, tehát általában erre még nem mondják, hogy az eredmény statisztikailag igazolná, hogy ebben a törzsben kisebb a balkezesek aránya. Igaz azt sem támasztja alá, hogy nem kevesebb. További vizsgálat szükséges.

Megjegyzés:
Itt fogalmazzuk meg azt a klasszikus statisztikában használatos hipotézisvizsgálati elvet, amelyet burkoltan már ebben a feladatban is használtunk, s hasonló gondolatmenet szerepel majd a 2931., 2932., 2933., 2939., 2940., 2941. és 2942. feladatokban. Mindegyikben arról van szó, hogy van egy hipotézisünk egy ismeretlen valószínűség értékéről, és egy mintával szeretnénk ellenőrizni az állítást. A gondolat lényege az, hogy a legvalószínűbb érték körül meghatározunk egy olyan intervallumot (elfogadási tartomány), amelybe a feltételezés szerint bele kellene esnie az eredménynek egy adott biztonság mellett, ami leggyakrabban 95% vagy 99% (ezzel ekvivalens, ha meghatározzuk azon mintaértékek esélyét, amelyek messze esnek a legvalószínűbbtől, és ezek együtt sem érik el az 5 vagy 1%-ot). Ennek komplementere a hipotézis elvetési tartománya. Ha abba esik az eredmény, akkor elvetjük az adott biztonsági szint mellett a hipotézist. Ilyenkor az eredményt szokás szignifikánsnak is mondani. (Lásd pl. Kröpfl–Peschek–Schneider–Schoenlieb: Alkalmazott statisztika, Műszaki Kiadó 2000.)
A fenti (2929.) feladat esetében a legvalószínűbb a hipotézis igazsága esetén a $30\cdot 0{,}17\approx 5$. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy pl. 95% eséllyel mekkora intervallumba esik 30 közül a balkezesek száma. Ezt pontosan nem is kell meghatározni, mivel a feladat eredményeként kiszámolt összeg már majdnem 10%, ezért a 2 még biztosan beletartozik az elfogadási tartományba.

2930. Ha azt feltételezzük, hogy csak véletlenszerűen választanak, azaz nem ismerik meg a valódi kávét, mert olyan jó a műkávé, akkor 10-ből 8 találat esélye a teljesen egyforma esélyű választást feltéve: $\binom{10}{8}\cdot 0,5^8\cdot 0,5^2=45\cdot 0,5^{10}=0,044$. Tehát a kérdezett valószínűség 0,044, azaz 4,4%.

Megjegyzés:
Ez kisebb mint 5%, tehát szignifikáns eredmény, nem hinnénk el, hogy nem érződik a kávéíz. Lásd még a 2929. feladat megjegyzését!

2931. Feltételezve, hogy Kovács úr esetén is 0,7 a sikeres vizsga esélye, felírjuk mit jelent, hogy 10 vagy annál több tanuló bukik meg 20-ból: $\sum_{k=10}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0,3^k\cdot 0,7^{20-k}=0,048$, tehát mindössze 4,8% az esélye ennek. Ezért hajlamosak lehetünk azt gondolni, talán nála mégis nagyobb eséllyel lehet megbukni, mivel 5%-nál kisebb ez az esély, (lásd a 2929. feladat megoldása utáni megjegyzést!).

2932. a) Legfeljebb 4 törött esélye: $\sum_{k=0}^{4}\binom{50}{k}\cdot 0,04^k\cdot 0,96^{50-k}=$

$= 0,1299 + 0,2706 + 0,2762 + 0,1842 + 0,0902 = 0,9510.$

b) Ha legalább 5 törött, az a) eset komplementere, azaz valószínűsége $1 - 0,9510 = 0,0490$. Ha a gép jó működése alatt azt értjük, hogy 4% a törött, akkor a legalább 5 törött esélye csak 0,0490. Azaz még 5% sincs az esélye, hogy 4% a töröttek aránya. (Valószínűleg több, ezért a gépen valamit állítani kellene.) Ismét lásd a 2929. feladat megoldása utáni megjegyzést!

2933. Számoljuk ki, mennyi az esélye, hogy ha az izzóknak tényleg 80%-a legalább 10 000 órát ég, akkor 20 égőből 7 ég rövidebb ideig, mint 10 000 óra. Feltéve, hogy egymástól függetlenül, véletlenül választottuk a 20 égőt a gyár termékeiből, a keresett valószínűség: $\binom{20}{7}\cdot 0,2^7\cdot 0,8^{13}=0,05455.$

Adjuk hozzá még a további eseteket, amikor még több izzó ég ki, tehát 8, 9, 10, … 20. Ezeknek együttes esélye, vagyis hogy legalább 7 izzó ég ki: 0,0867, azaz 8,67%. Ez elég kicsi, de még nem hihetetlen, azaz a panaszt meg kell vizsgálni, de nem fogadható el azonnal, mint ha pl. az esély még 1% sem lenne. Ismét lásd a 2929. feladat megoldása utáni megjegyzést!

2934. Pontosan három autó lengéscsillapítója meghibásodásának valószínűsége:

$\binom{17}{3}\cdot 0,005^3\cdot 0,995^{14}\approx 0,000079.$

Legalább három autó meghibásodásának valószínűsége:

$$1-\left(0,995^{17}+\binom{17}{1}\cdot 0,005\cdot 0,995^{16}+\binom{17}{2}\cdot 0,005^2\cdot 0,995^{15}\right)\approx 0,000081.$$

2935. $1-(0,7^{10}+10\cdot 0,3\cdot 0,7^9)\approx 0,85.$

2936. a) $\dfrac{\binom{185}{10}}{\binom{200}{10}}\approx 0,450;$

b) $\dfrac{\binom{15}{3}\binom{185}{7}}{\binom{200}{10}}\approx 0,027;$

c) $\dfrac{\binom{185}{10}+\binom{15}{1}\binom{185}{9}+\binom{15}{2}\binom{185}{8}}{\binom{200}{10}}\approx 0,970;$

d) $\dfrac{\binom{15}{10}}{\binom{200}{10}}<2\cdot 10^{-13}.$

2937. a) Ha egyenletesen véletlenszerű a kiválasztás (ami minden ilyen jellegű kérdésnél a válasz „jóságának" feltétele, mivel a számításokhoz modell csak ekkor használható), akkor éppen 6 nyugdíjas a 20 kiválasztottból $\dfrac{\binom{300}{6}\cdot\binom{700}{14}}{\binom{1000}{20}}=0,1936$ eséllyel lesz.

b) „Legalább 2 nyugdíjas" komplementere a „legfeljebb 1 nyugdíjasnak", azaz $1-\dfrac{\binom{300}{0}\binom{700}{20}}{\binom{1000}{20}}-\dfrac{\binom{300}{1}\binom{700}{19}}{\binom{1000}{20}}=0,9928$ esélyű. Tehát kb. 99,3% eséllyel lesz legalább 2 nyugdíjas a 20 kiválasztott személyből.

2938. a) A visszatevéses urnamodellt a binomiális eloszlással lehet leírni, tehát éppen 6 nyugdíjas esélye: $\binom{20}{6}\cdot 0,3^6\cdot 0,7^{14}=0,1916$, ami csak 2 ezreddel tér el a „pontos értéktől", lásd 2937. a).

b) Hasonlóan a)-hoz az esély becslése a binomiális eloszlás két megfelelő tagjával: $1-\binom{20}{0}\cdot 0,3^0\cdot 0,7^{20}-\binom{20}{1}\cdot 0,3^1\cdot 0,7^{19}=0,9924$. Az eltérés a 2937. b)-ben kiszámolt értéktől mindössze 4 tízezred, azaz egész jó közelítő érték.

2939. Tegyük fel, hogy a fekete esélye az állításnak megfelelően 0,2 (hasonlóan a másik négy színhez), azaz minden szemet véletlenszerűen választunk az öt színből ugyanolyan eséllyel. A kérdés, hogy ekkor a „legfeljebb 5 fekete" esélye mennyi. Ha túl kicsi, akkor Éva jogosan tesz panaszt a kevés feketéért. Ha nem, akkor csak „peches" volt. A legfeljebb 5 fekete $\sum_{k=0}^{5}\binom{60}{k}\cdot 0,2^k\cdot 0,8^{60-k}=0,0121$ esélyű. Mivel ez alig több 1%-nál, ezért jogosnak tűnik Éva panasza. Ismét lásd a 2929. feladat megoldása utáni megjegyzést! Általában 5% alatt már a panasszal érdemben foglalkoznak. Ha csak az „éppen 5 fekete" esélyét számolom, az 0,0082. Tehát csak kicsit több, mint 8 ezrelék. A legvalószínűbb az „éppen 12 fekete", ennek esélye: 0,128. Ennek az imént kiszámított 0,0082 csak kb. a 16-odrésze, azaz elég valószínűtlen ebben az összefüggésben is.

2940. Ha a feltevés, hogy a „vonatok 90%-a 2 percnél többet nem késik" igaz lenne, akkor annak az esélye, hogy „3 vagy annál több vonat késik többet, mint 2 perc" kiszámítható. Ha ez kicsi, pl. 5% alatt van, akkor hajlamosak vagyunk nem elhinni a hipotézist. Ismét lásd a 2929. feladat megoldása utáni megjegyzést! Nézzük az esélyt, aminél egyszerűbb a 0, 1, 2 esélyét kiszámolni, s 1-ből levonni.

$$1-\binom{15}{0}\cdot 0,1^0\cdot 0,9^{15}-\binom{15}{1}\cdot 0,1^1\cdot 0,9^{14}-\binom{15}{2}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^{13}=$$

$= 1 - 0,2059 - 0,3432 - 0,2669 \approx 0,1841$, tehát egy kb. 18,4% esélyű esemény következett be. Ez még nem elég kicsi ahhoz, hogy már megingassa a hipotézisünket.

2941. Azt fogjuk kiszámolni, hogy ha csak tippel a pszichológus, akkor mekkora az esélye, hogy ilyen sokat, vagy esetleg még többet eltaláljon. Ha ez az esély elég kicsi, akkor elhisszük, hogy „tud valamit". Jelölje X a találatok számát.

$$P(X\geq 14|p=0,5)=\sum_{k=14}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0,5^k\cdot 0,5^{20-k}=$$

$= 0,5^{20}(38760 + 15504 + 4845 + 1140 + 190 + 20 + 1)$, ez $60460\cdot 0,5^{20} = 0,0577$, azaz 5,77%. Nem túl nagy esély, de még elfogadható, azaz nem kell, hogy ez az eredmény meggyőzze a pszichológus képességeiben kételkedőt. Ismét lásd a 2929. feladat megoldása utáni megjegyzést!
15 vagy 16 fölötti eredmény már bizonyító erejű, hiszen azok esélyei 0,021, illetve 0,0059, azaz kevesebb, mint 2,1, illetve 0,6%.

2942. A férfiak legfeljebb pozitív diszkriminációról beszélhetnének, ami semmiképpen sem „panasz" tárgya szokott lenni, hiszen a felvettek között 0,4 a férfiak aránya, míg a jelentkezők között csak 0,25. Azaz panaszt a nők tehetnek negatív diszkriminációról. Ezt úgy vizsgáljuk meg, hogy feltéve a panasz alaptalanságát, megnézzük, hogy mi az esélye annak, hogy csak 12 nőt, vagy annál kevesebbet vesznek fel (ismét lásd a 2929. feladat megoldása utáni megjegyzést), ha 75% a női jelentkező.

Jelölje X a felvett nők számát, ekkor

$P(X\leq 12)=1-P(X>12)=1-\sum_{k=13}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0,75^k\cdot 0,25^{20-k}=0,102$, azaz 10,2% az esélye, hogy csak 12 vagy annál kevesebb nőt vesznek fel. Ez még nem szokott hihetetlenül kicsinek számítani, azaz a megalapozott panaszhoz további statisztikák szükségesek.

2943. „Jó" választás: 3, 5, 7 vagy 3, 7, 9 vagy 5, 7, 9, azaz összesen 3 lehetőség (a többiben nem teljesül a háromszög egyenlőtlenség).

Az összes lehetőségek száma $\binom{5}{3}=10$, ezért a háromszög szerkeszthetőségének valószínűsége 0,3.

2944. A 18 tányér közül a 4 eltört tányér $\binom{18}{4}$-féleképpen kerülhetett ki.

1000 Ft kár úgy keletkezhetett, hogy 2 db 200 Ft-os és 2 db 300 Ft-os, vagy 3 db 300 Ft-os és 1 db 100 Ft-os tányér tört el. Az első esetben a 6 db 200-asból és a 6 db 300-asból 2-2 db, $\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}$-féleképpen, a második esetben a 6 db 300-asból 3 db és a 6 db 100-asból 1 db $\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{1}$-féleképpen választódott ki.

Tehát annak a valószínűsége, hogy Robinak 1000 Ft kára lett:

$$\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}+\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{18}{4}}=\frac{15\cdot 15+20\cdot 6}{3060}=\frac{345}{3060}\approx 0,113.$$

2945. A megadott számok között 4 prím van: 2; 3; 5; 7. Annak a valószínűsége, hogy prímet húzunk: 0,4; annak, hogy nem prímet húzunk: 0,6.

a) Ha a harmadik húzásra kapunk először prímet, akkor az első két húzás alkalmából nem prímet húztunk. A húzások egymástól függetlenek, így a keresett valószínűség: $0,6^2\cdot 0,4 = 0,144$.

b) Ha a 8 húzás közül az első három prím, a többi nem prím, akkor ennek valószínűsége: $0,4^3\cdot 0,6^5$. A prímek húzásának sorrendje tetszőleges lehet. Ezért a fenti számot meg kell szorozni annyival, ahányféleképpen kiválasztható a 8 húzás közül az a három, amellyel prímet húzunk. Így annak a valószínűsége, hogy 8 húzásból 3-szor húzunk prímet: $\binom{8}{3}\cdot 0,4^3\cdot 0,6^5\approx 0,279$.

2946. a) Egy szám négyzetének utolsó számjegye akkor 9-es, ha az eredeti szám utolsó számjegye 3-as vagy 7-es. Az 1 és 1000 közötti számok között 100 db 3-asra, és 100 db 7-esre végződő szám van. Így annak a valószínűsége, hogy a választott szám négyzetének utolsó számjegye 9-es: $\frac{200}{1000}=0,2$.

b) Nincs olyan szám, amelynek negyedik hatványa 9-re végződne. Így annak valószínűsége, hogy a választott szám negyedik hatványának utolsó számjegye 9-es: 0 (sosem teljesül).

2947. Két egész szám szorzatának utolsó számjegye pontosan akkor 7, ha az egyik szám utolsó számjegye 1 és a másiké 7, vagy pedig az egyiké 3 és a másiké 9. A megoldások:

a) Annak esélye, hogy az elsőre kihúzott szám utolsó számjegye 1: $\frac{10}{100}=0,1$ (mert a 100 szám között 10 db végződik 1-esre). Ezután, mivel ezt a golyót nem tesszük vissza, ezért annak valószínűsége, hogy 7-esre végződőt húzunk: $\frac{10}{99}$ (mert a maradék 99 szám közül 10 db végződik 7-esre). Tehát az $1 \cdot 7$ esemény valószínűsége $\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{99}=\frac{1}{99}$.
Ugyanígy a $7 \cdot 1$, $3 \cdot 9$, illetve $9 \cdot 3$ valószínűsége is ennyi, tehát annak a valószínűsége, hogy a golyókra írt számok szorzatának utolsó számjegye 7-es:
$\frac{1}{99}+\frac{1}{99}+\frac{1}{99}+\frac{1}{99}=\frac{4}{99}=0,0404$.
(Egymást kizáró események valamelyike bekövetkezésének valószínűsége a valószínűségek összege.)

b) Az előző gondolatmenethez nagyon hasonlóan: az elsőre kihúzott szám utolsó jegye $\frac{10}{100}=0,1$ eséllyel lesz 1-es, ezután (mivel a golyót most visszatettük) $\frac{10}{100}=0,1$ a valószínűsége, hogy 7-esre végződőt húzunk. Ugyanez igaz a $7 \cdot 1$, $3 \cdot 9$, illetve $9 \cdot 3$ esetekre is. Tehát annak a valószínűsége, hogy a golyókra írt számok szorzatának utolsó számjegye – visszatevés esetén – 7-es:
0,01 + 0,01 + 0,01 + 0,01 = 0,04.

Másik megoldás:

a) Az összes eset száma: $\binom{100}{2}$. Az első számot 40 közül választhatjuk. (Az 1-es, 7-es, 3-as vagy 9-es végződésűek száma 40.) A második számot már csak 10 közül húzhatjuk.

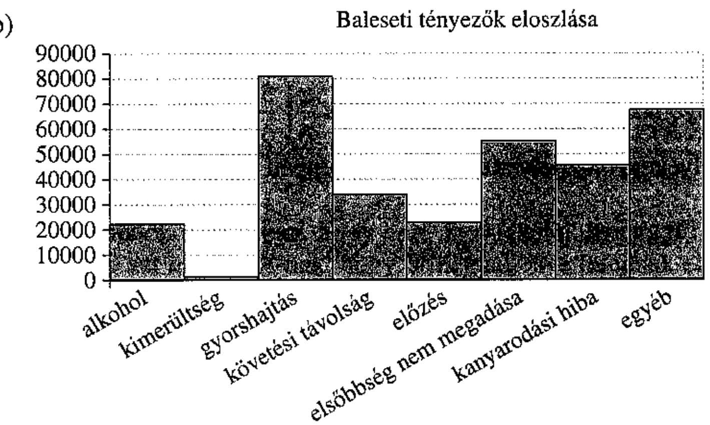
(Például: ha először 1-est húztunk, másodikként 7-est kell húzni.) Mivel a kihúzások sorrendje nem számít, a kedvező esetek száma: $\frac{40\cdot 10}{2}=200$.

A keresett valószínűség: $\frac{200}{99\cdot 50}=\frac{4}{99}$.

b) Az összes eset száma: $\frac{100\cdot 100}{2}$, mivel a kihúzott golyót visszatesszük, és a húzások sorrendje nem számít. A kedvező esetek száma az a) feladathoz hasonlóan 200. A keresett valószínűség: $\frac{2}{50}=0,04$.

2948. a) Mivel összesen 328 908 baleset volt, ezért az egyéb kategóriába 67 399 eset került, hiszen a táblázat hét adatának összege 261 509, s ezt kell levonni az összes baleset számából. Ezután a százalékos arányok rendre: 6,76%, 0,38%, 24,59%, 10,31%, 6,91%, 16,77%, 13,79%, 20,49%.

b)



c) Mivel a gyorshajtás a leggyakoribb, ezért legnagyobb eséllyel ezt fogja találni, mint okot.

2949. Annak valószínűsége, hogy k dobás között pontosan egy 6-os van (és a többi nem 6-os): $\binom{k}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}=\frac{k}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ (binomiális eloszlás; és mindegy, hogy k kockával dobunk egyszerre, vagy egy kockával dobunk k-szor). Néhány konkrét k-ra meghatározva ennek értékét, a táblázat alapján úgy tűnik, hogy 5-nél és 6-nál maximális (egyenlő) a valószínűség.

1	2	3	4
$\frac{1}{6}\approx 0,167$	$\frac{5}{18}\approx 0,278$	$\frac{25}{72}\approx 0,347$	$\frac{125}{324}\approx 0,386$
5	6	7	8
$\frac{3125}{7776}\approx 0,402$	$\frac{3125}{7776}\approx 0,402$	$\frac{109375}{279936}\approx 0,391$	$\frac{78125}{209952}\approx 0,372$

Ennek igazolására

első megoldás: vizsgáljuk meg a $\frac{k}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ kifejezés monotonitását. A kifejezés monoton nő, ha $\frac{k}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\leq\frac{k+1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$. A pozitív hatvánnyal osztva és 6-tal szorozva: $k\leq(k+1)\cdot\frac{5}{6}$, ahonnan $k\leq 5$ jön ki, tehát 5-ig nő a kifejezés, 6-tól fogy. Az véletlen, hogy 5 és 6 esetén egyenlő.

Második megoldás: vizsgáljuk meg az $f(x)=\frac{x}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$ függvényt, amelynek pozitív egész helyeken való helyettesítési értékei éppen a kívánt valószínűségeket adják. Deriválva a függvényt: $f'(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}+\frac{x}{6}\cdot\ln\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$, ennek zérushelyét keressük. $\frac{1}{6}$-dal és a soha nem nulla $\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$-nel egyszerűsítve: $1+x\cdot\ln\frac{5}{6}=0$, amiből $x=-\frac{1}{\ln\frac{5}{6}}\approx 5,48$. Itt a derivált (mint az az iménti egyszerűsített alakjából igen jól látszik) valóban előjelet váltva 0, mégpedig pozitívból negatívba váltva, tehát a függvénynek itt valóban szélsőértéke van, mégpedig maximuma. Mivel az eredeti valószínűségi értelmezés csak a pozitív egész helyeken felvett értékeket engedi meg, így e maximumhely egész szomszédaiban lehetséges a legnagyobb valószínűség. A táblázatban már láttuk, hogy $k=5$ és 6 esetén a valószínűség megegyezik, tehát valóban ezek a maximális valószínűséget hozó dobások.

2950. Az, hogy A, B vagy C kap kegyelmet, teljes eseményrendszert alkot, és mivel az esetek egyformán valószínűek, ezért lesz kezdetben mindegyik valószínűség valóban $\frac{1}{3}$.

Első megoldás:
A hír, amit az őr elárul A-nak, nem befolyásolja A megmenekülési esélyét – ami változatlanul $\frac{1}{3}$ marad, tehát az okoskodás rossz –, hiszen *azzal kapcsolatban* nem tartalmaz *semmi új* információt. Ellenben a B és C közötti egyenlő $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ eloszlást változtatja meg, mégpedig C javára 0 - $\frac{2}{3}$ módon – igaz, erről viszont C nem tud.

Második megoldás:
Kicsit formálisabban, a Bayes-tétellel is ugyanezt kapjuk. Könnyű ugyan rossz irányba menni ezen az úton is – meg is mutatjuk a téves okoskodást, hogy aztán rávilágítva a hibára, végleg eloszlassunk minden kétséget. Egy feltételes valószínűség a kérdés, amit viszonylag könnyen érthetően, ám *rosszul* a következőképpen lehet levezetni:

$$P(A\text{ kegyelmet kap}\mid B\text{ meghal})=\frac{P(B\text{ meghal}\mid A\text{ kegy.})\cdot P(A\text{ kegy.})}{P(B\text{ meghal})}=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Ott a hiba az okoskodásban, hogy *nem* az a feltétel, hogy „B meghal", hanem az, hogy „az őr azt mondja A-nak, hogy B meghal". Ne felejtsük el, az őr csak B vagy C halála közül az egyik lehetőséget árulhatja el, A esetleges halálát nem közölheti vele. Tehát *két*, egyforma valószínűségű esemény közül választhat az őr, így a tört számlálójában az első valószínűség, P (az őr azt mondja, B meghal $\mid A$ kegyelmet kap) éppúgy $\frac{1}{2}$, mint a tört nevezőjében álló valószínűség, P (az őr azt mondja, B meghal). Ezért lesz a tört értéke, vagyis A megmenekülésének esélye változatlanul $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$. Az, hogy az őr B halálát elárulja, *független* attól, hogy A kegyelmet kap-e vagy sem –, éppen ezért *nincsen befolyása* annak valószínűségére. Bár úgy tűnik, hogy a kéréssel A megpróbálja „csőbe húzni" az őrt, valójában az őr helyesen értékeli a kérés azon részét, hogy „semmit nem árul el", ha megadja a kért információt.

2951. A megadott adatok alapján az összes ivarsejt 65%-a egy A_p, 35%-a pedig egy A_f allélt tartalmaz. Feltételezhetjük, hogy ugyanez az eloszlás érvényes a hímivarsejtek és a petesejtek esetén is, tehát a hímivarsejtek 65%-a egy A_p, 35%-a pedig egy A_f allélt tartalmaz és ugyanez igaz a petesejtekre is. Vezessük be a következő jelöléseket: $p := 0{,}65$ és $q := 0{,}35$.

a) Az utód színét a szülők ivarsejtje által tartalmazott allél határozza meg. Két ivarsejt (egy hímivarsejt és egy petesejt) egyesülésekor a következő lehetőségek vannak:
- mindkét ivarsejt A_p allélt tartalmaz, az utód piros színű lesz. Ennek valószínűsége $p^2 = 0{,}65^2 = 0{,}4225$;
- mindkét ivarsejt A_f allélt tartalmaz, az utód fehér színű lesz. Ennek valószínűsége $q^2 = 0{,}35^2 = 0{,}1225$;
- a hímivarsejt A_p allélt tartalmaz, a petesejt A_f allélt tartalmaz; az utód rózsaszínű lesz. Ennek valószínűsége $pq = 0{,}65 \cdot 0{,}35 = 0{,}2275$;
- a petesejt A_p allélt tartalmaz, a hímivarsejt A_f allélt tartalmaz; az utód rózsaszínű lesz. Ennek valószínűsége ugyancsak $pq = 0{,}65 \cdot 0{,}35 = 0{,}2275$.

Az utódok 0,4225 (azaz p^2) valószínűséggel pirosak, 0,1225 (azaz q^2) valószínűséggel fehérek és 0,455 (azaz $2pq$) valószínűséggel rózsaszínűek lesznek. Az első generáció színeloszlása: kb. 42% piros, 12% fehér és 46% rózsaszínű.

b) A következő (második) generáció kialakításában résztvevő ivarsejtek allélok szerinti megoszlását az előző részben kapott eredmény alapján állapíthatjuk meg. A hímivarsejtek $p^2 + pq = p(p + q) = p$ relatív gyakorisággal egy A_p allélt tartalmaznak és $q^2 + pq = q(p + q) = q$ relatív gyakorisággal egy A_f allélt (felhasználtuk, hogy $p + q = 1$). Ugyanez a megoszlás igaz a petesejtek esetén is. A második generációban tehát ismét p^2 lesz a piros egyedek relatív gyakorisága, q^2 a fehéreké és $2pq$ a rózsaszínűeké. A második (és az előzőekből következően az összes további) generáció színeloszlása tehát azonos lesz az első generáció színeloszlásával, egyensúly áll be (Hardy—Weinberg eloszlás).

A feladatban megadott kiindulási populáció esetén a későbbi generációk mindegyikében a csodatölcsérek kb. 42%-a lesz piros, 12%-a fehér és 46%-a rózsaszínű (hacsak a kertész közbe nem avatkozik).

Megjegyzés:

Beláttuk azt is, hogy az allélok relatív gyakorisága az öröklődés során változatlan maradt (p-ed részük A_p, q-ad részük pedig A_f). (Hardy—Weinberg törvény).

A megfogalmazott törvényszerűségek ideális populációra érvényesek; ekkor a szaporodás során semmilyen zavaró hatás (pl. génáramlás vagy genetikai sodródás) nincs.

2952. a) A barna tehén minden petesejtje egy A_b allélt tartalmaz, a fehér bika minden hímivarsejtje egy A_f allélt. Ezért a petesejt és a hímivarsejt egyesülésekor létrejövő zigótából mindenképpen A_bA_f genotípusú, tarka utód fejlődik ki. A kérdezett valószínűség tehát 1.

b) Mindkét állat A_bA_f genotípusú, ezért a petesejtek 50%-a hordoz egy A_b, és 50%-a egy Af allélt. Ugyanez a megoszlás a hímivarsejtek esetén is. Az A_bA_b; A_bA_f; A_fA_b; illetve A_fA_f genotípusú utódok tehát ugyanakkora valószínűséggel születhetnek (az első allél a petesejtből, a második a hímivarsejtből való).
Tehát 25% a fehér, 50% a tarka és 25% a barna boci születésének valószínűsége.

2953. Ha egy bitet megváltoztatunk, akkor az 1-esek száma eggyel változik meg (nő vagy csökken). Ha tehát a megváltozó bitek száma páros (2, 4, 6 vagy 8), akkor az 1-esek száma páros számmal, ha pedig a megváltozó bitek száma páratlan (1, 3, 5 vagy 7), akkor az 1-esek száma páratlan számmal változik meg.
A hibás adatátvitel kétféleképpen következhet be úgy, hogy észrevétlen marad.
1. eset: A paritásbit hibátlanul megy át (ennek valószínűsége 0,9) és a többi hét bit közül páros számú (2, 4 vagy 6) hibásan jelenik meg.

Annak valószínűsége, hogy két bit hibásan megy át: $\binom{7}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^5$.

Hasonlóan, a 4, illetve 6 hibás bit keletkezésének valószínűsége $\binom{7}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^3$,

illetve $\binom{7}{6} \cdot 0{,}1^6 \cdot 0{,}9$.

Az 1. eset valószínűsége tehát

$$0{,}9 \cdot \left[\binom{7}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^5 + \binom{7}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^3 + \binom{7}{6} \cdot 0{,}1^6 \cdot 0{,}9\right] \approx 0{,}1139.$$

2. eset: A paritásbit hibásan megy át (ennek valószínűsége 0,1) és a többi hét bit közül még további páratlan számú (1, 3, 5 vagy 7) szintén hibásan jelenik meg.
A 2. eset valószínűsége:

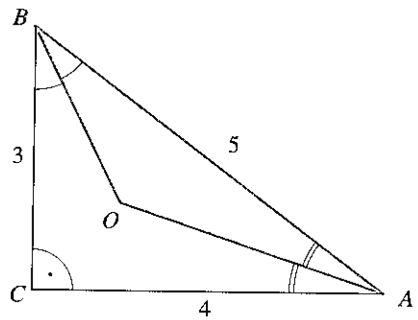
$$0{,}1 \cdot \left[\binom{7}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^6 + \binom{7}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^4 + \binom{7}{5} \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^2 + \binom{7}{7} \cdot 0{,}1^7\right] \approx 0{,}0395.$$

Tehát annak valószínűsége, hogy a 8 bit hibásan jelenik meg a kimeneten, de ezt (a paritásbit segítségével) nem vesszük észre, kb. $0{,}1139 + 0{,}0395 = 0{,}1534$.

2954. A „kedvező" terület egy 5 cm sugarú körlap területe: 25π (cm²).
A teljes terület: 100π (cm²).
Az esemény valószínűsége a két terület hányadosával, azaz 0,25-dal egyenlő.

2955. A „kedvező" eseteknek megfelelő pontok egy 5 cm oldalú négyzet belső pontjai.
Az esemény valószínűsége tehát: $\frac{5^2}{15^2}=\frac{1}{9}$.

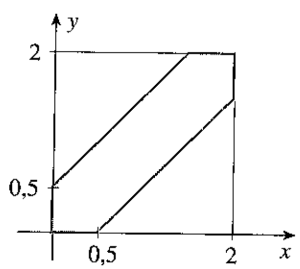
2956. Az ABC háromszög derékszögű.
A beírt kör O középpontja egyenlő távolságra van az oldalaktól, a szögfelezők pontjai pedig két-két háromszögoldaltól vannak egyenlő távolságra.
A „kedvező" pontok tehát az AOB háromszög belső pontjai.
A beírt kör sugara 1 cm, ezért a „kedvező" síkidom területe 2,5 cm².
Az esemény valószínűsége: $\frac{2,5}{6}=\frac{5}{12}$.



2957. a) $\frac{15}{85}\approx 0,18$.

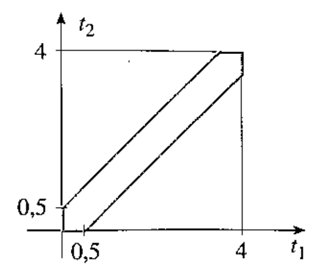
b) Feltéve, hogy a két város között nagyjából egyenletesen halad, akkor a két város közötti 65 percből 32,5 percet van Kecskeméthez közelebb.
Ehhez jön 5 perc Kecskeméten, tehát 37,5 percet van Kecskeméthez közelebb, azaz az esély: $\frac{37,5}{85}\approx 0,44$.

2958. Ha lerajzolunk egy 2 egység oldalú négyzetet, akkor ennek egy tetszőleges pontját lehet úgy értelmezni, hogy a két koordinátája a két jó barát könyvtárba érkezési időpontja. Mivel fél órát vannak ott, akkor találkoznak egymással, ha a két koordináta különbsége kisebb, mint $\frac{1}{2}$, azaz algebrailag: $|x-y|\le\frac{1}{2}$, ami a négyzet átlója körül szimmetrikusan egy hatszöget ad.



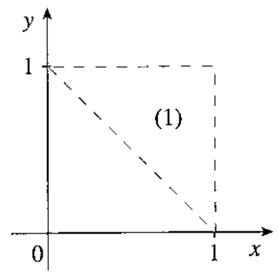
Ahogyan ezen hatszög területe aránylik az egész négyzetéhez, az a találkozás esélye. Ezt szokás geometriai valószínűségi modellnek hívni. A feltétele, hogy egyenletes eséllyel érkezzenek a megadott intervallum bármely részén. A számolás egyszerűbb, ha a 4 egység területű négyzetből levonjuk a két „sarokháromszöget", amelyek darabjának területe: $\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2}=\frac{9}{8}$. Mivel ebből kettő van, a területük összesen: $\frac{9}{4}=2,25$. A négyzeté 4, tehát a „kedvező terület": $4-2,25=1,75$. Így az esély: $\frac{1,75}{4}=0,4375$. Azaz kisebb, mint annak az esélye, hogy nem találkoznak.

2959. Hasonló feladat modell szempontjából, mint az előző. Ezúttal 4 perc a négyzet oldala, és most az állomáson csak ennek nyolcadrészét, 30 másodpercet (= 0,5 percet) tartózkodnak. Ugyanúgy egy négyzet a modell, ismét akkor találkoznak, ha a két koordináta különbsége 0,5 percnél kevesebb, azaz:
$|t_1-t_2|\le 0,5$.

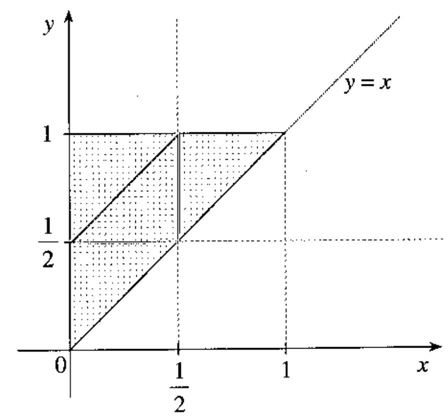


Ezúttal a levágott háromszögek területe, mivel kettő van együtt: $3,5^2=12,25$. A négyzeté 16, tehát a kedvező terület $16-12,25=3,75$. Így a keresett esély: $\frac{3,75}{16}=0,23425$, azaz kisebb, mint 0,25.

2960. Ezúttal is geometriai modellt alkalmazunk. A 2 szám legyen x és y, tekintsük a $P(x;y)$ pontok halmazát! A feltétel ekkor: (1) $x+y>1$, ami a négyzet felén teljesül (az (1) tartományon), tehát a keresett esély 0,5. Lásd az ábra pirossal húzott részét, ami a kedvező!



2961. Ezúttal is geometriai modellt veszünk, csak most a feltételek bonyolultabbak. Ha feltesszük, hogy $x<y$, akkor csak egy háromszög lesz a teljes eseménytér. Ezen belül a háromszög szerkeszthetőségének feltétele, hogy x, $y-x$ és $1-y$ darabokra teljesüljenek a háromszög-egyenlőtlenségek, azaz:
(1) $x+y-x>1-y$, valamint
(2) $x+1-y>y-x$, végül:
(3) $y-x+1-y>x$.
Rendezve: (1) $2y>1$;
(2) $2x+1>2y$;
(3) $1>2x$.



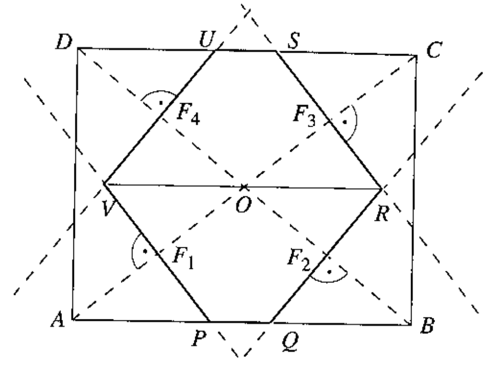
Ezeket ábrázolva, a pirosra színezett tartományt kapjuk a kedvező területre, ami jól láthatóan a negyede az egész háromszögnek, tehát a háromszög szerkeszthetőségének esélye: 0,25.

2962. *Első megoldás:*
Mondhatjuk felületesen: „vagy szerepel 1-es vagy nem". Pontosíthatjuk, hogy valóban 0,5-0,5 e két lehetőség esélye, ugyanis a sorozatdobás során két lehetőség van: vagy előbb dobunk 1-est, mint 6-ost; vagy előbb dobunk 6-ost, mint 1-est. A szimmetria miatt e két eset egyformán valószínű, tehát valóban 0,5 valószínűségű, hogy az első 6-os előtt szerepel 1-es a dobások között.

Második megoldás:
Annak valószínűsége, hogy kockadobás során az első 6-os a k. dobásra jön ki $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ (Pascal- vagy geometrikus eloszlás). Az egy feltételes valószínűség, hogy 1-est dobunk, feltéve, hogy 6-ost még nem dobtunk. Miután arra nincs megszorítás, hogy hány 1-est dobunk az első 6-os előtt (1-et, 2-t, ..., $k-1$-et), ezeknek az eseteknek a valószínűségeit összegezni igen bonyolult volna. Egyszerűbb ehelyett a komplementer esemény valószínűségét kivonni 1-ből. A „van (akárhány) 1-es az első $k-1$ dobás között" esemény komplementere az, hogy nincs 1-es. Sőt, feltételes valószínűségről lévén szó: nincs 1-es sem, merthogy 6-os sincs. Ekkor mind a $k-1$-szer a 2, 3, 4, 5 eredmények valamelyike születik meg, amely minden egyes dobásban $\frac{4}{5}$ valószínűségű (hiszen a 6-os eredmény most nem lehetséges), $k-1$ dobáson keresztül $\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$ valószínűségű, tehát a keresett feltételes valószínűség $1-\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.
Ezt kell a feltételek fenti, Pascal-eloszlású valószínűségeivel szorozni, majd e szorzatokat összegezni az összes elképzelhető k-ra, azaz 1-től ∞-ig. (Így alkotnak ugyanis a feltételek teljes eseményrendszert.) Keressük tehát $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ értékét. Kiemelve $\frac{1}{6}$-ot, és elvégezve a szorzást: $\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}-\left(\frac{20}{30}\right)^{k-1}\right)$.
Itt két, egyaránt 1 kezdőtagú mértani sor összegének különbségéről van szó, amelyek quotiense $\frac{5}{6}$, illetve (egyszerűsítés után) $\frac{2}{3}$. Az a_1 kezdőtagú, q hányadosú mértani sor összege, mint az ismert: $\frac{a_1}{1-q}$, így eredményünk:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{5}{6}}-\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\frac{1}{6}}-\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{6}(6-3)=\frac{1}{2}=0,5.$$

2963. Legyen O az $ABCD$ téglalap középpontja. Húzzuk meg az OA, OB, OC, OD szakaszok felezőmerőlegesét. A kapott $PQRSUV$ hatszög bármelyik pontjába esik a golyó, akkor a feladatban leírt esemény nem következik be.
Az AF_1P háromszög egybevágó az OF_1V háromszöggel, mert $AF_1 = F_1O$ és az ezeken nyugvó szögek a két háromszögben egyenlők (derékszögek, illetve váltószögek). Hasonló módon igazolható, hogy a BF_2Q háromszög egybevágó az OF_2R háromszöggel. Ezért a $PQRV$ trapéz területe egyenlő az AOB háromszög területével, vagyis a téglalap negyedének területével. A hatszög szimmetriája miatt világos, hogy az $USRV$ trapéz területe is negyede a téglalap területének, vagyis a hatszög területe a téglalap területének fele. Így annak a valószínűsége, hogy a feladatban leírt esemény nem következik be: 0,5, tehát 0,5 annak valószínűsége is, hogy a golyó a szoba valamelyik sarkához közelebb áll meg, mint a padló középpontjához.



2964. A metrószerelvény egy 4,80 méter hosszú „mintát" ismételget. A minta egy 1,30 méter széles ajtóból és a két ajtó közötti 3,50 méter hosszú ajtó nélküli szakaszból áll. Akkor tudunk egyenesen belépni a szerelvénybe, ha testünk középvonala az ajtó 1,30 méter hosszú szakaszán, mindkét szélétől legalább 0,25 méter távolságra van. A kedvező elhelyezkedések egy 0,80 méter hosszú szakaszt alkotnak, így a kérdezett valószínűség kb. $\frac{0,80}{4,80}=\frac{1}{6}$.

ELŐSZÓ A 6–8. FEJEZETEKHEZ

A feladatgyűjtemény első öt fejezete tematikusan készült, ami azt is jelenti, hogy túlzottan összetett és több különböző témát érintő feladatot nem tettünk be. Az utolsó három fejezet megírásakor pedig az új középszintű matematikaérettségi-vizsga szerkezetét vettük figyelembe.

Az írásbeli érettségi vizsga három részből áll.

- Az első (45 perces) részt jelöli a KI (Középszint I. rész). Ebben a részben egyszerű matematikai alapismeretek, összefüggések ismeretét ellenőrzi a vizsga. Egy sorozatban, nehézségüktől függően, 10-12 feladat szerepel majd, amelyek 3-4 percben megoldhatóak, ha a tanuló felkészült a követelményekből. A feladatokra egyenként 2-4 pont adható, összesen pedig 30 pont érhető el.
  Az ilyen jellegű feladatokat a *hatodik fejezet* tartalmazza. Ugyanakkor található a fejezetben olyan példa is, amely 4 pontnál többet ér, vagy megoldása több időt igényel, azaz egy adott érettségi feladatsorban nem kerülne ebben a részben kitűzésre, bár fogalmi jellegű alapkérdés. A fejezet tehát szándékunk szerint jellegében követi az érettségi KI részének megfelelő struktúrát.
- Az írásbeli érettségi vizsga második (135 perces) része két alcsoportra oszlik: KII/a és KII/b (Középszint II. rész a, illetve b).
  A KII/a-ban többnyire egyszerűbb, egy-egy témakörhöz köthető 3 azonos (12) pontszámú feladatot kell megoldania a tanulónak, melyre bőven található példa az első öt fejezetben. (A jelenlegi előírás szerint 2005-ben nem, de a tervek szerint a későbbiekben a tanulónak majd négy feladat közül kell kiválasztania azt a hármat, amelynek a megoldásával foglalkozik, illetve amelynek a megoldására kapott pontszámát kéri az összpontszámba beszámítani.)
- A KII/b rész az összetett, több témakört is érintő, s több részkérdésből álló, némileg nehezebb feladatok csoportja. A kitűzött 3 azonos (17) pontszámú feladatból a tanuló választásának megfelelően már 2005-től csak 2 feladat megoldását értékelik.
  Ilyen típusú feladatok találhatók a feladatgyűjtemény hetedik fejezetében. Természetesen akadnak olyanok is, amelyek vagy időbeli okokból vagy esetleg nehezebb voltuk miatt aligha kerülhetnének egy érettségi feladatsorba., de nem ez a jellemző, s a majdan kitűzendő példák jellegét jól mutatja ez a 232 feladat.
  A *nyolcadik fejezet* úgynevezett „felmérő feladatsorokat" tartalmaz. Közülük az elsőre egy pontozási kulcsot is bemutatunk.

A félreértések elkerülése végett le kell szögeznünk, hogy az érettségire nem kell, hogy e fejezetből válasszák ki a feladatokat. A fejezet feladatsorai abban a tekintetben jelentenek mintát, hogy ilyen jellegű lesz az érettségi írásbeli feladatsor is: tehát feladatszámban, a feladatok stílusában, jellegében, illetve a szerkezetében hűen tükrözik a 2005-től bevezetésre kerülő középszintű érettségi vizsgát. A közölt lehetséges pontozási kulcs szintén jelzi a majdani érettségi dolgozatok javítási útmutatójának értékelési elveit, szempontjait.

Nehézségüket tekintve, az eddigi felméréseket is figyelembe véve elmondható, hogy a fejezetben található feladatsorok valamivel nehezebbek, mint a várható „éles" sorozatok. Az motiválta ilyen összeállításukat, hogy az a tanuló, aki ezeket gyakorlásként a megadott időn belül megoldja, a majdani érettségi vizsgán jól szerepeljen. Kollégáinknak is szerettünk volna segítséget nyújtani azzal, hogy saját diákjaik felkészítésénél innen válogathassanak, vagy a feladatsorok mintájára ebből a feladatgyűjteményből össze tudjanak állítani számukra megfelelő próbasorozatokat.

A feladatgyűjtemények és megoldásköteteik négy tanéven át történő folyamatos használatát követően az érettségire való közvetlen felkészülés hatékony formája az egyszerű, az összetett és a felmérő feladatsorok megoldása, mely a gondos felkészülést követően az eredményes matematika vizsga elérésében nyújt jelentős segítséget.

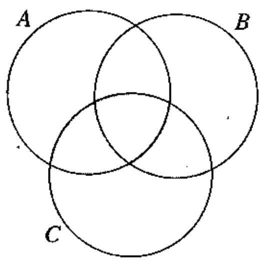
A szerzők

6. EGYSZERŰ FELADATOK

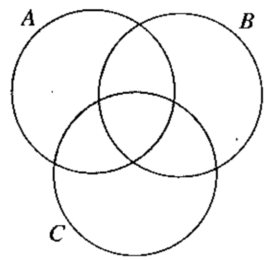
6.1. Gondolkodási műveletek

2965. Venn-diagramon megjelöljük mindkét művelet eredményét, és ekkor láthatjuk, hogy az egyenlőség nem igaz. De egyszerű meggondolással is adódik, hogy pl. azon elemek, amelyek A halmaznak elemei, de C-nek nem, a bal oldali művelet eredményében nincsenek benne, a jobb oldaliéban viszont benne vannak, tehát a két oldal nem lehet egyenlő.

$(A \cup B) \cap C$



$A \cup (B \cap C)$



2966. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$.

2967. $B \cup C = C$, $B \cap C = B$, $B \setminus C = \emptyset$.

2968. Táblázatba foglaltuk a keletkezett kétbetűs szavakat, a színes hátterűek az értelmesek, amelyekből tehát 9 db van (az összesen keletkezett 12 között).

	l	n	s	v
é	él	én	és	év
á	ál	án	ás	áv
ó	ól	ón	ós	óv

2969. $A = \{1; 2; 3; \ldots; 18; 19\}$;
$B = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$;
$A \cup B = A$;
$A \cap B = B$;
$A \setminus B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14; 16; 17; 19\}$, vagy
$A \setminus B$ a 3-mal nem osztható, 20-nál kisebb pozitív egész számok halmaza.

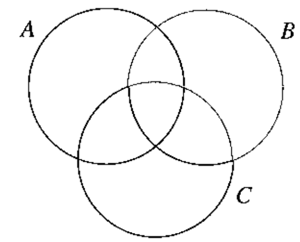
2970. $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \le 5\}$, $A = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
B az egyjegyű prímszámok halmaza, $B = \{2; 3; 5; 7\}$
$A \cap B = \{2; 3; 5\}$, $A \setminus B = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 4\}$

2971. Ha a metszet $\{1; 2\}$, akkor mindkét halmaznak eleme az 1 és a 2. Az egyesítésükhöz még a 0, 5 és 8 tartozik, ezeket lehet elosztani a két halmaz között, tehát pl. egy megoldás lehet: $A := \{0; 1; 2\}$ és $B := \{1; 2; 5; 8\}$. (Felsoroljuk még az egyéb lehetőségeket: $\{1; 2\}$ és $\{0; 1; 2; 5; 8\}$; $\{1; 2; 5\}$ és $\{0; 1; 2; 8\}$; $\{1; 2; 8\}$ és $\{0; 1; 2; 5\}$. Ha a sorrend nem számít, akkor ez az összes eset; ha igen, akkor még négy van: ezek fordítottja.)

2972. a) A 2-vel és 3-mal, azaz a 6-tal osztható természetes számok halmazát jelenti az $A \cap B$.

b) A 3-mal osztható (de 2-vel nem osztható, azaz) páratlan természetes számok halmazát jelenti az $A \setminus B$.

2973. Lásd a mellékelt ábrát!



2974. *Kétszer kettő az négy.* Állítás, igaz.
Brad Pitt csinos ember. Nem állítás, mert nem egyértelműen eldönthető logikai értékű kijelentés, igaz volta szubjektív megítélésen, ízlésen alapul.
Hahó, a tenger! Nem állítás, mert nem kijelentés, hanem felkiáltás.

2975. *Petőfi magyar költő volt.* Állítás, igaz.
Hány óra? Nem állítás, mert nem kijelentés, hanem kérdés.
A nyár után a tavasz következik. Állítás, hamis.

2976. *De jó volna kuglert enni!* Nem állítás, mert nem kijelentés, hanem óhajtás.
Ausztria fővárosa Bécs. Állítás, igaz.
Tilos a dohányzás! Nem állítás, mert nem kijelentés, hanem felszólítás (tiltás).

2977. *A Föld lapos.* Állítás, hamis.
5 + 3 = 9 Állítás, hamis.
Szép az élet! Nem állítás, mert nem kijelentés, hanem felkiáltás.

2978. Nem igaz. Például egy rombusztól különböző deltoid átlói is merőlegesek egymásra.

2979. Igaz. Például az egyketted alapú logaritmusfüggvény is szigorúan monoton csökkenő.

2980. Többféleképpen is tagadhatjuk, itt kettőt adunk meg.
– Nem igaz, hogy esik az eső és fúj a szél.
– Nem esik az eső vagy nem fúj a szél.

2981. Többféleképpen is tagadhatjuk, itt kettőt adunk meg.
– Nem igaz, hogy ma este moziba megyek vagy otthon maradok.
– Ma este nem megyek moziba és nem maradok otthon.
(Esetleg hétköznapi stílusban: Ma este nem megyek moziba, de otthon sem maradok.)

2982. Nem igaz, hogy minden jó ember követ el bűnt az életében, azaz van olyan jó ember, aki nem követ el bűnt az életében. Formálisan: legyen B a „bűnt elkövet az életében" állítás, és x „jó ember", ezekkel a jelölésekkel az eredeti állítás: $\forall x \quad B(x)$. Ennek tagadása: $\exists x \quad \neg B(x)$.

2983. A következtetés helytelen. Ennek két oka is. Először is, mert aki a virágot szereti, az ugyan nem lehet rossz ember, de ebből nem következik, hogy aki nem szereti, az nem lehet jó. A jóságnak a virág szeretete egy elégséges, de nem szükséges feltétele. Másrészt abból, hogy Feri hagyta kiszáradni a szobanövényeit, még nem következik egyértelműen, hogy nem szereti a virágot. Bár nem szép dolog a kiszáradás előidézése, de lehet, hogy csak nem tudta valamiért megoldani a locsolásukat. A lényeg: a következtetés hamis.

2984. Igaz, hiszen ha 10-es számrendszerben egy szám 0, 2, 4, 6 vagy 8-ra végződik, akkor a szám páros, hiszen 10 hatványai oszthatók kettővel, s ekkor az egyesek helyén álló számnak is oszthatónak kell lennie. Ha páros, akkor mivel a 10 hatványok párosak, ezért az utolsó jegy paritása dönt, azaz csak 0, 2, 4, 6, 8-ra végződhet. Vagyis szükséges és elégséges is a feltétel.

2985. Nem, mert nagyon sok nem svéd szőke van. Pl. lehet, hogy a svédek 90%-a szőke, de ezenkívül még van rengeteg német, dán, finn, norvég, holland, angol stb. szőke, így a szőkék között a svédek kis százalékban vannak, tehát nem fordítható meg az állítás. (Lásd a 2778. feladat megoldását!)

2986. Igaz, ha a háromszög magasságpontja kívül esik, akkor tompaszögű.

2987. Mindazokra a k, n pozitív egészekre igaz, amelyekre fennáll: $k + n = 2001$.

2988. Százhúszféleképpen, mert 5 különböző elem lehetséges sorrendjeinek a száma (permutációja) $5! = 120$.

2989. Hatezer-hétszázhúszféleképpen, mert 8 különböző elem közül kell 5-öt kiválasztani úgy, hogy a sorrend számít (vagyis most az, hogy *melyik* sütemény *kié* lesz). Ez egy variációs probléma, amelyben a lehetőségek száma: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{8!}{(8-5)!} = 6720$.

2990. Ötvenhatféleképpen, mert 8 különböző elem közül kell 5-öt kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít (hiszen mindegyik kiválasztott sütemény úgyis Alexé). Ez egy kombinációs probléma, amelyben a lehetőségek száma: $\dbinom{8}{5} = \dfrac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = 56$.

2991. Minden egyes mérkőzés kimenetele, így a tipp is 3-féle lehet: 1, 2 és x. A 13+1 db mérkőzés kimenetele 3^{14}-féle lehet. Ennyi, azaz 4 782 969 db totószelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen telitalálatunk.
Ezek ára: $4\,782\,969 \cdot 130 = 621\,785\,970$ Ft (több, mint 621 milliárd) (ha egy totószelvény ára 130 Ft).

2992. Az első öt lovat kell eltalálni. Az első 18-féle lehet, a második 17, s így tovább. Azaz $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 = 1\,028\,160$-féle kitöltés lehetséges.

2993. Mivel az első jegy fix, ezért csak 8 jegyet variálhatunk (0 vagy 1), azaz $2^8 = 256$ termék jelölhető meg így.

2994. Ahányféleképpen 10-ből 8-at lehet kiválasztani, azaz $\dbinom{10}{8} = \dbinom{10}{2} = \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$-féleképpen.

2995. Az első helyre 7 zászlót választhatnak, a másodikra már csak 6-, aztán 5-, 4-, 3-féle zászlót tehetnek, ezek szorzata: 2520, tehát ennyiféle jelzést adhatnak le.

2996. Mivel fiú három van, ezért csak fiú-lány-fiú-lány-fiú sorrend lehet, azaz $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$-féle csoportkép lehet.

Másik megoldás:
A fiúk sorba állhatnak $3! = 6$-féleképpen, a lányok $2! = 2$-féleképpen, és mivel csak egyféleképpen lehet „összefésülni" a két csoportot (f-l-f-l-f), ezért $6 \cdot 2 = 12$-féle csoportkép lehetséges.

2997. Az A-ból indulva bármelyik utat választjuk is a 3 közül, C-be érkezve mindig 5 lehetőségünk van a B-be vezető út kiválasztására. Összesen tehát $3 \cdot 5 = 15$-féleképpen juthatunk el C-n keresztül A-ból B-be.

2998. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féleképpen.

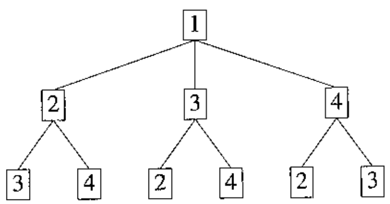
2999. $42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = \frac{42!}{36!} = 3\,776\,965\,920$-féle lista lehetséges.

3000. Adott az $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$-es számkártya.

Az első helyre a 4 számkártya közül bármelyik kerülhet, így a lehetséges esetek száma 4.
A második helyre már csak 3 számjegy kártyából választhatunk, ez 3 esetet jelent.
Az első két helyre $4 \cdot 3$-féleképpen választhatunk kártyát.
A harmadik helyre már csak két kártyából választhatunk, ez két eset.
Ebből kapjuk, hogy a négy kártyából $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ háromjegyű szám állítható elő.

Megjegyzés:

1. A lehetséges esetek száma jól szemléltethető az ún. fagráffal. Az ábra mutatja, hogy a négy kártyából előállítható háromjegyű, 1-essel kezdődő számok száma 6. Ebből már lehet következtetni arra, hogy 2-essel, 3-assal és 4-essel is 6 szám kezdődik.



   Tehát $4 \cdot 6 = 24$ db 3 jegyű szám állítható elő az adott kártyákból.
2. Ugyan a feladat szövege a létrejövő háromjegyű számokat nem kérdezi, de szisztematikus előállításuk is segíthet annak megállapításában, hogy hány ilyen háromjegyű szám van.

3001. Adott az $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$-es számkártya.

Az első helyre a négy szám közül bármely kerülhet, így a lehetséges esetek száma 4.
A második helyre az előzőtől függetlenül ugyancsak négy jegyből választhatunk, ez is 4 eset.
A harmadik helyen is ugyanígy 4 eset lehetséges.
A feladatnak $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ háromjegyű szám felel meg.

3002. A **G**-től az **L**-ig 5 lépés vezet, ezek közül 2 „lefelé"; a különböző lehetőségek száma így $\binom{5}{2} = 10$.
Az **L**-től a **K**-hoz egyetlen út vezet, a **K**-tól az **Ó**-ig pedig 3 különböző.

A **GONDOLKODÓ** szó tehát $10 \cdot 1 \cdot 3 = 30$ különböző módon olvasható ki az ábrából.

3003. A **C**-től indulva a Pascal-háromszög képzési szabályát követve kapjuk meg mindegyik betűre, hogy hány különböző út vezet hozzájuk (az **Á**-khoz 1-1, a **P**-khez fentről lefelé haladva 1-2-1, az **A**-khoz 1-3-3-1 stb.). A **Z**-hez vezető különböző utak száma így $\binom{6}{3} = 20$. A **Z**-től indulva az **O**-khoz 1-1 út vezet, az **N**-ekhez 1-2-1, végül mindkét **Y**-hoz 3-3. Ez azt jelenti, hogy a **Z** betűtől 6 különböző módon juthatunk el valamelyik **Y**-ig. A **CÁPAUSZONY** szó tehát $20 \cdot 6 = 120$-féleképpen olvasható ki az ábrából.

3004. Kötött az (AB), illetve a (DC) sorrend, amivel azt jelöljük, hogy B közvetlen A után, C pedig közvetlen D után szerepel. Ezért az énekszámok kétféle sorrendben hangozhattak el: $ABDC$, illetve $DCAB$.

3005. A bulin x lány és $20 - x$ fiú vett részt.

Az 1. lány (Zsuzsa)	7 fiúval,
a 2. lány (Éva)	8 fiúval,
a 3. lány (Klári)	9 fiúval,
...	...
az x. lány (Ági)	$x + 6$ fiúval, azaz az összes fiúval táncolt.

Így $x + 6 = 20 - x \Rightarrow x = 7$, tehát a buliban 13 fiú volt.

Megjegyzés:
A feladatot egyenlet nélkül is megoldhatjuk. A fenti „táncsort" addig folytatjuk, míg a két oszlopban egymás mellé írt lányok és fiúk számának összege 20 lesz.

3006. Mivel nem lehet azonos szín, ezért a 3 szín különböző sorrendjei (permutációi) adják a megoldást, azaz $3! = 6$-féle zászló lehet.

3007. A legfelső sorban 4-féle szín szerepelhet, ettől függetlenül az alatta levőben 3-féle, mert az előzőleg felhasznált szín nem. (két azonos színű sáv nem lehet egymás mellett) A legalsó sávban ezektől függetlenül újra 3 szín közül választhatunk, mert felhasználhatjuk a legfelső sávban használt színt, de nem használhatjuk a középső sávban levő színt. Tehát az adott feltételek mellett $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$-féle különböző zászló készülhet.

3008. a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n;$

b) $\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{-(n^2+3n+1)}{(n+2)!}.$

3009. a) $(n+2)!$;

b) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+2)(n+1)n.$

3010. Öt labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzése során $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ mérkőzés van, mert minden csapat 4 másikkal játszik, és minden mérkőzést kétszer vettünk figyelembe (ezért kell osztani 2-vel). Ha összesen 50 gólt rúgtak, akkor egy mérkőzésen átlagosan 5 gól esett.

3011. Öt páratlan számjegy van (1; 3; 5; 7; 9). A keresett pozitív négyjegyű szám minden helyiértékére egymástól függetlenül ez az öt számjegy írható. Így $5^4 = 625$ olyan négyjegyű szám van, melynek minden jegye páratlan.

3012. 5 tanulóból kéttagú küldöttséget 10-féleképpen lehet kiválasztani, mivel:

$\dbinom{5}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10.$

Három tanulót $3! = 6$-féleképpen lehet sorba rakni, azaz több bizottság létezik, mint sorrend.

3013. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. (*ABC, ABD, ACB, ACD, ADB, ADC*: ez hat eset, és ugyanennyi *B*, *C* és *D* kezdetű van, azaz tényleg 24.)

3014. Az ötös esélye: $\dfrac{1}{\dbinom{90}{5}} = \dfrac{5!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$. A négyesé: $\dfrac{\dbinom{5}{4} \cdot \dbinom{85}{1}}{\dbinom{90}{5}} = \dfrac{5 \cdot 85}{\dbinom{90}{5}}$.

Azaz a négyes esélye $5 \cdot 85 = 425$-szöröse az ötösének.

3015. 4-féleképpen lehet kihagyni azt az egy tanulót, aki nem kap, mivel csak hárman kapnak (legfeljebb egyet). A három könyv egyforma, tehát mindegy, ki melyiket kapja. Azaz 4 eset van.

3016. Itt most különbözők a könyvek, tehát 6-féle módon oszthatók el a három kiválasztott gyerek között. Vagyis itt most $4 \cdot 6 = 24$ eset van.

3017. Most bonyolultabb a helyzet, mert egy gyerek több könyvet is kaphat. Ha a gyerekek felől nézzük, akkor nehezebb összeszámolni, bár ez is lehetséges. Kaphatja mind a három könyvet egy gyerek, ez 4 eset. Egy gyerek kaphat két könyvet, és egy másik egyet. A két gyereket 12-féleképpen lehet kiválasztani $(4 \cdot 3)$, míg a megmaradt könyvet háromféleképpen (akkor a másik kettő már adott), ez tehát összesen 36

GONDOLKODÁSI MŰVELETEK

lehetőség. Végül három gyerek kaphatja a három könyvet, mint a 3016. feladatban láttuk, 24-féleképpen. Ezzel az összes lehetőség: $4 + 36 + 24 = 64$.
Sokkal egyszerűbb „a könyvek felől nézni". Az első könyv lehet 4 gyereké, a második szintén és a harmadik is, azaz $4^3 = 64$ lehetőség van.

3018. Ha a konvex sokszög csúcsainak száma n, akkor oldalainak száma is n és átlóinak száma $\dfrac{n(n-3)}{2}$, ezért: $n + \dfrac{n(n-3)}{2} = 136.$

Rendezve: $n^2 - n - 272 = 0$

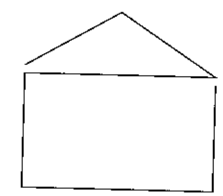
Megoldóképlettel -16, illetve 17 adódik, de esetünkben csak a pozitív megoldás jöhet szóba. A sokszögnek tehát 17 csúcsa van.

Ellenőrzés:

A konvex 17-szögnek $\dfrac{17 \cdot 14}{2} = 119$ átlója van.

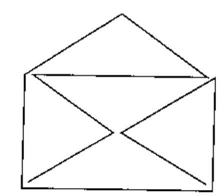
$119 + 17 = 136$, tehát megfelel a feladat szövegének.

3019. Igen, pl. az ábra szerint. (Azon gráfok rajzolhatók meg az adott módon egy vonallal, amelyben 0 vagy 2 páratlan fokú csúcs van. Ha utóbbi a helyzet, akkor kötelezően az egyik páratlan fokúból kell indulni, és a másikban befejezni a rajzolást.)



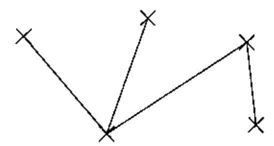
3020. Ez az ábra (gráf) nem rajzolható meg a feltételek szerint, hiszen 4 olyan pontja is van, amelyből 3 él indul ki. Az egyik ilyen pontból kezdjük a rajzolást, egy másik ilyenben fejezzük be, de közben minden más ponton csak áthaladunk (esetleg többször), ami ugyanannyi „beérkezést", mint „kiindulást" jelent a többi pontban (és esetleg az induló és befejező pontban is), tehát ezekből páros számú él kell kiindulnjon (a kezdő és befejező pont esetében a kezdő és befejező élen kívül). A másik két 3-élű csúcson nem tudunk „áthaladni" megfelelően, mert vagy kimarad egy él, vagy az egyiken kétszer haladunk át.

3021. Igen, pl. az ábra szerint, hogy még nem is keresztezik egymást a vonalak, bár ez nem volt feltétel. Természetesen számos más módon is megoldható a feladat. (Lásd a 3019. megoldás megjegyzését!)

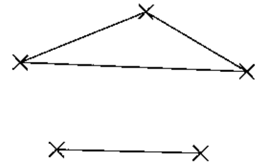


3022. Legalább 2 éle van (ez a fa).

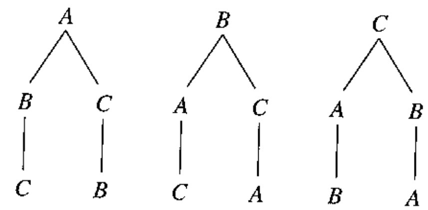
3023. Lásd a mellékelt ábrát! (Természetesen sok egyéb lehetőség is van.)



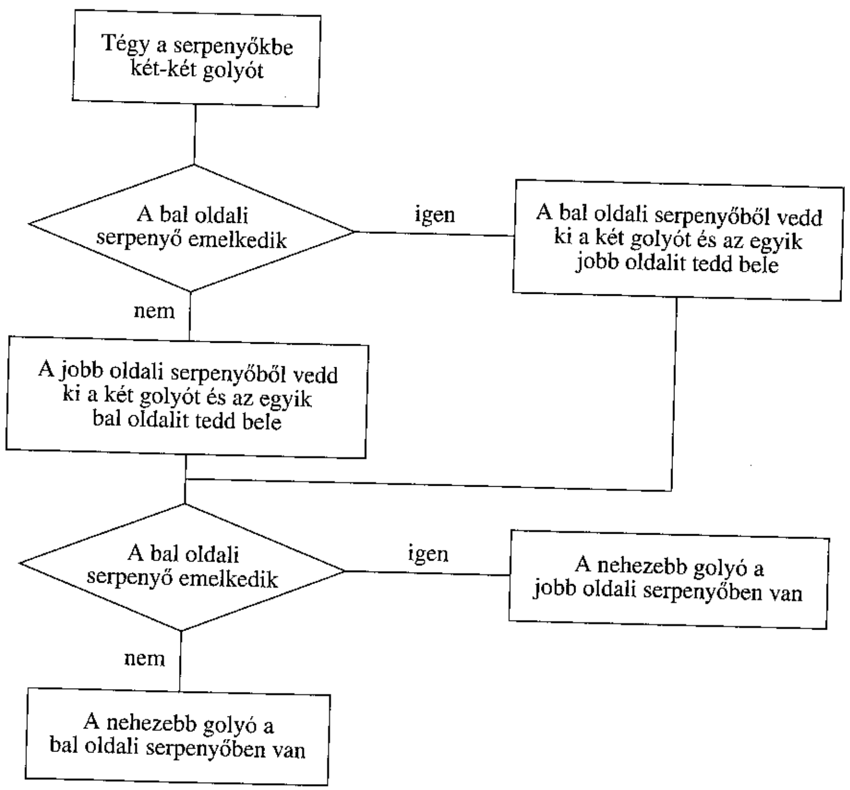
vagy



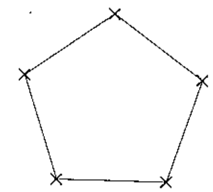
3024. Legyenek a feladatok jelei: A, B, C. Ekkor, ha egyszerre csak egyet csinálhat, akkor 6 sorrend adódik: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB és CBA. (Lásd az ábrát!)



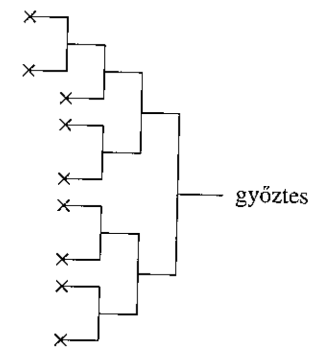
3025.



3026. A lehetőségek száma 12.
A körben az 5 település szerepel egymás után.
Éppúgy $\frac{4!}{2}$-féle eset van, mint ahányféleképpen egy kör alakú asztalhoz 5 ember leülhet.



3027. *Egy lehetőség:*
Az első körben a két legkevésbé esélyest párosítjuk össze (ez amolyan selejtező!). A győztes a többi héttel alkotja a 8 játékost. Innentől már sima ügy, a nyolcat párosítjuk, s a győztesek éppen négyen lesznek, őket újra lehet párosítani, a két győztes pedig a döntőt játssza. Összesen tehát $1 + 4 + 2 + 1 = 8$ mérkőzés lesz. Ennél kevesebbel nem lehet megoldani, mert minden meccsen egy esik ki, és a végső győztes kiválasztásáig 8 embernek kell kiesnie, azaz 8 meccs kell. A lebonyolítást mutatja az ábra.



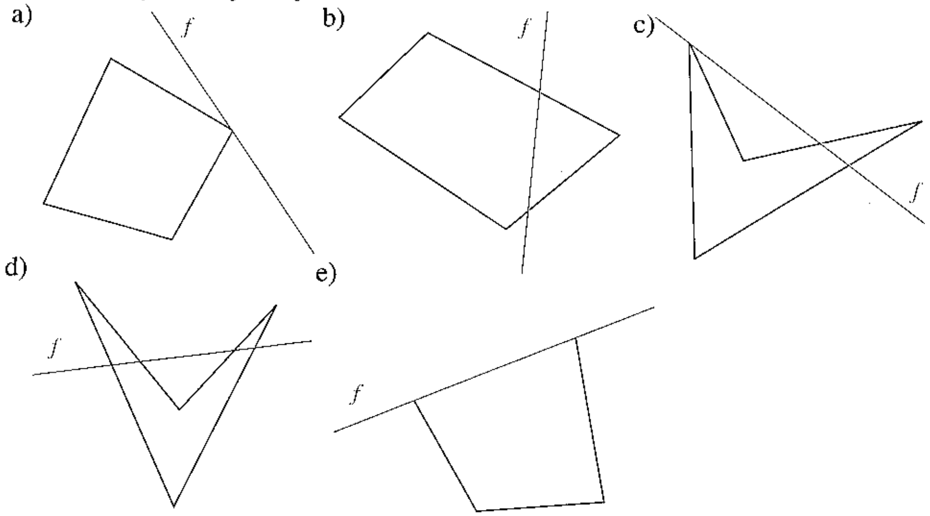
3028. Tudjuk, hogy a gráf éleinek száma éppen kétszerese az egyes csúcsokból induló élek száma összegének. Mivel $4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 12$, a gráfnak 6 éle van.

3029. A keresett szám: $4 \cdot 14 + 1 = 57$.
Ha legfeljebb 56 golyót választunk, akkor lehetséges, hogy egyik színből sincs 15 golyó (pl. 56 golyó választása esetén mindegyik színből 14-14 golyót választottunk).
Ha 57 golyót választunk, akkor nem lehetséges, hogy minden színből legfeljebb 14-et választottunk, hiszen $4 \cdot 14 = 56 < 57$. Kell legyen tehát olyan szín, amelyikből legalább 15-öt választottunk.

3030. 69.
Indoklás: alkalmazzuk a logikai szita formulát! Vonjuk le 100-ból azoknak a természetes számoknak a számát, amelyek oszthatók 5-tel, majd azoknak a számát, amelyek oszthatók 7-tel. Így a 35-tel osztható természetes számok (0, 35, illetve 70) számát (a 3-at) duplán vontuk le, pedig csak egyszer kellett volna. Ezért ezt a számot (azaz a 3-at) adjuk hozzá az eredményhez: $100 - 20 - 14 + 3 = 69$.

3031. A sorsoláson kihúzott 5 szám közül valamelyik hármat megjelölte az egyik testvér, így csak két olyan szám maradt, amelyekkel a másik testvér találatot érhetett el. Ezért, ha neki is három találata volt, akkor az első testvér által először kiválasztott három szám közül neki is kellett (legalább egyet) választania.

3032. Mindegyik kérdésre igen a válasz.
Példákkal igazolhatjuk kijelentésünket:



3033. Az 1-re végződő egész számok bármely hatványának utolsó számjegye 1. Így 11^n utolsó számjegye is 1. Ebből 1-et kivonva a kapott szám utolsó számjegye 0, így osztható 10-zel.

3034. A tavirózsa 1. nap 2-szörösére,

2. nap $2^2 = 4$-szeresére,
3. nap $2^3 = 8$-szorosára,
4. nap $2^4 = 16$-szorosára,

...

30. nap 2^{30}-szorosára nő és ezzel teljesen benövi a tavat.

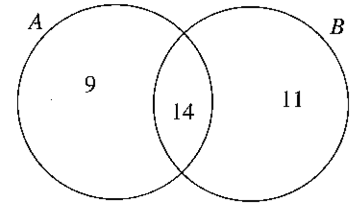
Két tavirózsa együtt 29 nap alatt borítja be a tavat, mert 29 nap alatt mindkét tavirózsa 2^{29}-szeresére nő, és $2^{29} + 2^{29} = 2 \cdot 2^{29} = 2^{30}$.

Másik megoldás:
Ha egy tavirózsa 30 nap alatt az egész tavat benövi (és minden nap az előző napi kétszeresére nő), akkor 29 nap alatt a felét. Tehát a két tavirózsa 29 nap alatt az egész tavat beborítja.

3035. Igaz, hiszen összesen öt jegyet lehet kapni (1, 2, 3, 4, 5) és hat tanuló van, tehát valamelyik jegyből legalább kettő lesz. (Szokás ezt skatulyaelvnek is nevezni.)

3036. A megfordítás: „Ha egy 5 pontú gráfnak van legalább 4 éle, akkor a gráf összefüggő." Nem igaz, hiszen például egy 5 pontú gráfban lehet egy háromszög, ez három él, és a másik két pontot összekötő negyedik él. Ez a gráf pedig nem összefüggő. (Lásd a 3023. feladat 2. ábráját!)

3037. Ha a palacsintát kedvelők az A és a dobostortát kedvelők alkotják a B halmazt, akkor az osztály tanulóinak halmazát C-vel jelölve: $C = A \cup B$.
Tudjuk, hogy
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (ez a szitaformula két halmazra, lásd még az ábrát is.) Esetükben $23 + 25 - 14 = 34$.
Azaz 34 tanuló jár az osztályba.



3038. c) (A definíció miatt.)

3039. e) (Tulajdonképpen ez a szitaformula.)

3040. d) (Bármely halmaz komplementere, az alaphalmaznak hozzá nem tartozó elemeiből áll.)

3041. c) (az első és a harmadik).

3042. d) (Csak a harmadik kijelentés igaz.)

3043. c) (Az első és a harmadik állítás hamis, ebből már adódik a többi állítás logikai értéke.)

3044. b) (Tádé nem mondhatott igazat, mert akkor Mazsola és Cicamica is hazudott volna.)

3045. e) („Nem minden kutya harapós" ugyanazt jelenti, mint a „Van olyan kutya, amelyik nem harapós.")

3046. c) (A definíció miatt.)

3047. d) (A definíció miatt.)

3048. b) $\binom{10}{2} = 45$ kézfogás történt.)

3049. d) (Lilinek 5-féle választása van, és mindegyik esethez társulhat Matyi 4-féle választása. Ez tulajdonképp egy variációs probléma: 5 különböző elemből kell választani 2-t úgy, hogy a sorrend számít.)

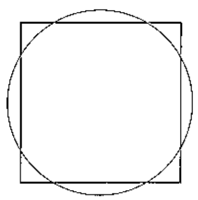
3050. c) (Elsőként 5-félét választhat, aztán 4-et, 3-at, 2-t, 1-et – és mindegyik választáshoz társulhat mindegyik másik. Ez tulajdonképp egy permutációs probléma, 5 különböző elem minden lehetséges sorrendje, 5!.)

3051. b) (Kiválasztja a 6-féle sisak közül azt a 2-t, amiből vesz $\frac{6 \cdot 5}{2}$-féleképpen. Ez tulajdonképp egy kombinációs probléma, hiszen a választás sorrendje nem számít, $\binom{6}{2}$.)

3052. d) ($\frac{22 \cdot 21}{2} = 231$).

3053. d) (A szülők közti korkülönbség nem változik az idő múlásával.)

3054. e)
Például:



3055. d) (A konvex tízszög átlóinak száma $\frac{10 \cdot 7}{2} = 35$.)

3056. b) ($C = A + 2 \wedge B = A + 5 \Rightarrow C = B - 3$.)

3057. a) ($3f = 6p \wedge 3p = 15g \Rightarrow 3f = 30g \Rightarrow 1f = 10g$.)

3058. e) (Legalább $3 \cdot 12 + 1 = 37$ tanuló esetén.)

6.2. Algebra

3059. Az összeadás tagjai felcserélhetőek, ettől az összeg értéke nem változik.
Pl. $3 + 4 = 4 + 3 = 7$, vagy $-4 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + (-4) = -\frac{10}{3}$.
Általánosan: $a + b = b + a$.

3060. Egy (kettőnél több tényezős) szorzás tényezői tetszés szerint csoportosíthatók, és a kijelölésnek megfelelően más és más sorrendben hajthatók végre a szorzások, ettől a szorzat értéke nem változik. Például $5 \cdot (3 \cdot 4) = 5 \cdot 12 = 60$, de ugyanennyi $(5 \cdot 3) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$; vagy $-3 \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot 4\right) = -3 \cdot \frac{8}{5} = -\frac{24}{5} = -4{,}8$, de ugyanennyi $\left(-3 \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot 4 = -\frac{6}{5} \cdot 4 = -\frac{24}{5} = -4{,}8$.
Általánosan: $a(bc) = (ab)c$.

3061. Ha annak a műveletnek, amely disztributív a másikra nézve, egy zárójeles kifejezés az egyik változója („résztvevője", „szereplője"), és a zárójelen belül található két változóval a másik művelet (amelyre nézve disztributív az előző), akkor a zárójel felbontható úgy, hogy a másikra nézve disztributív művelet az eredetileg a zárójelen kívüli változót összeköti mindkét, zárójelen belüli változóval, és ezen műveletek eredményét kapcsolja össze a másik művelet. Ilyen eset például, hogy a szorzás disztributív az összeadásra nézve: $3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 7 = 21$, vagy másképpen a zárójelet felbontva $3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21$; az osztás disztributív az osztandójában lévő összeadásra nézve: $(3 + 5) : 2 = 8 : 2 = 4$, vagy a zárójelet felbontva $3 : 2 + 5 : 2 = 1{,}5 + 2{,}5 = 4$; a hatványozás disztributív az alapjában lévő szorzásra nézve: $(5 \cdot 3)^2 = 15^2 = 225$, vagy a zárójelet felbontva $5^2 \cdot 3^2 = 25 \cdot 9 = 225$; a metszetképzés disztributív az unióképzésre nézve, azaz
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3062. a) Hamis. Például $0 \cdot \sqrt{2} = 0$.
b) Hamis. Például $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.
c) Igaz. Például $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

3063. a) A tört egyszerűsítése után kiszámítandó a $72 \cdot 73 \cdot 74 \cdot 75$ szorzat: 29 170 800.
b) $72 \cdot 71! = 72!$ és $\frac{73!}{73} = 72!$, tehát a felírt különbség értéke 0.

3064. a) $(14-3)\cdot 4+8:2 = 11\cdot 4+8:2 = 44+4 = 48$
b) $14-3\cdot(4+8):2 = 14-3\cdot 12:2 = 14-36:2 = 14-18 = -4$
c) $(14-3)\cdot(4+8):2 = 11\cdot 12:2 = 132:2 = 66$

3065. Hozzuk közös nevezőre az adott számokat!
$a := \frac{1}{5^{16}} = \frac{5^3}{5^{19}} = \frac{125}{5^{19}}$ $\quad b := \frac{3}{5^{17}} + \frac{9}{5^{18}} - \frac{4}{5^{19}} = \frac{3\cdot 5^2 + 9\cdot 5 - 4}{5^{19}} = \frac{116}{5^{19}} \Rightarrow a > b.$

3066. a) Felosztjuk a lécet $1 + 3 = 4$ egyenlő részre, ekkor 1 rész $\frac{6}{4} = 1{,}5$ (m). Veszünk 1, illetve 3 darabot, ezek 1,5 és 4,5 m hosszúak lesznek.
b) Felosztjuk a lécet $2 + 3 = 5$ egyenlő részre, ekkor 1 rész $\frac{6}{5} = 1{,}2$ (m). Veszünk 2, illetve 3 darabot, ezek 2,4 és 3,6 m hosszúak lesznek.

3067. a) Felosztjuk a lécet $3 + 7 = 10$ egyenlő részre, ekkor 1 rész $\frac{6}{10} = 0{,}6$ (m). Veszünk 3, illetve 7 darabot, ezek 1,8 és 4,2 m hosszúak lesznek.
b) Felosztjuk a lécet $1 + 1 = 2$ egyenlő részre, ekkor 1 rész $\frac{6}{2} = 3$ (m). Ez a két 3 m-es darab adja a megoldást.

3068. Ha 3 gombóc fagyi 120 Ft, akkor 1 gombóc $(\frac{120}{3} =)$ 40 Ft. Ekkor 5 gombóc ára $(5\cdot 40 =)$ 200 Ft, 280 Ft-ért pedig $(\frac{280}{40} =)$ 7 gombócot adnak.

3069. 10 gombócot venni gombóconként 60 Ft-ért 600 Ft-ból lehet. Ennyiért az olcsóbb fagyisnál $(\frac{600}{50} =)$ 12 gombócot vehetnénk. Ahol ennyi pénzből 15 gombócot kapunk, ott $(\frac{600}{15} =)$ 40 Ft egy gombóc ára.

3070. Azt jelenti, hogy (mivel az 1 kg 1%-a 1 dkg) a zacskó tartalma 99 dkg és 101 dkg között van. (Pontosabban: ekkora cukormennyiség számít elfogadhatónak. Az ezen kívül eső tömeg esetén jogos a reklamáció.)

3071. „A tej zsírtartalma 1,5% (2,8%, illetve 3,6%)" azt jelenti, hogy 100 gramm tej 1,5 g (2,8 g, illetve 3,6 g) zsírt tartalmaz.

3072. Az első munkás 95%-os normája azt jelenti, hogy az illető adott idő alatt az előírt (norma szerinti) pl. 100 termékből 95 terméket gyártott.
A második munkás 76%-os teljesítménye azt jelenti, hogy az illető adott idő alatt az előírt (norma szerinti) 100 termékből 76 terméket gyártott.
A két munkás együtt adott idő alatt az előírt (norma szerinti) 200 termékből 171 terméket gyártott, így együttes teljesítményük $(\frac{171}{200} = 0{,}855 \Rightarrow)$ 85,5%-os.

3073. Legyen a 2000. december havi bér b Ft.
A 2001. január 1-jétől érvényes bér (forintban kifejezve) $1{,}085b$, a szeptember 1-jétől érvényes bér pedig $1{,}085b + 0{,}2b = 1{,}285b$.
A 2001-ben kapott összes bér: $8\cdot 1{,}085b + 4\cdot 1{,}285b = 13{,}82b$, szemben a 2000. évi $12b$-vel (feltettük, hogy 2000-ben mindvégig változatlan maradt a bér).
A 2001. évi összes bér a 2000. évinek $\frac{13{,}82}{12}\cdot 100\%$-a (kb. 115,2%-a).
Egész évre számítva tehát kb. 15,2%-os átlagos béremelés valósult meg.
A 30%-ról szóló hír hamis.

3074. Számoljunk normálalakkal: $1{,}7\cdot 10^5\cdot 1{,}1\cdot 10^5\cdot 0{,}12\cdot 12 = 1{,}7\cdot 1{,}1\cdot 1{,}2^2\cdot 10^{10} \approx$ $\approx 2{,}693\cdot 10^{10}$, azaz kb. 26,93 milliárd forint többletkiadást jelent éves szinten.

3075. a) $0{,}624\cdot 0{,}436 \approx 0{,}272$. A teljes szavazókorú népesség kb. 27,2%-a szavazott a győztes pártra.
b) $\frac{10\,610\,496}{0{,}624\cdot 0{,}436} = 39\,000\,000.$

3076. A jegy árának 93%-a jár vissza, azaz $1300\cdot 0{,}93 = 1209$ forint.

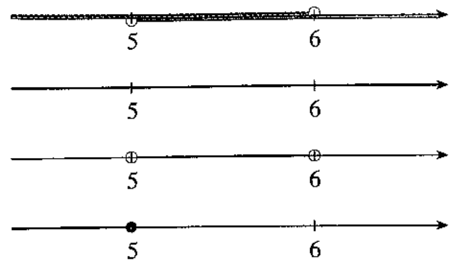
3077. Elegendő a régi árakat 0,76-dal szorozni, hiszen az új ár a réginek 76%-a.

3078. Ha a szükséges évek számát n jelöli, akkor igaz, hogy $1000\cdot 1{,}06^n = 12\,250$.
Ebből $n\cdot \lg 1{,}06 = \lg 12{,}25$, vagyis $n = \frac{\lg 12{,}25}{\lg 1{,}06} \approx 43$.
Tehát kb. 43 év alatt növekszik fel a megadott értékre az 1000 eurós tőke.

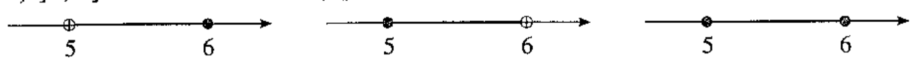
3079. Ha a téglalap oldalait 10 és 25 mm-nek adták meg, akkor $9{,}5 \le a < 10{,}5$ és $24{,}5 \le b < 25{,}5$. Ekkor a legkisebb téglalap az, ahol mindkét oldal a legrövidebb, azaz $9{,}5\cdot 24{,}5 = 232{,}75$ (mm²). A legnagyobb téglalap az, ahol a két oldal maximális, azaz $10{,}5\cdot 25{,}5 = 267{,}75$ (mm²). Azaz a téglalap pontos területe e két határ között van: $232{,}75\ \text{mm}^2 \le T < 267{,}75\ \text{mm}^2$.
(Fontos, hogy ez a tartomány a $10\ \text{mm}\cdot 25\ \text{mm} = 250\ \text{mm}^2$-re – bár az eltérés most nem nagy, de – nem szimmetrikus. Ez minden hasonló esetben így van.)

3080. a) $]-\infty; \infty[= \mathbf{R}$ b) $]5; 6[$ c) $]-\infty; 5]$

Ábrázolva előbb a két kiinduló intervallumot, majd a három eredményt:



3081. a) $]5; 6]$ b) $[5; 6[$ c) $[5; 6]$



3082. a) $]-\infty; 5]$ b), c) $]-\infty; 5[$

3083. Egyik módon: $\sqrt{6^4 \cdot 6^{\log_6 36}} = \sqrt{6^4 \cdot 36} = \sqrt{6^4} \cdot \sqrt{36} = 6^2 \cdot 6 = 6^3$ $(= 216)$.

Másként: $\sqrt{6^{4+2}} = \sqrt{6^6} = 6^3$.

3084. a) $10^{\frac{1}{2}\lg 4} = 10^{\lg 4^{\frac{1}{2}}} = 10^{\lg 2} = 2$

b) $4^{\frac{1}{3}\log_2 27} = (2^2)^{\frac{1}{3}\log_2 27} = 2^{\frac{2}{3}\log_2 27} = 2^{\log_2 27^{\frac{2}{3}}} = 2^{\log_2 9} = 9$

c) $0{,}2^{\log_5 8} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 8} = (5^{-1})^{\log_5 8} = 5^{-\log_5 8} = 5^{\log_5 8^{-1}} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

3085. A logaritmus azonosságainak felhasználásával: $\lg\frac{\sqrt{28} \cdot 8 \cdot 5^3 \cdot \sqrt{175}}{7}$, majd innen összevonások révén: $\lg\frac{\sqrt{28 \cdot 175} \cdot 8 \cdot 125}{7} = \lg\frac{\sqrt{4900} \cdot 1000}{7} = \lg\frac{70 \cdot 1000}{7} =$

$= \lg 10000 = 4$.

3086. $\frac{9^3 \cdot 27^5}{81^2 \cdot 3^{10}} = \frac{(3^2)^3 \cdot (3^3)^5}{(3^4)^2 \cdot 3^{10}} = \frac{3^6 \cdot 3^{15}}{3^8 \cdot 3^{10}} = \frac{3^{21}}{3^{18}} = 3^3 = 27$

3087. $2^{16} - 2^{15} = 2^{15}(2-1) = 2^{15}$

3088. a) 1 b) -1 c) $-\frac{1}{27} = -0{,}\overline{037}$

3089. a) $\frac{1}{\left(\frac{4}{7}\right)^2} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ $\left(= \frac{49}{16} = 3{,}0625\right)$

b) A 0 negatív kitevős hatványait nem értelmezzük, hiszen pl. 0^{-6} formálisan $\frac{1}{0^6}$ volna, azaz $\frac{1}{0}$, ami értelmetlen.

3090. $\sqrt{72} + 3\sqrt{50} + \sqrt{12} - \sqrt{27} = 6\sqrt{2} + 15\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 21\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

3091. Az egyenlőség nem igaz.

$17 - 4\sqrt{15} = \sqrt{289} - \sqrt{240} > 0$ az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedő volta miatt. Egy pozitív valós szám négyzetgyöke is pozitív valós szám, ezért az egyenlőségjel bal oldalán álló szám pozitív.

$\sqrt{5} - 2\sqrt{3} = \sqrt{5} - \sqrt{12} < 0$ az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedő volta miatt, így az egyenlőségjel jobb oldalán negatív szám áll.

3092. $2^{x+1} = \frac{1}{32}$.

Felírjuk a jobb oldalt is 2-es alapú hatványként.

Minthogy $32 = 2^5$, ezért $2^{x+1} = 2^{-5}$.

Az exponenciális függvény szigorúan monoton volta miatt $x + 1 = -5$, amiből $x = -6$ adódik. Ez kielégíti az eredeti egyenletet.

3093. $3^{1+x} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^3}$;

$3^{1+x} = 3^{-\frac{5}{2}}$;

az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért $1 + x = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$.

3094. $2^{\frac{x-1}{1-x}} = \frac{1}{2}$.

Minthogy $\frac{x-1}{1-x} = -1$, ha $x \neq 1$, az eredeti egyenlet ekkor $2^{-1} = \frac{1}{2}$, tehát azonosság. Megoldás: az összes valós szám, kivéve az 1-et.

3095. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 9$. Mindkét oldalt 3-as alapú hatványként írjuk fel. $3^{1-x} = 3^2$. Az exponenciális függvény szigorúan monoton volta miatt a kitevők egyenlők:
$1 - x = 2 \Rightarrow x = -1$, ez kielégíti az eredeti egyenletet.

3096. $\sqrt{x-3} = x - 3$. A négyzetgyök függvény értelmezési tartománya és értékkészlete miatt: $x - 3 \geq 0$, azaz $x \geq 3$.

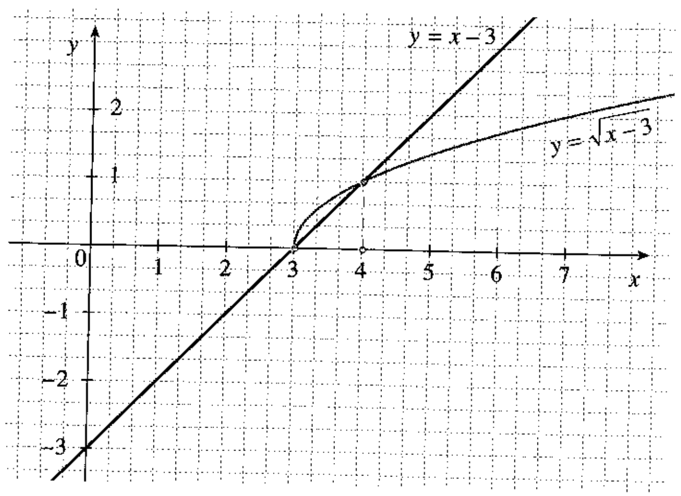
Algebrai megoldás:

Minthogy $x - 3 = (\sqrt{x-3})^2$ az $x \geq 3$esetén, az eredeti egyenlet átírható így:
$\sqrt{x-3} = \sqrt{x-3}\sqrt{x-3}$, ezt rendezve és szorzattá alakítva $\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3} - 1) = 0$,
ebből $\sqrt{x-3} = 0$ vagy $\sqrt{x-3} = 1$,
innen $x = 3$ vagy $x = 4$.
Mindkét érték eleget tesz a feltételnek, továbbá az eredeti egyenletben az $x = 3$ esetén mindkét oldalon 0 áll, $x = 4$ esetén mindkét oldal 1.

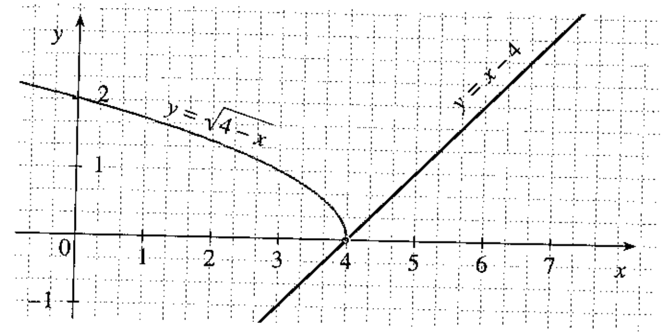
Megjegyzés:

1) Új ismeretlen bevezetésével is célhoz jutunk. $a := \sqrt{x-3}$, ekkor az egyenlet így írható: $a = a^2$, ezt rendezve és szorzattá alakítva a fenti gondolatmenettel dolgozunk tovább.
2) Kezdhetjük azzal is, hogy az eredeti egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük. A négyzetre emelés általában nem ekvivalens művelet, mert ezzel az értelmezési tartomány bővül, tehát felléphetnek hamis gyökök is. Ezért ezt az utat csak akkor alkalmazzuk, ha nincs más lehetőség a megoldásra.

A *grafikus megoldás* az ábráról leolvasható.



3097. $\sqrt{4-x} = x - 4$.
A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt: $4 - x \geq 0$, azaz $x \leq 4$.
A négyzetgyökfüggvény értékkészlete miatt: $x - 4 \geq 0$, azaz $x \geq 4$.
E két feltételnek csak az $x = 4$ felel meg, és ez a feladat megoldása.
A grafikus megoldás leolvasható az ábráról.



3098. $\log_2 (x-1)^2 = 2$. A logaritmusfüggvény értelmezése miatt $x \neq 1$.
A logaritmus definíciója szerint $(x-1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow |x-1| = 2$.
Ebből $x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$;
vagy $x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$.
Mindkét érték kielégíti az eredeti egyenletet.

3099. $\log_2 32 = x$.
A logaritmus definíciója szerint:
$2^x = 32$;
$2^x = 2^5$.
Az exponenciális függvény szigorúan monoton volta miatt $x = 5$.

3100. a) A logaritmus alapja $x > 0$, $x \neq 1$. Írjuk fel az egyenletet hatványalakban!
$x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$.

b) A logaritmus alapja $y > 0$, $y \neq 1$. Írjuk fel az egyenletet hatványalakban!
$y^{-1} = \frac{1}{7} \Rightarrow y = 7$.

3101. a) A logaritmus értelmezése miatt csak pozitív számoknak van logaritmusuk, ezért $z > 0$.
$z = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$.

b) A logaritmus alapja $a > 0$, $a \neq 1$. Írjuk fel az egyenletet hatványalakban!

$$a^{-\frac{3}{4}} = 27 \Leftrightarrow a = 27^{-\frac{4}{3}} = (3^3)^{-\frac{4}{3}} = 3^{-4} = \frac{1}{81}.$$

3102. Azokat a pozitív egészeket nevezzük relatív prímeknek, amelyeknek legnagyobb közös osztójuk 1. (Azaz nincsenek közös prímtényezőik.)

3103. Az „akasztófa"-eljárást alkalmazva:
Eszerint $5544 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.

$$\begin{array}{r|l} 5544 & 2 \\ 2772 & 2 \\ 1386 & 2 \\ 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

3104. Mindkét számot prímtényezők szorzatára bontjuk:
Eszerint $924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ és $980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$.
Ezért a legnagyobb közös osztójuk:
$(924; 980) = 2^2 \cdot 7 = 28$.

$$\begin{array}{r|l} 924 & 2 \\ 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 980 & 2 \\ 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

3105. A két szám prímtényezős felbontását az előző megoldásban meghatároztuk. Onnan kiindulva a legkisebb közös többszörösük: $[924; 980] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 32\,340$.

3106. $CHB_{18} = 12 \cdot 18^2 + 17 \cdot 18^1 + 11 \cdot 18^0 = 3888 + 306 + 11 = 4205$.

3107. Nincs két olyan pozitív egész szám, amelyre teljesülne, hogy $[a; b] > ab$.
Ugyanis $[a; b]$ akkor a legnagyobb, ha a és b relatív prím, azaz $(a; b) = 1$.
Ez esetben $[a; b] = ab$.

3108. Ha a két szám azonos maradékot ad 3-mal osztva, akkor a különbségük nyilván osztható lesz 3-mal. Ha különbözőt (1-et, illetve 2-t), akkor az összegük lesz hárommal osztható, hiszen $1 + 2 = 3$.

Megjegyzés:
Formálisabban is levezethető ugyanez. Három eset lehetséges. Vagy mind a két szám 1 maradékot ad 3-mal osztva ($3k + 1$ és $3z + 1$ alakúak; $k, z \in \mathbf{Z}$), és így különbségük osztható 3-mal: $3k + 1 - (3z + 1) = 3k + 1 - 3z - 1 = 3k - 3z = 3(k - z)$. Vagy egyikük 1, másikuk 2 maradékot ad 3-mal osztva ($3m + 1$ és $3n + 2$ alakúak; $m, n \in \mathbf{Z}$), így összegük osztható 3-mal: $3m + 1 + 3n + 2 = 3m + 3n + 3 =$ $= 3(m + n + 1)$. Vagy mind a két szám 2 maradékot ad 3-mal osztva ($3p + 2$ és $3q + 2$ alakúak; $p, q \in \mathbf{Z}$), és így ismét különbségük osztható 3-mal:
$3p + 2 - (3q + 2) = 3p + 2 - 3q - 2 = 3p - 3q = 3(p - q)$.

3109. Ha az egyjegyűek négyzetének végződéseit sorra vesszük, akkor minden lehetőséget megvizsgáltunk, hiszen a többjegyűek négyzetének végződését is az utolsó jegyük határozza meg. Eszerint 0, 1, 2, ..., 9 négyzete rendre 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 számjegyre végződik, vagy nagyság szerint rendezve: 0, 1, 4, 5, 6, 9. (Tehát 2, 3, 7, 8 végű négyzetszám nincs.)

3110. A 6 egymás utáni pozitív egész szám összege:
$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) = 6a + 15$.
Ez páratlan szám, tehát nincsen olyan a pozitív egész szám, amelyre ez az összeg egyenlő lenne 2002-vel.

Megjegyzés:
Hat egymás után következő egész szám közül három páros, három páratlan. Ezek összege páratlan, tehát nem lehet 2002.

3111. A három számkártyán 2, 4 , illetve 6-os szám szerepel.
A többjegyű számok közül azok oszthatók 4-gyel, amelyeknek az utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám osztható 4-gyel. A megfelelő végződések 24 és 64.
Tehát két ilyen háromjegyű szám készíthető 624 és 264.

3112. $\overline{32551a}$ osztható 18-cal, ha a páros és a számjegyek összege osztható 9-cel. Ezeknek a feltételeknek csak az $a = 2$ felel meg. Tehát a megoldás $a = 2$.
Valóban $325\,512 = 18 \cdot 18\,084$.

Megjegyzés:
Felhasználtuk, hogy egy szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 9-cel és azt, hogy $[9; 2] = 18$.

3113. A számkártyák $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$, a szabadon választható számot jelöljük a-val.
$36 = 4 \cdot 9$. A 4 és 9 relatív prím, így a szám akkor osztható 36-tal, ha egyrészt a számjegyek összege osztható 9-cel. Ez csak az $a = 4$-re teljesül. Másrészt úgy kell megválasztani az utolsó két számjegyet, hogy a kapott kétjegyű szám osztható legyen 4-gyel. A lehetséges végződések e számjegykártyákkal 24, 32, 44, 52. Az ötjegyű szám annál nagyobb, minél kisebb jegyeket használunk fel a szám utolsó jegyeiben és minél nagyobbakat a szám elején. A legnagyobb szám, amely a fenti jegyekből áll és osztható 36-tal: 54 432.

3114. Jelöljük a legkisebb számot a-val! Ekkor a feltétel szerint $A = a(a + 1)(a + 2) = 7k$, ahol a és k is pozitív egész szám. A három szomszédos szám közül legalább az egyik páros és valamelyik osztható 3-mal. Minthogy 2 és 3 relatív prím. Az A szorzat ezért osztható 6-tal. Tehát A osztható 7-tel és 6-tal is. Minthogy $(6; 7) = 1$, ezért A osztható 42-vel.

3115. Legyen a keresett prímszám p. Ekkor a feladat szerint $\frac{p}{3} - \frac{p}{4} < 1$, azaz $\frac{p}{12} < 1$.
A feladatnak megfelelő prímszámok: 2, 3, 5, 7, 11.

3116. Minden 1-nél nagyobb egész számnak 2 db nemvalódi osztója van, az 1 és önmaga. A keresett számnak összesen 12 db (páros számú) pozitív osztója van $\Rightarrow$ nem négyzetszám $\Rightarrow$ a keresett szám minden pozitív osztójának van egy olyan párja, hogy e két szám szorzata adja a keresett számot. Állítsuk tehát párba a valódi osztókat!
$2 \cdot 70 = 4 \cdot 35 = 5 \cdot 28 = 7 \cdot 20 = 10 \cdot 14 = 140$
A keresett szám tehát a 140.

Másik megoldás:
A megadott osztókat prímtényezőkre bontjuk, és ezek legkisebb közös többszöröse adja a keresett számot.

3117. A feltétel szerint:
$$\left.\begin{array}{ll} a = 11x + 2 & x \in \mathbf{N} \\ b = 11y + 3 & y \in \mathbf{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a + b = 11(x + y) + 5 \\ a \cdot b = (11x + 2)(11y + 3) = 11(11xy + 3x + 2y) + 6 \end{array}$$
Tehát $a + b$ 11-es osztási maradéka 5, ab 11-es osztási maradéka 6.

3118. 12 és 30 legkisebb közös többszöröse 60, így 60 méterenként van egymással szemben egy-egy fa, illetve lámpaoszlop.

3119. Az állítás hamis. Legyen pl. $a = 6$, ekkor 9 osztója a^2-nek, azaz 36-nak, de 9 nem osztója a-nak, azaz 6-nak.

3120. Igazat mondott, hiszen
$12^3 - 9 \cdot 12^2 - 27 \cdot 12 - 108 = 1728 - 1296 - 324 - 108 = 0.$

3121. Az eredmény: $x^3 + y^3$.

3122. Minthogy $(x - y)^2 = (y - x)^2$, ezért az eredmény: $-x(x - y)^2$.

3123. $B = \dfrac{(x + y)(x - y) + (x + y)}{x + y} - (x - y)$. A tört számlálójában $x + y$ kiemelhető.
$B = \dfrac{(x + y)(x - y + 1)}{x + y} - (x - y)$, egyszerűsítés után $B = x - y + 1 - x + y = 1$.
Ezek szerint $B = 1$ minden olyan x-re és y-ra, amelyekre $x + y \neq 0$.
Tehát igaz, hogy B értéke független x és y értékétől, ha $x + y \neq 0$.

3124. $ax - bx + a - b = x(a - b) + (a - b) = (a - b)(x + 1)$.

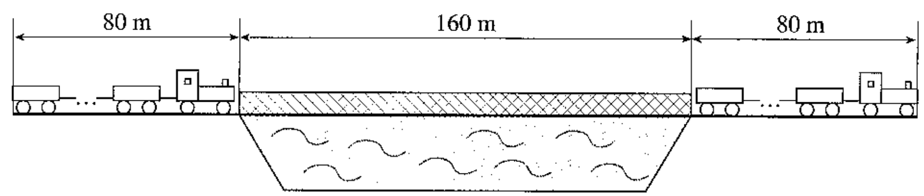
3125. $p^2 - q^2 + p - q = (p - q)(p + q) + (p - q) = (p - q)(p + q + 1)$.

3126. a) $\dfrac{a^2b}{\sqrt{ab}} = \dfrac{a^2b\sqrt{ab}}{ab} = a\sqrt{ab}$; ahol $ab > 0$;

b) $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} = \dfrac{(x - 1)\sqrt{x - 1}}{x - 1} = \sqrt{x - 1}$, ahol $x > 1$.

3127. Legyen az egyik szakasz hossza x, a másik szakasz hossza $5 - x$. A feltétel szerint $\sqrt{x(5 - x)} = \sqrt{6}$.
Mivel minkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens művelet. A kapott $x^2 - 5x + 6 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei 2 és 3.
Tehát az 5 egység hosszúságú szakaszt 2 és 3 egység hosszúságú részekre kell osztani, ekkor a szeletek mértani közepe $\sqrt{6}$.

3128.



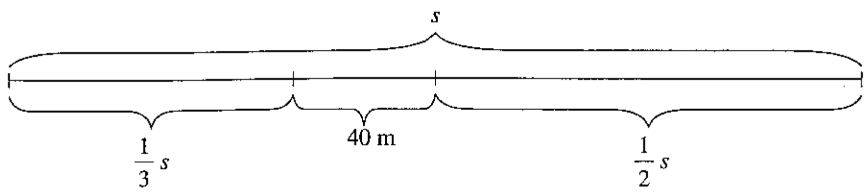
A vonat $\frac{1}{5}$ perc alatt $160 + 80 = 240$ méter utat tesz meg.

1 perc alatt $5 \cdot 240$ m-t,
1 óra alatt $60 \cdot 5 \cdot 240$ m-t,
vagyis 72 km-t tesz meg a vonat.
Tehát a vonat sebessége: $72\ \frac{\text{km}}{\text{óra}}$.

3129. Az x db nyúlnak $4x$ lába, a $(20 - x)$ csirkének $2(20 - x)$ lába van, tehát
$4x + 2(20 - x) = 54$
$2x = 14$, tehát a nyulak száma $x = 7$, a csirkék száma 13.
Tehát csirkéből van több a kertben.

Második megoldás:
Ha mindkét állatból 10 darab lenne, akkor a nyulak lábának száma 40, a csirkék lábának száma 20 lenne, együtt 6-tal több 54-nél. Tehát nyulakból 10-nél 3-mal kevesebb van. Így csirkéből van több.

3130.



Jelöljük a teljes utat az iskoláig s-sel! Az összefüggés leolvasható az ábráról.

$\frac{1}{3}s + 40 + \frac{1}{2}s = s \Rightarrow s = 240$

Tehát Jancsi 240 méterre lakik az iskolától. Az út $\frac{1}{3}$-át, azaz 80 métert már megtett, ekkor 40 méterre van az út felétől.

3131. Az első kiszolgáló 10 perc alatt tudja elvégezni a feladatot, 1 perc alatt a teljes munka $\frac{1}{10}$ részét, 6 perc alatt a teljes munka $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ részét tudja elvégezni.
Az második kiszolgáló 15 perc alatt tudja elvégezni a feladatot, 1 perc alatt a teljes munka $\frac{1}{15}$ részét, 6 perc alatt a teljes munka $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ részét tudja elvégezni.
Tehát együtt 6 perc alatt el tudják végezni a munkát, így igazuk van.

3132. A feltétel miatt a két szám $8x$ és $5x$. Különbségük $3x = 90 \Rightarrow x = 30$
Tehát a keresett két szám 240 és 150.

3133. A búza $3x$, az árpa $2x$, a zab tömege x tonna. Ez összesen 420 tonna.
$3x + 2x + x = 420 \Rightarrow x = 70$
Tehát 210 tonna búzát, 140 tonna árpát és 70 tonna zabot termeltek.

3134. Fizetésnél x db 5 forintost és $2x$ db 10 forintost adtunk, ezek értéke:
$5x + 2x \cdot 10 = 200 \Rightarrow x = 8$
Tehát összesen 8db 5 forintosra és 16 db 10 forintosra volt szükségünk a fizetésnél.

3135. Jelöljük a teljes utat s-sel! Az út első felét $t_1 = \dfrac{\frac{1}{2}s}{70} = \dfrac{s}{140}$,
a második felét $t_2 = \dfrac{\frac{1}{2}s}{60} = \dfrac{s}{120}$ óra alatt tette meg a vonat. Az egész útra számított átlagsebesség: $\bar{v} = \dfrac{s}{t_1 + t_2} = \dfrac{s}{\frac{s}{140} + \frac{s}{120}} = \dfrac{s}{\frac{13s}{840}} = \dfrac{840}{13} \approx 64{,}6\left(\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\right).$

3136. Az első kenyérből 0,75 kg ára $180 \cdot 0{,}75 = 135$ (Ft), a második kenyérből 0,5 kg ára $260 \cdot 0{,}5 = 130$ (Ft). Azaz a második helyen fizetek kevesebbet.

3137. Az eredeti ár x Ft. Csökkent értéke $0{,}8x$ Ft, az új ára $0{,}8^2x = 0{,}64x$ (Ft).
Az új tulajdonos tehát az eredeti ár 64%-áért jutott a géphez.

3138. 8%-os kamat(láb) mellett egy év alatt a bankba tett összeg $50\,000 \cdot 1{,}08$ Ft-ra nő.
A harmadik év végére a felnövekedett összeg $50\,000 \cdot 1{,}08^3$ Ft $\approx 62\,986$ Ft.

3139. Az adott városnak 2 évvel ezelőtt x lakosa volt.
$x \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 = 42\,848 \Rightarrow x = 40\,000$

3140. Ha a blúz ára x Ft volt, akkor először $0{,}7x$ lett az ára, majd utána 50%-kal csökkent, akkor $0{,}35x$ lett. Ez 1750 Ft, azaz $x = \dfrac{1750}{0{,}35} = 5000$ (Ft).

Ellenőrzés:
5000 Ft 30%-a 1500 Ft, tehát először 3500 Ft lett az ár, majd ennek a fele 1750 Ft lesz.

3141. A két szám x és $37 - x$. Ha x a nagyobb szám, akkor különbségük $x - (37 - x) = 5$.
Ebből $x = 21$.
A keresett két szám 21 és 16. Ezekre a feltételek teljesülnek.

3142. Az egyenlet diszkriminánsa dönti el, hány valós gyöke van az egyenletnek.

a) $D = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 0$, tehát az egyenletnek 1 valós gyöke van.

b) $D = 4^2 - 4 \cdot 8 \cdot 4 < 0$, tehát az egyenletnek nincs valós gyöke.

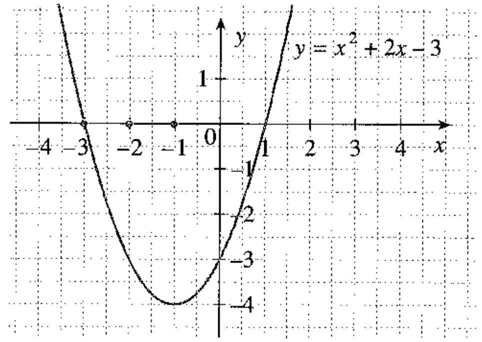
c) $D = 4^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-4) > 0$, tehát az egyenletnek két különböző valós gyöke van.

3143. Jelölje a keresett számot x; $x > 0$.
$x - \frac{1}{x} = 2{,}1$, amivel ekvivalens: $x^2 - 2{,}1x - 1 = 0$.
Megoldóképlettel 2,5 és $-0{,}4$ adódik, de a negatív gyök nem eleme az alaphalmaznak. A keresett szám tehát a 2,5.

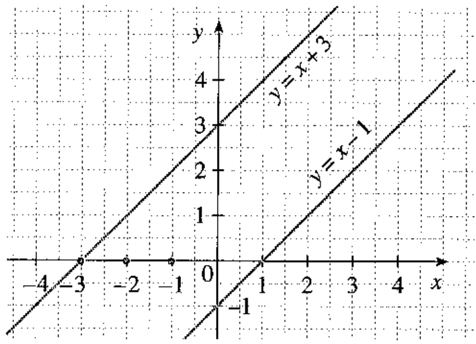
Ellenőrzés:
$2{,}5 - \frac{1}{2{,}5} = 2{,}5 - 0{,}4 = 2{,}1$, ahogyan a feladat szövegében szerepel.

3144. $x^2 + 2x - 3 \le 0,\ \ x \in \mathbf{Z}^-$. Szorzattá alakítható (gyöktényezős alak): $(x+3)(x-1) \le 0$. Az x lehetséges értékei a grafikonról is leolvashatók.

1) A másodfokú tag előjele pozitív, ezért az $x \mapsto x^2 + 2x - 3$ függvénynek minimuma van, grafikonja az x tengelyt $x = 1$ és $x = -3$ helyen metszi. A grafikonról leolvasható, hogy a megoldás:
$-3 \le x \le 1,\ \ x \in \mathbf{Z}^-$, tehát
$-3, -2, -1$.



2) A két tényezőt külön függvénynek ($x \mapsto x+3$, illetve $x \mapsto x-1$) tekintve ábrázoljuk. A másodfokú függvény ott vesz fel negatív értékeket, ahol a két elsőfokú függvény helyettesítési értékei különböző előjelűek.
A megoldás: $-3, -2, -1$.



3145. $ab = 32$ I. $a > 0,\ b > 0$

$\dfrac{a}{b} = 2$ II.

Egyik megoldás:
Összeszorozzuk a két egyenlet megfelelő oldalát
$a^2 = 64$
$0 < a = 8,\ \ b = 4$
Ezek a feltételeket kielégítik, tehát ezek a megoldások.

Másik megoldás:
A II.-ból kifejezzük a-t, majd behelyettesítjük I.-be:
$a = 2b$
$2b^2 = 32$
$b^2 = 16$
$0 < b = 4,\ \ a = 8.$

3146. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel!
$2x^2 + 5x - 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 11}{4}$$

Az egyenlet gyökei 1,5 és -4.

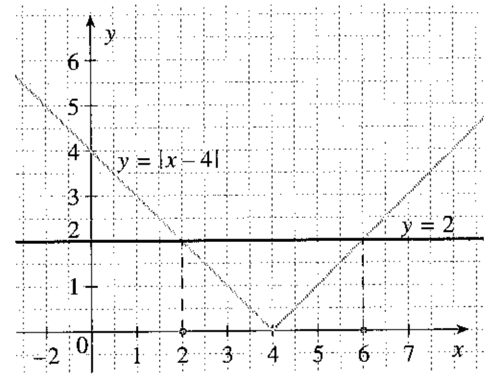
3147. A bal oldalon emeljünk ki x-et: $x(x^2 - x - 2) = 0$.
Egy szorzat pontosan akkor 0, ha tényezői között van 0. Tehát
$x = 0 \ \vee\ x^2 - x - 2 = 0$.
A másodfokú egyenletből megoldóképlettel 2 és -1 adódik.
A megoldáshalmaz tehát: $\{0; 2; -1\}$.

3148. $|x - 4| = 2$
Az abszolút érték értelmezése alapján,

$$\begin{cases} x - 4 = 2 \ \Rightarrow\ x = 6; \\ x - 4 = -2 \ \Rightarrow\ x = 2. \end{cases}$$

A *grafikus megoldás*t az $y = |x-4|$ és az $y = 2$ egyenletű görbe közös pontjainak az abszcisszája adja.

Megjegyzés:
A számegyenes 4-es pontjától 2 távolságra a 2 és a 6 van.



3149. $\sin x = \cos x$; $]0; 2\pi[$;
$\cos x = 0$ egyenlet nem ad megoldást (ugyanis a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ miatt $\sin x$ és $\cos x$ nem lehet egyszerre 0). Ezért oszthatunk $\cos x$-szel.

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \ \Rightarrow\ \operatorname{tg} x = 1 \ \Rightarrow\ x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

Megjegyzés:
1) Ha a megoldást a két oldal négyzetre emelésével kezdjük, akkor „hamis” (vagy „jövevény”) gyök is fellép, amit visszahelyettesítéssel zárhatunk ki.
2) Ha a két függvényt közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk, ezek grafikonjáról is leolvashatók a közös pontok koordinátái. Utána behelyettesítéssel ellenőrizni kell, hogy helyes értéket kaptunk-e.

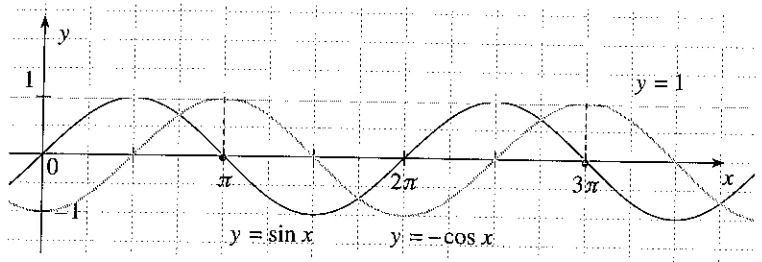
3150. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$

$x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow x=\pi+2k\pi$, ahol k egész szám.

Megjegyzés:

1) Minthogy $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$, ezért lehetett volna az eredeti helyett a $\cos x=-1$ egyenletet megoldani.

2) A grafikus megoldás az ábráról olvasható le.



3151. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi+k\pi \Rightarrow x=\frac{5}{12}\pi+k\pi$, ahol k egész szám.

3152. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+k\pi \Rightarrow x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, ahol k egész szám.

3153. Például: $P_1\left(0;\frac{2}{3}\right)$; $P_2\left(-\frac{2}{5};0\right)$; $P_3(-1;-1)$.

3154. A legegyszerűbben megtalálható (kitalálható) pontok:
$P_1(100;1)$; $P_2(100;-1)$; $P_3(101;0)$; $P_4(99;0)$.

3155. A $P(x;3)$ pont koordinátáit az alakzat egyenletébe helyettesítve igaz kijelentést kapunk: $x^2-x+3^2+3-24=0$, vagyis igaz, hogy $x^2-x-12=0$.
Megoldóképlettel kapjuk P lehetséges első koordinátáját: 4 vagy -3.

3156. $2+4x-5(x+2)<0 \quad x\in\mathbf{Z}^-$
$-8<x$
A megoldás: $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$. Ez hét érték.

3157. $2(10x+5)-3(15x-5)>30$
$20x+10-45x+15>30$
$-25x>5$
$x<-\frac{1}{5}$
Az egyenlőtlenség legnagyobb egész megoldása: -1.

3158. Az eredeti törteket tizedestörtre átváltva kapjuk: $0,\dot{6}\le\frac{3}{x}\le 0,8$. Így leolvashatjuk, hogy az egész számok közül csak a 4-re teljesül az egyenlőtlenség.

Másik megoldás:
Az egyenlőtlenség csak pozitív x-ekre teljesülhet. Így mivel mindhárom oldal pozitív, vehetjük mindhárom oldal reciprokát. Mivel pozitív számokra az $x\mapsto\frac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton fogyó, ezért a reciprok-képzésnél az egyenlőtlenségjel iránya megfordul: $\frac{3}{2}\ge\frac{x}{3}>\frac{5}{4} \Rightarrow 4,5\ge x>3,75$.
Az egyenlőtlenségrendszer egyetlen egész megoldása a 4.

További megoldás:
Hozzuk közös számlálóra a törteket!
$\frac{24}{36}\le\frac{24}{8x}<\frac{24}{30} \Rightarrow$ x csak pozitív egész lehet $\Rightarrow 36\ge 8x>30 \Rightarrow 4,5\ge x>3,75$.
Mivel x egész szám, ezért $x=4$.

3159. Alakítsuk át a törteket tizedestört alakra!
$-0,\dot{4}28\,57\dot{1}<x<-0,\dot{2}85\,71\dot{4}$
Az egyenlőtlenségeket kielégítő racionális számok például:
$-0,41; -0,4; -0,39111; -0,38=-\frac{19}{50}; -0,37$ stb.

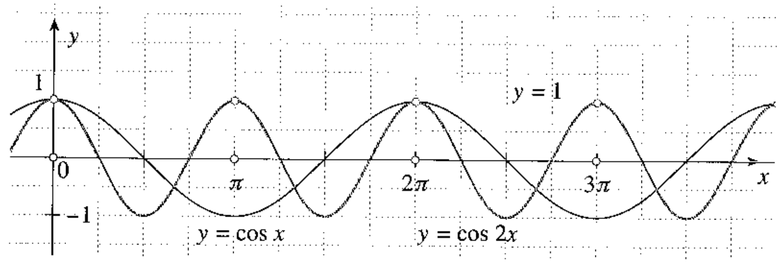
Másik megoldás:
Hozzuk közös számlálóra a törteket!
$-\frac{6}{14}<x<-\frac{6}{21}$
Az egyenlőtlenségeket kielégítő racionális számok például:
$-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}, -\frac{6}{16}=-\frac{3}{8}, -\frac{6}{17}, -\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}, -\frac{6}{19}, -\frac{6}{18,5}=-\frac{12}{37}$

3160. Vonjunk ki mindkét oldalból x-et!
$0 < x$, tehát a pozitív valós számokra igaz az egyenlőtlenség. $M = \mathbf{R}^+$.

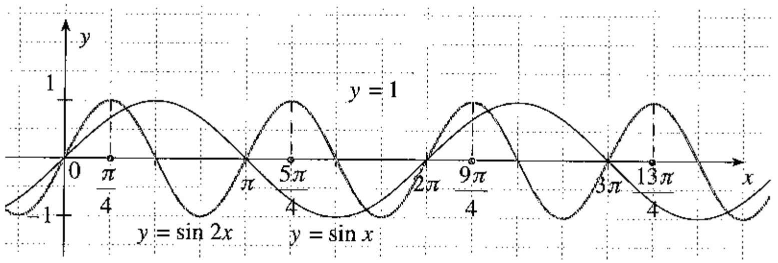
3161. $x < -2 \lor x > 2$. A megoldáshalmaz: $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

3162. Egy tört akkor negatív, ha számlálója és nevezője ellentétes előjelű. Mivel az adott tört számlálója pozitív, ezért a nevezője negatív, tehát $4 - x < 0 \iff x > 4$ értékekre teljesül az egyenlőtlenség. A megoldáshalmaz: $]4; \infty[$.

3163. $\cos 2x < 1$
Minthogy minden x valós számra $\cos 2x \le 1$, $\cos 2x < 1$, ha $\cos 2x \ne 1$.
$\cos 2x = 1$, ha $x = n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$
Megoldás: az összes valós szám, kivéve a függvény maximumhelyeit:
azaz a megoldáshalmaz: $\mathbf{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\}$.



3164. $\sin 2x \ge 1$
Minthogy minden valós számra $\sin 2x \le 1$, a szinuszfüggvény értékkészlete miatt megoldást csak a $\sin 2x = 1$ ad.
$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{4}\pi + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.



3165. c) $(\frac{28}{40} \cdot 28 = 19{,}6.)$

3166. d) $(T_1 = 1{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot T = 1{,}68 \cdot T.)$

3167. d) (Az ötvözet egyes részeiben ugyanannyi az alkotórészek aránya.)

3168. a) (80%-ot kaptak a társak, a 20%-nak a $\frac{3}{4}$ részét, azaz 15%-ot pedig Robin Hood.)

3169. a) (A 75% helyett $\frac{3}{4}$-rész is mondható.)

3170. e) (Igaz, hogy 4 m szövet 2000 Ft-tal drágább, mint 4 CD lemez, de nem tudjuk a CD-lemez árát, így azt sem, hogy 2 CD lemez mennyit érhet.)

3171. a) (Mivel x hónap alatt a ló, a kecske és a juh rendre x, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$ kocsi szénát eszik meg, tehát $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$. Ezt a felsoroltak közül csak az első szám, a $\frac{6}{11}$ teszi igazzá.)

3172. c) (A szöveg szerint van hét- és ötpettyes katicabogár is, ezért a) és e) nem lehetséges; b) még hétpettyesből is kevés és e) még ötpettyesből is sok lenne.)

3173. b) (A zongoristának 2, a zongorának 3 lába van; a $2x + 3y = 17$ egyenletnek egyetlen megfelelő $(x \ge y > 1)$ megoldása a (4; 3), tehát csak egyetlen zongoránál játszhatnak négykezest.)

3174. e) (A diákok száma osztható 4-gyel és 7-tel, ezért 28-cal is. A tanítványok száma tehát legalább 28.)

3175. d) $(\frac{7}{12} \cdot (\text{ló} + 100) = \text{ló} + 20 \Rightarrow \text{ló} = 92.)$

3176. e) (A beírható számjegyek: 1; 3; 5; 7; 9.)

3177. b) (A legnagyobb közös osztójuk 12; ennek minden pozitív osztója közös osztója a két számnak, de több nincs.)

3178. c) (Ha az alap és a kitevő is pozitív egész, akkor a 6-ra végződő számok minden hatványa 6-ra végződik, a 9-re végződőek minden páratlan kitevőjű hatványa is 9-re végződik.)

3179. c) (A 34 989,6 az eredeti szám 0,61-szorosa.)

3180. d) (9 | ANYU, tehát a számjegyeinek összege is osztható 9-cel.)

3181. b) (Ugyanis $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=2-1=1$.)

3182. c) (Egyszerűsítés után: $1+\frac{a-b}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2a}{a+b}$.)

3183. d) ($\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=|b-a|$.)

3184. d) (Rendezés és kiemelés után az egyenlet $(x^2-1)(2x+6)=0$ alakú lesz.)

3185. b) (Elsőfokú egyenlet.)

3186. d) (A „szokásos" b^2-4ac-ben a b helyébe most 1-et, a c helyébe pedig b-t kell írni.)

3187. c) ($x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=14^2-2=194$.)

3188. a) Az állítás hamis, például 12 osztható 4-gyel, de számjegyeinek összege nem osztható 4-gyel.

b) Az állítás hamis, például 12 osztható 4-gyel, de nem osztható 8-cal.

c) Az állítás hamis, például 12 osztható 4-gyel, de a szám nem 4-re végződik.

d) Az állítás igaz. Bármely 100-nál nagyobb egész szám felbontható két szám összegére, pl: $1356=1300+56$, a 100-zal osztható szám osztható 4-gyel is és ha az eredeti szám osztható 4-gyel, akkor az eredeti szám utolsó két számjegyéből alkotott kétjegyű szám is osztható 4-gyel. A 100-nál kisebb számokra értelemszerűen teljesül az állítás.

e) Az állítás hamis, például 12 osztható 4-gyel, de se nem 4-re, se nem 8-ra végződik.

3189. a) Az állítás hamis, például 12 és 24 legnagyobb közös osztója 12, amely nem kisebb 12-nél.

b) Az állítás igaz, mivel a legnagyobb közös osztó osztója mindkét számnak, ezért a szorzatuknak is osztója lesz.

c) Az állítás hamis. Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig kisebb, mint a két szám legkisebb közös többszöröse, mert $a \mid b \Rightarrow a \le b$. Mivel $(a;b) \mid [a;b] \Rightarrow (a;b) \le [a;b]$. (Egyenlőség csak $a=b$ esetén áll fenn.)

d) Az állítás hamis. Ha a két szám relatív prím, akkor a legnagyobb közös osztójuk 1, például 2 és 3 relatív prím és $(2;3)=1$.

e) Az állítás hamis. pl: 12 és 18 legnagyobb közös osztója 6, de 6 nem osztható például 9-cel (sőt 12-vel és 18-cal sem).

3190. A helyes válasz a „b".
Egy szám akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.

3191. a) Az állítás hamis, például 12 és 24 legkisebb közös többszöröse 24, tehát nem nagyobb mindkét számnál.

b) Az állítás hamis. Például $[3;4]=12$, de $4<12$.

c) Az állítás hamis. Például $[3;4]=12$, de $3<12$; $4<12$.

d) Az állítás igaz. Két pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse legalább akkora, mint a két szám közül a nagyobb.

e) Az állítás hamis. Például $[3;4]=12=3\cdot 4$. (Ha a két szám relatív prím, akkor legkisebb közös többszörösük a két szám szorzata.)

3192. a) Az állítás hamis. Minden $a<b$ pozitív számokra igaz, hogy $a<\sqrt{ab}<b$. (Ez utóbbi egyenlőtlenségek mindhárom oldal négyzetre emelésével bizonyíthatók. Mivel mindhárom oldal pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens művelet, az egyenlőtlenségjel iránya nem fordul.)

b) Az állítás hamis. Pl. 4 és 9 számtani közepe 6,5; mértani közepe 6, de $6<6{,}5$.

c) Az állítás hamis. Két pozitív szám mértani közepe is pozitív.

d) Az állítás igaz. Két pozitív szám mértani közepe legfeljebb akkora, mint a számtani közepük. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a két szám egyenlő. (Itt különböző pozitív egész számokról van szó), tehát $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$.

e) Az állítás hamis. $x \ne y$ esetén az x és y mértani közepe mindig kisebb, mint a számtani közepe.

3193. e) (Természetes szám négyzetgyöke vagy egész – ha négyzetszám – vagy irracionális.)

3194. b) (A normálalak definíciója miatt.)

3195. e) (A definíció miatt.)

3196. e) (A definíció miatt.)

3197. a) (A definíció miatt.)

3198. b) (Kiszámolva ennyi jön ki.)

3199. d) (A definíció miatt.)

3200. d) (Ez a szorzás elvégzésével ellenőrizhető nevezetes azonosság.)

3201. e) (Ez a szorzás elvégzésével ellenőrizhető nevezetes azonosság.)

3202. b) (Kiszámolva ennyi jön ki.)

3203. d) ($3\frac{10}{71} \approx 3,1408 < \pi \approx 3,1415 < 3\frac{1}{7} \approx 3,1429$.)

3204. c) (Kiszámolva ennyi jön ki.)

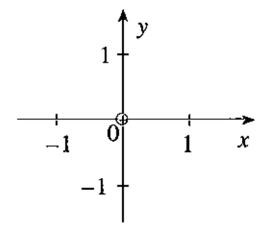
6.3. Függvények

3205. Ha az értelmezési tartomány véges, lehet több elemű, mint az értékkészlet, mert különböző értelmezési tartománybeli elemekhez ugyanazt az elemet is hozzárendelhetjük. (Például a [0; 5] zárt intervallum egész számaihoz rendeljük hozzá a 10-et.) A véges értelmezési tartománynak azonban kevesebb eleme nem lehet, mint az értékkészletnek, hiszen minden egyes értelmezési tartománybeli elemhez csak egy értékkészletbeli elemet rendelhetünk hozzá. (Másképp: az értékkészletnek nem lehet több eleme, mint az értelmezési tartománynak, hiszen különböző értékkészletbeli elemekhez nem tartozhat ugyanaz az értelmezési tartománybeli elem.)

3206. Például így:
$$\begin{array}{lllllll} \mathbf{N} = \{0; & 1; & 2; & 3; & 4; & \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbf{Z} = \{0; & 1; & -1; & 2; & -2; & \ldots\} \end{array}$$

3207. Semmilyené, hiszen ekkor egynél több (méghozzá végtelen sok) érték tartozna ugyanahhoz a helyhez, és éppen azokat a hozzárendeléseket nevezzük függvényeknek, amelyekben minden helyhez csak egy érték tartozik.

3208. A függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, ezen a konstans 0 függvénnyel egyezik meg, képe tehát egy, az x tengelyre illeszkedő, de az origóban „lyukas” egyenes.



3209. Az egyenes arányosságé $2a$, a fordítotté $\frac{b}{2}$.

3210. a) A feltétel szerint $80 \cdot 3 = 50v = 100w$, ahonnan $v = 4,8 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ és $w = 2,4 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$.
Azaz mint várható volt, a kiszélesedett szakaszon lassabban, a keskenyebben gyorsabban (2,4, illetve 4,8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel) folyik a víz.

b) Ahol a sebesség 6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ott a keresztmetszet legyen A cm^2.
Ekkor $6A = 80 \cdot 3 = 240$, azaz $A = 40$ (cm^2).

3211. a) A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya a nem-negatív valós számok halmaza.

b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$. A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $x \geq 0$, a tört értelmezési tartománya miatt $x \neq 0$. Tehát a törtkifejezés értelmezett, ha $x > 0$.

c) $\sqrt{6-x}$.
A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $6 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6$.
Tehát az értelmezési tartomány a 6-nál nem nagyobb valós számok halmaza.

3212. a) $\sqrt{3^x - 9}$. A négyzetgyök értelmezése miatt: $3^x - 9 \geq 0$, $3^x \geq 3^2$.
Az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ezért $x \geq 2$. Így az értelmezési tartomány: $[2; +\infty[$.

b) $\sqrt{9 - 3^x}$. A négyzetgyök értelmezése miatt: $9 - 3^x \geq 0$, $3^x \leq 3^2$.
Az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ezért $x \leq 2$. Így az értelmezési tartománya: $]-\infty; +2]$.

3213. a) $\lg(x-2)$. A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$.

b) $\lg(2-x)$. A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt:
$2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$.

c) $\frac{1}{\lg(x-2)}$. A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt: $x > 2$, a tört értelmezési tartománya miatt $\lg(x-2) \neq 0 \Rightarrow x - 2 \neq 1$, azaz $x \neq 3$. Így a törtkifejezés értelmezési tartománya: $]2; 3[\cup]3; +\infty[$.

3214. $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}|x-4| + 1$
$f(6) = 2$; $f(-2) = 4$;
$f(6) - f(-2) = -2$.

3215. $h\colon x \mapsto 2(x^2-4)^2 - 6$;
$h(2) = -6$, $h(-1) = 12$;
$h(2) + h(-1) = 6$.

3216. $g\colon x \mapsto 2^{x-1}$;
$g(5) = 16$, $g(3) = 4$;
$\frac{1}{2}\left(g(5) - g(3)\right) = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$.

3217. $f\colon x \mapsto x^3 - 2$;
$f(4) = 62$, $f(-2) = -10$;
$f(4) - f(-2) = 72$.

3218. $f\colon x \mapsto \operatorname{tg} 2x$;
$f(\pi) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$;
$f(\pi) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

3219. $f\colon x \mapsto \log_2(x-3) + 2$;
$f(7) = 4$, $f(11) = 5$;
$f(7) + f(11) = 9$.

3220. Utóbbi az előbbinek az y tengely mentén pozitív irányba („függőlegesen felfelé") 2 egységgel eltolt képe, hiszen minden adott x helyen az eredeti értéknél 2-vel nagyobb az értéke.

3221. Utóbbi az előbbinek az x tengely mentén negatív irányba („vízszintesen balra") 2 egységgel eltolt képe, hiszen ugyanazokat az értékeket 2-vel kisebb x helyen veszi fel az utóbbi, mint az első.

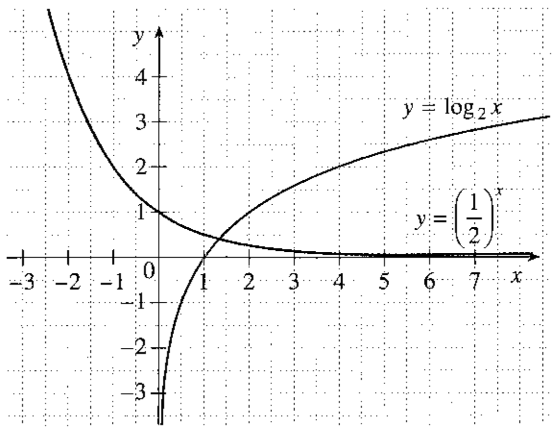
3222. Utóbbi az előbbinek az y tengely irányában 2-szeresre „megnyújtott" képe. Minden x helyen a felvett függvényérték kétszer akkora, tehát a grafikon minden pontja „függőlegesen" kétszer akkora távolságban van az x tengelytől, mint az eredeti függvény esetében.

Megjegyzés:
Egy 2 arányú, x tengely tengelyű merőleges affinitásról van szó.

3223. Utóbbi az előbbinek az x tengely mentén felére „összenyomott" képe. Minden y értéket fele akkora x helyen vesz fel a függvény, tehát a grafikon minden pontja „vízszintesen" fele akkora távolságban van az y tengelytől, mint az eredeti függvény esetében.

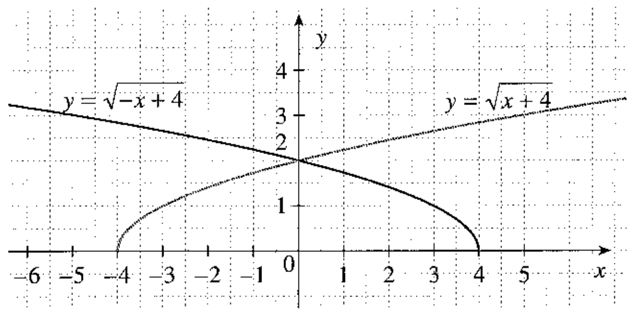
Megjegyzés:
Egy 0,5 arányú, y tengely tengelyű merőleges affinitásról van szó.

3224. Az egyketted alapú exponenciális függvény grafikonját kapjuk.



3225. $f\colon\ x \mapsto \sqrt{x+4}$

$g\colon\ x \mapsto \sqrt{-x+4}$

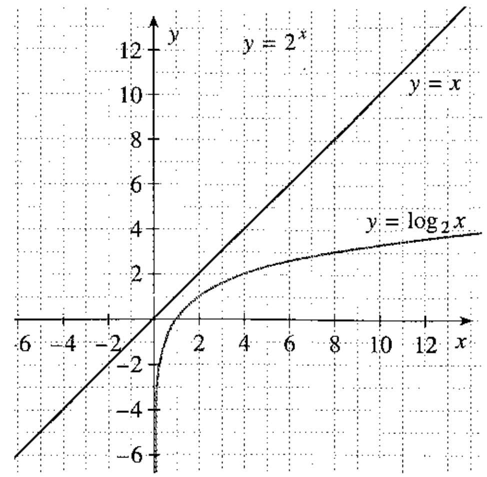


3226. Az értelmezési tartomány elemeihez hozzárendelt értékek halmazát, a felvett y értékek összességét.

3227. Amelynek értelmezési tartománya szimmetrikus az origóra (azaz $\forall\, x \in D$ esetén $-x \in D$), és amelyre igaz, hogy (páros esetben): a függvény ellentett helyeken azonos értéket vesz fel, azaz $f(-x) = f(x)$; (páratlan esetben): a függvény ellentett helyeken ellentett értékeket vesz fel, azaz $f(-x) = -f(x)$. (Képszerűen: a függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, illetve az origóra – de nem ez a definíció!)

3228. Amelyhez található olyan p valós szám, hogy $\forall\, x \in D$ esetén $x + p \in D$, és $f(x + p) = f(x)$, azaz a függvény bármely helyhez képest p-vel „odébb" ugyanazt az értéket veszi fel. (Képszerűen: a függvény grafikonját p-vel eltolva az x tengely mentén, „vízszintesen", az önmagát fedi – de nem ez a definíció!) Ha van egy ilyen p, persze végtelen sok is van, hiszen p bármely egész számú többszöröse alkalmas. Ha a végtelen sok megfelelő szám között van legkisebb pozitív, akkor ezt nevezzük a függvény periódusának.

3229. A két grafikon egymás tükörképe az $y = x$ egyenesre mint tengelyre. Például $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto \log_2 x$.



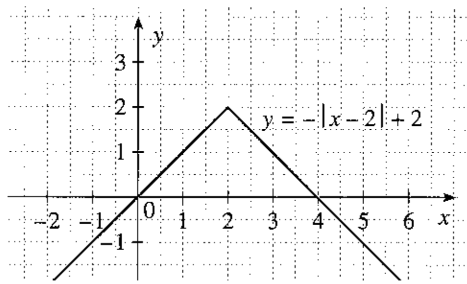
3230. Az értelmezési tartomány azon elemét, amelyhez a függvény a 0 értéket rendeli hozzá. (Azon $x \in D$, amire $f(x) = 0$. Képszerűen: a grafikonnak ezen a helyen az x tengelyen lévő pontja van – de nem ez a definíció!) Ebből lehet nulla (pl. $x \mapsto 2$), egy (pl. $x \mapsto 2x$), akárhány véges számú (pl. megfelelő hatványfüggvények), vagy végtelen sok (pl. $x \mapsto \sin x$) is.

3231. A függvény minimuma az értékkészlet legkisebb eleme. Ez nem feltétlenül létezik (pl. $x \mapsto 2x$); de ha van, akkor egy van belőle, egyértelmű (pl. $x \mapsto \sin x$ esetén a -1). A minimumhely(ek) az értelmezési tartomány azon eleme(i), ahol a függvény az említett minimumot felveszi. (Mint a fogalmazás is jelzi, ebből lehet egy (pl. $x \mapsto x^2$), több, de véges sok (pl. $x \mapsto x^4 - x^2$), vagy akár végtelen sok is (pl. éppen a szinuszfüggvény esetén). Persze, ha nincs minimum, akkor minimumhely sincs. De ha van minimum, akkor legalább egy minimumhely is van.)

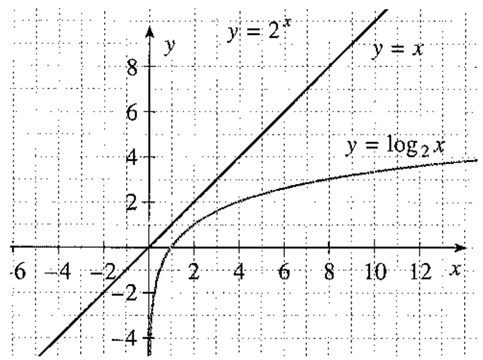
3232. A függvény maximuma az értékkészlet legnagyobb eleme. Ez nem feltétlenül létezik (pl. $x \mapsto 3x$); de ha van, akkor egy van belőle, egyértelmű (pl. $x \mapsto \cos x$ esetén az 1). A maximumhely(ek) az értelmezési tartomány azon eleme(i), ahol a függvény az említett maximumot felveszi. (Mint a fogalmazás is jelzi, ebből lehet egy (pl. $x \mapsto -|x|$), több, de véges sok (pl. $x \mapsto x^2 - x^4$), vagy akár végtelen sok is (pl. éppen a koszinuszfüggvény esetén). Persze, ha nincs maximum, akkor maximumhely sincs. De ha van maximum, akkor legalább egy maximumhely is van.)

3233. A függvény szigorúan monoton növekedő, illetve csökkenő, ha az értelmezési tartomány bármely két eleme közül a nagyobbhoz nagyobb, illetve kisebb függvényérték tartozik; azaz $a, b \in D$ és $a < b$ esetén $f(a) < f(b)$, illetve $f(a) > f(b)$.

3234. $x \mapsto -|x-2|+2$
Értékkészlete $]-\infty; 2]$



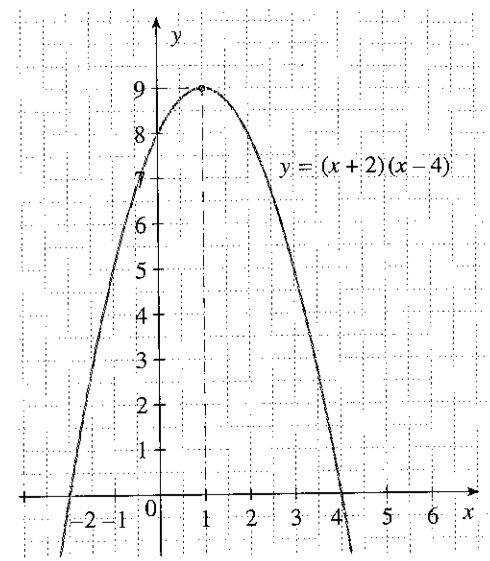
3235. $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto \log_2 x$
A két grafikon egymás tükörképe az $y = x$ egyenesre vonatkozólag (ha mindkét tengelyen ugyanakkorák az egységek).



3236. $x \mapsto \sqrt{x+1}$ $\quad x \mapsto \sqrt{1-x}$
Mindkét grafikon a (0; 1) pontban metszi az y tengelyt.

3237. A függvény zérushelyeit az $x^2 - 2x - 8 = 0$ egyenlet gyökei adják.
Ezeket meghatározzuk megoldóképlettel vagy szorzattá alakítással.
$(x-4)(x+2) = 0$. A szorzat pontosan akkor zérus, ha valamelyik tényezője zérus.
Zérushelyek: $x = 4$, $x = -2$.

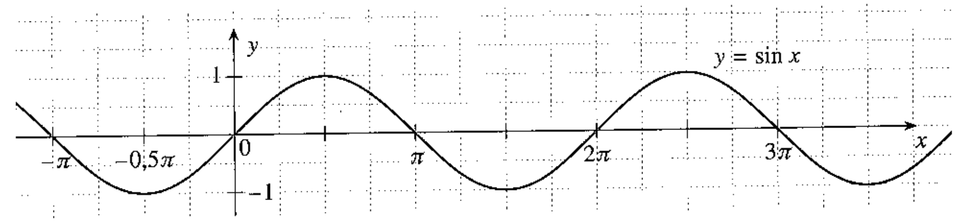
3238. $x \mapsto -(x+2)(x-4)$
A fenti (gyöktényezős) alakból kiolvasott zérushelyek $x = -2$ és $x = 4$. A szélsőérték helye ezen értékek számtani közepe, $x = 1$, értéke 9.
E másodfokú függvény másodfokú tagjának együtthatója negatív, ezért maximuma van.



3239. $g(x) = x^2 - 2x - 3$
A gyököket megkaphatjuk megoldóképlettel vagy szorzattá alakítással.
$g(x) = (x-3)(x+1)$. Ebből kiolvashatók a zérushelyek: $x = -1$ és $x = 3$. Ezek számtani közepe adja a szélsőérték helyét: $x = 1$. E másodfokú függvény másodfokú tagjának együtthatója pozitív, ezért a függvénynek minimuma van. A minimum értéke $g(1) = -4$.

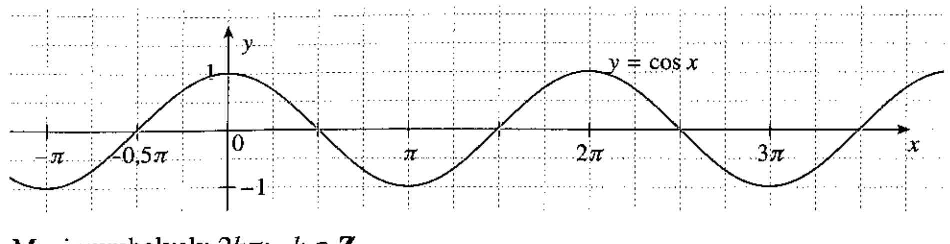
Másik megoldás:
Megoldható a feladat teljes négyzetté kiegészítéssel:
$g(x) = (x-1)^2 - 4$. Ebből kiolvasható a szélsőérték helye (1) és értéke (−4) is.

3240.



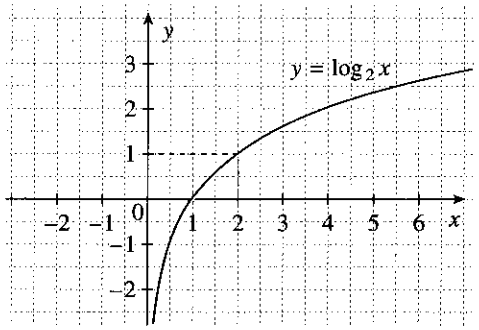
Zérushelyek: $k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.

3241.

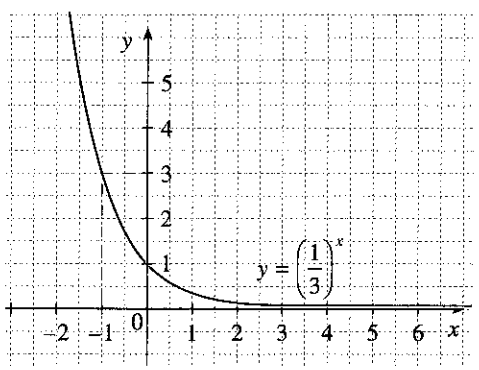


Maximumhelyek: $2k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.

3242. Zérushelye: 1;
szigorúan monoton növekvő.



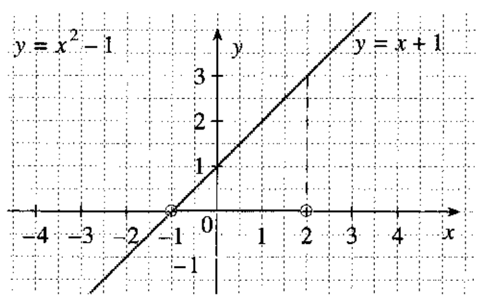
3243. Nincs zérushelye,
szigorúan monoton csökkenő.



3244. $x^2 - 1 < x + 1$

Többféle megoldás is lehetséges:

I. A két oldalon szereplő kifejezésnek megfelelő függvényeket közös koordináta-rendszerben ábrázolva leolvasható a megoldás.
$-1 < x < 2$

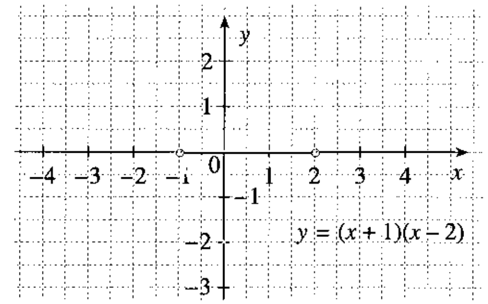


II. A bal oldalt szorzattá alakítva: $(x-1)(x+1) < (x+1)$, majd rendezve és a közös tényezőt kiemelve kapjuk: $(x+1)(x-1-1) < 0$, azaz $(x+1)(x-2) < 0$ *.

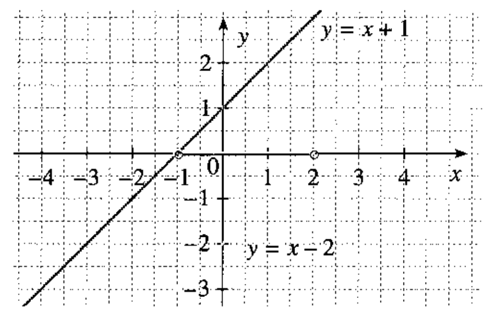
Egy kéttényezős szorzat pontosan akkor negatív, ha a tényezők különböző előjelűek. Ennek megállapítása többféleképpen lehetséges.

a) Ha $x + 1 > 0$, azaz $x > -1$ és $x - 2 < 0$, azaz $x < 2$, tehát $-1 < x < 2$, vagy ha $x + 1 < 0$, azaz $x < -1$ és $x - 2 > 0$, azaz $x > 2$, ezeket egyszerre kielégítő x érték nincs. A megoldás tehát $-1 < x < 2$.

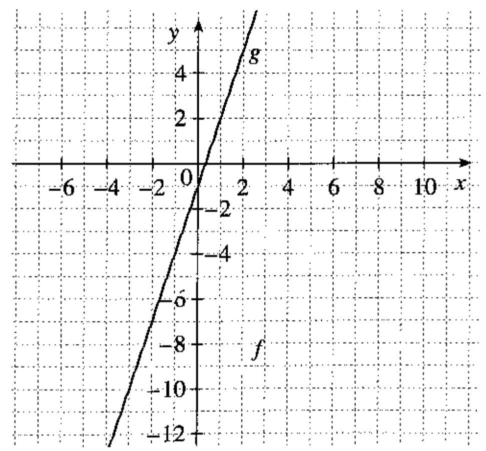
b) A *-os szorzat tényezőiből a két zérushely kiolvasható: $x = -1$ és $x = 2$. Minthogy a másodfokú tag együtthatója pozitív, a függvénynek minimuma van. Ezek alapján a grafikon vázlatosan elkészíthető. A grafikonról leolvasható a megoldás. (Itt nincs szerepe annak, hogy mennyi a minimum értéke, tehát a grafikon elkészítéséhez ezt nem kell kiszámítani.) Negatívok a függvényértékek a két zérushely között. A megoldás tehát: $-1 < x < 2$.



c) Ábrázoljuk a *-os szorzat tényezőinek megfelelő $x \mapsto x + 1$ és az $x \mapsto x - 2$ elsőfokú függvényeket közös koordináta-rendszerben, a megoldás a grafikonról leolvasható.

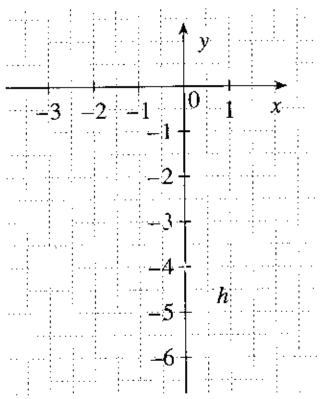


3245. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f: $x \mapsto -x^2 - 5$ és a g: $x \mapsto 3x - 1$ függvényeket. Az ábráról leolvasható, hogy $f(x) \le g(x)$ minden valós számra teljesül.

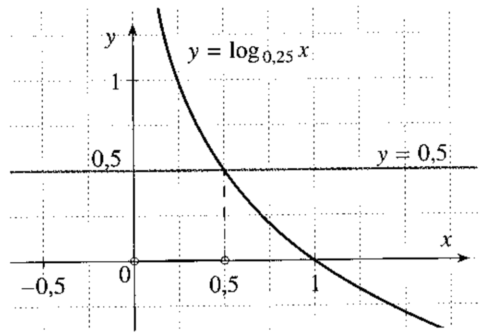


Másik megoldás:

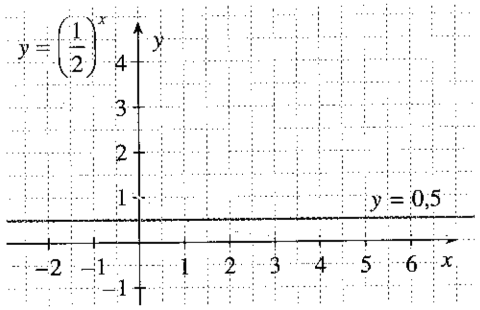
Az egyenlőtlenség ekvivalens a $-x^2-3x-4 \le 0$ egyenlőtlenséggel. A $-x^2-3x-4=0$ egyenletnek nincs valós gyöke (a diszkrimináns negatív) $\Rightarrow$ a h: $x \mapsto -x^2-3x-4$ függvény grafikonja egy olyan lefelé nyitott parabola, melynek nincs zérushelye $\Rightarrow$ minden függvényérték negatív $\Rightarrow$ az eredeti egyenlőtlenség megoldása: **R**.



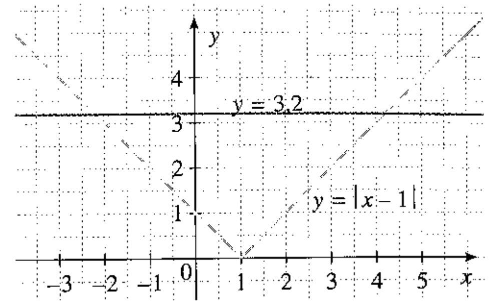
3246. A megoldáshalmaz:]0; 0,5[.



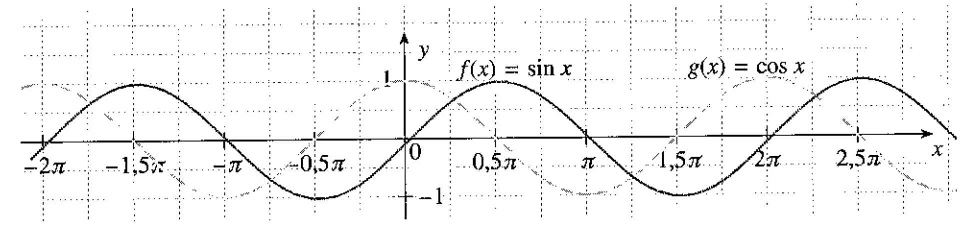
3247. Az ábra alapján az egyenlőtlenség megoldása $x < 1$.



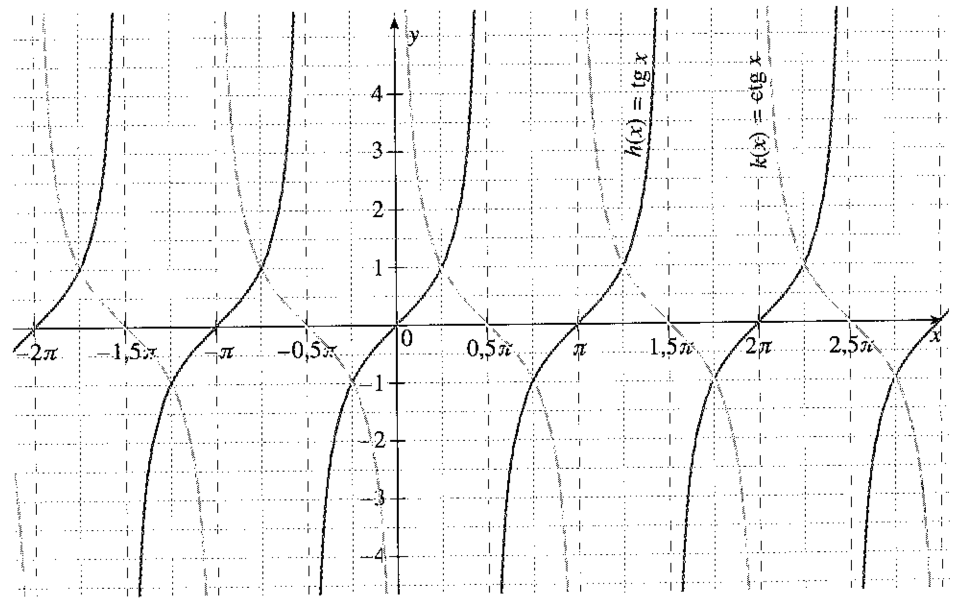
3248. Az ábra alapján az egyenlőtlenség megoldása $-2,2 \le x \le 4,2$.



3249.



3250.



3251. $D =]-3; 3]$;
$R = [-6; 2]$.

3252. Maximumhely: -1; minimumhely: 3; zérushely: 1.

3253. A kettes alapú logaritmusfüggvény grafikonjának részlete látható az ábrán.
$\log_2 0{,}25 = -2$, tehát -2-t rendel a 0,25-hoz.

3254. Az egyharmad alapú exponenciális függvény grafikonjának részlete látható az ábrán (a -1-hez a 3 függvényérték tartozik). $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \Leftrightarrow x = -2$.

3255. Csak két grafikon szükséges a megoldáshoz: a „sárga parabola" és a „zöld egyenes". $M = [-3; 0]$.

3256. Például: $2\cos x = 2 + 2\sin x$.
$M = \left\{2k\pi;\ -\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right\};\quad k, m \in \mathbf{Z}$.

3257. Az a sorozat számtani sorozat, amelynek a másodiktól kezdve minden tagját úgy kapjuk meg, hogy az előző taghoz egy állandó értéket (a differenciát) hozzáadunk ($n \geq 2$: $a_n = a_{n-1} + d$).

3258. Az n-edik tag $a_n = a_1 + (n-1)d$, az első n tag összege pedig
$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

3259. Ha a szögek egy számtani sorozat egymás utáni tagjai, akkor, β-val jelölve a középső tagot, a másik két tag: $\alpha = \beta - \delta$, illetve $\gamma = \beta + \delta$.
Figyelembe véve, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°, kapjuk, hogy $\beta = 60°$. Tehát Szabolcs igazat mondott.

3260. A számtani sorozat első öt tagja: $a_1, a_2, \ldots, a_5$.
$a_5 - a_1 = 12$ I.
$a_5 + a_1 = 22$ II.
A II.-ból kivonva az I.-t: $2a_1 = 10$, ebből $a_1 = 5$
$a_5 = a_1 + 4d$
$a_5 - a_1 = 4d$ III.
III. és az I. egyenletet figyelembe véve $d = 3$ adódik.
A sorozat első öt tagja 5, 8, 11, 14, 17. Ezekre teljesülnek a feladat feltételei.

Másként:
$a_5 - a_1 = 4d;\quad d = 3$
$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2} = 11$,
tehát a tagok: $11 - 6 = 5$; $11 - 3 = 8$; 11; $11 + 3 = 14$; $14 + 3 = 17$.

3261. Az a sorozat mértani sorozat, amelynek a másodiktól kezdve minden tagját úgy kapjuk meg, hogy az előző tagot egy állandó értékkel (a quotienssel vagy magyaros írásmódban: kvócienssel) megszorzunk ($n \geq 2$: $a_n = a_{n-1} \cdot q$).

3262. Az n-edik tag $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, az első n tag összege pedig $q = 1$ esetén $S_n = n \cdot a_1$,
$q \neq 1$ esetén $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

3263. Mivel $a_2 = a_1 \cdot q$ és $a_6 = a_1 \cdot q^5$, ezért $a_6 = a_2 \cdot q^4$, azaz $12 = 3 \cdot q^4$, amiből $q^4 = 4$. Mivel $a_{10} = a_1 \cdot q^9$, ezért $a_{10} = a_6 \cdot q^4$, vagyis $a_{10} = 12 \cdot 4 = 48$.
Másik megoldás:
Mivel az a_6-hoz képest a_2 és a_{10} szimmetrikusan elhelyezkedő tagok a sorozatban, igaz, hogy $a_6^2 = a_2 \cdot a_{10}$. Ekkor $a_{10} = \frac{a_6^2}{a_2} = \frac{12^2}{3} = \frac{144}{3} = 48$.

3264. Előbb megvizsgáljuk, van-e olyan mértani sorozat amelynek a $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{8}$ egymás utáni tagjai. Minthogy teljesül a $2^2 = \sqrt{2}\sqrt{8}$, így van olyan mértani sorozat, amelynek e három szám (egymás utáni) tagja, ennek a hányadosa $q = \sqrt{2}$.
Megjegyzés:
Megoldások még például a $\sqrt{2}$-t tartalmazó, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[6]{2}$, stb. hányadosú sorozatok is.
$\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[4]{64} = \sqrt{8}$.
Ilyen módon végtelen sok olyan mértani sorozat képezhető, amelynek egyik tagja 2, ettől szimmetrikus elhelyezkedő tagok $\sqrt{2}$, illetve $\sqrt{8}$, azaz $a_k = 2$, $a_{k-l} = \sqrt{2}$, $a_{k+l} = \sqrt{8}$, $k \in \mathbf{N}^+$, $l \in \mathbf{N}^+$, $l < k$.

3265. $L(x) = 1{,}5 \cdot 10^7 \cdot 1{,}0023^x$.

3266. A feladat megoldása az „a"; „b"; „e".
Mivel $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$.
Így $x - |x| = \begin{cases} x - x = 0, & \text{ha } x \geq 0 \\ x - (-x) = 2x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$.

3267. Az a), b) és c)-beli függvényeknek nincs minimuma.
d) $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$.

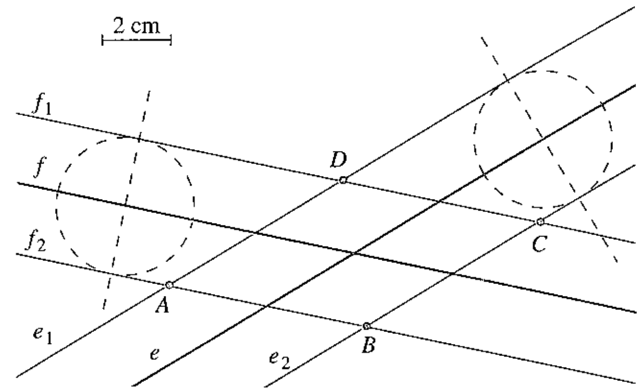
3268. c) (Maximum van, ha $\sin\frac{x}{3} = 1$, azaz $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
Legkisebb pozitív érték $k = 0$ esetén adódik, ekkor $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$, azaz $x = \frac{3\pi}{2}$.)

3269. b) (A definíció miatt.)

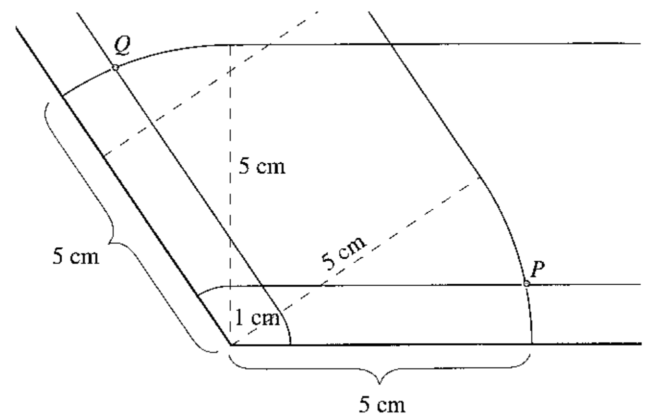
3270. a) (Kamatos kamat esetén az x-edik év végén $1 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^x$ értékű az 1 eurós betét.)

6.4. Geometria

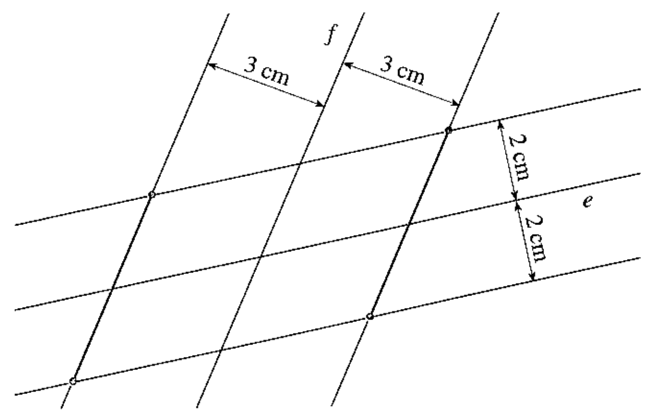
3271. Az adott e, f egyenesektől 2-2 cm távolságra haladó párhuzamosokat szerkesztünk (e_1, e_2, illetve f_1, f_2).
A két egyenespár négy metszéspontja adja a keresett ponthalmaz elemeit (A, B, C és D).



3272. A keresett pontok:
P és Q.



3273. Az eredmény két (egymással és f-fel) párhuzamos zárt szakasz.



3274. a) A sík azon pontjainak halmaza, amelyek K-tól éppen 3 cm távolságra vannak, vagyis a K középpontú, 3 cm sugarú körvonal.

b) A sík azon pontjainak halmaza, amelyek K-tól legfeljebb 3 cm távolságra vannak, vagyis a K középpontú, 3 cm sugarú zárt körlemez.

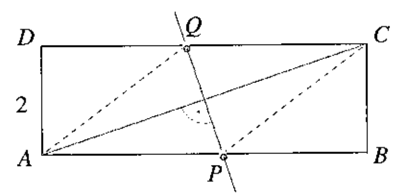
c) A sík azon pontjainak halmaza, amelyek K-tól 3 cm-nél kisebb távolságra vannak, vagyis a K középpontú, 3 cm sugarú nyílt körlemez.

3275. A sík azon pontjainak halmaza, amelyek A-tól és B-től egyenlő távolságra vannak, vagyis az AB szakasz felezőmerőleges egyenese.

3276. A sík azon pontjainak halmaza, amelyek e-től és f-től egyenlő távolságra vannak, vagyis az e és f egyenesek két szögfelező egyenese.

3277. A sík azon pontjainak halmaza, amelyek e-től és f-től egyenlő távolságra vannak, vagyis az e és f egyenesek középpárhuzamos egyenese.

3278. Az $ABCD$ téglalap határvonalából az A-tól és C-től egyenlő távol lévő pontokat, P-t és Q-t, az AC szakasz felezőmerőlegese metszi ki, függetlenül a megadott számértékektől.



3279. A háromszög egyenlőtlenségek miatt a harmadik oldal kisebb, mint 15 cm és nagyobb, mint 5 cm.

3280. Lehet, mert $4\cdot\sin\frac{\pi}{6}=2$; $\quad 5\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\approx 3,5$;

$4\cdot\operatorname{tg}\frac{2001\pi}{4}=4\cdot\operatorname{tg}\left(500\pi+\frac{\pi}{4}\right)=4$ (tangensfüggvény periódusa π).

Mivel a három számra teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, ezért lehetnek egy háromszög oldalainak hosszúságai.

3281. Mivel $\sin 390°=\sin 30°=0,5$; $\operatorname{ctg} 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0,5774$; $\frac{2}{3}\approx 0,6667$ (a szinuszfüggvény periódusa 2π), és a három számra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ezért lehetnek egy háromszög oldalainak hosszúságai.

3282. A lehetséges esetek: 1; 3; 6
2; 4; 6
3; 5; 6.

A háromszög oldalaira teljesülnie kell a háromszög-egyenlőtlenségeknek, azaz bármely két oldal összegének nagyobbnak kell lennie a harmadik oldalnál, ennek csak a 3. eset felel meg. Így a keresett háromszög oldalai 3 cm, 5 cm, és 6 cm hosszúságúak.

3283. A háromszög oldalai a megadott aránynak megfelelően $2x$, $3x$, $5x$ lenne. Ilyen háromszög nincs, mert nem teljesül a szakaszokra a háromszög-egyenlőtlenség.

3284. A háromszög területének segítségével fejezzük ki a háromszög adott oldalakhoz tartozó magasságát!

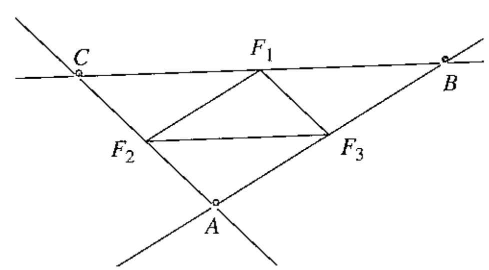
$$m_a=\frac{2T}{a}\ \Rightarrow\ m_a:m_b:m_c=\frac{2T}{a}:\frac{2T}{b}:\frac{2T}{c}=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=\frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{9}=$$
$$=\frac{9}{36}:\frac{6}{36}:\frac{4}{36}=9:6:4$$

3285. Legyenek a háromszög szögei rendre $x+35°$; x; $(x+35°)-25°=x+10°$.
A háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért
$x+35°+x+x+10°=180°\ \Rightarrow\ x=45°$.
Tehát a háromszög szögei rendre 80°; 45°; 55°.

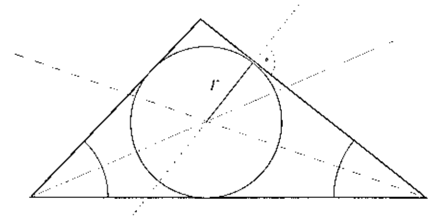
3286. Mivel a 78° a külső szöge az ABC háromszögnek, ezért $45°+\gamma=78°$, azaz $\gamma=33°$. Tehát az AB útszakasz 33°-os szögben látszik a C pontból.

3287. A 110°-os szög mellékszöge 70°-os, a háromszög másik belső szöge. A háromszög belső szögeinek összegéből megkapható a harmadik szög: 65°.

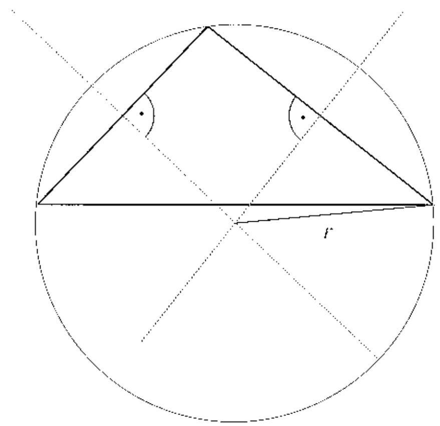
3288. Az oldalfelező pontok az ún. középvonal háromszöget adják. Mivel az oldalakkal párhuzamosak a középvonalak, azaz e kisháromszög oldalai, ezért az ábra szerint a kicsi csúcsaiban a szemközti oldallal húzott párhuzamosok lesznek a szerkesztendő háromszög oldalai. Lásd az ábrát!



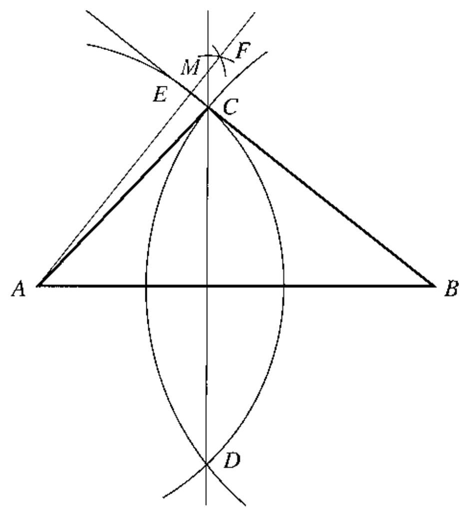
3289. A beírt kör középpontját két belső szögfelező metszéspontjaként kapjuk. Ebből a pontból a háromszög bármelyik oldalegyenesére állított merőleges kimetszi az egyik érintési pontot, azaz meghatározza a beírt kör sugarát.



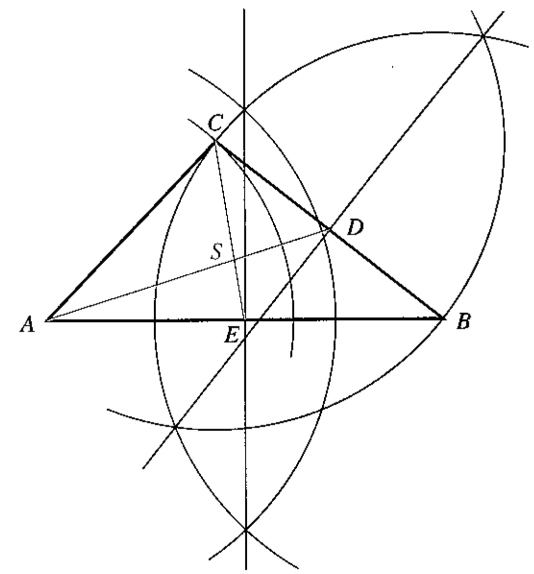
3290. A körülírt kör középpontját két oldalfelező merőleges metszéspontjaként kapjuk. Ez a pont és a háromszög egyik csúcsa meghatározza a körülírt kör sugarát.



3291. Felvesszük a 10 cm-es oldalt, két végpontjából (A és B) 7, illetve 6 cm sugarú körívet rajzolunk. Elég nagyokat: úgy, hogy a 10 cm-es szakasz mindkét oldalán létrejöjjön a metszéspont, és a 7 cm-es ívből még legyen bőven „túllógás”. Ekkor a két kör egyik metszéspontja (C) a háromszög harmadik csúcsa lesz, és a másik (D) segítségével rögtön az e csúcsból induló magasságvonalat is megrajzolhatjuk. A BC oldal meghosszabbítása és a 7 cm-es körív metszéspontja legyen E. Az E és C pontokból rajzolt két kis körív metszéspontjaként létrehozzuk F-et, A és F pedig meghatároz egy másik magasságvonalat. A két magasságvonal metszéspontjaként kapjuk a háromszög magasságpontját (M), ami kívül van a háromszögön, lévén az tompaszögű. (Természetesen a csúcsokból a szemközti oldalakra bocsátott merőlegeseket egyéb szerkesztésekkel is meghatározhatjuk, de talán ez a „leggazdaságosabb”.)



3292. Felvesszük a 10 cm-es oldalt, két végpontjából (A és B) 7, illetve 6 cm sugarú körívet rajzolunk. Utóbbiból elég nagyot, mert ezt a körzőnyílást fogjuk felhasználni az oldalfelező pontok meghatározásához is. A két kör metszéspontja a háromszög harmadik csúcsa (C). Ezután A-ból és C-ből is rajzolunk 6 cm-es sugarú íveket úgy, hogy kétszer is messék a B-ből rajzolt ívet. A metszéspontok segítségével meghatározzuk két oldal felezőpontját (D, E), ezeket a szemközti csúcsokkal összekötve kapunk két súlyvonalat, amelyek metszéspontja megadja a háromszög súlypontját (S). (Természetesen az oldalfelező pontokat egyéb szerkesztésekkel is meghatározhatjuk, de talán ez a „leggazdaságosabb”.)



3293. Az AB átmérőjű kör belső pontjaiból az AB szakasz 90°-nál nagyobb szögben látszik, ezért az AC_3B háromszögnek C_3-nál tompaszöge van. A kijelentés tehát igaz.

3294. A szárak által bezárt szög 20°-os.

3295. Mivel $\gamma = 32°$, és $\alpha = \frac{180° - \gamma}{2}$, így $\alpha = 74°$. Mivel α egyúttal külső szöge a másik háromszögnek, ezért $2\beta = \alpha$, azaz $\beta = 37°$.

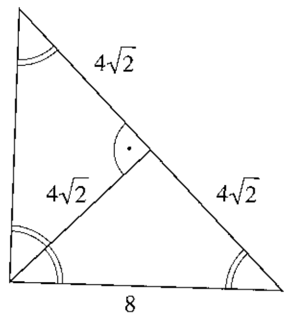
3296. Bármely félkör területe, ha az átmérő d: $T = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi}{2} = \frac{d^2\pi}{8}$.

Ha a háromszög befogói a és b, átfogója c, akkor a kérdés: igaz-e, hogy $\frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} = \frac{c^2\pi}{8}$.

Az egyenletet $\frac{\pi}{8}$-dal egyszerűsítve, a kérdés: igaz-e, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, ami természetesen igaz, lévén ez az adott háromszögre felírt Pitagorasz-tétel.

3297. Az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója $a\sqrt{2} = a + 4$.
Ebből: $a(\sqrt{2} - 1) = 4$, innen $a = \dfrac{4}{\sqrt{2}-1} = 4(\sqrt{2}+1)$.
A háromszög területe $\dfrac{1}{2}a^2 = 8(3 + 2\sqrt{2})$ $(\approx 46{,}6\ \text{cm}^2)$.

3298. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának a kétszerese az átfogó. A területe
$\dfrac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 32.$



Másik megoldás:
A magasság által lemetszett háromszög is egyenlő szárú derékszögű, amelynek átfogója $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$.
Ez az eredeti háromszög befogója. A területe 32.

3299. Az adott arányok szerint a befogók $3x$ és $4x$ hosszúak. $3x + 4x = 35 \Rightarrow x = 5$
A Pitagorasz tétele alapján az átfogó $5x$. Az átfogó tehát 25.

3300. Derékszögű háromszög esetén Pitagorasz tétele szerint:
ha a két befogó hossza 24 cm és 26 cm, az átfogó: $\sqrt{24^2 + 26^2} \approx 35{,}4$ (cm);
ha az egyik befogója 24 cm, és az átfogója 26 cm, akkor a másik befogója:
$\sqrt{26^2 - 24^2} = 10$ (cm).

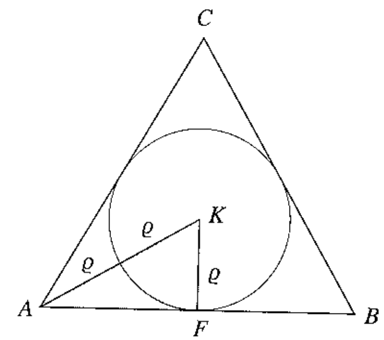
3301. $h = \sqrt{2{,}9^2 - 1^2} \approx 2{,}7$ (m).

3302. Az a oldalú szabályos háromszög magassága $m = \dfrac{a}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \Rightarrow a = 10$.
A háromszög kerülete 30.

3303. Az a oldalú szabályos háromszög területe $\dfrac{a^2}{4}\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$ $(a > 0)$.

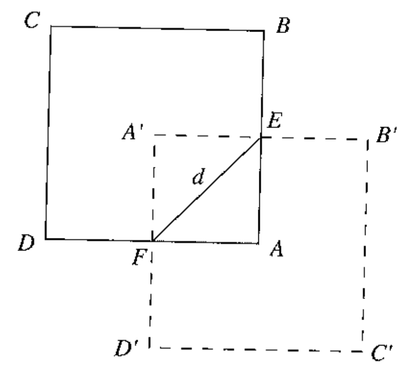
3304. Egy a oldalú szabályos háromszög magassága, mint az jól ismert, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$;
területe ezért $\dfrac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Ha a egész, a^2 is az, de már a negyedrésze nem feltétlenül (ha a páratlan) – igaz, biztosan racionális. A $\sqrt{3}$-mal szorozva viszont biztosan irracionális lesz az eredmény, tehát ilyen háromszög nincs.

3305. Adott a szabályos háromszögbe beírható kör sugara ϱ. A háromszög szerkeszthető pl. az alábbiak szerint:
1. ϱ befogójú, 2ϱ átfogójú derékszögű háromszög szerkesztése.
   Ez a 30°–60°-os $AFK\ \Delta$.
2. Az A-nak az F-re vonatkozó tükörképe B.
3. C az A, illetve B középpontú, AB sugarú körök egyik metszéspontja.

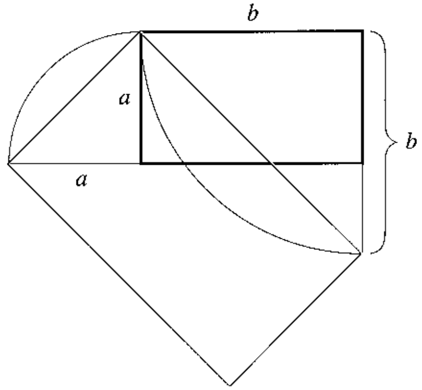


3306. Az a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = 3$, a négyzet területe $a^2 = 9$.

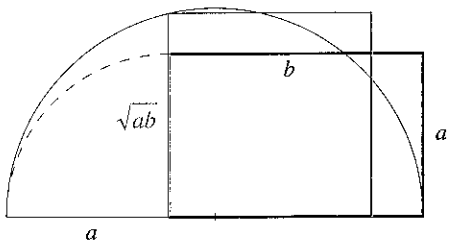
3307. A két szomszédos oldal E és F felezőpontjának távolsága legyen d. Egy d átfogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög derékszögű csúcsa a négyzet egyik csúcspontja, A. Ezt E-re, illetve F-re tükrözve kapjuk a B, illetve a D pontot. Az A-nak BD egyenesre vonatkozó tükörképe a négyzet negyedik csúcspontja, C.
A feladatnak két megoldása van, az $ABCD$ és az $A'B'C'D'$. A két négyzet tükörtengelye az EF egyenes.



3308. Ekkor az új téglalap mindkét oldala $\sqrt{2}$-ször akkora lesz, mint az eredetié. Egy szakasz $\sqrt{2}$-szörösét a legkönnyebben úgy szerkeszthetjük meg, ha a szakasszal mint befogóval egyenlő szárú derékszögű háromszöget szerkesztünk, és vesszük az átfogóját. Ezt ügyes, „gazdaságos" módon az ábra szerint egyszerre megtehetjük mindkét téglalap-oldallal, s ekkor nem kell feleslegesen szakaszokat másolni ide-oda, csökkentjük a hiba és pontatlanság esélyét is.

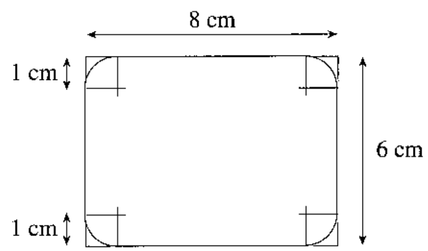


3309. Ha a téglalap oldalai a és b, akkor a négyzet oldala a mértani középük, azaz $\sqrt{ab}$ lesz. Két szakasz mértani közepét úgy szerkeszthetjük meg legkönnyebben, ha egymás meghosszabbításába felmérjük őket, Thalész-félkört rajzolunk az összegszakasz mint átmérő fölé, és a szakaszok csatlakozó pontjában merőlegest állítunk rájuk. Ebből a körív kimetszi a mértani középüket (l. magasságtétel), és ezzel a szakasszal már megrajzolhatjuk a négyzetet. Az ábra szerint ezt ügyesen, „gazdaságosan" is megtehetjük, minél kevesebb szakasz-másolással, így pontosabban.



3310. A feltétel szerint a téglalap oldalai: x, illetve $3x$ hosszúságúak. Így a téglalap kerülete: $8x = 80 \Rightarrow x = 10$. Tehát a téglalap oldalai 10 cm, illetve 30 cm hosszúságúak, területe: 300 cm^2.

3311. A 6 cm és 8 cm oldalú téglalap csúcsainál szerkesztjük meg az 1 cm sugarú köríveket az ábra szerint.



3312. A fatörzs d átmérője egyúttal a kivágandó gerenda keresztmetszetét jelentő téglalap átlója. Pitagorasz tétele szerint:

$d^2 = 25^2 + 35^2,\ d > 0 \Rightarrow d = \sqrt{1850} = 5\sqrt{74} \approx 43$ (cm).

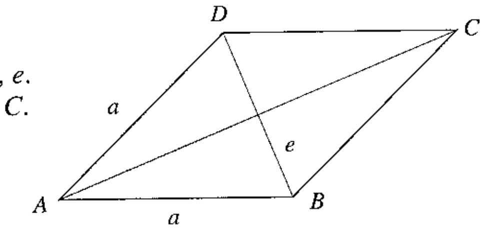
3313. a) Az a oldalú rombuszt e és f, egymásra merőleges átlója négy egybevágó derékszögű háromszögre bontja. Az $e = 3$ cm, $f = 6$ cm hosszú átlók feléből Pitagorasz-tétellel számítjuk ki a rombusz oldalának hosszát:

$a^2 = 1{,}5^2 + 3^2,\ a > 0 \Rightarrow a = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}35$ (cm).

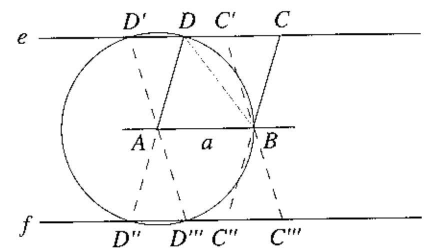
b) A rombusz területe $t = \dfrac{e \cdot f}{2} = 9$ (cm^2).

3314. Adott a és e.
A szerkesztés lépései lehetnek:
1. ABD Δ szerkesztése 3 oldalból: a, a, e.
2. Az A pont tükrözése BD egyenesre: C.

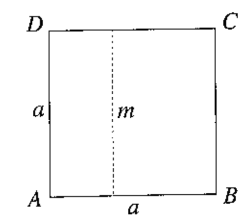
A szerkesztés feltétele: $2a > e$.



3315. Adott a, m.
A szerkesztés lépései lehetnek:
1. AB egyenessel párhuzamosan, tőle m távolságra húzott egyenes e (illetve f).
2. Az A középpontú, a sugarú k kör és e egyenes közös pontja D és D'. $k \cap e = \{D; D'\}$
3. Az A-nak a BD egyenesre vonatkozó tükörképe C, BD' egyenesre vonatkozó tükörkép C'.

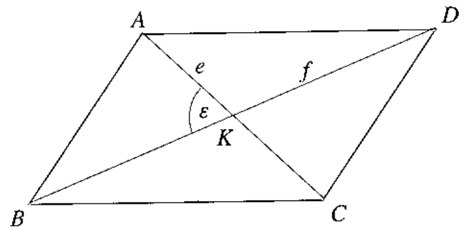


A szerkesztés feltétele $m \le a$.
Az $m < a$ esetén négy egybevágó rombuszt kapunk, ami egy megoldásnak számít.
Az $m = a$ esetén a kapott rombusz az $ABCD$ négyzet.
(Az $m > a$ esetén nincs megoldás.)



3316. Adott a paralelogramma két átlója, e és f, továbbá $(e,f)\sphericalangle = \varepsilon \le 90°$ (két egyenes hajlásszögének definíciója miatt).
1. $ABK\,\Delta$ szerkesztése két oldal és közbezárt szögből: $\frac{e}{2}$, $\frac{f}{2}$ és ε.
2. Az A-nak, illetve B-nek K-ra vonatkozó tükörképe C, illetve D.

Egy megoldást kapunk.



3317. Az $ABCD$ trapéz, ezért $AB \parallel CD$. Továbbá AC -∘- K, ahol K a trapéz köré írt kör középpontja. A Thalész-tétel szerint $\Rightarrow$ $\beta = \delta = 90°$. Ezekből következik, hogy ez a trapéz téglalap.

3318. a) A trapéz területe $t = 15\ \text{cm}^2$, $m = 3$ cm, $k = \frac{a+c}{2} = ?$

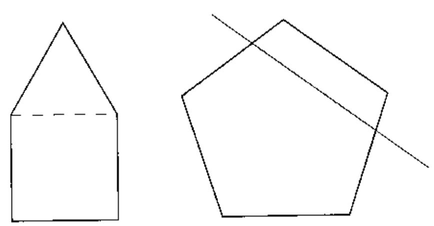
$$t = \frac{a+c}{2}m \Rightarrow \frac{a+c}{2}\cdot 3 = 15 \Rightarrow k = 5\ \text{cm}$$

b) A deltoid területe $t = 20\ \text{cm}^2$, $f = 8$ cm, $e = ?$

$$t = \frac{e\cdot f}{2} \Rightarrow \frac{e\cdot 8}{2} = 20 \Rightarrow e = 5\ \text{cm}$$

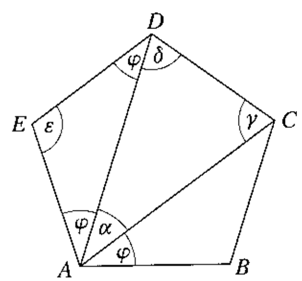
3319. a) Van, könnyen rajzolhatunk ilyet, pl. ha egy négyzet és egy szabályos háromszög egyik oldala közös, akkor a két alakzat uniója éppen megfelelő.

b) Ilyen is van, egy szabályos ötszögből az egyik oldalával párhuzamos egyenessel lemetszünk egy darabot, a maradék síkidom éppen megfelelő.



3320. Az n oldalú szabályos sokszög egy belső szöge $\frac{(n-2)180°}{n}$, ezért $\varepsilon = 108°$.

Az ADE és az ABC egybevágó egyenlő szárú háromszögben $2\varphi = 72°$,
az $ACD\,\Delta$-ben $\alpha = 108° - 2\varphi = 36°$, $\gamma = \delta = 72°$.



3321. A szabályos ötszög körülírt köre megegyezik az $A_1A_2A_3$ háromszög körülírt körével. A kör megszerkesztése után A_1 középpontú, A_1A_2 sugarú, illetve A_3 középpontú, A_3A_2 sugarú kört rajzolva ezek kimetszik az ötszög hiányzó két csúcsát.

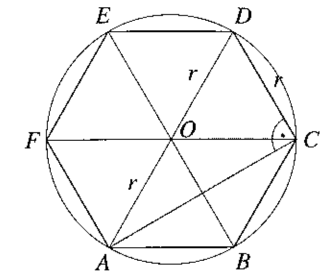
3322. Az r sugarú körbe írt szabályos hatszög oldala is r. A legrövidebb átlók egyike AC. A Thalész-tételből következik, hogy az $ACD\Delta$ derékszögű, felírható rá a Pitagorasz-tétel.

$AC^2 = AD^2 - DC^2$, ahol $AD = 2r$, $DC = r$, ezért $AC^2 = 3r^2 \Rightarrow AC = r\sqrt{3}$.

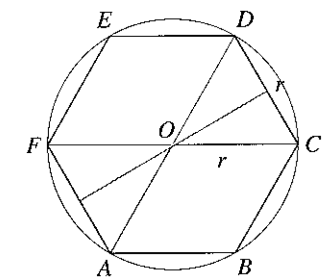
Tehát $AC = 3\sqrt{3}$ cm.

Másik megoldás:

AC az ABO szabályos háromszög magasságának a kétszerese, tehát $3\sqrt{3}$.



3323. A szabályos hatszög szemközti oldalfelező pontjainak távolsága az ábrán látható két szabályos háromszög magasságának az összege. E háromszögek oldala egyenlő a hatszög köréírt kör sugarával, r-rel. A keresett távolság ezért $2\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$, azaz $3\sqrt{3}$ cm.

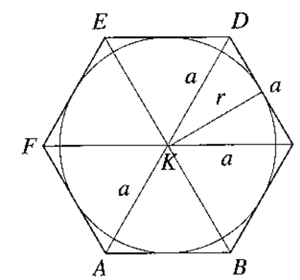


3324. 30-60 fokos derékszögű háromszög megszerkeszthető az r (a hosszabbik) befogó ismeretében. Az r egyenesére tükrözzük D-t. Így kapjuk a KDC háromszöget. Ezután a mellékelt ábra alapján a szerkesztés elvégezhető.

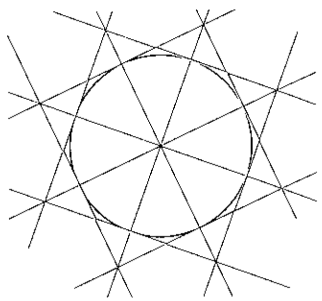
Az r sugarú kör köré írt a oldalú szabályos hatszög szemközti csúcspontjainak távolsága $2a$. A kör sugara az a oldalú szabályos háromszög magassága

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{2r}{\sqrt{3}}; \qquad 2a = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

A két szemközti csúcspont távolsága kb. 4,6 cm.

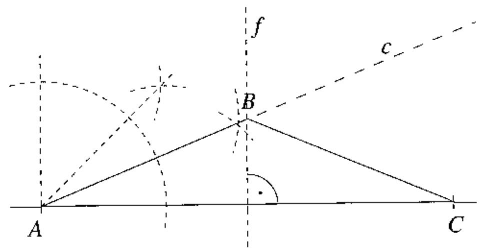


3325. Útmutatás:
A beírt körön megjelölt érintési pontok egy szabályos nyolcszöget határoznak meg. Ennek a csúcsaiban a körhöz érintőket húzva kapjuk a keresett nyolcszöget.



3326. Az ABC háromszög egyenlő szárú, szögei 135°, 22,5°, 22,5°.

Szerkesztés menete:
- az AC szakasz felezőmerőlegese (f);
- A kezdőpontú c félegyenes szerkesztése úgy, hogy $CAc\sphericalangle = 22{,}5°$ legyen (derékszög, majd kétszer szögfelezés);
- az f és a c egyenesek metszéspontja megadja a B csúcsot.



3327. A P pontból a K középpontú körhöz húzott érintő merőleges az E érintési ponthoz tartozó sugárra. A KEP derékszögű háromszögre felírható Pitagorasz-tétel alapján: $PE = \sqrt{21}$ cm ($\approx 4{,}6$ cm).

3328. A 36°-os középponti szög épp a teljesszög tizede, tehát a hozzá tartozó ívhossz is a kerület tizede, azaz 10,7 cm. A körcikk területét többféle módon is kiszámíthatjuk, köztük úgy is, hogy nincs szükség a sugár meghatározására: $t = \frac{i^2}{2\hat{\alpha}}$, ahol i az ívhossz, $\hat{\alpha}$ pedig a radiánban mért középponti szög. Vagyis most

$$t = \frac{(10{,}7\ \text{cm})^2}{2\cdot\frac{\pi}{5}} = \frac{286{,}225}{\pi}\ \text{cm}^2 \approx 91{,}1\ \text{cm}^2.$$

Másik megoldás:
A 36°-os középponti szög a teljes szög tizede, így az ívhossz is a kerület tizede, tehát $10{,}7 = \frac{2r\pi}{10}$, innen az $r = \frac{10\cdot 10{,}7}{2\pi}$.

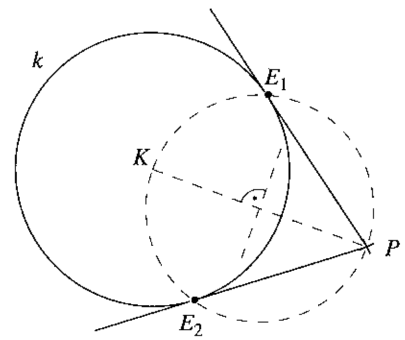
A körcikk területe: $\frac{r^2\pi}{10} = \frac{\left(\frac{10\cdot 10{,}7}{2\pi}\right)^2\pi}{10} = \frac{10\cdot 10{,}7^2}{4\pi} = \frac{5\cdot 10{,}7^2}{2\pi} \approx 91{,}1$ (cm²).

3329. A körcikk területe $t = \frac{ir}{2} \Rightarrow \frac{15r}{2} = 45$. A kör sugara $r = 6$ cm.

3330. A körcikk középponti szöge 60°-os. Ezért a körcikk területe a kör területének egyhatoda $t = \frac{r^2\pi}{6} \Rightarrow \frac{5{,}2^2\pi}{6} \approx 14{,}16$ (cm²).

3331. A körcikk középponti szöge 18°-os. Ezért a körcikk területe a kör területének egyhuszada. $\frac{r^2\pi}{20} = 6{,}8 \Rightarrow t = r^2\pi = 136$ (cm²).

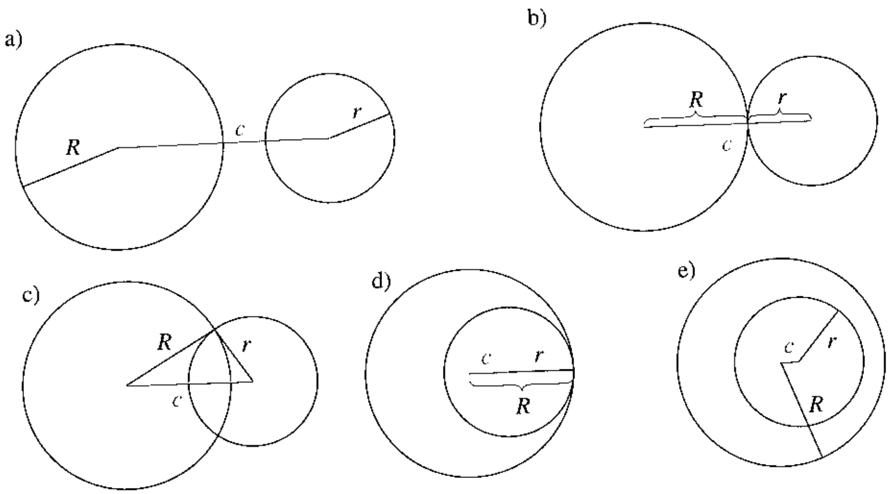
3332. Szerkesztés menete:
- KP átmérőjű kör;
- ennek a k-val alkotott metszéspontjai adják az érintési pontokat.



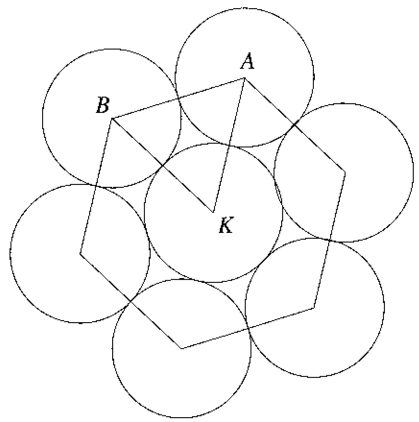
3333. A körgyűrű területe a két kör területének különbsége, vagyis most $(5\ \text{cm})^2\cdot\pi - (3\ \text{cm})^2\cdot\pi = 16\pi\ \text{cm}^2 \approx 50{,}3\ \text{cm}^2$.

3334. Két különböző középpontú körnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet. Jelöljük az R és az r sugarú kör középpontjának távolságát c-vel.

esetek	a közös pontok száma	ábrák
$R+r<c$	0	*a*
$R+r=c$	1	*b*
$R-r<c<R+r$	2	*c*
$R-r=c$	1	*d*
$R-r>c$	0	*e*



3335. Ha a szabályos hatszög középpontja K, akkor KAB egy 2 cm oldalú szabályos háromszög. Ebből következik, hogy a hetedik kör sugara is 1 cm, így területe $\pi \approx 3{,}14$ (cm^2).

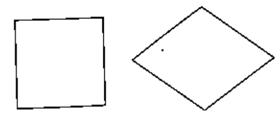


3336. Adott S síkon zárt körlemezt alkotnak azok a Q pontok, melyek egy adott P ponttól legfeljebb adott r (> 0) távolságra vannak ($d(P; Q) \le r$).

3337. Írjuk fel mindegyik szöget mint egy 0° és 360° közötti szög, és 360° egész számú többszörösének összegét: $\alpha = 41°$, $\beta = 221° + 360°$, $\gamma = 221° - 360°$, $\delta = 319° - 360°$, $\varepsilon = 41° + 2 \cdot 360°$. Láthatóan α és ε, valamint β és γ ugyanazt az elforgatást valósítják meg, hiszen 360° bármely egész számú többszörösével továbbforgatva az eredmény már nem változik (a helybenhagyást kapjuk).

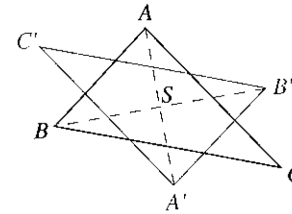
3338. a) Igen, ez a háromszögek egybevágóságának egyik alapesete.

b) Nem, mint arra könnyű példát találni: egy négyzet és egy vele azonos oldalú, nem derékszögű rombusz egymással nem egybevágó.



3339. a) A súlypontot két súlyvonal metszéspontjaként is megkaphatjuk.

b) A tükörkép az $A'B'C'$ háromszög.



3340. a) Deltoid (nem rombusz) vagy tengelyesen szimmetrikus trapéz (nem téglalap);

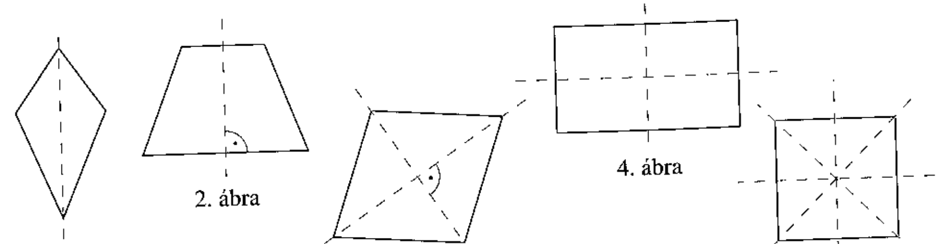
b) rombusz (nem négyzet) vagy téglalap (nem négyzet);

c) szabályos háromszög.

3341. a) Pontosan egy szimmetriatengellyel rendelkező négyszög a deltoid, ha nem rombusz (1. ábra), a tengelyesen szimmetrikus trapéz, ha nem téglalap (2. ábra).

b) Pontosan két szimmetriatengellyel rendelkező négyszög a rombusz, ha nem négyzet (3. ábra), a téglalap, ha nem négyzet (4. ábra).

c) Pontosan négy szimmetriatengellyel rendelkező négyszög a négyzet (5. ábra).



1. ábra 2. ábra 3. ábra 4. ábra 5. ábra

3342. A négyzetnek négy tengelyes szimmetriája van, a két oldalfelező merőleges és a két átló egyenese szimmetriatengely. Középpontja körül 90 fokos forgási szimmetriát is mutat, és természetesen középpontosan is szimmetrikus. A téglalap is középpontosan szimmetrikus, és két tengelye van, amire tengelyesen szimmetrikus: a két oldalfelező merőleges. (Ha a téglalap speciálisan négyzet, akkor az ott leírtak vonatkoznak rá.)

3343. A rombusz középpontosan szimmetrikus, mivel egyben paralelogramma is, de emellett két átlójára tengelyesen is szimmetrikus. A paralelogramma csak középpontosan szimmetrikus. (Ha a paralelogramma rombusz, vagy még speciálisabban négyzet vagy téglalap, akkor az előző feladatban leírtak vonatkoznak rá.)

3344. Mind a húrtrapéz (tengelyesen szimmetrikus vagy egyenlő szárú trapéz), mind a deltoid tengelyesen szimmetrikus: a deltoid az egyik átlójára, míg a húrtrapéz a párhuzamos oldalpár közös felezőmerőlegesére. Forgásszimmetriájuk általánosan nincs, csak speciális esetben, hiszen pl. a négyzet is húrtrapéz, sőt deltoid is.

3345. Az első ábra egy vízszintes tengelyre szimmetrikus, függőlegesen nem, mert a belső kör mintája nem „stimmel". A második ábra, mint a Mercedes-jelvény, nagyjából harmadrendű forgásszimmetriát mutat és tengelyes szimmetriát (3 tengely).

3346. Az első: függőleges és vízszintes tengelyes szimmetriát, ebből következően (mivel ezek merőlegesek) 180 fokos forgási szimmetriát, azaz középpontos szimmetriát is mutat. A második ábrán negyedrendű forgásszimmetria, tehát középpontos szimmetria is, továbbá négy (függőleges, vízszintes és a két átló) tengelyre tengelyes szimmetria is látható.

3347. Vízszintes középvonalra, valamint a második és a harmadik virágminta közötti függőleges tengelyre is szimmetrikus a bal ábra. A jobb oldali ugyanúgy vízszintes középvonalra, mint tengelyre szimmetrikus.

3348. A bal oldalin csak eltolási szimmetria van, azaz ez egy ismétlődő szalagminta (ha végtelennek képzeljük a szalagot, lásd még a megjegyzést). Tengelyes szimmetriája nincs. A jobb oldali teljesen hasonló, a spirál miatt tengelyes szimmetria nincs, csak eltolási.

Megjegyzés:
Eltolási szimmetria alatt azt értjük, hogy ha végtelennek vesszük a szalagot, akkor egy eltolás önmagába viszi át.

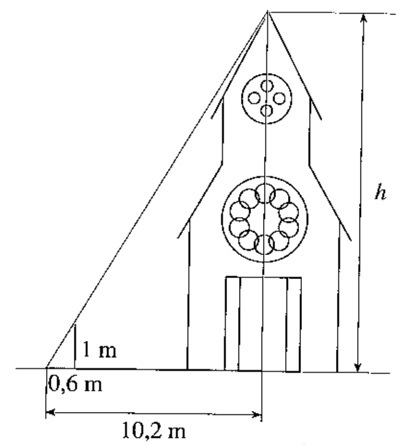
3349. A bal oldali ábrán csak eltolási szimmetria van (és csúsztatva tükrözés viszi még önmagába), a jobb oldalin viszont hatodrendű forgási szimmetria is van a sötéten, illetve a világosan kirajzolódó körök középpontja körül, harmadrendű a szürke kör középpont körül.

3350. A bal oldalin semmilyen szimmetria nem fedezhető fel. (A madarak nem is egybevágóak.) A jobb oldali 120 fokos forgási szimmetriát mutat három fehér pillangó szárnyainak érintkezési pontja körül.

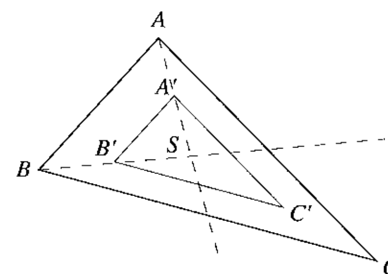
3351. Mindkét minta tengelyesen szimmetrikus az őt függőlegesen, illetve vízszintesen felező egyenesre, és középpontosan szimmetrikus saját középpontjára. (Ha a pipazacskó mintája vízszintesen még tovább ismétlődik, akkor további függőleges tengelyek találhatók a kis lila „ékek" között.)

3352. a) Igen, ez a háromszögek hasonlóságának egyik alapesete.
b) Nem, gondoljunk pl. egy négyzetre és egy nem négyzet téglalapra.

3353. A bot és a templomtorony egyaránt merőleges a talajra, így a talajra vetített árnyékra is.
Az ábrán feltüntetett két derékszögű háromszög hasonló. Ezért felírható:
$$\frac{h}{10{,}2} = \frac{1}{0{,}6} \quad \Rightarrow \quad h = 17 \text{ m}.$$
A torony 17 m magas.

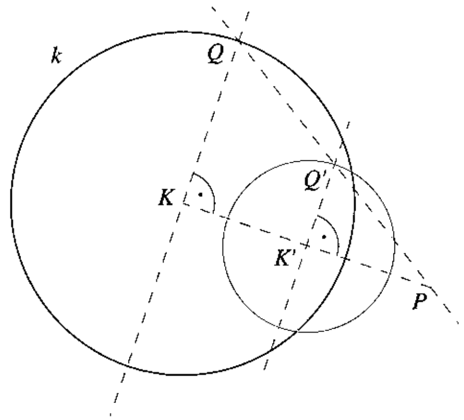


3354. a) A súlypontot két súlyvonal metszéspontjaként is megkaphatjuk.
b) $A'B'C'$ a kicsinyített háromszög.



3355. A k kör kicsinyített képe is kör, melynek K' középpontját az eredeti kör K középpontjának középpontos kicsinyítésével kapjuk, sugara pedig az eredeti sugár felével egyenlő.

A szerkesztés menete:
- KP felezőpontja a K';
- k egy tetszőleges Q pontjának kicsinyítése P-ből: Q';
- a K' középpontú, $K'Q'$ sugarú kör a k felére kicsinyítése P-ből.



3356. a) A tér azon pontjai, amelyek K-tól éppen 3 cm távolságra vannak, vagyis a K középpontú, 3 cm sugarú gömbfelület.

b) A tér azon pontjai, amelyek K-tól legfeljebb 3 cm távolságra vannak, vagyis a K középpontú, 3 cm sugarú zárt gömbtest.

c) A tér azon pontjai, amelyek K-tól 3 cm-nél kisebb távolságra vannak, vagyis a K középpontú, 3 cm sugarú nyílt gömbtest.

3357. A tér azon pontjai, amelyek A-tól és B-től egyenlő távolságra vannak, vagyis az AB szakasz felezőmerőleges síkja.

3358. A tér azon pontjai, amelyek S-től és Σ-tól egyenlő távolságra vannak, vagyis az S és Σ síkok két szögfelező síkja.

3359. A tér azon pontjai, amelyek S-től és Σ-tól egyenlő távolságra vannak, vagyis az S és Σ síkok középpárhuzamos síkja.

3360. A kocka csúcspontjain áthaladó gömb átmérője a kocka testátlója.

Egy a élű kocka testátlója $a\sqrt{3}$, így a gömb sugara $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, térfogata

$$V_1 = \frac{4R^3\pi}{3} = \frac{4\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3\pi}{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{2}.$$

A kockába írt gömb átmérőjének nagysága a kocka élhosszának nagyságával egyenlő. Így a kockába írt gömb térfogata: $V_2 = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi}{3} = \frac{a^3\pi}{6}.$

A kocka csúcspontjain áthaladó gömb térfogatának és a kockába írt gömb térfogatának aránya: $\frac{V_1}{V_2} = 3\sqrt{3}.$

Másik megoldás:
Bármely két gömb hasonló, ezért a térfogatok aránya egyenlő a sugarak arányának köbével: $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}\right)^3 = 3\sqrt{3}.$

3361. A kocka csúcspontjain áthaladó gömb átmérője a kocka testátlója.

Egy a élű kocka testátlója $a\sqrt{3}$, így a gömb sugara $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, térfogata

$$V = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3\pi}{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{2}.$$ A kocka térfogata a^3.

Tehát a kocka köré írt gömb térfogata $\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \approx 2,72$-szorosa a kocka térfogatának.

3362. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$

3363. Az első tengely körüli forgatáskor egy 41 cm alapkör sugarú, 80 cm magas forgáshengert kapunk. Ennek térfogata: $V_1 = 41^2\cdot\pi\cdot 80$ cm³.
A második tengely körüli forgatáskor egy 40 cm alapkör sugarú, 82 cm magas forgáshengert kapunk. Ennek térfogata: $V_2 = 40^2\cdot\pi\cdot 82$ cm³.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{41^2\cdot\pi\cdot 80}{40^2\cdot\pi\cdot 82} = \frac{41\cdot 41\cdot 2\cdot 40}{40\cdot 40\cdot 2\cdot 41} = \frac{41}{40}.$$

3364. Ha a henger alapkörének kerülete a és alapkörének sugara r_1, a henger magassága b, akkor $a = 2r_1\pi \Rightarrow r_1 = \frac{a}{2\pi}$; a henger térfogata: $V_1 = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\cdot\pi\cdot b = \frac{a^2b}{4\pi}.$

Ha a henger alapkörének kerülete b és alapkörének sugara r_2, a henger magassága a, akkor $b = 2r_2\pi \Rightarrow r_2 = \frac{b}{2\pi}$; a henger térfogata: $V_2 = \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2\cdot\pi\cdot a = \frac{ab^2}{4\pi}.$

A két henger térfogatának aránya: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b}.$

3365. Ha az a és b oldalú téglalapot megforgatjuk az a oldala körül, a kapott test egy forgáshenger, alapkörének sugara b, a henger magassága a, a henger térfogata:
$V_1 = b^2\pi \cdot a$.
Ha az a és b oldalú téglalapot megforgatjuk a b oldala körül, a kapott test egy forgáshenger, alapkörének sugara a, a henger magassága b, a henger térfogata:
$V_2 = a^2\pi \cdot b$.
E két test térfogatának aránya: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a}$.

3366. A cső anyagának térfogata a „külső" és a „belső" henger térfogatának különbsége:
$V = 1{,}5^2\pi \cdot 200 - 1{,}25^2\pi \cdot 200 \approx 432$ (cm³).

3367. A henger térfogata $36^2 \cdot \pi \cdot 108$ mm³ ≈ 439 722 mm³ < 500 000 mm³ = 0,5 dm³, tehát nem fér bele fél liter folyadék.

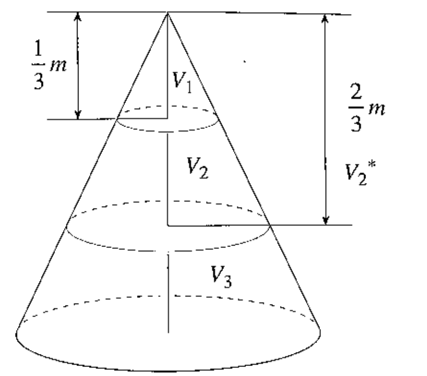
3368. A tömeg 200 g, a sűrűség 8,92 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, ezért a henger térfogata $V = \frac{200 \text{ g}}{8{,}92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \approx$
$\approx 22{,}422$ (cm³), másrészt $V = r^2\pi m$ (ahol r az alapkör sugara, m a henger magassága), ezért $r = \sqrt{\frac{V}{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{22{,}422}{1{,}4\pi}} \approx 2{,}258$ (cm).

3369. Legjobb esetben is csak a hengerrel azonos alapterületű, vele egyenlő magasságú kúpot kaphatnánk. Ennek térfogata éppen harmada a hengerének, tehát a hulladék legalább $66\frac{2}{3}$% lesz.

3370. Olyan forgáskúpot kapunk, amelynek alapköre $\frac{1}{2}$ cm, magassága pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.
A kúp térfogata: $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{24} \approx 0{,}227$ (cm³).

3371. Két test keletkezett. A kisebbik test egy, az eredetihez hasonló gúla, hasonlóságuk aránya $\frac{1}{2}$. A kis gúla térfogata az eredetiének $\frac{1}{8}$ része.
A másik test csonkagúla, melynek térfogata az eredeti gúla térfogatának $\frac{7}{8}$ része.
A kis gúla és a csonkagúla térfogatának aránya tehát $\frac{1}{7}$.

3372. Ha a kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metsszük, akkor a keletkezett „kis kúp" hasonló az eredeti kúphoz. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának (a síkmetszetek csúcstól mért távolságai arányának) a köbével egyenlő:



$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{\frac{1}{3}m}{m}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{27}V$$

$$\frac{V_2^*}{V} = \left(\frac{\frac{2}{3}m}{m}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_2^* = \frac{8}{27}V;\ V_2 = V_2^* - V_1 = \frac{7}{27}V$$

$$V_3 = V - V_2^* = \frac{19}{27}V$$

Ha a kúpot az alaplapjával párhuzamos síkokkal magasságának harmadolópontjában elmetsszük, akkor a keletkezett „felső" kúp (V_1) és két csonkakúp (V_2, illetve V_3) térfogatának aránya: $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 7 : 19$.

3373. A gömb felszíne a gömb sugarának négyzetével, térfogata pedig a sugarának köbével egyenesen arányos.
Ha a felszín kétszereződött, akkor az eredetileg R sugár $\sqrt{2} \cdot R$ lett (kb. 1,41-szeresre nőtt), ezért a térfogat $(\sqrt{2})^3$-szerese (kb. 2,83-szorosa) lett az eredetinek.

3374. Fele akkora térfogatú gömbnek a sugara $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ akkora (a hasonlóság miatt). A felszín ekkor $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0{,}63$ részre csökken.

3375. Mivel minden gömb hasonló egymáshoz, térfogatuk aránya a hasonlósági arány (vagyis a sugaraik arányának) köbe. Ekkor az 1 cm sugarú gömbök $\frac{1}{4}$ arányban hasonlóak a 4 cm-eshez, vagyis térfogatuk $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ része annak, így persze a nagy gömb anyagából 64 kis gömb keletkezik (ha nincs veszteség). A gömbök felszíne pedig a hasonlósági arány négyzete szerint aránylik, tehát a kis gömböké egyenként $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ része a nagyénak. Összfelszínük így $64 \cdot \frac{1}{16} = 4$-szerese a nagy gömbének.

3376. a) A nullvektor iránya tetszőleges.

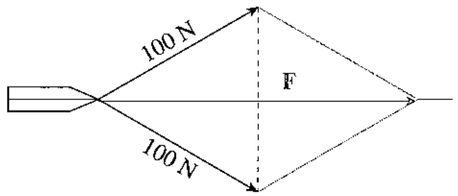
b) Ez a szorzat csak a vektorok által bezárt szög koszinusza miatt lehet negatív (a két vektor-abszolútérték nem lehet negatív), tehát ekkor a vektorok tompaszöget zárnak be.

3377. a) Az eredő erő az ábrán láthatóan az összetevő vektorok által bezárt szög felezője irányába mutat.

b) $|\mathbf{F}|$ egyenlő egy $a = 100$ N oldalú szabályos háromszög magasságának kétszeresével:

$$|\mathbf{F}| = 2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

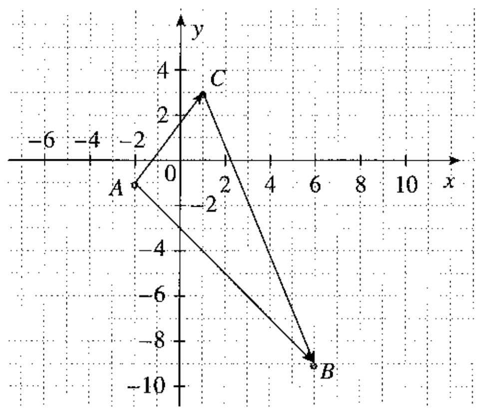
$$|\mathbf{F}| = 100\sqrt{3}\ \text{N}\ (\approx 173{,}2\ \text{N}).$$



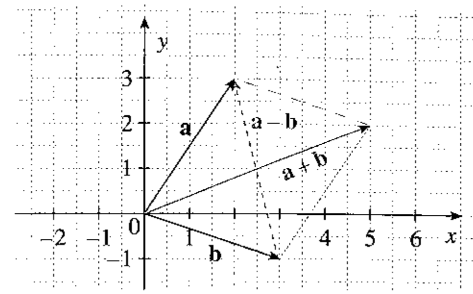
3378. A négyzet oldalai egyenlő hosszúak és a 2-2 szemközti oldala párhuzamos. Az ábra készítésekor a szemközti oldalak oldalvektorainak iránya ellentétes legyen.

3379. $\overrightarrow{AB} = (0-(-5); 4-(-8)) = (5; 12)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.

3380. Mivel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, ezért a kérdéses összetevők maguk az $\overrightarrow{AC}$, illetve $\overrightarrow{CB}$ vektorok, koordinátákkal kifejezve: (3; 4), illetve (5; –12).



3381. A két vektor összegét és különbségét tüntettük fel az ábrán.
Adott $\mathbf{a}(2; 3)$, $\mathbf{b}(3; -1)$ esetén
$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (5; 2)$, $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (-1; 4)$.



3382. A keresett hajlásszög a két vektor skaláris szorzatának kétféle felírásából adódik. Ha a két vektor $\mathbf{a}(a_1, a_2)$; $\mathbf{b}(b_1; b_2)$, akkor skaláris szorzatuk:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$, illetve $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varepsilon$,
ahol ε a két vektor által bezárt szög.

$$\text{Így } \cos\varepsilon = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2}} = \frac{19}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{10}} \approx 0{,}8253 \Rightarrow$$

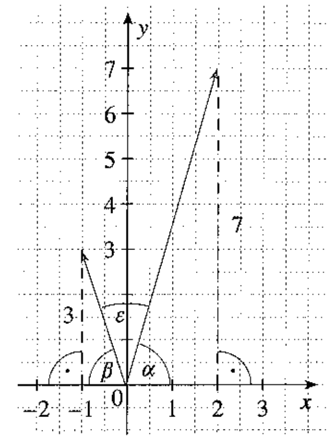
$\varepsilon \approx 34{,}4°$. Tehát a két vektor hajlásszöge kb. 34,4°.

Másik megoldás:
Vegyük fel a két vektort a koordináta-rendszerben. Az ábra jelöléseinek megfelelően:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{2}$; $\alpha \approx 74°$

$\operatorname{tg}\beta = 3$; $\beta \approx 71{,}6°$

$\varepsilon = 180° - (\alpha + \beta)$, tehát $\varepsilon = 34{,}4°$.



3383. Ha F az AB szakasz felezőpontja, akkor a három pont helyvektora közötti összefüggés: $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \Rightarrow \mathbf{b} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a}$; $\mathbf{b}(b_1; b_2)$; $b_1 = -2$; $b_2 = 8$, $B(-2; 8)$.

Másként:
Legyen $B(x; y)$, ekkor a felezőpont koordinátáira vonatkozó összefüggés szerint $\frac{4+x}{2} = 1$, illetve $\frac{-2+y}{2} = 3$. Ezekből $x = -2$, illetve $y = 8$, tehát $B(-2, 8)$.

3384. Nem. A elnevezésbeli hasonlóság arra utal, hogy egy szög szinusza ugyanúgy egyenlő a *pót-* (latinul: co-) szögének koszinuszával és viszont, mint ahogy egy szög tangense a *pót*szögének kotangensével és viszont (ha ezek léteznek).

Megjegyzés:
A szinusz és a koszinusz reciproka is létező szögfüggvények, de a gyakorlatban nemigen használatosak. Ebben a sorrendben koszekáns és szekáns a nevük.

3385. $5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$ (km) szintkülönbséget tett meg.

3386. A hőlégballon h magasságra emelkedett. $h = 500\,\mathrm{tg}\,60° = 500\sqrt{3}$, azaz kb. 866 m.

3387. 800 méter hosszú.

3388. $d \cdot \mathrm{tg}\,3° = 46 \Leftrightarrow d = \dfrac{46}{\mathrm{tg}\,3°} \approx 878.$
Körülbelül 880 méterre van az észlelési pont a torony aljától.

3389. A torony magassága $m = 60 \cdot \mathrm{tg}\,41°15' \approx 52{,}6$ (méter).

3390. A feljárónak az alapsíkra való x vetületét kell kiszámítanunk.
$\mathrm{tg}\,15° = \dfrac{2}{x} \Rightarrow x = \dfrac{2}{\mathrm{tg}\,15°} \Rightarrow x \approx 7{,}46$ m.

3391.

	$450°$	-6π	$\frac{3\pi}{4}$
sin	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	0	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3392. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{4}.$
Hegyesszögről van szó, tehát $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \dfrac{3}{4}$, ami így is írható:
$4\sin\alpha = 3 \cdot \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$
Négyzetre emelés és rendezés után: $25\sin^2\alpha = 9$.
Mivel $\sin\alpha > 0$, ezért $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Második megoldás:
Derékszögű háromszögben a hegyesszög tangense megkapható a szöggel szemközti és a szög melletti befogó hosszának hányadosaként.
A szóban forgó hegyesszög egy olyan derékszögű háromszögben is megtalálható, amelyben a szöggel szemközti befogó 3, a szög melletti befogó pedig 4 egység hosszú. Az átfogó hossza 5 egység, ezért a szög szinusza valóban $\dfrac{3}{5}$.

3393. $\alpha_1 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z}; \qquad \alpha_2 = \dfrac{5\pi}{3} + 2l\pi \quad l \in \mathbf{Z}.$

3394. $\beta_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z}; \qquad \beta_2 = \dfrac{5\pi}{3} + 2l\pi \quad l \in \mathbf{Z}.$

3395. $\gamma = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbf{Z}.$

3396. $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow \cos\delta = \sqrt{2}.$
Mivel $-1 \le \cos\delta \le 1$ minden valós δ számra, ezért a fenti egyenlőség semmilyen valós δ számra nem teljesül.

3397. a) negatív; b) pozitív.

3398. A II. és a IV. síknegyedben levő szögek szinusza, illetve koszinusza ellentétes előjelű, tehát ha $x \in \left]\dfrac{5\pi}{2}; 3\pi\right[\cup \left]\dfrac{7\pi}{2}; 4\pi\right[$, akkor $\sin x$ és $\cos x$ értéke ellentétes előjelű.

3399. Az alapon fekvő szögek koszinusza $\dfrac{40}{58} \approx 0{,}6897.$
A háromszög szögei: 46,4°; 46,4°; 87,2°.

3400. A nevezetes 30°-60°-90°-os háromszög megfelelő szögekkel szemközti oldalai rendre a, $\sqrt{3}a$, $2a$. Vagyis a 30° kétszeresével, a 60°-kal szemben nem kétszer, hanem $\sqrt{3}$-szor akkora oldal fekszik (és a kétszer akkora oldal a háromszor akkora 90°-kal szemben fekszik).

Megjegyzés:
A szinusztétel szerint a szögek szinuszai, és nem maguk a szögek arányosak a szemközti oldalakkal.

3401. A paralelogrammát átlója két egybevágó háromszögre bontja. A háromszög területe két oldal és a közbezárt szög ismeretében $t = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$.

A paralelogramma területe: $2\dfrac{28,9\cdot 35,6\sin\gamma}{2} = 402$, innen $\sin\gamma = 0,3907$, ahonnan a paralelogramma szögei $23,0°$, illetve $157,0°$.

3402. A $\left(-4;\ \dfrac{7}{5}\right)$ vektorra merőleges, ugyanolyan hosszú vektorok:

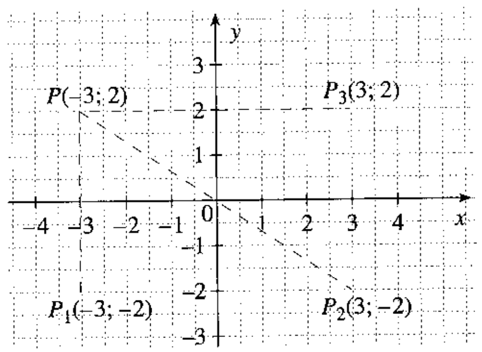
a $\left(\dfrac{7}{5};\ 4\right)$ és a $\left(-\dfrac{7}{5};\ -4\right)$ vektorok.

Az eredeti vektorra merőleges, kétszer olyan hosszú vektorok:

a $\left(\dfrac{14}{5};\ 8\right)$ és a $\left(-\dfrac{14}{5};\ -8\right)$ vektorok.

3403. Az $\overrightarrow{OA}(2; -1)$ vektor origó körüli $+90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{OB}(1; 2)$, tehát $B(1; 2)$ a négyzet egyik csúcsa. A még hiányzó két csúcs koordinátái: $(-2; 1)$, illetve $(-1; -2)$.

3404. Az ábráról leolvashatók a tükrözések utáni koordináták.



3405. Az $\overrightarrow{AB}(6; -4)$ vektorú eltolás, valamint az A és B pontok $F(1; 1)$ felezőpontjára vonatkozó tükrözés az A pontot a B pontba viszi. Az AB szakasz felezőmerőlegesére történő tükrözés is az A pontot a B pontba viszi. E felezőmerőleges egy pontja F és normálvektora $\overrightarrow{AB}$, így egyenlete: $6x - 4y = 2$.

3406. Az $\overrightarrow{AB}(6; -4)$ eltolás az A pontot a B pontba viszi. Bármely két olyan különböző vektor alkalmas az eltolásra, melyek összege az $\overrightarrow{AB}$.

Például: $\mathbf{v}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{3} = \left(2;\ -\dfrac{4}{3}\right)$ és $\mathbf{v}_2 = \dfrac{2\overrightarrow{AB}}{3} = \left(4;\ -\dfrac{8}{3}\right)$.

Vagy legyen (egy tetszőleges pont) $C(1; 3)$, ekkor $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AC}(3; 0)$; $\overrightarrow{CB}(3; -4)$.

3407. A g normálvektora kétszerese az e-ének, de az egyenletek konstansára nem áll ez az arány. Az e és f normálvektora merőleges, hiszen skaláris szorzatuk 0. A h egyenlete az f-ének kétszerese. Ezért összefoglalóan: $e \parallel g \perp f \equiv h$.

3408. $A(-2; -5)$, $B(6; 3)$. Az AB szakasz felezőpontja $F(2; -1)$.
Az f felezőmerőleges egyik normálvektora: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{n}_f = (8, 8) \parallel (1; 1)$.
Az AB szakasz felezőmerőlegesének az egyenlete: $x + y = 1$.

3409. Adott e: $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$, $A(0; 4)$.

Az A-ra illeszkedő, e-vel párhuzamos f egyenes egyenlete f: $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$,

az f-nek az x tengellyel való M metszéspontja $M(6; 0)$.

3410. $y = x - 2$.

3411. Az AB szakasz felezőpontja: $F(6; -1)$, ezért a keresett egyenlet: $y = -1$.

3412. A $P(3; -2)$ pontra illeszkedő, az x, illetve y tengellyel párhuzamos egyenesek egyenlete: $y = -2$, illetve $x = 3$.

3413. Adott $A(3; 0)$ pontra illeszkedő, adott e: $x - 2y + 2 = 0$ egyenesre merőleges f egyenes egyenlete $2x + y = 6$.

Megjegyzés:
Ehhez az egyenlethez eljuthatunk, ha akár az egyenes normálvektoros, akár irányvektoros, illetve iránytényezős egyenletét írjuk fel. [$\mathbf{n}_f(2; 1)$, $\mathbf{v}_f(1, -2)$, $\mathbf{m}_f = -2$]

3414. e: $2x - y + 1 = 0$; $e \parallel f$ és f -o- $P(3, 2)$.
f: $2x - y = 2\cdot 3 - 1\cdot 2 \Rightarrow 2x - y = 4$.

3415. A két egyenlet akkor lesz ugyanannak az egyenesnek az egyenlete, ha a két egyenlet egymás számszorosa, azaz az ismeretlenek együtthatói és a konstans tagok is egymás ugyanannyiszorosai. $\Rightarrow$ A megfelelő ismeretlenek együtthatóinak és a konstans tagok aránya megegyezik: $\dfrac{1,5}{1} = \dfrac{b}{-\frac{1}{3}} = \dfrac{-\frac{11}{2}}{a} \Rightarrow b = -0,5$ és $a = -\dfrac{11}{3}$.

Másik megoldás:
Rendezzük át az egyenleteket:
$3x - y + 3a = 0$ és $3x + 2by - 11 = 0$;
tehát $3a = -11$
$$a = -\frac{11}{3}$$
$$2b = -1$$
$$b = -\frac{1}{2}.$$

3416. A két egyenlet akkor lesz két párhuzamos egyenesnek az egyenlete, ha a két egyenletben a megfelelő ismeretlenek együtthatóinak aránya megegyezik,de a megfelelő konstans tagok aránya az előző aránytól különböző:
$$\frac{1,5}{1} = \frac{b}{-\frac{1}{3}} \neq \frac{-\frac{11}{2}}{a} \Rightarrow b = -0,5 \quad \text{és} \quad a \neq -\frac{11}{3}.$$

3417. $y = 3x + 3a \Rightarrow m_1 = 3$;
$y = \frac{-1,5}{b}x + \frac{11}{2b} \Rightarrow m_2 = \frac{-1,5}{b}$.
A két egyenes merőleges egymásra, ha meredekségük szorzata -1.
$3 \cdot \frac{-1,5}{b} = -1 \Rightarrow b = 4,5$ és az a tetszőleges valós szám.

Másik megoldás:
A két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha normálvektoraik merőlegesek egymásra. $\mathbf{n}_1\left(1; -\frac{1}{3}\right)$; $\mathbf{n}_2(1,5; b)$.
Két vektor merőleges egymásra, ha skalárszorzatuk nulla.
$1 \cdot 1,5 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot b = 0 \Rightarrow b = 4,5$ és az a tetszőleges valós szám.

3418. A két alakzat metszéspontjában lehetséges az ütközés. A metszéspont koordinátáit az $x - 2y + 5 = 0 \wedge 4x + y - 70 = 0$ egyenletrendszer megoldásával kapjuk: $P(15; 10)$.

3419. A két alakzat metszéspontjában történhetett a maghasadás. A metszéspont koordinátáit a $3x - 12y - 3 = 0 \wedge 4x + y - 21 = 0$ egyenletrendszer megoldásával kapjuk (az első egyenlet mindkét oldalát célszerű először 3-mal osztani): $P(5; 1)$.
Mindkét alakzat egyenes. Az első egyik normálvektora az $(1; -4)$ vektor, a másodiké pedig a $(4; 1)$ vektor. Ezek skaláris szorzata 0, így a két vektor (és így a rájuk merőleges egyenesek is) egymásra merőlegesek.

3420. A háromszög súlypontja: $S(-1; -2)$. Ennek az origótól való távolsága $\sqrt{5}$.

3421. $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} \Rightarrow C(16; 9)$.

3422. $AB = \sqrt{41}$, $BC = \sqrt{97}$, $CA = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

3423. $\overrightarrow{AB}(-3; -5)$; $\overrightarrow{CD}(-2; -5)$. Mivel $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, ezért a 4 pont által meghatározott négyszög nem paralelogramma.

3424. Minthogy AC szakasz felezőpontja K,
$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} \Rightarrow \mathbf{c} = 2\mathbf{k} - \mathbf{a}$, így $C(2;\ 4 + 2\sqrt{3})$.
Ugyanígy BD szakasz középpontja K,
$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{d}}{2} \Rightarrow \mathbf{d} = 2\mathbf{k} - \mathbf{b}$, így $D(-2;\ 4 - 2\sqrt{3})$.

3425. Az 1. egyenlet nem kör egyenlete (hiányzik az x^2).
A 2. és a 3. egyenlet nem kör egyenlete (a négyzetes tagok együtthatója nem egyenlő).
A 4. egyenletet osszuk el 2-vel és alakítsuk teljes négyzetté!
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$
Ez egy $O(2; -1)$ középpontú, $r = 5$ sugarú kör.
Az 5. egyenlet nem kör egyenlete (tartalmaz xy-os tagot).

3426. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
A kör középpontja és sugara a kör középponti egyenletéből állapítható meg, amit teljes négyzetté kiegészítéssel kapunk meg.
$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$, ebből $K(3, -2)$, $r = 2$.

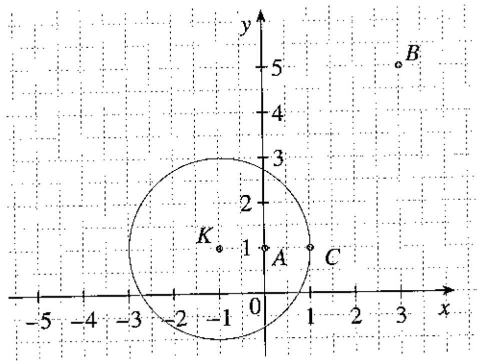
3427. Az egyenletet osszuk el 2-vel és alakítsunk teljes négyzetté!
$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + \frac{C}{2} = 0$$
$$(x - 4)^2 - 4^2 + (y + 3)^2 - 3^2 + \frac{C}{2} = 0$$
$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25 - \frac{C}{2}$$
Ez egy 5 egység sugarú kör egyenlete, ha $25 - \frac{C}{2} = 25\ (= r^2) \Rightarrow C = 0$.

3428. $2\cdot 7^2+2\cdot y^2-36\cdot 7-32y+160=0$
$y^2-16y+3=0 \Rightarrow y_1\approx 15{,}8 \quad y_2\approx 0{,}2$
A kör 7 abszcisszájú pontjainak ordinátája 15,8, illetve 0,2.

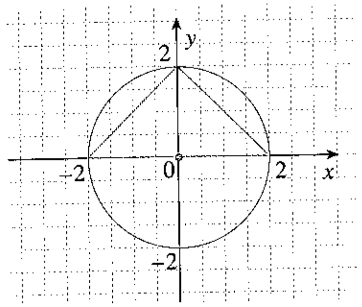
3429. $K(0;0)$, $P(-2,5)$, $r=KP$.
$r^2=4+25=29 \Rightarrow x^2+y^2=29$

3430. Adott a kör egyik átmérőjének két végpontja $A(3;-4)$, $B(7;-1)$. A kör K középpontja az AB szakasz felezőpontja.
$K(5;-2{,}5)$. Az r sugár az AB szakasz hosszának a fele. $(2r)^2=25 \Rightarrow r=2{,}5$.
A kör középponti egyenlete: $(x-5)^2+(y+2{,}5)^2=2{,}5^2$.

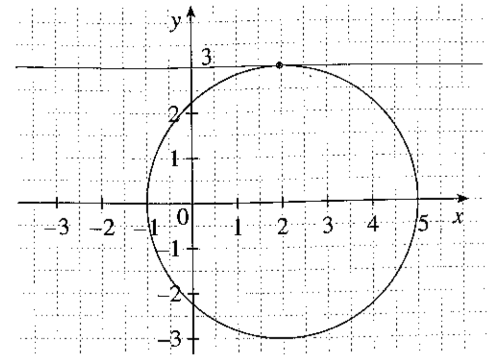
3431. Az A pont a körön belül, a B pont a körön kívül van, a C illeszkedik a körre, mert $r=2$, $AK=1<r$; $BK=4\sqrt{2}>r$; $CK=2=r$.



3432. A három csúcs speciális elhelyezkedése miatt ez egy egyenlőszárú derékszögű háromszög. A Thalész-tétel miatt körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja, ami most az origó; a kör sugara pedig az átfogó fele, azaz most 2. Tehát a kör egyenlete: $x^2+y^2=4$.



3433. Behelyettesítve a kör egyenletébe $y=3$-at, kapjuk: $(x-2)^2=0$, amiből $x=2$, tehát a körnek 1 db 3 ordinátájú pontja van. Ez a pont a $(2;3)$. Ennek a pontnak az abszcisszája megegyezik a középpontéval (éppen „függőlegesen felette" van), így az itteni érintő „vízszintes", tehát egyenlete: $y=3$.



3434. Az ábrázolt kör középpontja $C(2;-1)$, sugara $r=3$, így egyenlete $(x-2)^2+(y+1)^2=9$.
Ezt felírhatjuk a következő alakban is: $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.
Ez a kör tehát nem azonos a feladat szövegében megadott alakzattal.

3435. k_1: $(x+2)^2+(y-2)^2=4$; k_2: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$;
k_4: $(x+2)^2+(y+2)^2=4$; k_3: $(x-2)^2+(y+2)^2=4$.

3436. Például: $(x-2)^2+(y+1)^2\geq 9$.

3437. $$-\frac{2}{3}x^2+4x-8=-\frac{2}{3}(x^2-6x)-8=-\frac{2}{3}\left[(x-3)^2-9\right]-8=$$
$$=-\frac{2}{3}(x-3)^2+6-8=-\frac{2}{3}(x-3)^2-2$$
A parabola tengelypontjának koordinátái: $(3;-2)$.

3438. b) (A definíció miatt.)

3439. c) (A levágott kis háromszög hasonló az eredetihez, hasonlóságuk aránya 1 : 2. Ezért a kis háromszög területe egy negyede az eredetinek. A másik rész területe tehát az eredeti háromszög területének háromnegyede.)

3440. d) $(\alpha\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)=180° \Rightarrow \alpha=60°$; a legnagyobb szög tehát $\frac{4}{3}\cdot 60°=80°$.)

3441. a) (A szabályos háromszög oldala a magasságának $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$-szorosa.)

3442. e) (A feltétel miatt $\gamma = 83° \Rightarrow \alpha < \beta < \gamma \Leftrightarrow a < b < c$. Egy háromszögben ugyanis nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, és fordítva: egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.)

3443. a) (Az ábrán látható négyszög rombusz, ezért átlói merőlegesen felezik egymást. A hiányzó átló fele Pitagorasz-tétellel számolható: $x^2 + 6^2 = 10^2$. (Mivel x pozitív) $\Rightarrow x = 8$.
Így a rombusz területe (az átlók szorzatának a fele): $\frac{12 \cdot 16}{2} = 96$ (cm²).)

3444. b) (Pl. a nem derékszögű paralelogramma (nem téglalap) átlói nem egyenlő hosszúak.)

3445. e) (A megadott aránymutatók összege $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, a négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért a legkisebb szög $\frac{360°}{16} = 22{,}5°$, a legnagyobb pedig
$7 \cdot \frac{360°}{16} = 7 \cdot 22{,}5° = 157{,}5°$.
E két szög különbsége $6 \cdot 22{,}5° = 135°$.)

3446. b) (Az n ($n \in \mathbf{N}^+$; $n > 3$) oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$, belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180°$.
A feltétel miatt: $3n = \frac{n(n-3)}{2}$.
$n \neq 0$, így $n = 9$.
A 9 oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $7 \cdot 180° = 1260°$.)

3447. c) (A kör sugara az eredeti 0,8-szerese, ezért területe az eredeti $0{,}8^2 = 0{,}64$-szorosa lesz.)

3448. a) (A kör sugara és így a kerülete is 80%-a az eredetinek.)

3449. c) (Ha egy kis kocka éle x, akkor a 27 kis kocka együttes felszíne $27 \cdot 6 \cdot x^2 = 162 \cdot x^2$, az eredeti kocka felszíne pedig $6 \cdot (3 \cdot x)^2 = 54 \cdot x^2$.)

6.5. Statisztika, valószínűségszámítás

3450. Ha a terjedelem 0, akkor a legnagyobb és a legkisebb adat, vagyis minden adat egyenlő. Ha a szórás 0, akkor minden adat egyenlő az adathalmaz átlagával, vagyis egymással is. Mindkét tulajdonság következik a másikból, hiszen mindkettő pontosan azt jelenti, hogy az adatok egyenlőek.

3451. Tekintve, hogy $4\% + 6\% + 23\% + 33\% + 42\% = 108\%$, ez a beszámoló irreális. Ekkora hiba még a kerekítésekből sem jöhet össze, tehát a beszámoló összeállítója vagy megengedhetetlenül felületes, figyelmetlen, vagy szándékosan közöl hamis adatokat. Egyik sem növeli a cég presztízsét.

3452. Ha a medián 30, akkor a termékek egyik felének, 50 darabnak a kérdéses adata legalább 30, vagyis legalább 3-mal eltér a 27-es átlagtól. Ha a szórást ki akarjuk számolni, akkor a gyök alatti tört számlálójában csak erre az 50 termékre az átlagtól való eltérések négyzetének összege tehát legalább $50 \cdot 3^2 = 450$, és a többi 50 termék is nemnegatív járulékot ad. Ezt 100-zel osztva és gyököt vonva, legalább $\sqrt{4{,}5}$ az az eredmény, ami nagyobb 2-nél. Tehát a közölt adatok egymásnak ellentmondanak, lehetetlenek. Az üzleti beszámoló téves, elrontott vagy szándékosan hamisított adatokat tartalmaz.

Megjegyzés:

Ha a szórásból kiindulva számolunk, $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{100} (x_i - 27)^2}{100}} = 2$, amit négyzetre emelve, 100-zal szorozva: $\sum_{i=1}^{100} (x_i - 27)^2 = 400$. Ez a mennyiség lesz csak az adatok nagyobb értékű egyik felére már legalább 450 – és még az adatok kisebb értékű másik fele is nemnegatív járulékot ad –, tehát itt az ellentmondás.)

3453. a) Mivel $8 + 7 = 15$ tonna eper termett, és eddig $5 + 6 = 11$ tonnára van rendelés, még 4 tonna rendelhető.

b) Például így:

	Sz	T	P
N	5	3	0
H	0	3	4

3454. A maradék 9 szám átlaga 5, ezért összegük 45. Az eredeti 10 szám összege 55. Tehát a 10-es számot kell elhagyni.

Másik megoldás:
Az 1 és 9, a 2 és 8, a 3 és 7, a 4 és 6 együttesen átlagul 5-öt adnak. Hozzájuk csak az 5-öt lehet úgy venni, hogy átlaguk változatlan maradjon. Ezek szerint a 10-es számot hagyjuk el.

3455. Az osztály 26 tanulója dolgozat jegyeinek összege 78, az átlag így 3. Ha 25 tanuló dolgozatának átlaga 3,08, akkor a jegyek összege ($25 \cdot 3{,}08 =$) 77. Így a beteg tanuló dolgozatának osztályzata 1-es volt.

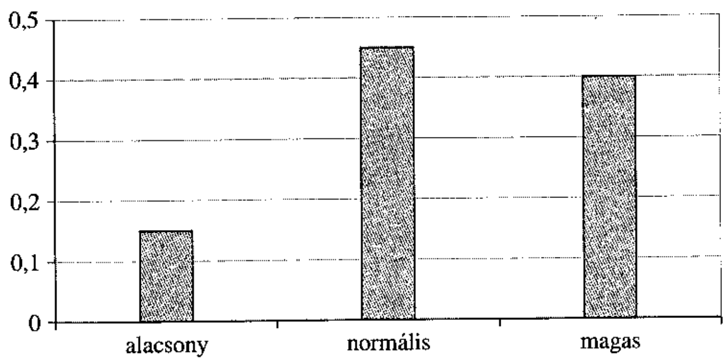
3456. a) Ugyancsak 5% körüli hibás mennyiséget.

b) Az 5. válasz.

3457. a) A relatív szórások: $\dfrac{50\ \text{g}}{1000\ \text{g}} = 0{,}05$, illetve $\dfrac{1\ \text{dkg}}{20\ \text{dkg}} = 0{,}05$, tehát egyenlők.

b) $\pm 5\%$.

3458. Az alacsony vérnyomásúak relatív gyakorisága $\dfrac{3}{20} = 0{,}15$, a normál vérnyomásúaké $\dfrac{9}{20} = 0{,}45$, a magas vérnyomásúaké pedig $\dfrac{8}{20} = 0{,}40$.
A vizsgált minta 55%-ának nincs rendben a vérnyomása.



3459. a) A felsorolt kalóriaértékek terjedelme: 661.

b) A terjedelem 2203,3%-a legkisebb, illetve 95,66%-a a legnagyobb előforduló értéknek.

3460.

Élelmiszer	Zsírtartalom (g)
gépsonka	7,2
kenőmájas	27,6
csabai kolbász	40,8
téliszalámi	44,4

3461. a) Összesen 18 000 ml = 18 l pezsgőt vettek.

b) Magnum.

3462.

testvérek száma	0	1	2	3
relatív gyakoriság	$\frac{11}{32}$ (34,4%)	$\frac{9}{32}$ (28,1%)	$\frac{5}{16}$ (31,25%)	$\frac{1}{16}$ (6,25%)

3463. a) $\dfrac{2640 + 3120 + 2820 + 2140}{4} = 2680.$

b) $\dfrac{2680}{8} = 335.$

3464. Az első adathalmazban a szórás harmada az átlagnak, tehát 33%-os intervallum adódik az egy szórásnyi környezetre. A másikban a szórás 166%-a az átlagnak, tehát az ún. relatív szórás a második esetben sokkal nagyobb, vagyis az első adathalmazt jobban (kisebb relatív hibával) jellemzi az átlag.

3465. Nem, pl. 1, 10, 13 mediánja 10, számtani közepe 8, tehát a medián a nagyobb, és a 10 nem az 1-hez van közelebb, hanem a 13-hoz.

3466. Ha az öt férfi átlagtömege 76 kg, akkor az összes tömegük $5 \cdot 76 = 380$ (kg). Mivel a megadott négy tömeg összege $72 + 74 + 75 + 81 = 302$, azaz az ötödik férfi $380 - 302 = 78$ (kg) tömegű.

3467. Ha öt rúd hosszának számtani közepe 46 cm, akkor ezek összhossza 230 cm. A hatodik hossza legyen h. Akkor a hat rúd hosszának összege: $6 \cdot 42{,}2 = 253{,}2 = 230 + h$, ahonnan $h = 23{,}2$ (cm).

3468. 12 férfi átlagmagassága 170 cm, így magasságaik összege: 2040 cm. A 8 nő magasságösszege hasonlóan az átlag 8-szorosa, azaz $160 \cdot 8 = 1280$ (cm). Akkor a 20 ember magasságainak összege: 3320 cm, az átlag ennek a 20-adrésze: 166 cm. (Ez a súlyozott számtani közép, erre való hivatkozással is lehet számolni.)

3469. Mivel a sorrend miatt N a legnagyobb, ezért a medián a középső, tehát 7. A számtani közép is 7, akkor az adatok összege egyrészt $3 + 5 + 7 + 8 + N = 23 + N$, másrészt $5 \cdot 7 = 35$, ahonnan $N = 12$.

3470. Mivel arányaik $1:2:3:4:5$ ezért mondhatjuk, hogy az öt szám rendre a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, azaz az átlag $\frac{15a}{5} = 3a$. Mivel ez a szám 11, ezért $a = \frac{11}{3}$. Ekkor az öt szám: $\frac{11}{3}$, $\frac{22}{3}$, $\frac{33}{3} = 11$, $\frac{44}{3}$, $\frac{55}{3}$, tehát a középső szám a 11.

Második megoldás:
Mivel az arányok egyenletesen növekszenek, így maguk a számok is, tehát egy számtani sorozat öt szomszédos tagjáról van szó. Ez esetben a számtani közép megegyezik magával a középső taggal, tehát az is 11.

3471. Mivel 26 ember írt, ezért nincs középső adat, a medián a 13. és 14. számtani közepe, azaz 6 és 7 átlaga: 6,5. A medián fölött pont a vizsgázók fele teljesített, tehát csak a módusz, vagy a számtani közép jöhet szóba. A számtani közép: 6,423, efölött is csak 13 ember van, azaz csak a módusz jön szóba, ami viszont a 3, mert ez a leggyakoribb (6-szor fordul elő), és 20-an fölötte vannak, ami több, mint $\frac{3}{4}$-e a 26-nak, tehát a móduszra gondolt a tanár.

3472. A bevétel $10\,000 \cdot 100$, azaz éppen 1 000 000 Ft. Mivel 80%-ot vissza kell fizetniük, ezért 800 000 Ft nyeremény kell. Eddig ismert egy darab 100 000 Ft-os, két darab 50 000 Ft-os és öt darab 10 000 Ft-os nyeremény, ez összesen 250 000 Ft. Még kell 550 000 Ft, s mivel mind 1000 Ft-os a maradék nyerő sorsjegy, ezért 550 darab ilyen kell legyen.

3473. Az első nem helyes, mert nincs értelme összekötni a pontokat, a különböző értékek között nincs is értelme a grafikonnak. A második ábrán, mivel az idő folytonosan változik, van értelme görbét rajzolni, még ha ez csak becslés is, mert valószínűleg a pontok között nem lineárisan változik a fogyasztás, de „közelítésnek" vehető (akár még pontos is lehet!).

3474. Problémás, hogy az első adat „400 millió", a többi meg olyan, amilyen.
Vagy mindent „millió"-ban értünk, és akkor az első „400 millió millió" (nincs is ennyi ember); vagy az első effektive „400 millió", a következő meg 340 (fő), akkor nincs az a diagram, amin ez ábrázolható; vagy fölöslegesen van ott a 400 mellett a millió (vagy miért nincs a többi mellett; illetve, ha mindegyikre vonatkozik, akkor miért az első mellett van ott, és nem valamely fejlécben?). Másik hiba, hogy a többi oszlop sem arányos a mellé írt számmal. Az oszlopok vízszintesek, mégis a millió fő felirat függőlegesen van (mellesleg nehezen is olvasható). Továbbá azt mondja a felirat, hogy „több mint 400 millió fő", és (ha minden adatot millióban értünk) csak az ábrázoltak összege 1,154 milliárd. Nemigen szokás „több mint x"-nek hívni majdnem $3x$-et. Nincs megmagyarázva, hogy mit jelent a többszöri megbetegedések figyelembe vétele. Persze lehet, hogy épp a többes betegségek miatt a betegek száma kb. 400 millió, a megbetegedéseké meg 1,154 milliárd – de ez sem derül ki. Az elmegyengeség oszlopa biztosan rossz, alig hosszabb, mint a skizofréniáé, pedig több, mint ötszöröse kellene, hogy legyen.

3475. A kördiagram viszonylag szemléletesen mutatja az egészhez való viszonyt, tehát hogy az egyes elemek az egészhez hogyan viszonyulnak, nehezebb viszont a szög miatt az egymással történő összehasonlítás. Az oszlopdiagramról könnyebben leolvashatók az egymáshoz képesti viszonyok, viszont nem tudjuk, az egésznek melyik hányad része (legalábbis nem látszik). Így pl. hogyan osztozik három nagy mobilos cég a piacon, ezt kördiagramon ábrázolni előnyösebb; míg azt, hogy mennyivel többet adott el az első, mint a második, vagy a harmadik, azt inkább oszlopdiagramon látjuk könnyebben.

3476. b) (Azaz módusza. Az adatsor átlaga 2,9; mediánja 2,5, szórása kb. 1,58; terjedelme 5.)

3477. d) (Azaz szórása. Átlaga lehet, pl. 1 és -1; módusza is lehet: 0, 1, ez egy kétmódusú sokaság; mediánja is lehet: -1, 0, 1; az átlagtól való átlagos eltérése is lehet: két adatunk 1 és 3, átlaguk 2, ettől való eltérésük -1 és 1, ezek átlaga 0.)

3478. Kockával dobva 1, 2, ..., 6 lehet az eredmény, ezek mindegyike $\frac{1}{6}$ valószínűségű. Páros számot dobni a 2, 4, 6 eredmények egyikének bekövetkeztét jelenti, amelynek együttes valószínűsége $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Második megoldás:
A kockával 3 páros és 3 páratlan számot dobhatunk. Mivel a lehetséges, egyforma valószínűségű eredményeknek éppen a fele páros, ezért ez a valószínűség 0,5.

3479. A leesések eredménye független egymástól. Egy-egy feldobásnál a fej, illetve az írás valószínűsége $\frac{1}{2}$.

A kívánt sorrend valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

3480. A pénzérme 4-szeri feldobása esetén az összes eset száma 2^4.

Kedvező esetek: 4 dobásból pontosan 2 fej. Ezek száma: $\binom{4}{2}$.

Így a keresett valószínűség $= \dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$. $P = \dfrac{\binom{4}{2}}{2^4} = \dfrac{3}{8}$.

3481.

A dobott pontok összege	A lehetséges esetek	Hányféleképpen lehetséges
2	$1+1$	1
3	$1+2, 2+1$	2
4	$1+3, 2+2, 3+1$	3
5	$1+4, 2+3, 3+2, 4+1$	4

A kedvező esetek száma: 10

Az összes eset száma: $6^2 = 36$

A keresett valószínűség: $P = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

3482. Két különböző (szabályos) játékkockával dobva $6 \cdot 6 = 36$-féle lehetőség adódik, melyek mindegyike egyforma valószínűséggel következhet be.
Ha a két kockán lévő pontokat összeadjuk, az összeg 2 és 12 között változhat.
Vizsgáljuk meg a kapott összeget!
A 36 eset közül vizsgáljuk azok számát (hiszen ez a kevesebb), amikor a dobott összeg 6-nál kevesebb:
$2 = 1 + 1$ (1 eset),
$3 = 1 + 2 = 2 + 1$ (2 eset),
$4 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2$ (3 eset),
$5 = 1 + 4 = 4 + 1 = 2 + 3 = 3 + 2$ (4 eset).
Tehát a 36 lehetőség közül 10 esetben a dobott pontok összege 6-nál kisebb és 26 esetben legalább 6.
Annak a valószínűsége, hogy két kockával dobva a dobott pontok összege legalább 6.
$P = \dfrac{26}{36} = \dfrac{13}{18}$.

Megjegyzés:
A kérdezett esemény éppen komplementere annak az eseménynek, amikor a dobott pontok összege 6-nál kisebb, ezért a valószínűség $1 - P_{(6\text{-nál kisebb})}$ módon is számolható. Lásd a 3481. feladat eredményét!

3483. Kedvező esetek: p, f, p, f; p, f, f, p; f, p, f, p. Ez 3 eset.

Az összes eset száma: 2 piros és 2 fehér golyó $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$-féle sorrendben állhat.

A keresett valószínűség $p = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

3484. Az összes eset száma annyi, ahányféleképpen kihúzhatunk 8 golyóból 2-t: $\binom{8}{2}$.

Kedvező eset, ha a 4 pirosból húzunk ki 2-t, számuk: $\binom{4}{2}$.

A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$.

3485. A nyolc golyóból négy piros.

Annak a valószínűsége, hogy az első húzáskor pirosat húzunk: $\dfrac{4}{8}$. A golyó visszatevése után annak valószínűsége, hogy másodszor is pirosat húzunk: $\dfrac{4}{8}$.

A két húzás független egymástól, ezért a két piros húzás valószínűsége: $\dfrac{4}{8} \cdot \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{4}$.

3486. Akkor nyer valamelyikük, ha a piros alsót vagy a makk felsőt húzzuk, tehát a kedvező esetek száma 2. Az összes eset száma 32, hiszen bármelyik lap ugyanolyan valószínűséggel húzható ki. A keresett valószínűség: $P = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$.

3487. a) Katinka táncos párja Antal vagy Botond vagy Csongor. A sorsolás egyenlő valószínűséget biztosít: $P = \dfrac{1}{3}$.

b) Először Katinka Antallal táncolt, másodszorra is őket sorsolták ki. Mivel a két sorsolás egymástól független, ezért $P = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$.

Megjegyzés:
Ha tudjuk már, hogy elsőzörre ők táncoltak egymással, akkor ennek ismét $\dfrac{1}{3}$ a valószínűsége.

3488. Mind az 5 szín 4 korong egyik oldalán szerepel. Így annak valószínűsége, hogy a 10 korong feldobása után piros, illetve kék szín kerül felülre, ugyanakkora. (Persze ez nem jelenti azt, hogy egyetlen dobás után ugyanannyi piros szín kerül felülre, mint kék.)

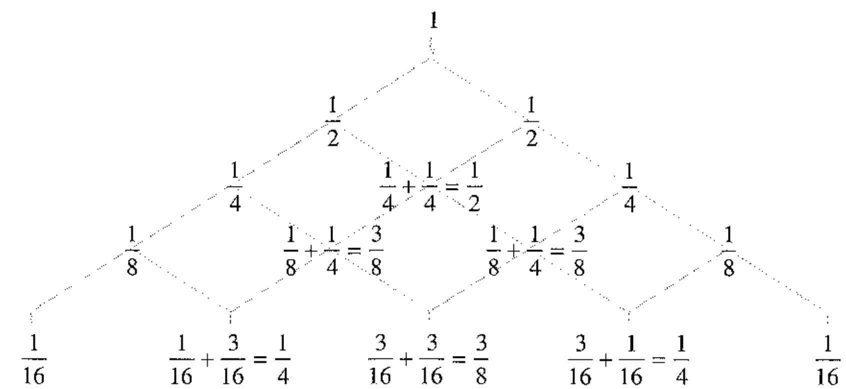
Megjegyzés:
Az F-Z, F-S, S-Z korongokat ki is vehetjük a játékból, mert ezek az eredményt nem befolyásolják.

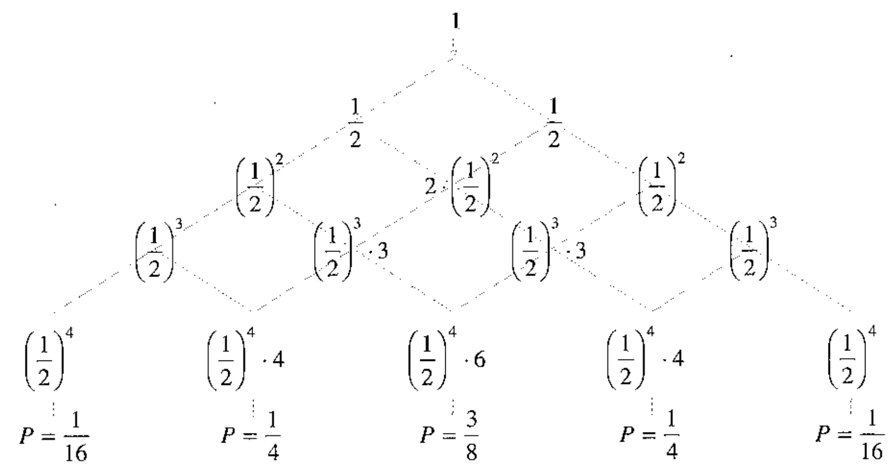
3489. A nyolc korong közül az egyik mindkét oldalán piros, egy másik mindkét oldalán fehér, van még egy olyan, amelynek egyik oldala piros, másik oldala fehér színű, továbbá szerepel még 2 olyan, amelynek egyik oldala piros és még 2 olyan korong, amelynek egyik oldala fehér. Így 4 korongon lehet felül piros, és ugyancsak 4-en fehér. Ebből következik, hogy Máténak ugyanannyi esélye van a nyerésre, mint Lukácsnak,

Megjegyzés:
A K-Z korong nem befolyásolja az eredményt, így elég a többi 7 színes korongot feldobni.

3490. Az első lövéskor $\frac{1}{4}$ valószínűséggel talál Árpád a bal alsó negyedbe. Annak a valószínűsége, hogy kétszer egymás után a bal alsó negyedbe talál $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

3491. A Galton-deszkán az elágazásoknál a golyók egyenlő valószínűséggel gurulnak jobbra vagy balra.
A szélső pontokba csak egy irányból érkezhet golyó, bármely közbülső pontba az előtte lévő sorból balról és jobbról is érkezhet golyó.
Az ábrán az egyes pontokhoz írtuk az odaérkezés valószínűségét.





1 : 4 : 6 : 4 : 1

Ellenőrzés:
Bármely sorban a valószínűségek összege kell, hogy 1 legyen.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$; $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$; $\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=1$.

3492. A (32 lapos) magyar kártyában 4 különböző szín van, és mindegyik színből 8-8 db. A második húzásnál a már előbb kihúzott lappal 8 db azonos színű és 24 db más színű lap van. Így annak a valószínűsége, hogy az utóbb kihúzott lap nem azonos az előzővel: $P = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$.

3493. Egy szabályos dobókockával dobva a kapott számok (pontok) 3 esetben párosak, 3 esetben páratlanok.
Így a páros szám dobásának valószínűsége: $P(\text{párosat dobunk}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Annak a valószínűsége, hogy minden dobással párosat dobunk:
$P(\text{ötször egymás után párosat dobunk}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

3494. Egy szabályos dobókockával dobva a kapott számok (pontok) 3 esetben párosak, 3 esetben páratlanok.
Így a páros szám dobásának valószínűsége: $P(\text{párosat dobunk}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
a páratlan szám dobásának valószínűsége: $P(\text{páratlant dobunk}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Az első dobást „nem kell figyelembe venni", hiszen ez akár páros, akár páratlan lehet. Ha az első dobás páros, akkor annak a valószínűsége, hogy a második dobás páratlan: $\frac{1}{2}$. Ha az első dobás páratlan, akkor annak a valószínűsége, hogy a második dobás páros: $\frac{1}{2}$.

Tehát annak a valószínűsége, hogy a dobókockával kétszer egymás után dobva egy-egy páros illetve páratlan számot kapunk: $\frac{1}{2}$.

Másik megoldás:

Számoljuk össze a kedvező eseteket és az összes esetet!

Kedvező esetek: páros-páratlan, páratlan-páros (2 eset).

Összes eset: páros-páratlan, páratlan-páros, páros-páros, páratlan-páratlan (4 eset).

Mivel minden eset egyformán valószínű, ezért annak a valószínűsége, hogy a dobókockával kétszer egymás után dobva egy-egy páros, illetve páratlan számot kapunk:

$P = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3495. Az első dobást „nem kell figyelembe venni", a második dobásnál a kedvező esetek száma: 5 (az elsőtől különböző), az összes eset száma: 6. Mivel minden esemény egyformán valószínű, ezért annak a valószínűsége, hogy egy dobókockával kétszer egymás után dobva különböző számot kapunk: $P = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}} = \frac{5}{6}$.

Másik megoldás:

Számoljuk össze a kedvező eseteket és az összes esetet! $6 \cdot 6 = 36$ különféle lehetőség van, ebből „rossz", ha két egyformát kapunk (1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6), tehát a kedvező esetek száma: $36 - 6 = 30$.

Ezért annak a valószínűsége, hogy egy dobókockával kétszer egymás után dobva különböző számot kapunk: $P = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

3496. Két példa: – Két érmét feldobva a leesés után mindkettő fejet mutat.
– Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egy lapot; és az piros.

3497. A kedvező esetek száma: ahányféleképpen a 6 pirosból kettőt kiválasztunk, míg az összes eset száma: ahányféleképpen a 8 golyóból kettőt kivehetünk. Tehát az esély:

$$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28} \approx 0,5357, \text{ azaz kicsit több, mint } \frac{1}{2}.$$

3498. FF: $\frac{1}{4}$, FÍ: $\frac{1}{2}$ (FÍ vagy ÍF sorrendben!), ÍÍ: $\frac{1}{4}$ esélyű, mivel a két érme megkülönböztethető (természeti megfigyelés).

3499. A nagy számok törvénye szerint a nagyobb klinikán lesz nagyobb eséllyel kisebb a relatív gyakoriság eltérése a világátlagtól, ami esetünkben a valószínűséget jelenti. A nagyobb eltérés tehát a kisebb klinikán várható.

3500. Az *A* kocka tűnik gyanúsnak, hiszen az 1 túl gyakori, míg a 6 túl ritka, emellett az 5 is kicsit kilóg. Ez nem lehetetlen, de inkább ezt a kockát vennénk hamisnak, ha tudjuk hogy az egyik manipulált. A szabályos kockánál kisebb ingadozásokat gondolunk.

3501. Ha a két kísérlet független, akkor $0,4^2 = 0,16$ az esélye, hogy kétszer következik be. Ha nem független, akkor nem tudunk pontosan semmit sem mondani. Annyi azért igaz, hogy legfeljebb 0,4 a kétszer bekövetkezés esélye, ha az első maga után vonja a másikat (teljes függés esete), illetve ha kizárja a másodikat, akkor 0 az esély.

3502. Legalább 190 Ft a nyeremény (vendéggyőzelem esetén), ami egyenlegben 110 Ft veszteséget jelent (mivel 3-szor 100 Ft volt a tét). Legfeljebb 310 Ft a nyeremény (döntetlen esetén), ekkor egyenlegben 10 Ft a nyereségem. Tehát a játék egyenlege -110 és $+10$ Ft között lesz.

3503. Bármelyiknek ugyanakkora esélye van a nyerőt kihúzni, nevezetesen $\frac{1}{3}$, hiszen a háromféle húzás: NVV, VNV és VVN semmiben sem különbözik, esélyeik egyformák.

3504. A függetlenség feltevése miatt $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$ a keresett esély.

3505. Elsőre, mivel ennek az esélye $\frac{1}{6}$. Másodikra már csak $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Harmadikra $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$, s így tovább, egyre kisebb az esély. Ez elég meglepő, de nem azt jelenti, hogy elsőre fogok 6-ost dobni, csak azt, hogy a leggyakoribb ez lesz sok kísérlet esetén.

3506. 4 ász van a 32 lap között, tehát a keresett esély: $\frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$.

3507. Várhatóan 25 helyes válasza lesz. Ennek az a jelentése, hogy sokszor eljátszva ezt a kísérletet, a találatok átlaga 25 körül fog mozogni.

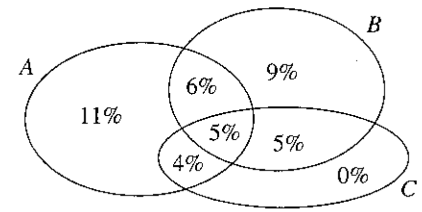
3508. Körülbelül $1000 \cdot 0{,}4 = 400$-at.

3509. A fehér golyók száma legalább 4-szerese legyen a pirosakénak (hiszen a piros golyó húzásának valószínűsége legfeljebb 20%), tehát még legalább 20 fehér golyót kell a dobozba tenni.

3510. A 32 lapos magyar kártyában 4 király van, így annak a valószínűsége, hogy királyt húzunk $P_k = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
Az 52 lapos francia kártyában a figurás lapok száma 16, így annak a valószínűsége, hogy figurás lapot húzunk $P_f = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.
$\frac{4}{13} > \frac{1}{8}$.
Tehát nagyobb annak az esélye, hogy francia kártyából figurás lapot húzunk ki, mint az, hogy magyar kártyából királyt.

7. ÖSSZETETT, ILLETVE NEHEZEBB FELADATOK

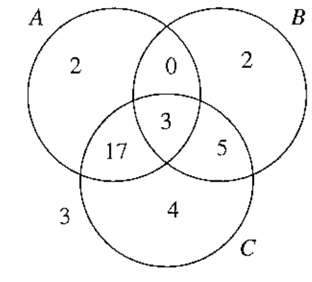
3511. Készítsünk a szöveg alapján Venn-diagramot! Induljunk ki a 3 halmaz metszetéből!
A lakosság mindössze 40%-a olvas a kiadóvállalat termékei közül legalább egyet, tehát nem igaz az állítás.



3512. Jelölje A az 1., B a 2., C a 3. példát jól megoldók halmazát. Ekkor a feladat feltételei sorban a következő halmaz-számosságokat jelentik:

(1) $|A \cup B \cup C \cup \overline{(A \cup B \cup C)}| = 36$ (2) $|A \cap C| = 20$ (3) $|B \cap C| = 8$
(4) $|A \setminus B \setminus C| = 2$ (5) $|B \setminus A \setminus C| = 2$ (6) $|A \cup B| = 29$
(7) $|C| = 29$ (8) $|A \cap B \cap C| = 3$

Ekkor az utolsó feltételből visszafelé indulva a három halmaz által létrehozott mind a 8 tartomány számosságát meghatározhatjuk. (Feketével az adott, pirossal a következőkben meghatározott számosságokat tüntettük fel.) A (8) és (2) együtt azt eredményezi, hogy $|(A \cap C) \setminus B| = 17$ (9); vagyis ennyien oldották meg jól az 1. és 3. feladatot, de a 2.-at nem. A (8) és (3) miatt $|(B \cap C) \setminus A| = 5$ (10); vagyis ennyien oldották meg jól a 2. és 3. feladatot, de az 1.-t nem.



Ekkor (6)-ból kiindulva – levonva $A \cup B$ már (8), (9), (10)-ben megismert részeinek számosságát – kapjuk: $|(A \cap B) \setminus C| = 0$ (11); vagyis nincs olyan diák, aki jól oldotta meg az 1. és 2. feladatot, de a 3.-at nem. Ezután (7), továbbá (8), (9), (10) révén kapjuk: $|C \setminus A \setminus B| = 4$ (12); vagyis ennyi diáknak jó csak a 3. megoldása. Az összes eddigi létszámot kivonva az osztálylétszámból (l. (1) feltétel), kapjuk, hogy mindhárom halmazon kívül 3 tanuló van (ők egyetlen feladatot sem oldottak meg jól). Ezután bármelyik kérdésre könnyen felelhetünk.

a) A pontosan két feladatot jól megoldók számát a (9), (10), (11) feltételekben határoztuk meg: $17 + 5 + 0 = 22$ ilyen diák van.

b) A csak egy feladatot jól megoldók számát a (4), (5), (12) feltételek tartalmazzák: $2 + 2 + 4 = 8$ ilyen diák van, tehát a pontosan két feladatot jól megoldóknál kevesebben vannak.

c) Mint a levezetés legvégén kaptuk, 3 ilyen diák van.

3513. a) A táblázatban álló számok összege a megkérdezett személyek száma, hiszen mindenki pontosan egy rovatban szerepelhet, és kell is szerepelnie. Eszerint 67 embert kérdeztek meg.

b) A harmadik és a negyedik oszlop elemeinek összege a válasz:
12 fő + 14 fő = 26 fő.

c) A második és a negyedik sor harmadik, illetve negyedik oszlopában álló számok összege a válasz, tehát: 6.

d) Az első két sorban szerepelnek a felnőttek, az utolsó két sorban pedig a gyerekek. A tetszést az első két oszlop mutatja. Eszerint 18 felnőttnek és 23 gyereknek tetszett. Ebből még nem következik az, hogy inkább a gyerekeknek tetszett, azt is meg kell nézni, összesen hány felnőtt, illetve hány gyerek van. A felnőttek száma: 37, a gyerekeké 30. Ez már alátámasztja, hogy valóban a gyerekeknek tetszett jobban, hiszen köztük $\frac{23}{30} \approx 0,77$ a tetszési arány (index), míg a felnőtteknél ez csak $\frac{18}{37} \approx 0,49$.

e) A jelek szövegre fordítása: „Hány nem-férfit kérdeztek meg?". Férfi 19 van, ekkor $67 - 19 = 48$ nem-férfi van.

f) Ugyanaz, mint e), hiszen a nők és gyerekek együtt éppen a nem-férfiak. A válasz 48. (Megjegyezzük, hogy a de Morgan-féle azonosság szerint a két halmaz egyenlő, s akkor a számosságuk is egyenlő.)

3514. a) Legyen a tagok száma n. A feltétel szerint $\binom{n}{4} = 495$, $n \in \mathbf{N}^+$, $n > 3$.

Tehát $\frac{n!}{(n-4)!\,4!} = 495$

$n(n-1)(n-2)(n-3) = (24 \cdot 495 =)\ 11\,880.$

Legyen $x = n(n-3) = n^2 - 3n$,

ekkor $(n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2 = x + 2$ *

Így az $x^2 + 2x - 11\,800 = 0$ egyenletet oldjuk meg.

Ennek pozitív gyöke 108. Ezt az *-ba helyettesítve és rendezve:

$n^2 - 3n - 108 = 0$, innen $n = 12$ $(n = -9$ nem megoldás)

Ellenőrzés:

$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} = 495.$

Tehát a társaság 12 emberből áll.

Másik megoldás:

Az $n \mapsto \binom{n}{4}$, $n > 3$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért helyettesítsük be például:

$n = 10$-et: $\binom{10}{4} = 210 < 495;$

$n = 15$-öt: $\binom{15}{4} = 1365 > 495;$

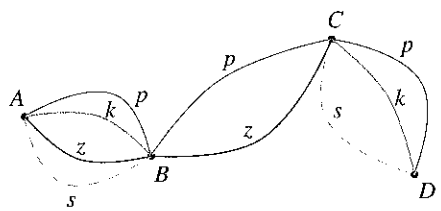
$n = 12$-t: $\binom{12}{4} = 495.$

Mivel a függvény szigorúan monoton növekedő, a 495 értéket csak egy helyen veszi fel. Tehát $n = 12$.

b) A feladat feltétele szerint 12 főből hárman lemondanak az üdülésről. A megmaradók közül az egyik jelenlétéhez ragaszkodnak, így a többi 8-ból kell kiválasztani a 3 utazót: $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56.$

Tehát 56-féleképpen lehet kiválasztani az üdülés résztvevőit.

3515. a) $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$-féle módon.



b) Ha B-ből C-be piros jelzésű úton megyünk, akkor A-ból B-be 3-féle, C-ből D-be pedig 2-féle utat választhatunk. „Középen piros jelzésű", a feladat szövegének megfelelő útvonalból tehát 6-féle van.

Ha B-ből C-be zöld jelzésű úton megyünk, akkor A-ból B-be 3-féle, C-ből D-be szintén 3-féle utat választhatunk. „Középen zöld jelzésű", a feladat szövegének megfelelő útvonalból tehát 9-féle van.

Összesen 15 olyan útvonal van, amelyik a feladat követelményének megfelel.

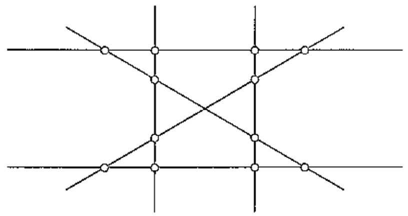
3516. a) Igen. Általánosan is igaz, hogy ha a feladat gráf-modelljét vesszük, azaz a központok a gráf csúcsai, és a kapcsolatot a két központ között behúzott él jelöli, akkor az állítás a következőt jelenti:

Ha egy egyszerű gráfban minden pontból legalább fele annyi él indul, mint ahány pont van, akkor a gráf összefüggő. Ezt bizonyítva a feladatunk a) részét is megválaszoljuk. A bizonyítás egyszerű indirekt okoskodás. Tegyük fel, hogy nem összefüggő a gráf. Ekkor van legalább két komponense (összefüggő részgráfja), amelyek között egyáltalán nincs él (különben nem lenne két komponens, hanem összefüggő volna a gráf). Az egyik komponensben legfeljebb a pontok fele van (hiszen nem lehet mindkettőben a felénél több!), azaz legfeljebb 3 pont. Ekkor, még ha teljes is ez a 3 pontú részgráf, akkor is minden csúcsból csak 2 él indul, míg a feltétel szerint $\frac{6}{2} = 3$ élnek kellene.

Megjegyzés:
Az állítás n pont esetén is igaz, bizonyítása az előző gondolatmenettel ugyanúgy megy, de akkor – még ha teljes gráf is a komponens – legfeljebb eggyel kevesebb él indul a csúcsaiból, mint a pontok számának fele. Ez ellentmondás, mivel a feltétel szerint minden pontból legalább feleannyi él indul, mint ahány pont van. Ezzel beláttuk az állítást általánosan.

b) Ekkor már nem igaz, hogy bárhonnan bárhová lenne kapcsolat, egy példa: ha két háromszöget rajzolunk. Ekkor minden csúcsból legalább két él indul (pontosan kettő), de a három központ egyikéből sincs kapcsolat a másik háromhoz.

3517. Egy lehetséges elhelyezést mutat az ábra, megjelölve a kívánt 6 egyenest is.



3518. a) A játékosok pénze a játék kezdetén: $4x$, $5x$, $6x$ fabatka,
a játék végén: $5y$, $6y$, $7y$ fabatka.

A fabatkák összege nem változik a játék során: $15x = 18y$, amiből: $x = \frac{6}{5}y$.

Megállapítjuk, hogy melyik játékos nyert: $4x = \frac{24}{5}y < 5y$.

Tehát az első játékos nyert $\frac{1}{5}y = 12$ fabatkát. Így $y = 60$ (fabatka).

Az első játékos fabatkáinak száma kezdetben: $\frac{24}{5} \cdot 60 = 288$, a végén: 300.

Minthogy $5x = 6y$, a második játékos pénze nem változott: 360 fabatka.

A harmadik játékos fabatkáinak száma kezdetben: $6x = \frac{36}{5}y > 7y$, tehát ő vesztett $\frac{1}{5}y = 12$ fabatkát. Fabatkáinak száma kezdetben 432, a végén 420.

A három játékos fabatkáinak száma együttesen 1080.

b) A játékosok pénze a játék kezdetén: $7y$, $6y$, $5y$,
a végén: $6x$, $5x$, $4x$.

A fabatkák összege nem változik, ezért $18y = 15x$, amiből: $y = \frac{5}{6}x$.

Megvizsgáljuk, melyik játékos nyert.

$7y = \frac{35}{6}x < 6x$, tehát az első játékos nyerte a 12 fabatkát.

$\frac{1}{6}x = 12 \Rightarrow x = 72.$

Az első játékos fabatkáinak száma kezdéskor: $\frac{35}{6} \cdot 72 = 420$, a végén: 432.

$6y = 5x$, tehát a második játékos pénze nem változott, $5x = 360$ fabatkája volt.

$5y = \frac{25}{6}x > 4x$, tehát a harmadikos játékos veszített $\frac{1}{6}x = 12$ fabatkát.

Kezdéskor 300, a végén 288 fabatkája volt.

Megjegyzés:

1) Az a) és b) esetben kiderült, hogy a 12 fabatkát az első játékos nyerte, a második játékosnál nem volt változás. Már ebből is meg lehet állapítani, hogy a harmadik játékos veszítette el a 12 fabatkát. A harmadiknál fellépő változás kiszámítása tulajdonképpen ellenőrzésül szolgálhat.
2) Ha az a) és b) rész adatait összehasonlítjuk, kiderül, hogy a b) rész az a) rész fordítottja. Tehát az eredményhez a b)-ben részletezett számítás nélkül is eljuthatunk.

3519. Először kiszámoljuk, hogy a 100 000 Ft-ból mennyit vitt haza, aztán mennyit a 120 000 Ft-ból, s végül megnézzük az infláció hatását, azaz mennyi a két fizetés vásárlóértéke.
100 000 Ft-nál: levonás a tb- és egyéb járulék 13%, ennek mértéke nem függ a keresettől, tehát a 100 000 Ft-ból marad 87 000 Ft.
A havi 100 000 Ft éves szinten 1 200 000 Ft-ot jelent, ennek jövedelemadója a táblázat szerint $120\,000 + 0{,}3 \cdot 600\,000 = 300\,000$ Ft. Ez havi 25 000 Ft-ot jelent, tehát az emelés előtti kézhez kapott fizetése 62 000 Ft volt.
Az emelés után a járulékok: 120 000 Ft 13%-a 15 600 Ft, azaz marad 104 400 Ft.
Az új kategória szerint, mivel 1 440 000 Ft az évi jövedelem, a jövedelemadó: $300\,000 + 0{,}4 \cdot 240\,000$ Ft $= 396\,000$ Ft. Ez havi 33 000 Ft levonást jelent, azaz $104\,400 - 33\,000 = 71\,400$ Ft marad.
Tehát a fizetésemelés után (nettó) 9 400 Ft-tal többet kap kézhez. Ha az árak 9%-kal nőttek, akkor amit eddig 62 000 Ft-ért kapott, az most átlagosan 5580 Ft-tal drágább, tehát 67 580 Ft-ba kerül. Mivel 71 400 Ft-ot kap, ezért ez $\frac{71\,400}{67\,580} = 1{,}0565$, azaz kb. 5,7% a tényleges reálbér-növekedés. A jól hangzó, papíron 20%-ból csak alig több mint a negyede marad igazi fizetésnövekedésként.

3520. a) Például az 1957 esetében: $1 + 9 + 5 + 7 = 22$, majd $2 + 2 = 4$.

b), c) Vizsgáljuk meg konkrétan a 2 első néhány hatványát, és képezzük belőlük a szükséges számot.

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16 \Rightarrow 1 + 6 = 7$

$2^5 = 32 \Rightarrow 3 + 2 = 5$

$2^6 = 64 \Rightarrow 6 + 4 = 10 \Rightarrow 1 + 0 = 1$

$2^7 = 128 \Rightarrow 1 + 2 + 8 = 11 \Rightarrow 1 + 1 = 2$

$2^8 = 256 \Rightarrow 2 + 5 + 6 = 13 \Rightarrow 1 + 3 = 4$

Úgy tűnik, hogy 2^7-nél újra elkezdtek a már előkerült számok ismétlődni. Vizsgáljuk meg pl. a 128-at, mi is történik a számjegyei összeadásakor. Mi marad, ha a $128 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 1$ számból „leválasztjuk" a számjegyek összegét? Ha az $1 \cdot 100$-ból leválasztjuk az 1-et, marad $1 \cdot 99$; ha a $2 \cdot 10$-ből leválasztjuk a 2-t, marad $2 \cdot 9$ (ha a $8 \cdot 1$-ből leválasztjuk a 8-at, nem marad semmi). Tehát $1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 1 = (1 + 2 + 8) + 1 \cdot 99 + 2 \cdot 9$. Ha most még a számjegyek összegéből, $1 + 2 + 8 = 11 = 1 \cdot 10 + 1$-ből is leválasztjuk ezen számjegyek összegét: $1 \cdot 10 + 1 = (1 + 1) + 1 \cdot 9$, és ezt visszaírjuk az előző felbontásba, akkor ezt kapjuk: $128 = (1 + 1) + 1 \cdot 99 + 3 \cdot 9$.

Másképpen: $128 = 2 + 9 \cdot (1 \cdot 11 + 3) = 2 + 9 \cdot 14$. Valójában tehát bármely számból a fenti (jegyek összege vagy annak a jegyeinek összege stb.) módon képzett szám nem más, mint a 9-cel való osztásban keletkezett maradék, hiszen az összeg többi tagjából a 9 mindig kiemelhető. Azt kell tehát megmutatni, hogy a 2 hatványainak 9-es maradékaiból képzett sorozat ismétlődő. Mivel $2^6 = 64 = 9 \cdot 7 + 1$, ezért $(2^6)^k = 64^k$ is 1 maradékot ad 9-cel osztva. Így minden olyan 2-hatvány, amelynek a kitevői 6 többszöröseivel térnek el egymástól, ugyanazt a maradékot adja, vagyis a sorozat 6 elemenként ismétlődik. (Konkrétan, mint láttuk, a sorozat tagjai: 2, 4, 8, 7, 5, 1.)

3521. a) Természetesen annyi, ahány kétjegyű szám van, vagyis 90; hiszen ezeket fordított sorrendben maguk mögé írva kapjuk a négyjegyű palindromokat.

b) Ezek a számok $1001 \cdot A + 110 \cdot B$ alakúak (ahol A, B számjegyek; $A \neq 0$), ami átírható így: $11 \cdot (91A + 10B)$. Ahhoz, hogy egy ilyen szám négyzetszám lehessen, szükséges (bár nem elégséges) feltétel, hogy a zárójelben álló szám is osztható legyen 11-gyel (és úgy válik a feltétel elégségessé, hogy a keletkező hányados maga is négyzetszám legyen).

Írjuk át a zárójelbeli számot: $88A + 11B + (3A - B)$. Ekkor elég már csak $3A - B$ 11-gyel való oszthatóságát vizsgálni. Figyelembe véve A és B értékhatárait, $-6 \leq 3A - B \leq 27$. Ezen egészek közül 11-gyel osztható a 0, a 11, a 22. Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket. Mivel az utolsó sorban egyetlen négyzetszám sem található, így a négyjegyű palindromok között nincs ilyen.

$3A - B$	0			11			22	
A	1	2	3	4	5	6	8	9
B	3	6	9	1	4	7	2	5
$\frac{91A + 10B}{11}$	11	22	33	34	45	56	68	79

c) Viszont az előző táblázat utolsó sorában álló „11" eredmény mutatja, hogy itt egy köbszámmal van dolgunk, nevezetesen $1331 = 11^3$. Más köbszám nincs a négyjegyű palindromok között, hiszen a $11 \cdot (91A + 10B)$ felírás miatt a $91A + 10B$-nek ehhez $11^2 \cdot k^3$ alakúnak kell lennie, vagyis $\frac{91A + 10B}{11}$-nek $11 \cdot k^3$ alakúnak, de a táblázat utolsó sorában ez egyedül a már jelzett esetben teljesül.

d) Mivel a b) részben kimutattuk, hogy minden négyjegyű palindrom szám osztható 11-gyel, nyilván nincsen közöttük prím.

3522. *Első megoldás*, végig azonos („megszámolós") gondolatmenettel:

a) Az 1-től 9999-ig felsorolható 9999 db szám közül az első 999 db nem négyjegyű, a többi az, így 9000 db ilyen van.

b) Az 1-től $k^4 - 1$-ig felsorolható $k^4 - 1$ db szám közül az első $k^3 - 1$ db nem négyjegyű, a többi az, így $k^4 - k^3$ db ilyen van.

c) Az 1-től $10^n - 1$-ig felsorolható $10^n - 1$ db szám közül az első $10^{n-1} - 1$ db nem n-jegyű, a többi az, így $10^n - 10^{n-1}$ db ilyen van.

d) Az 1-től $k^n - 1$-ig felsorolható $k^n - 1$ db szám közül az első $k^{n-1} - 1$ db nem n-jegyű, a többi az, így $k^n - k^{n-1}$ db ilyen van.

Második megoldás, végig azonos (kombinatorikai) gondolatmenettel:

a) Az első helyen 9-féle számjegy állhat (a 0 nem), az összes többin mind a 10, ezért $9 \cdot 10^3 = 9000$ db ilyen szám van.

b) Az első helyen $k - 1$-féle számjegy állhat (a 0 nem), az összes többin mind a k, ezért $(k - 1)k^3 = k^4 - k^3$ db ilyen szám van.

c) Az első helyen 9-féle számjegy állhat (a 0 nem), az összes többin mind a 10, ezért $9 \cdot 10^{n-1} = 10^n - 10^{n-1}$ db ilyen szám van.

d) Az első helyen $k - 1$-féle számjegy állhat (a 0 nem), az összes többin mind a k, ezért $(k - 1)k^{n-1} = k^n - k^{n-1}$ db ilyen szám van.

3523. a) Ekkor $3^2 = 9$-et kell felírnunk 2-es számrendszerben, ez $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$, azaz 1001_2.

b) Ekkor $4^2 = 16$-ot kell felírnunk 3-as számrendszerben, ez $1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$, azaz 121_3.

c) Mivel $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, vagyis $1 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 1$, ez épp azt jelenti, hogy minden további esetben a szám alakja 121_n.

Megjegyzés:
Magát az $n + 1$ számot n-es számrendszerben persze így írhatjuk: 11_n.
A b)-beli és az itteni eredményünk együtt azt jelenti, hogy minden $3 \le n$, $n \in \mathbf{N}$ esetén $11_n^2 = 121_n$; amint azt a 10-es számrendszerben jól ismerjük.

3524. a) Ilyen korlát nincsen, hiszen a számegyenesen a racionális számok tetszőlegesen sűrűn helyezkednek el. Bármely két, akármilyen közeli racionális szám között vannak további racionális számok (sőt, végtelen sok), pl. a két kiválasztott szám számtani közepe.

b) Pl. a 2 négy egységnyire van ellentettjétől, a -2-től, és másfél egységnyire reciprokától, az $\frac{1}{2}$-től; a 3 pedig hat egységnyire a -3-tól, és $\frac{8}{3}$ egységnyire az $\frac{1}{3}$-tól. Mindkét esetben a legkisebb távolság a nulla (a 0 ellentettje önmaga, az 1 és a -1 reciproka önmaga); legnagyobb érték természetesen egyik esetben sincs, hiszen az egyre nagyobb számok egyre távolabb lesznek ellentettjüktől és reciproküktól is. (Paraméteresen: n és $-n$ távolsága $2|n|$, n és $\frac{1}{n}$ távolsága $\left|n - \frac{1}{n}\right|$; egyik mennyiség sem korlátos felülről, de mindkettő minimuma a 0. Fontos még megemlíteni, hogy természetesen a 0-nak nincs reciproka, így ebben az esetben fel sem tehető a kérdés, milyen messze van tőle.)

3525. a) $3 + 3 = 6$ liter, $\frac{3 \cdot 15 + 3 \cdot 33}{3+3} = \frac{15+33}{2} = 24\%$-os oldatot.

b) $2 + 3 = 5$ liter, 15%-os oldatot.

c) Legyen k liter $p\%$-os és k liter $q\%$-os oldatunk. Összekeverve a térfogat $2k$ liter, a töménység $\frac{kp+kq}{k+k} = \frac{p+q}{2}\%$-os lesz. Vagyis, ha az összekevert térfogatok azonosak, mindig a két kiinduló töménység számtani közepe lesz a keverék töménysége; a térfogatok pedig összeadódnak.

d) Legyen k liter $p\%$-os és z liter $p\%$-os oldatunk. Összekeverve a térfogatok összeadódnak: $k + z$ liter oldatunk lesz, az összetevőkkel megegyező töménységgel ($p\%$).

3526. a) Az n fős társaság esetén a „még egyszer annyian és még feleannyian" összesen $2{,}5n$-et jelent. Ekkor a $2{,}5n = 30$ egyenletből $n = 12$, vagyis csak tizenketten voltak.

b) Jelölje az apa mostani életkorát a, ekkor a fiú most $\frac{a}{3}$ éves. 50 év múlva $a + 50$, illetve $\frac{a}{3} + 50$ évesek lesznek. Az apa ekkor „éveinek negyedével lesz idősebb" a fiúnál, vagyis a fiú akkori életkora háromnegyede az apa akkori életkorának: $\frac{3}{4}(a+50) = \frac{a}{3} + 50$. Ebből $a = 30$, vagyis az apa most 30, a fiú pedig 10 éves.

3527. a) Ha n helyébe 1-nél nagyobb (főleg, ha „jóval nagyobb") számot gondolunk.

b) $\frac{n+1}{n}$ -szer annyi időt.

c) 2003 egy 365 napos év, ezért az elvégzett csip-csup ügyek száma
$1 + 2 + 3 + \ldots + 365 = \frac{1+365}{2} \cdot 365 = 66\,795$.
Ezek elvégzéséhez 3 005 775 másodpercre, azaz kb. 835 órára volt szüksége Andreának.

Megjegyzés:
Az év utolsó napján kb. 274 percet, azaz kb. 4,6 órát kellett csip-csup ügyek intézésével eltöltenie.

3528. A megadott szám így is írható: $b + 100b + 10\,000b + 10a + 1000a + 100\,000a$, vagyis $10\,101 \cdot (10a + b)$.
Mindazokkal a prímszámokkal biztosan osztható tehát, amelyekkel a 10 101 is osztható. $10\,101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, tehát biztosan osztható a 3, 7, 13 és 37 prímekkel.

Megjegyzés:
Az, hogy ezeken kívül más prímmel is osztható-e, azon múlik, hogy a $10a + b$ prímtényezős felbontásában szerepel-e a megadottaktól különböző prím.

3529. a) Két szám négyzetének összege pontosan akkor nulla, ha mindkét szám 0-val egyenlő: $2x - 7 = 0 \wedge 2y + 5 = 0$.
Ebből $x = \frac{7}{2} \wedge y = -\frac{5}{2}$, vagyis az egyenlet egyetlen megoldása a $\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ rendezett számpár.

b) A megadott egyenlet x-ben másodfokú, ezért a megoldóképlet szerint:
$$x = \frac{8\cos y \pm \sqrt{64\cos^2 y - 64}}{32} = \frac{\cos y \pm \sqrt{\cos^2 y - 1}}{4}.$$

Az egyenletnek pontosan akkor lehet valós számpár megoldása, ha $\cos^2 y - 1 \ge 0$, azaz $\cos^2 y \ge 1$ teljesül. Mindig igaz azonban, hogy $0 \le \cos^2 y \le 1$, ezért a valós megoldáshoz szükséges (és egyben elégséges), hogy $\cos^2 y = 1$ igaz legyen.

1. eset: $\cos y = 1$. Ekkor $x = \frac{1}{4}$ és $y = 2k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$;

2. eset: $\cos y = -1$. Ekkor $x = -\frac{1}{4}$ és $y = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát:

$$M = \left\{\left(\frac{1}{4};\ 2k\pi\right); \left(-\frac{1}{4};\ \pi + 2k\pi\right)\right\},\quad k \in \mathbf{Z}.$$

c) Fejezzük ki z-t az első egyenletből ($z = x + y$), majd ezt helyettesítsük a második egyenletbe: $xy - (x+y)^2 = 0$.
A zárójel felbontása után: $x^2 + yx + y^2 = 0$.
Ez az egyenlet x-ben másodfokú, ezért a megoldóképlet szerint:

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{-3y^2}}{2}.$$

Az $x^2 + yx + y^2 = 0$ egyenletnek pontosan akkor lehet valós számpár megoldása, ha $-3y^2 \ge 0$ igaz. Ez azonban csak akkor teljesül, ha y helyébe 0-t írunk.
Egyetlen megoldás lehetséges tehát: $y = 0$, $x = 0$, amiből $z = 0$ következik.
Behelyettesítéssel látható, hogy a (0; 0; 0) számhármas valóban megoldása a megadott egyenletrendszernek.

3530. a) $\dfrac{2(x^2-16)}{5(x^2+8x+16)} = \dfrac{2(x-4)(x+4)}{5(x+4)^2} = \dfrac{2(x-4)}{5(x+4)}$, ha $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

b) Az a) alapján az egyenlőtlenség írható így is: $\dfrac{2(x-4)}{5(x+4)} < 1$, ahol $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

Nullára rendezve: $\dfrac{2x-8-5x-20}{5(x+4)} < 0$

$$\frac{-3x-28}{5(x+4)} < 0$$

$$\frac{3x+28}{x+4} > 0$$

A tört értéke pontosan akkor pozitív, ha számlálójának és nevezőjének előjele megegyezik. A megoldáshalmaz tehát: $\left]-\infty;\ -\frac{28}{3}\right[\cup \left]-4;\ +\infty\right[$.

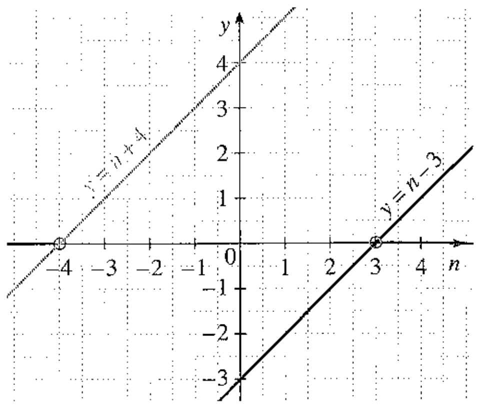
3531. A hatványozás azonosságait alkalmazva az egyenletrendszer második egyenlete így is írható: $3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} = 182$.
Vezessünk be új változókat: $a := 2^{x+y}$ és $b := 2^{x-y}$; természetesen $a, b \in \mathbf{R}^+$.
Az eredeti egyenletrendszer ezzel:
$5a - 4b = 312 \wedge 3a - 5b = 182$
$15a - 12b = 936 \wedge -15a + 25b = -910$
$a = 64 \wedge b = 2$
$2^{x+y} = 64 \wedge 2^{x-y} = 2$
A kettes alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:
$x + y = 6 \wedge x - y = 1$
$x = \frac{7}{2} \wedge y = \frac{5}{2}$.
$M = \left\{\left(\frac{7}{2};\ \frac{5}{2}\right)\right\}$ az egyenletrendszer megoldáshalmaza.

3532. Alakítsuk szorzattá a bal oldalt:
$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x)$, ami tovább így is írható:
$(\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x)$.
A megadott egyenlet tehát írható így is:
$(\cos x - \sin x)(1 + \cos x \cdot \sin x) = \sin x - \cos x$.
0-ra rendezve, majd kiemelést végezve: $(\cos x - \sin x)(2 + \cos x \cdot \sin x) = 0$.
Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha tényezői között szerepel a 0:
$\cos x - \sin x = 0 \vee 2 + \cos x \cdot \sin x = 0$.
Mivel két, 1-nél nem nagyobb abszolútértékű szám szorzata sohasem lehet -2-vel egyenlő, ezért az összes megoldást a $\cos x - \sin x = 0$ egyenlet megoldásai adják.
Ebből $\operatorname{tg} x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Átalakításaink ekvivalensek voltak, tehát a megoldáshalmaz:
$M = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3533. a) $\dfrac{n+4}{n-3} = 0$. Egy tört akkor és csak akkor nulla, ha a számláló nulla, és ugyanakkor a nevező nem nulla. Tehát $n = -4$ esetén lesz a tört értéke nulla.

b) $\dfrac{n+4}{n-3} > 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.
$(n + 4 < 0$ és $n - 3 < 0)$ vagy $(n + 4 > 0$ és $n - 3 > 0)$,
azaz $(n < -4$ és $n < 3)$ vagy $(n > -4$ és $n > 3)$.
A tört értéke pozitív, ha $n < -4$ vagy ha $n > 3$, ahol n egész szám,
azaz, ha $\{n \in \mathbf{Z} \mid n < -4 \vee 3 < n\}$.

Más megfontolás:
A számlálót és a nevezőt külön függvénynek tekintjük és ábrázoljuk:
$n \mapsto n + 4$, illetve $n \mapsto n - 3$.
A tört pozitív pontosan ott, ahol a két függvény egyszerre vesz fel pozitív, illetve negatív értéket.
Ez az ábráról leolvasható.
A -4-nél kisebb, illetve a 3-nál nagyobb egészekre lesz a tört pozitív.



c) $\dfrac{n+4}{n-3} = \dfrac{(n-3)+7}{n-3} = 1 + \dfrac{7}{n-3}$
pontosan akkor egész, ha a 7-nek osztója az $(n-3)$.
7 osztói: $1, -1, 7, -7$. Ennek megfelelően:
ha $n - 3 = 1$, akkor $n = 4$; ha $n - 3 = 7$, akkor $n = 10$;
ha $n - 3 = -1$, akkor $n = 2$; ha $n - 3 = -7$, akkor $n = -4$.
Tehát a törtkifejezés értéke egész, ha n értéke 4 vagy 2 vagy 10 vagy -4.

3534. a) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = x^3(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) =$
$= (x^2 + x + 1)(x^3 - 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1).$

b) Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$
$x^2 + x + 1 = 0$; nincs olyan x valós szám, amelyre ez teljesülne ($D < 0$).
Tehát a polinom egyetlen zérushelye: $x = 1$.

3535. A következő jelölést alkalmazzuk:
1 db alma ára a Ft,
1 szelet dinnye ára d Ft,
1 db körte ára k Ft,
1 fürt szőlő ára s Ft.
A táblákon feltüntetett gyümölcsök árai tehát:

	A*	B*	C*	D*
	$s, 2a, k$	$a, 2d, k$	$a, 2d, s$	$2a, k, d, s$
Az árak (Ft)	80	104	96	?

A: $2a + k + s = 80$
B: $a + 2d + k = 104$
C: $a + 2d + s = 96$
D: $(2a + k + s) + d$

Vegyük észre, hogy $D = A + d$, ami azt jelenti, hogy csak d értékét kell meghatároznunk
$B + C$: $4d + (2a + k + s) = 200$
$4d + 80 = 200 \quad \Rightarrow d = 30 \Rightarrow D = 110.$
A D^* táblán szereplő gyümölcsök ára együttesen 110 Ft.

Megjegyzés:
Külön-külön a gyümölcsök ára nem állapítható meg a dinnye árán kívül. Ennek az az oka, hogy az A, B és C egyenlet nem független egymástól.
Például, ha a $d = 30$-at behelyettesítjük B-be, illetve C-be: $a + k = 44$, illetve $a + s = 36$ adódik. E két egyenlet összege éppen az A egyenletet adja.

3536. a) Mivel a vásárló kosarában végül 9 kg alma 1 : 2 arányban jonatán, illetve jonagold volt, ez 3 kg jonatán (és 6 kg jonagold) almát jelent.
Ha az első árusnál x kg, a másodiknál $(9 - x)$ kg almát vásárolt, a jonatán alma mennyisége: $\dfrac{2x}{5} + \dfrac{3(9-x)}{10} = 3$, ebből $x = 3$.
Tehát a vásárló az első árustól 3 kg almát vásárolt (a másodiktól 6 kg-ot).

b) A vevő $3 \cdot 80$ Ft $+ 6 \cdot 110$ Ft $= 900$ Ft-ot fizetett. Egy kg almáért átlagban $(900 : 9 =)$ 100 forintot fizetett.

3537. $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$;
$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x^2} + y &= 5 \\ y^2 - x &= 7 \end{aligned}\right\} \quad \text{Az első egyenletből } |x| = 5 - y.$$
Minthogy $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$, ezért

1) ha $x \geq 0$, akkor $x = 5 - y \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0$.
Ennek gyökei: $y_1 = 3$, $y_2 = -4$.
Ezeket: pl. a második egyenletbe helyettesítjük: $x_1 = 2$, $x_2 = 9$.

2) ha $x < 0$, akkor $x = y - 5 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$.
Ennek gyökei: $y_3 = 2$, $y_4 = -1$.
Ezeket pl. a második egyenletbe helyettesítjük: $x_3 = -3$, $x_4 = -6$.

A kapott értékek egészek és ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a megoldáspárok: (2; 3), (9; -4), (-3; 2), (-6, -1).

3538. a) Állítás: $a+\frac{1}{a}\geq 2$, ha $a>0$.

Bizonyítás:

A feltétel miatt nem változik az egyenlőtlenség iránya, ha a-val szorzunk.

$a^2+1\geq 2a$, ezt rendezzük

$a^2-2a+1\geq 0$

$(a-1)^2\geq 0$.

Ez igaz, s minthogy a lépések megfordíthatók, így a kiinduló egyenlőtlenség is igaz minden pozitív a számra.

Megjegyzés:

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=1$.

b) $2^x+2^{-x}=2\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$, $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$,

azaz $2^x+\frac{1}{2^x}=2\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$.

Mivel $2^x>0$ minden valós x-re az a) miatt $2^x+\frac{1}{2^x}\geq 2$

a szinuszfüggvény értékkészlete miatt $2\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\leq 2$ minden y valós számra,

a két oldal akkor és csak akkor egyenlő, ha mindkét oldal értéke 2.

Az a) megjegyzése alapján $2^x+2^{-x}=2 \Leftrightarrow 2^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

$2\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=2 \Leftrightarrow \sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$,

$$y=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi, \text{ ahol } k\in\mathbf{Z}.$$

Az egyenlet megoldásai a $\left(0;\ \frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)$ számpárok, ahol $k\in\mathbf{Z}$.

A kapott értékek az adott egyenletet kielégítik.

3539. a) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{5}+\frac{5}{3}-4,8=\frac{16}{15}-4\frac{4}{5}=-3\frac{11}{15}\approx -3,73$.

b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-4,8=\frac{(x+2)^2-(x-2)^2-4,8(x^2-4)}{x^2-4}$.

Megoldandó $\frac{-4,8x^2+8x+19,2}{x^2-4}=0$ egyenlet, ahol $x\neq\pm 2$.

Ebből $-4,8x^2+8x+19,2=0$.

Osztunk $(-1,6)$-tal, így a $3x^2-5x-12=0$ egyenletet kapjuk.

Ennek gyökei: $x_1=3$, $x_2=-\frac{4}{3}$.

c) A tört értéke negatív, ha a számláló és a nevező ellentétes előjelű.

α) A számláló pozitív, ha $-\frac{4}{3}<x<3$.

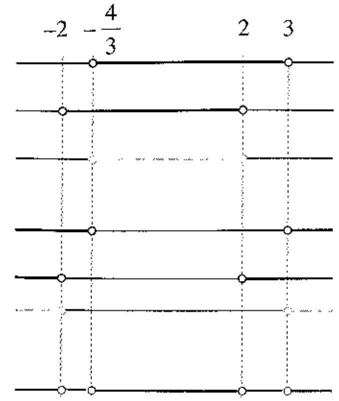
A nevező negatív, ha $-2<x<2$.

A tört negatív, ha $-\frac{4}{3}<x<2$.

β) A számláló negatív, ha $x<-\frac{4}{3}$ vagy $3<x$.

A nevező pozitív, ha $x<-2$ vagy $2<x$.

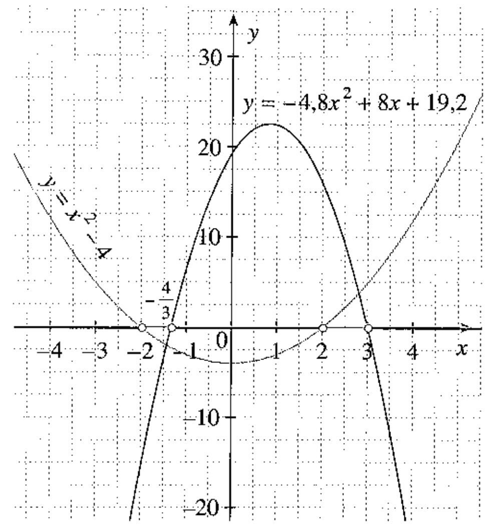
A tört negatív, ha $x<-2$ vagy $3<x$.



Összefoglalva az α és β esetet: az eredeti kifejezés negatív, ha $x<-2$ vagy $-\frac{4}{3}<x<2$ vagy $3<x$.

Más szemléltetés:

A tört ott negatív, ahol a számlálóban álló és a nevezőben álló függvények értéke ellentétes előjelű. Az ábráról leolvasható, hogy a kifejezés pontosan akkor negatív, ha $x<-2$ vagy $-\frac{4}{3}<x<2$ vagy $3<x$.



3540. a) Az áfa ekkor $1600\cdot 0,25=400$ Ft, vagyis a bruttó ár: $1600+400=2000$ Ft. (Számolhatunk $1600\cdot 1,25=2000$ módon is.)

b) $\frac{400}{2000}=0,2$, vagyis a bruttó árnak 20%-a az áfa.

c) Jelölje a nettó árat n, ekkor az áfa $0{,}12n$, a bruttó ár pedig $1{,}12n$.
$\frac{0{,}12n}{1{,}12n} = 0{,}1\overline{071428}5$, vagyis ekkor kb. 10,7% a „felülről" számított áfa-kulcs.

d) Bruttó $600 \cdot 1{,}12 = 672$ Ft-ba.

e) $\frac{7840}{1{,}12} = 7000$ Ft a nettó ár.

f) A d) esetben $600 \cdot 0{,}12 = 72$ Ft, az e) esetben $7000 \cdot 0{,}12 = 840$ Ft az áfa. (Mindkét esetben megkaphatjuk ugyanezt a bruttó és nettó ár különbségeként is: $672 - 600 = 72$, $7840 - 7000 = 840$.)

3541. a) Itthon a 400 euró 103 668 Ft-ba kerülne, ehhez kint a 170 euró 47 222 Ft, és 0,5% kezelési költség még 236 Ft lenne. Mivel ez kevesebb, mint 2 euró, tehát azt vonnák le, mint minimumot, ami 556 Ft volna, azaz kint összesen 47 778 Ft-ot fizetnék. Mivel aprópénzt nemigen váltanak, ez valószínűleg 47 800, vagy még inkább 48 000 Ft-ot jelentene. Vagyis összesen 103 668 + 47 800 = 151 468 Ft-omba kerülne az ügylet.

b) 700 euró itthon 181 419 Ft-ba kerülne. Ha visszajövetelkor 130 maradék eurót visszaváltanék, azért kapnék 32 049 Ft-ot, tehát végül a költségeim: 181 419 – 32 049 = 149 370 Ft-ot tennének ki. Ez kb. 2100 Ft-tal lenne kevesebb, mint az előző esetben, azaz jobban jártam volna ebben az esetben, ha itthon váltok többet. Igaz, a különbség mindössze a költségek 1,4%-a, tehát nem jelentős.

3542. a) A négyzet oldala ekkor $a = \sqrt{93100} = 305{,}123$ (km), azaz a kért pontossággal 305 km.

b) Hasonlóan most $a = \sqrt{3337} = 57{,}767$ (km), tehát 58 km.

c) Egy megye területe átlagosan $\frac{93100}{20} = 4655$ (km²), tehát Vas megye az átlagnál kisebb.

d) $\frac{278\,000}{3337} = 83{,}3 \left(\frac{\text{fő}}{\text{km}^2}\right)$.

e) A magyar átlagos népsűrűség $\frac{10\,000\,000}{93100} = 107{,}4 \left(\frac{\text{fő}}{\text{km}^2}\right)$, tehát Vas megye az átlag alatt van népsűrűség tekintetében is.

3543. a) $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.
Mivel annál kisebb egy szám, minél kevesebb jegyű, és minél kisebb számjegyek szerepelnek a nagyobb helyiértékű helyen, ezért a legkisebb megfelelő szám: 2556.

b) $2002 = 222 \cdot 9 + 4$, azaz legalább 223-jegyű számnak kell lennie bármely olyan számnak, amely számjegyeinek összege 2002. Ha vannak ilyen, pontosan 223-jegyű számok, akkor a legkisebb is ezek között van (hiszen a 224- vagy többjegyű számok minden 223-jegyű számnál nagyobbak). A fentiekből már következik, hogy a legkisebb keresett természetes szám a $4\underbrace{999\ldots9}_{222\text{ db}}$.

3544. a) 1, 2, 3, ... 10, 11, ... x. Ez 1-től x-ig összesen 2002 db számjegy.
Egyjegyű számok: 1, ... 9 együtt: 9 db számjegy,
kétjegyű számok: 10, ... 99 együtt 180 db számjegy ,
háromjegyű számok 100, ... 999 együtt 2700 db számjegy.
Ezek szerint a 2002. helyre egy háromjegyű szám egyik jegye kerül. Így a 2002. helyig a háromjegyűekből $2002 - 189 = 1813$ számjegyet írtunk le.
$1813 = 604 \cdot 3 + 1$.
Ebből látszik, hogy 604 db háromjegyű számot leírva a 605. háromjegyű szám első jegye kerül a 2002. helyre Mivel az első háromjegyű szám a 100, ezért a 605. háromjegyű szám a 704. Tehát, ha a feladat szövege szerint írjuk egymás után a számokat, a 2002. helyre a 7-es kerül.

b) Egy (pozitív egész) szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha 2-vel is és 3-mal is osztható, mert $6 = 2 \cdot 3$; $(2; 3) = 1$.
A keresett szám osztható 2-vel, mivel az utolsó számjegye páros (8).
Egy szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.
A $\overline{3abc8}$ alakú, tízes számrendszerbeli ötjegyű számok közül a legkisebb 6-tal osztható a 30018, a legnagyobb a 39978.

3545. Egy (pozitív egész) szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha 2-vel is és 3-mal is osztható, mert $6 = 2 \cdot 3$ és $(2; 3) = 1$.
$\overline{25x}$ alakú háromjegyű, 6-tal osztható szám a 252 és a 258.
Két megfelelő négyjegyű számot kapunk.
Az egyik keresett négyjegyű szám 252-vel osztva hányadosul 10-et, maradékul 12-t ad, így a szám: $10 \cdot 252 + 12 = 2532$.
A másik keresett négyjegyű szám 258-cal osztva hányadosul 10-et, maradékul 12-t ad, így a szám: $10 \cdot 258 + 12 = 2592$.

3546. Legyenek a prímek p, q, r; ekkor $pqr = 5(p + q + r)$. Ebből egyikük, pl. $p = 5$, hiszen prímek szorzata csak ezen prímekkel osztható. Ekkor $qr = 5 + q + r$, amiből $r = \frac{5+q}{q-1}$ (és persze fordítva: $q = \frac{5+r}{r-1}$). Lévén q, r prímek, mindegyik legalább 2, ezért $2 \le \frac{5+q}{q-1}$, a pozitív nevezővel szorozva $2q - 2 \le 5 + q$, azaz $q \le 7$. (És a szimmetria miatt ekkor $r \le 7$.) Legyen q rendre 2; 3; 5; 7 – ekkor pedig r a képletből

7; 4; 2,5; 2. A 4 nem prím, a 2,5 nem is egész, tehát q és r 2 vagy 7 lehet, tetszőleges „szereposztásban". A három prímszám tehát, nagyság szerint: 2, 5, 7.

3547. a) Ha a buszon kettesével ülve az egyik gyereknek nem volt párja, akkor a gyerekek száma páratlan.
Hármasával sétálva az utolsó sorban két gyerek maradt, tehát a gyerekek száma 3-mal osztva 2 maradékot ad.
Hatosával sorba állítva őket – mivel számuk páratlan, az utolsó sorba csak 1, 3 vagy 5 gyerek kerülhet. Mivel a gyerekek száma 3-mal osztva 2 maradékot ad, és a 6 osztható 3-mal, így a felsorolt három lehetséges eset közül csak az 5-re teljesül ez a feltétel. Tehát az utolsó hintóra 5 gyerek került.

b) Az 5 gyerek a 6 lehetséges helyre 6! = 720-féleképpen ülhet le. (A helyek számozottak.) Ugyanis az első helyre 6-féle lehetőség van (az 5 gyerek közül valaki, vagy nem ül oda senki), ettől függetlenül a 2. helyre 5 lehetőség van, a 3. helyre 4 lehetőség stb.
Más gondolatmenet:
Az a hely, ahova nem ül gyerek, 6-féle lehet. A maradék 5 helyet az 5 gyerek 5!-féleképpen foglalhatja el. Így a lehetőségek száma $6 \cdot 5! = 6!$

3548. a) Egy nap összesen 24-szer harangoznak, minden órában, s mindig eggyel többet, 1-től 24-ig. Mivel az egyik harang 3, a másik 5 másodpercenként üt, ezért 6 órakor az első a 15. másodpercben üti a hatodikat, a másik akkor a negyediket, tehát ez egyszerre lesz (mert [3; 5] = 15). Ezután – mivel mindig ütnek legalább 6-ot – lesz közös ütés, azaz 19 alkalommal (reggel 6-tól 24 óráig minden órában) lesz legalább egy közös ütés.

b) Ha legalább 11-et ütnek, akkor a első harang hatodik és tizenegyedik ütése közös lesz a második harang negyedik és hetedik ütésével, hiszen 5, illetve 3 ütésnyi az ismétlődés „ciklushossza". Vagyis 11 órától kezdve mindig lesz a kezdetivel együtt 3 közös harangütés.

c) Egy harang összesen $1 + 2 + 3 + \ldots + 24 = 300$-at üt egy nap alatt, ami a rövidebb periódusú harang esetén 3 másodpercenként ütve összesen 900 másodpercet, azaz 15 percet tesz ki. A lassabban ütőnél ez 1500 másodperc, ami 25 percet jelent.

3549. Csoportosítsuk a számokat aszerint, hogy 3-mal osztva milyen maradékot adnak: 0, 1, 2 a lehetőségek. Ha van három olyan szám, amelyik egy csoportba tartozik, ezek összege osztható lesz 3-mal (hiszen maradékaik összege – 0, 3 vagy 6 – szintén osztható). Ha nincs három ilyen szám, akkor viszont mindegyik csoportban van legalább egy szám. (Ötöt háromfelé másképp nem lehet elosztani.) Ekkor mindegyik csoportból egyet-egyet választva, összegük ismét osztható 3-mal, mert maradékaik összege is 3. Tehát a kiválasztás mindig megoldható.

3550. A pénztáros vissza tud adni 20, 40, 60, ... vagy 340 forintot, ezért ha Éva ki tud fizetni 410 vagy 430 vagy 450 vagy 470 vagy 490 vagy 510 ... vagy 710 vagy 730 forintot, akkor megoldották a problémát.
Évának összesen 850 forintja van, tehát a következő esetek valósíthatók meg:
- odaad 9 db 50 Ft-ost és visszakap 3 db 20 Ft-ost;
- odaad 11 db 50 Ft-ost és visszakap 8 db 20 Ft-ost;
- odaad 13 db 50 Ft-ost és visszakap 13 db 20 Ft-ost.

3551. a) A személyvonat sebessége legyen v, ekkor az expresszé $1{,}5v$. A személyvonat legyen déltől számítva már t órája úton, amikor az expressz utoléri, ekkor ez utóbbi $t - 0{,}75$ órája indult el. A két vonatnak a találkozásig megtett útja azonos, így (a fizikából jól ismert $s = vt$ összefüggés alapján) egyenletünk: $vt = 1{,}5v(t - 0{,}75)$. A nyilván nem 0 v-vel egyszerűsítve: $t = 1{,}5(t - 0{,}75)$, amiből $t = 2{,}25$ óra, vagyis délután negyed háromkor (2 óra 15 perckor) éri utol az expressz a személyt.

b) A négyszer 5 perces megállás összesen 20 perccel, azaz $\frac{1}{3}$ órával csökkenti a személyvonat haladással töltött idejét, míg a kétszer 6 perc összesen 12 perccel, azaz $\frac{1}{5}$ órával az expresszét. Egyenletünk ezért így módosul:
$v\left(t - \frac{1}{3}\right) = 1{,}5v\left(t - \frac{1}{5} - 0{,}75\right)$, amiből $t - \frac{1}{3} = 1{,}5t - \frac{57}{40}$, és tovább $t = \frac{131}{60}$ óra, ami természetesen 131 perc. Azaz du. 2 óra 11 perckor találkozik a két vonat (4 perccel előbb, mint az előző esetben).

3552. a) A feladat megoldását érdemes a „végéről" kezdeni.
A harmadik árustól távozva a termelőnek 5 dinnyéje maradt. Előtte $(5 + 1) \cdot 2 = 12$ dinnyéje volt. (Ennek a felét + egy dinnyét adott el a 3. árusnak.)
Mielőtt a 2. árushoz ért $(12 + 1) \cdot 2 = 26$ dinnyéje volt. $(26 + 1) \cdot 2 = 54$ dinnyével indult a piacra.

Másik megoldás:
Az őstermelő x db dinnyével indult el hazulról,
az 1. vevőnek eladott $\frac{x}{2} + 1$ dinnyét,
ezután maradt $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x-2}{2}$,
a 2. vevőnek eladott $\frac{x-2}{4} + 1 = \frac{x+2}{4}$ dinnyét,
ezután maradt $\frac{x-2}{2} - \frac{x+2}{4} = \frac{x-6}{4}$,

a 3. vevőnek eladott $\frac{x-6}{8}+1=\frac{x+2}{8}$ dinnyét,

ezután maradt $\frac{x-6}{4}-\frac{x+2}{8}=\frac{x-14}{8}$.

A feladat szövege szerint: $\frac{x-14}{8}=5 \Rightarrow x=54$.

Az őstermelő 54 db dinnyével indult a piacra.

b) Kezdetben x db fája volt.

Ez az első évben p%-kal növekedett, a felnövekedett faállomány $x\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Ennek az 5%-át eladta, így a 2. év elején $0{,}95x\left(1+\frac{p}{100}\right)$ db fával rendelkezett.

A második év végén a felnövekedett állomány $0{,}95x\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

A további 5% eladása után maradt faállomány $0{,}95^2x\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

A 2. évi szaporulat:

$0{,}95^2x\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-0{,}95x\left(1+\frac{p}{100}\right)$, ez a feladat szerint $0{,}05x$.

Legyen $1+\frac{p}{100}=q$.

Így $0{,}95^2xq^2-0{,}95xq=0{,}05x$.

x-szel osztva az egyenletet a $0{,}95^2q^2-0{,}95q-0{,}05=0$ egyenlethez jutunk; $q>0$ miatt $q\approx 1{,}103$.

Így $1+\frac{p}{100}=1{,}103 \Rightarrow p\approx 10{,}3$.

A faállomány évi átlagos növekedése tehát kb. 10,3%.

3553. Legyen a legolcsóbb jegy ára x Ft, akkor a közepes árú jegyé a feltétel szerint $x+1000$ Ft, a legdrágább jegyé $x+2000$ Ft.
Ha 6 millió Ft-os bevételt terveznek:
$450x+350(x+1000)+200(x+2000)=6\,000\,000 \Rightarrow x=5250$.
Tehát a legolcsóbb jegy 5250 Ft-ba kerüljön, hogy teljesítsék a tervezett bevételt.

3554. Ha x alkalommal szállodában, és $13-x$ alkalommal kempingben éjszakázunk, akkor
$5400x+2000(13-x)\le 43000$
$54x+260-20x\le 430$
$34x\le 170$

$x\le 5$
Tehát (legfeljebb) 5 éjszaka alhatunk szállodában.

Ellenőrzés:
$5400\cdot 5+2000\cdot 8=27\,000+16\,000=43\,000$, tehát valóban elég a szállásra fordítható összeg (természetesen akkor is, ha 5-nél kevesebb éjszakát töltünk szállodában).

3555. a) Jelölje a diákok számát d, a tanárokét t. Két egyenletet írhatunk fel: $d\cdot t=150$ és $3(d+t)=105$. Vagyis két olyan számot keresünk, amelyek összege 35, szorzata 150 – azaz a Viète-formulák szerint e két szám az $x^2-35x+150=0$ egyenlet két gyöke. Ezek a 30 és az 5, a létszámokra tett megkötés miatt 5 tanár vizsgáztatott 30 diákot.

Megjegyzés:

A Viète-formulák nélkül megoldva a $\left.\begin{array}{l} d+t=35 \\ d\cdot t=150 \end{array}\right\}$ egyenletrendszert, ugyanazt az eredményt kapjuk.

b) Ha a 2000 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-os kávéból eredetileg x kg, a 4000 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-osból y kg volt a keverékben, akkor (a kávé értékét figyelve):
$2000x+4000y=3100(x+y) \wedge 2000x+4000(y+5)=3400(x+y+5)$.
Egyszerűsítés és rendezés után a következő egyenletrendszerhez jutunk:
$11x-9y=0 \wedge 7x-3y=15$.
Ebből $x=4{,}5 \wedge y=5{,}5$, tehát az olcsóbbik fajtából eredetileg 4,5 kg, a drágábból pedig 5,5 kg volt a keverékben.

Ellenőrzés:
A keverék értéke eredetileg $2000\cdot 4{,}5+4000\cdot 5{,}5=9000+22000=31000$ Ft, s mivel tömege 10 kg, ezért egy kg ára valóban 3100 Ft.
Ha a keverékhez még 5 kg 4000 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-os kávét adnak, akkor az újabb keverék értéke 51 000 Ft, tömege pedig 15 kg lesz, ami valóban 3400 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-os egységárat jelent.

3556. a) 5730 év alatt bomlik el a mennyiség fele, újabb 5730 év alatt a maradék fele, tehát összesen a kezdeti mennyiség $\frac{3}{4}$-e. Ez összesen $2\cdot 5730=11\,460$ évig tart.

Másik megoldás:
$N(t)=N_0\cdot 10^{-\lambda t}$, ahol t jelöli az időt években mérve.

Mivel a felezési idő 5730 év, ebből kiszámíthatjuk a λ értékét:

$N(5730) = \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot 10^{-5730\lambda}$

$0,5 = 10^{-5730\lambda}$

$-5730\lambda = -0,30103$

$\lambda = 0,0000525$

Ezután, ha $\frac{3}{4}$ rész elbomlott, akkor $\frac{1}{4}$ rész maradt, tehát:

$N(t) = N_0 \cdot 10^{-\lambda t} = \frac{N_0}{4}$, azaz $0,25 = 10^{-0,0000525t}$

$t = 11\,460.$

Azaz 11 460 év múlva lesz meg még a kezdeti mennyiség negyede.

b) Az adatok szerint a kezdeti mennyiség 33%-a van még meg, ehhez t idő kell, s ennek kiszámítása ugyanazzal a képlettel:

$0,33N_0 = N_0 \cdot 10^{-0,0000525t}$

$0,33 = 10^{-0,0000525t}$

$t = 9171.$

Tehát közel 9200 évesre becsülhetjük a fa korát.

3557.* a) Mivel a légnyomás 5500 m magasan lesz a felszíninek a fele:

$p(5500) = p_0 \cdot 2^{-5500c} = \frac{p_0}{2} = p_0 2^{-1};$

$-5500c = -1;$

$c = \frac{1}{5500} \approx 0,0001818.$

(Mértékegysége $\frac{1}{\text{m}}$.)

b) Ezzel a c értékkel a Himalája tetején a légnyomás:

$p(8800) = 10^5 \text{ Pa} \cdot 2^{-\frac{8800}{5500}} \approx 32\,988 \text{ Pa}.$

3558. a) Ekkor megoldandó a $70 < 75,5 - 5 \cdot 1,081^{\frac{6000-G}{206}}$ egyenlőtlenség. Kivonás és osztás után $1,1 > 1,081^{\frac{6000-G}{206}}$, véve mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$\lg 1,1 > \lg 1,081^{\frac{6000-G}{206}}$, azaz $\lg 1,1 > \frac{6000-G}{206} \cdot \lg 1,081.$

Ebből rendezés után $G > 6000 - 206 \cdot \frac{\lg 1,1}{\lg 1,081} \approx 5748$, tehát kb. ennyi (1980-as) dollár GDP felett várható legalább 70 éves élettartam.

b) Mivel a képlet szerint $É$ a G-nek szigorúan monoton növő függvénye, így elegendő megvizsgálni az 5000 \$-os GDP-hez tartozó várható élettartamot, és ez lesz a legkisebb felső korlátja az ennél kisebb GDP-jű országban élők várható élettartamának. $É = 75,5 - 5 \cdot 1,081^{\frac{6000-5000}{206}} \approx 68,2$, tehát az említett országokban legfeljebb kb. 68 év a várható élettartam.

3559. a) A törési szöget a következő egyenletből határozhatjuk meg: $\frac{\sin 40^\circ}{\sin\beta} = \frac{1800}{370}$.

Ebből $\sin\beta \approx 0,1321$, azaz $\beta \approx 7,6°$ (a visszakeresés egyéb eredményei most nem jöhetnek szóba). Az irányváltozás ekkor $40° - 7,6° = 32,4°$.

b) A teljes visszaverődés, a másik közegbe való be nem hatolás határesetben akkor következik be, ha a törési szög 90° lenne. Ennél nagyobb beesési szöghöz már nem tartozik semmilyen törési szög, hiszen a szinuszfüggvény nem vehet fel 1-nél nagyobb értéket, így a hullám a két közeg határáról visszaverődik.

A Snellius—Descartes-törvény alapján (bár a hullám haladási iránya az ábráéhoz képest ellenkező, de a szögek betűzését megtartjuk) a kérdéses határszög: $\frac{\sin 90^\circ}{\sin\beta_h} = \frac{1800}{370}$, amiből $\sin\beta_h \approx 0,2056$, azaz $\beta \approx 11,9°$ (a visszakeresés egyéb eredményei most nem jöhetnek szóba). Ha ennél nagyobb beesési szögben érkezik a két közeg határára a lösz felől a földrengéshullám, akkor az nem hatol be az agyagos területre, nem tesz ott kárt.

3560. a) A szöveg szerint $K = 2 \cdot 10^{10}$, a kezdeti idő 1960, ekkor $t = 0$. 1977-ben $t = 17$. $N_0 = 3 \cdot 10^9$. A még hiányzó a-t pedig abból számoljuk ki, hogy $t = 17$ esetén 4,1 milliárd ember volt, azaz

$4,1 \cdot 10^9 = \frac{2 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^9 + (2 \cdot 10^{10} - 3 \cdot 10^9) \cdot a^{17}};$

$4,1 = \frac{6 \cdot 10}{3 + (20-3) \cdot a^{17}};$

$69,7 \cdot a^{17} = 60 - 3 \cdot 4,1 = 47,7;$

$a^{17} = 0,6844;$

$a = 0,978.$

Ekkor 2003-ban a képlet szerint, mivel 1960 óta 43 év telt el,

$N(43) = \frac{6 \cdot 10^{10}}{3 + 17a^{43}} = \frac{6 \cdot 10^{10}}{3 + 17 \cdot 0,978^{43}} = \frac{6 \cdot 10^{10}}{9,51} \approx 6,31 \cdot 10^9$ -nek kellene lennie az emberiség létszámának, azaz kb. 6,3 milliárdnak.

b) A modell szerint 2050-ben $N(90)$, míg 2100-ban $N(140)$ adja meg a becsült létszámot:

$$N(90) = \frac{6\cdot 10^{10}}{3+17a^{90}} = \frac{6\cdot 10^{10}}{3+17\cdot 0,978^{90}} = \frac{6\cdot 10^{10}}{5,28} \approx 11,36\cdot 10^9,$$

$$N(140) = \frac{6\cdot 10^{10}}{3+17\cdot 0,978^{140}} = \frac{6\cdot 10^{10}}{3,75} \approx 16\cdot 10^9.$$

Tehát 2050-re kb. 11,36 milliárd, és 2100-ra kb. 16 milliárd embert jelez előre a képlet. Ezeket ma még nem tudjuk ellenőrizni.

3561. a) Ha mindenki új embernek mesélné el a hírt, akkor óránként 4-szereződne a hír ismerőinek a száma. Ez egy mértani sorozat első 48 tagja: $a_1 = 4$, $a_2 = 16$, ..., $a_{48} = 4^{48} = 7{,}923\cdot 10^{28}$, ami teljes abszurditás, mivel ennyi ember a Földön sincs, nemhogy egy városban. Ráadásul ezen számok összegére van szükségünk:

$$S_{48} = 4\frac{4^{48}-1}{4-1} = 1,06\cdot 10^{29}.$$

(Részint a nagyságrend, részint az irreális létszám miatt mindegy, hogy a kezdeti 1 embert, magát a hírforrást hozzáadjuk-e vagy sem az eredményhez; de az elvi korrektség miatt még ezt is meg kell tenni.)

b) Az előző kérdésre egy „realistább" válasz a fékezett növekedés modellje. Ebben a képletben három (jelenleg ismeretlen) állandó szerepel, amire van három összefüggésünk:

$$N(1) = 4 = \frac{K\cdot N_0}{N_0+(K-N_0)\cdot a},\quad N(2) = 16 = \frac{K\cdot N_0}{N_0+(K-N_0)\cdot a^2},$$

$$N(3) = 54 = \frac{K\cdot N_0}{N_0+(K-N_0)\cdot a^3}.$$

Ebből kell a három állandót (K, N_0 és a értékét) meghatározni. A kérdés pedig $N(48)$. Alkalmazzuk az „időeltolás" ötletét. Tekintsük kiinduló értéknek a 4-et, a $t = 1$ időponthoz tartozó értéknek a 16-ot, és $t = 2$-höz tartozónak az 54-et. Ekkor a K és a állandók ugyanazok, mint amiket keresünk, hiszen a képlet szerint egymásra következő értékek nagysága nem függ attól, mikor kezdtük el a megfigyelést, az időmérést. Így $16 = \dfrac{4K}{4+(K-4)a}$ és $54 = \dfrac{4K}{4+(K-4)a^2}$.

Ekkor az elsőből 4-gyel egyszerűsítés és a nevezővel való szorzás után $16 + 4(K-4)a = K$, amiből rendezés után $K = \dfrac{16(1-a)}{1-4a}$ adódik. A második képletből pedig ugyanígy előbb $54 + 13{,}5(K-4)a^2 = K$, majd $K = \dfrac{54(1-a^2)}{1-13,5a^2}$ következik. Egyenlővé tesszük K két kifejezését, és felismerjük, hogy $1 - a^2 = (1 + a)(1 - a)$. Egyszerűsítünk $1 - a$-val (ami nyilván nem 0, hiszen ha $a = 1$ volna, akkor az eredeti képlet minden t-re ugyanazt az eredményt adná, nevezetesen N_0-t), szorzunk a nevezőkkel, rendezünk (a^2 kiesik), és kapjuk:

$a = \dfrac{19}{81} \approx 0,2346$. Visszaírva ezt K bármelyik kifejezésébe (célszerűen az elsőbe): $K = \dfrac{992}{5} = 198,4$ (pontosan, nem kerekítés után). Visszatérünk az eredeti időjelöléshez: $N(1) = 4 = \dfrac{198,4N_0}{N_0+(198,4-N_0)\cdot\frac{19}{81}}$.

Elvégezve a műveleteket, egyszerűsítések után: $N_0 = \dfrac{304}{319} \approx 0,9530$.

(Ami érdekes, hiszen a kezdőértéknek igazából 1-nek kellene lennie, hiszen kezdetben 1 ember ismerte a hírt, és tőle indult a „pletyka". Mivel azonban megadtunk 3 későbbi értéket, és 3 ismeretlenhez nem lehet 4 független egyenletet rögzíteni, így ez adódik. Ha viszont $N(3) = 54$ helyett, a másik két érték változatlanul hagyása mellett, $N_0 = 1$ lenne a harmadik összefüggésünk, nem kapnánk értelmes eredményt, mert e három szám mértani sorozat szerint követi egymást – lásd az a) részt –, és ilyen számokra nem illeszthető a logisztikus modell.)

Behelyettesítve $t = 48$-at: $N(48) = \dfrac{198,4\cdot\frac{304}{319}}{\frac{304}{319}+\left(198,4-\frac{304}{319}\right)\cdot\left(\frac{19}{81}\right)^{48}} = 198,4$

– vagyis már „telítésben" van a létszám, elérte a lehetséges maximumot. (Egy tizedes pontossággal már $t = 10$ esetén ez a helyzet. Általában, e modell esetén, ha a nevezőben a $(K-N_0)a^t$ tag mondjuk két nagyságrenddel kisebbé válik N_0-nál, akkor az eredmény már lényegében a telítési K értékkel (annak kb. 99%-ával) egyenlő. Speciálisan most, mivel K nem számottevően nagyobb N_0-nál (alig 200-szoros), viszont a elég kicsi (nincs egynegyed), s így hatványai viharosan csökkennek, ez a helyzet igen hamar bekövetkezik.)

3562. a) A 9,2%-os évi kamat mellett 50 ezer forint 1 év alatt 1,092-szeresére nő, a 2. év végére pedig kamatos kamattal az $1{,}092^2$-szeresére, azaz a felnövekedett összeg $50\,000\cdot 1{,}092^2 \approx 59\,623{,}2$, azaz 59 623 Ft.

b) Ugyanezt az értéket egy év alatt évi p%-os kamattal értük volna el:

$$50\,000\left(1+\frac{p}{100}\right) = 59\,623,2,\ \text{ebből}\ 1+\frac{p}{100} = 1,092^2 \approx 1,19246.$$

Így egy év alatt 19,2%-os évi kamattal értük volna el ezt az értéket.

c) Évi $p\%$ kamatozás esetén egy hónap alatt az összeg $\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)$-szeresre, 6 hónap alatt $\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^6$-szorosára nő.

Két év alatt a félévenként változó kamatozással a bankba betett összeg

$$50\,000\left(1+\frac{9,3}{1200}\right)^6\cdot\left(1+\frac{9,1}{1200}\right)^6\cdot\left(1+\frac{8,75}{1200}\right)^6\cdot\left(1+\frac{8,5}{1200}\right)^6\approx$$

$\approx 50\,000\cdot 1,047410\cdot 1,046371\cdot 1,044555\cdot 1,043260\approx 59\,717.$

Ebben az esetben a pénzem 2 év elteltével kb. 59 720 Ft lesz.

3563. a) $d_1(40)=900-\frac{1}{4}400=800;\quad d_2(40)=\frac{800}{3}\approx 267.$

40 másodperccel a startvonalon való áthaladás után az első autó 800 méterre, a második kb. 267 méterre van a startvonaltól.

$d(120)=900-\frac{1}{4}\cdot 3600=0;\quad d_2(120)=\frac{2400}{3}=800.$

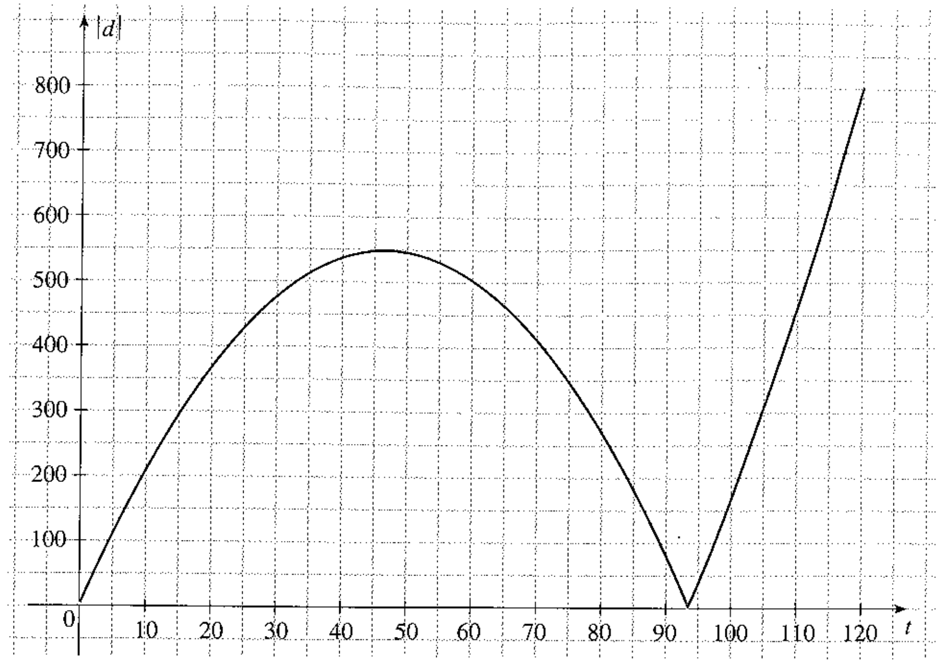
2 perccel a startvonalon való áthaladás után az első autó ismét a startvonalnál van (csak éppen ellentétes irányban halad, mint a mérés kezdetekor), a második 800 méterre van a startvonaltól.

b) Ha a d_1-d_2 függvényt d-vel jelöljük:

$d(t)=900-\frac{1}{4}(t^2-120t+3600)-\frac{20t}{3}=-\frac{1}{4}t^2+\frac{70}{3}t.$

c) Keressük a $|d|:[0;120]\to\mathbf{R};\ t\mapsto\left|-\frac{1}{4}t^2+\frac{70}{3}t\right|$ függvény maximumát.

A hozzárendelési szabály így is írható: $t\mapsto\left|-\frac{1}{4}t\left(t-\frac{280}{3}\right)\right|$, a vizsgált függvénynek tehát a 0 és a $\frac{280}{3}$ is zérushelye. A $|d|$ függvény grafikonja a megfelelő másodfokú függvény grafikonja segítségével rajzolható meg.



A legnagyobb távolság tehát a mérés befejezésekor lesz a két autó között (800 méter).

3564. a) $a_1=\frac{1}{ab\sqrt{ab}}$,

$a_3=a_1q^2=\frac{1}{ab\sqrt{ab}}\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)^2=\frac{1}{ab\sqrt{ab}}\left(\sqrt{ab}\right)^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}.$

Törtkitevő alkalmazásával: $a_3=\frac{a+b-2(ab)^{\frac{1}{2}}}{(ab)^{\frac{1}{2}}}.$

Megjegyzés:

Természetesen más alakban is megadható a kérdezett tag.

Például: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-2$ vagy $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-2$ stb.

b) A mértani sorozat első tagját jelölje a, hányadosát pedig q.

$$\left.\begin{aligned}a+aq^2&=10\,200\\ aq+aq^2&=7200\end{aligned}\right\}$$

A bal oldalak hányadosa egyenlő a jobb oldalak hányadosával (hiszen egyik oldalon sem állhat 0): $\frac{1+q^2}{q+q^2}=\frac{17}{12}$.

Ebből $5q^2+17q-12=0$, majd megoldóképlettel $q=\frac{3}{5}$ és $q=-4$ adódik.

Ha $q=\frac{3}{5}$, akkor $a=7500$, tehát az egyes személyek rendre 7500, 4500, 2700, 1620, illetve 972 Ft-ot kaptak, a szétosztott összeg pedig 17 292 Ft volt.

Ellenőrzés:

$7500+2700=10\,200$ igaz és $4500+2700=7200$ is igaz.

Ha $q=-4$, akkor $a=600$, tehát az egyes személyek rendre 600, -2400, 9600, $-38\,400$, illetve 153 600 Ft-ot „kaptak". Bár ez az eredmény „formálisan" megfelel a feltételeknek, a feladat szövege alapján nem tekinthetjük megoldásnak.

3565. a) A feladatban a mértani sorozat tagjaira fennálló feltétel szerint:

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=4(a_1+a_3+a_5+a_7)$,

$a_2+a_4+a_6+a_8=3(a_1+a_3+a_5+a_7)$.

Ismert, hogy $a_n=a_1q^{n-1}$.

$a_1(q+q^3+q^5+q^7)=3a_1(1+q^2+q^4+q^6)$.

A szokásos definíció szerint $a_1\neq 0$, ezért oszthatunk vele, és a bal oldalból kiemeljük a közös tényezőt, q-t.

$q(1+q^2+q^4+q^6)=3(1+q^2+q^4+q^6)$.

Az egyenlet mindkét oldalán a második tényező ugyanaz és pozitív, így oszthatunk vele. Ebből kapjuk, hogy $q=3$.

Megjegyzés:

Van a mértani sorozatnak olyan definíciója, amelyben $a_1=0$ is lehet. Ekkor a sorozat minden tagja 0. A feladat feltétele erre is teljesül.

b) $a_1:=2$, $q:=3$, a sorozat első nyolc tagja: 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, az n-ik ($n\in \mathbf{N}^+$) tagja: $a_n=2\cdot 3^{n-1}$.

c) $S_8=6560$.

3566. a) Két év múlva a gépkocsi ára $2{,}3\cdot 1{,}06^2\approx 2{,}584$ millió Ft lesz, tehát ha a befektetett összegünk évente q-szorosára növekszik, akkor $2q^2=2{,}3\cdot 1{,}06^2$ teljesülése szükséges a vásárláshoz.

Az egyenletből (felhasználva, hogy $q>0$): $q=\sqrt{\frac{2{,}3\cdot 1{,}06^2}{2}}\approx 1{,}137$.

Ez azt jelenti, hogy átlagosan évi 13,7%-os pénzgyarapodást kell elérnünk.

b) $2q(q-0{,}05)=2{,}76$

$2q^2-0{,}1q-2{,}76=0$

$q_1=-1{,}15$; $\quad q_2=1{,}2$.

A negatív gyök nem felel meg a szövegnek, tehát az első év végére 1,2-szeresére nőtt a befektetett összeg, azaz 20%-kal gyarapodott. A második évben a gyarapodás 15%-os volt.

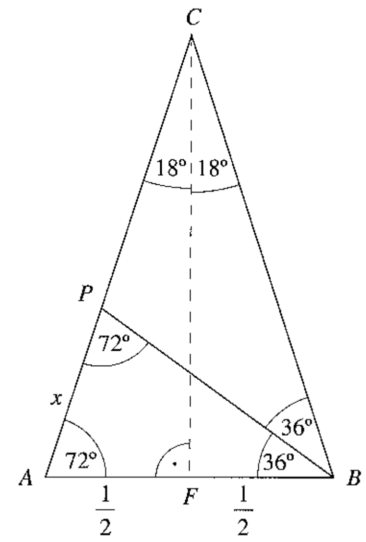
Ellenőrzés:

$2\cdot 1{,}2\cdot 1{,}15=2{,}76$, igaz.

Az átlagos gyarapodás évente r-szeres volt: $2r^2=2{,}76$, amiből (felhasználva, hogy $r>0$) $r=\sqrt{1{,}38}\approx 1{,}1747$.

Tehát az átlagos gyarapodás évi kb. 17,47%-os volt.

3567. a) Az ABP háromszögnek van két 72°-os, a BCP háromszögnek pedig két 36°-os szöge, ezért ezek egyenlő szárú háromszögek.



b) Az ABP, illetve a BCP egyenlő szárú háromszögben $AB=PB=PC$, tehát $PC=1$.

c) Szögeik páronként egyenlők, tehát a két háromszög valóban hasonló.

Az alapok hosszának aránya $x:1$, a száraké $1:(1+x)$.

d) Mivel két hasonló háromszögben a megfelelő oldalak hosszának aránya páronként egyenlő, ezért

$x:1=1:(1+x)$, vagyis

$x(1+x)=1$.

Ebből az $x^2+x-1=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek két valós megoldása van: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, illetve $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Mivel x egy szakasz hosszát jelöli, ezért csak pozitív lehet: $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

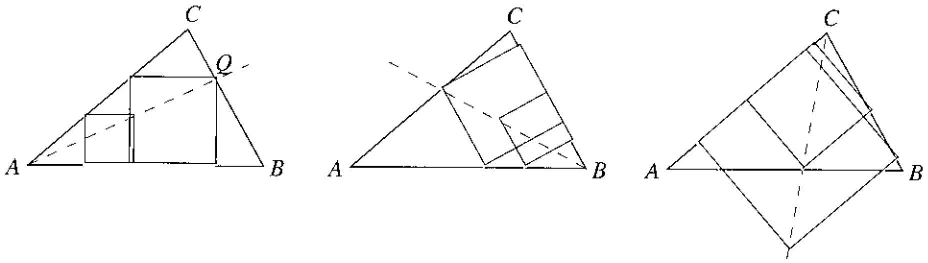
Az ABC háromszög szárainak hossza: $x+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

e) Az AFC derékszögű háromszögből: $\cos 72°=\frac{AF}{AC}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Mivel $\cos 72° = \sin 18°$ és $\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°}$, ezért

$$\cos 18° = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{2\cdot(5+\sqrt{5})}}{4}.$$

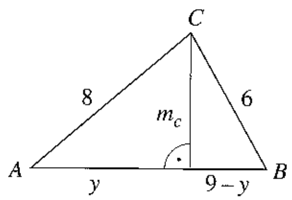
3568. a) I. eset II. eset III. eset

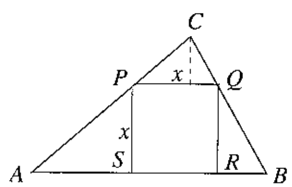


Szerkesszünk az ABC háromszögbe négyzetet úgy, hogy 2 csúcsa pl. az AB oldalon, a harmadik csúcsa az AC oldalon legyen. Nagyítsuk a négyzetet a háromszög A csúcsából úgy, hogy a beírt négyzet Q csúcsa a BC oldalra essen.
Attól függően, hogy a háromszög melyik oldala tartalmazza a négyzet két csúcsát, több megoldás lehetséges.
Az adott háromszög hegyesszögű, így három különböző megoldás lehetséges.

b) Húzzuk meg a háromszög AB oldalához tartozó m_c magasságát!
A keletkezett két derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva:

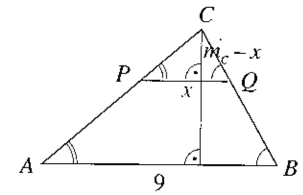
$$\left.\begin{aligned} y^2 + m_c^2 &= 8^2 \\ (9-y)^2 + m_c^2 &= 6^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y \approx 6{,}06;\ m_c \approx 5{,}22.$$





A háromszög kétszeres területét felírva:
$2T = a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c \Rightarrow m_a \approx 7{,}84;\ m_b \approx 5{,}88.$
Legyen a háromszög AB oldalán nyugvó, $PQRS$ beírt négyzet oldala x!
Az eredeti ACB háromszög hasonló a keletkezett PCQ háromszöghöz, mert kétkét szögük egyenlő (egyállású szögek) $\Rightarrow$ megfelelő szakaszaik aránya is egyenlő.

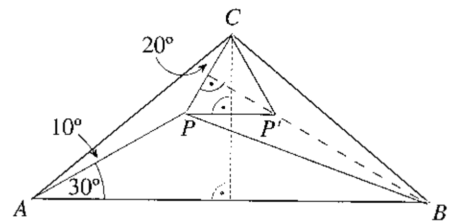
$\frac{x}{9} = \frac{m_c - x}{m_c}$, azaz $\frac{x}{9} = \frac{5{,}22 - x}{5{,}22}$,
$5{,}22x = 46{,}98 - 9x$
$14{,}22x = 46{,}98$
$x \approx 3{,}31$



Tehát az AB oldalon levő beírt négyzet oldala kb 3,31 cm.
Ugyanígy a BC oldalon nyugvó beírt négyzet oldala kb 3,40 cm, az AC oldalon nyugvó beírt négyzet oldala kb 3,39 cm.

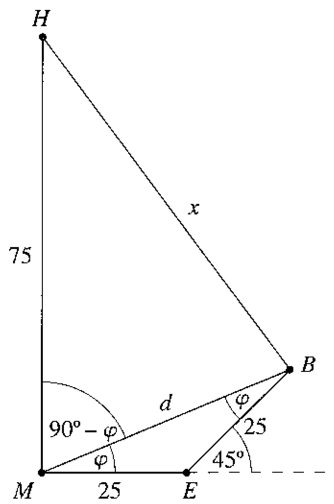
Megjegyzés:
Általánosan: $\frac{x}{c} = \frac{m_c - x}{m_c} \Rightarrow x = \frac{m_c \cdot c}{m_c + c} = \frac{2T}{c + m_c}$ (vagy: $x_c = \frac{c \cdot m_c}{c + m_c}$).
Tehát a háromszög oldalaira írt négyzetek oldalhossza:
$x = \frac{2T}{c + m_c}$; $u = \frac{2T}{a + m_a}$; $v = \frac{2T}{b + m_b}$.

3569. Ekkor $BAC\sphericalangle = 40°$, $ACB\sphericalangle = 100°$, $PCB\sphericalangle = 80°$, $APC\sphericalangle = 150°$, az $ABC\Delta$ egyenlő szárú.
Tükrözzük P-t AB felezőmerőlegesére (P')!



A szög- és távolságtartás miatt $P'CB\sphericalangle = 20°$, $PC = CP'$, $PCP'\sphericalangle = 60°$, vagyis a $PCP'\Delta$ szabályos.
Ugyancsak fennáll $P'BC\sphericalangle = 10°$ és $CP'B\sphericalangle = 150°$. Akkor ennek külső szöge 30°, vagyis BP' (illetve a meghosszabbítása) felezi a $PP'C\sphericalangle$-et. Lévén $PCP'\Delta$ szabályos, ekkor BP' egyúttal felezőmerőlegese is PC-nek. Ekkor azonban a $PBC\Delta$ egyenlő szárú ($PB = CB$), így a keresett szög $BPC\sphericalangle = PCB\sphericalangle = 80°$.
Megjegyzés:
BP szögfelezője az $ABC\sphericalangle$-nek.

3570. a) Használjuk az ábra jelöléseit! B-ben van a bejárat.
Az MEB háromszög egyenlő szárú, ezért az MB alapján fekvő szögei egyenlők (φ).
A feladat szövege szerint $BEM\sphericalangle = 135°$, ezért $\varphi = 22{,}5°$.
Az MEB háromszögből:
$d := MB = 2 \cdot 25 \cdot \cos 22{,}5° \approx 46{,}2$ (km).
A BMH háromszögben $90 - \varphi = 67{,}5°$, így x-et (azaz a harmadik megfigyelőpontnak a bejárattól való távolságát) koszinusztétellel is kiszámíthatjuk:
$x = \sqrt{75^2 + d^2 - 2 \cdot 75 \cdot d \cdot \cos 67{,}5°} \approx$
$\approx 71{,}5$ (km).
Az MBH szöget koszinusztétellel is kiszámíthatjuk: $\cos MBH\sphericalangle = \dfrac{d^2 + x^2 - 75^2}{2 \cdot d \cdot x}$, amiből
$MBH\sphericalangle = 75{,}8°$.

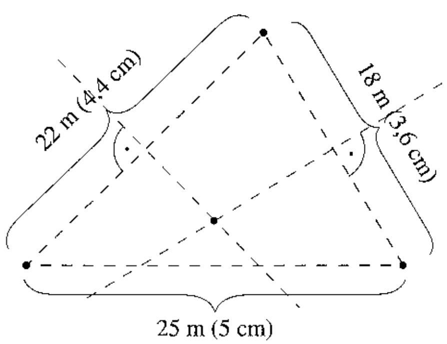


(Szinusztétellel is célhoz érhetünk, ám – a BMH háromszög legnagyobb szögéről lévén szó – ekkor meg kell mutatnunk, hogy az MBH szög hegyesszög.)
A BH egyenes a kelet-nyugati iránnyal $75{,}8° + \varphi - 45° \approx 53{,}3°$-os szöget zár be.

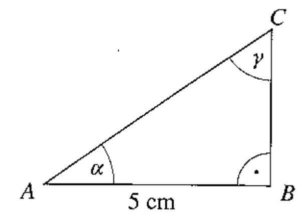
b) $T_{BEMH} = T_{BEM} + T_{BMH} = \dfrac{25^2 \cdot \sin 135°}{2} + \dfrac{75 \cdot d \cdot \sin 67{,}5°}{2} \approx 1821{,}4\ (\text{km}^2)$.

3571. a) Ábrázoljuk a fákat egy-egy ponttal, ezek távolsága páronként 18 m, 22 m, illetve 25 m. Keressük meg e három ponttól egyenlő távolságban levő pontot a síkban. Ez a pont a három pont alkotta háromszög szakaszfelező merőlegeseinek metszéspontja (a háromszög köré írható kör középpontja), ide kell építeni a szökőkutat, hogy mindhárom fától egyenlő távolságra legyen.

b) A szerkesztett háromszög oldalai: 3,6 cm, 4,4 cm és 5 cm.
Az ábrán 1 : 500 arányú kicsinyítést alkalmaztunk (1 cm a valóságban 500 cm, azaz 5 m).



3572. a) A háromszög γ szöge biztosan hegyesszög, hiszen a koszinusza pozitív, mert $\cos\gamma = \sin\alpha > 0$. Ebből az összefüggésből a $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ azonosság felhasználásával a $\cos\gamma = \cos(90° - \alpha)$ egyenlethez jutunk, tehát az is következik, hogy $\gamma = 90° - \alpha$, azaz a háromszög harmadik (β) szöge derékszög. Mivel a γ szög 20°-kal nagyobb az α-nál, ezért $\gamma = 55°$ és $\alpha = 35°$.



b) $BC = 5 \cdot \operatorname{tg} 35° \approx 3{,}50$ (cm); $AC = \dfrac{5}{\cos 35°} \approx 6{,}10$ (cm).

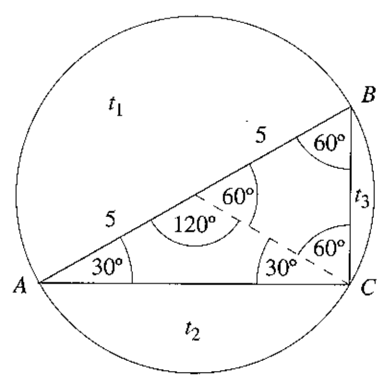
c) A beírt kör sugarának kiszámítására több ismert összefüggés is van. Például
$r = \dfrac{2T}{k} = \dfrac{AB \cdot BC}{AB + BC + AC} = 1{,}20$ cm, tehát a beírt kör területe: $r^2\pi \approx 4{,}5\ \text{cm}^2$.
Megjegyzés:
Derékszögű háromszög esetén a beírt kör sugara a $2r = a + b - c$ összefüggésből is számolható (c az átfogó, a és b a befogók hosszát jelöli).

3573. a) A háromszög β szöge biztosan hegyesszög, hiszen a koszinusza pozitív, mert $\cos\beta = \sin\alpha > 0$. Ebből az összefüggésből az is következik, hogy $\beta = 90° - \alpha$, azaz a háromszög harmadik (γ) szöge derékszög. Mivel a β szög 30°-kal nagyobb az α-nál, ezért $\beta = 60°$ és $\alpha = 30°$.

b) $BC = 5$ cm; $AC = 5\sqrt{3}$ cm.

c) A körülírt kör sugara 5 cm (az AB átfogó fele), a beírt kör sugara pedig $\dfrac{5(\sqrt{3} - 1)}{2}$ cm; a körök területe
$25\pi \approx 78{,}54\ (\text{cm}^2)$, illetve
$\dfrac{25(2 - \sqrt{3})\pi}{2} \approx 10{,}52\ (\text{cm}^2)$.

d) $t_1 = \dfrac{25\pi}{2} \approx 39{,}27\ (\text{cm}^2)$;
$t_2 = \dfrac{25\pi}{3} - \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \approx 15{,}35\ (\text{cm}^2)$;
$t_3 = \dfrac{25\pi}{6} - \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \approx 2{,}26\ (\text{cm}^2)$.



3574. a) Az adott arányoknak megfelelően a háromszög két rövidebb oldala $2x$, illetve $3x$, az általuk a közbezárt szög legyen α.

Alkalmazzuk a trigonometrikus területképletet:

$$\frac{2x \cdot 3x \cdot \sin\alpha}{2} = 3\sqrt{15} \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{\sqrt{15}}{\sin\alpha} \;{}^{*}.$$

Felírjuk a koszinusztételt a leghosszabb ($4x$) oldalra:

$16x^2 = 4x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \cos\alpha$.

Ezt osztjuk $x^2(\neq 0)$-tel és kifejezzük $\cos\alpha$-t: $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$.

Minthogy $\alpha < 180° \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

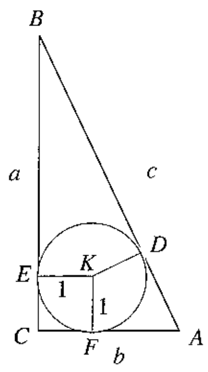
A kapott értéket behelyettesítjük a *-os összefüggésbe, kapjuk:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{\sqrt{15}}{\dfrac{\sqrt{15}}{4}} = 4 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2.$$

A háromszög oldalainak hossza tehát 4; 6 és 8 hosszegység.

b) Minthogy $\cos\alpha < 0$, ezért a háromszög tompaszögű, tehát a háromszög köré írható kör középpontja a háromszögön kívül van.

3575. a) A Thalész-tétel szerint a derékszögű háromszög köré írt kör sugara az átfogó fele, ezért most $c = 6$ cm. Legyenek a kör érintési pontjai az oldalakon D, E, F. Az érintés, illetve a háromszög derékszögű mivolta miatt a $CFKE$ négyszög minden szöge derékszög, két szomszédos oldala (KE, KF) sugárnyi, tehát egyenlő – vagyis e négyszög négyzet: $CE = CF = 1$. Így $AF = b - 1$, $BE = a - 1$, és a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $AD = b - 1$ és $BD = a - 1$ is igaz. Ekkor az átfogó $c = 6 = a - 1 + b - 1$, vagyis $a + b = 8$. Felírva a háromszögre a Pitagorasz-tételt: $a^2 + b^2 = 6^2$. Kifejezve az első összefüggésből: $b = 8 - a$, ezt beírva a másodikba: $a^2 + (8 - a)^2 = 36$.



Rendezve: $2a^2 - 16a + 28 = 0$, aminek gyökei $4 \pm \sqrt{2}$; az ábra mérete szerinti betűzésben: $a = 4 + \sqrt{2} \approx 5{,}41$ (cm) és $b = 4 - \sqrt{2} \approx 2{,}59$ (cm).

b) Természetesen $\gamma = 90°$. Továbbá $\sin\alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$, amiből $\alpha \approx 64{,}47°$ (a visszakeresés egyéb eredményei most nem jöhetnek szóba), a szögösszeg miatt pedig $\beta \approx 25{,}53°$.

c) Derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának fele:

$$T = \frac{(4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})}{2} = \frac{16 - 2}{2} = 7 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Másik megoldás:

Egy háromszög területének a kétszeresét a kerület és a beírható kör sugarának szorzataként is kiszámíthatjuk $2T = (a + b + c) \cdot 1$, mivel $a + b = 8$ és $c = 6$
$2T = 14 \Rightarrow T = 7$ cm^2.

Megjegyzés:

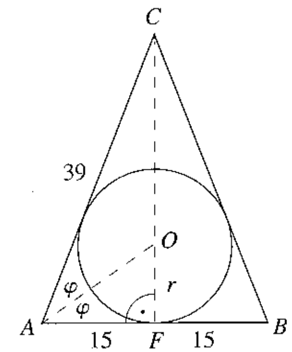
Mint látjuk, *egzaktul* ennyi a terület. Közelítő értékekkel vagy más képletekkel számított *körülbelüli* eredmények nem számíthatnak *teljes értékű* megoldásnak.

3576. A beírt kör középpontja a belső szögfelezők közös pontja. Az AFC derékszögű háromszögből:

$\cos 2\varphi = \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$.

$2\varphi \approx 67{,}38°$, tehát $\varphi \approx 33{,}69°$.

Az AFO derékszögű háromszögből a beírt kör sugara: $r = 15 \cdot \operatorname{tg}\varphi \approx 10$ (cm).



A magasságpont (M) csúcsoktól való távolságát az ábra alapján kiszámíthatjuk így is:

az AFM derékszögű háromszögből:

$$AM = MB = \frac{15}{\cos(90° - 2\varphi)} = \frac{15}{\cos 22{,}62°} \approx 16{,}25 \text{ (cm)}.$$

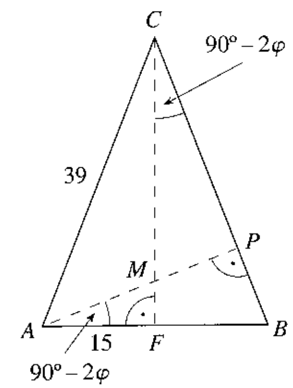
Az AFC derékszögű háromszögből:

$FC = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$ (cm).

Az AFM derékszögű háromszögből:

$MF = 15 \cdot \operatorname{tg}(90° - 2\varphi) = 15 \cdot \operatorname{tg} 22{,}62° \approx 6{,}25$ (cm),

tehát $CM = CF - MF \approx 29{,}75$ cm.

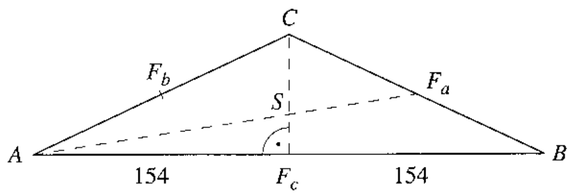


Megjegyzés:

Ha Pitagorasz tételéből vagy hasonlósággal vagy a $T = r \cdot s$ képlet segítségével számítjuk ki a sugarat, pontosan 10 cm-nek adódik.

Az AFM és CFA háromszögek hasonlósága (hasonlóság aránya $\frac{AF}{CF} = \frac{15}{36}$) segítségével is kiszámítható az AM és az MF szakasz hossza, a számolásból kiderül, hogy CM pontosan 29,75 cm, és $AB = BM = 16{,}25$ cm is pontos érték.

3577. a) Felhasználjuk, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalak csúcstól távolabbi harmadoló pontja.



A CF_c súlyvonal a háromszög alapjához tartozó magassága:

$CF_c = \sqrt{170^2 - 154^2} = 72$ (cm).

$SF_c = \frac{1}{3} \cdot CF_c = 24$ (cm).

Az AF_cS derékszögű háromszögből $AS = \sqrt{154^2 + 24^2} \approx 155{,}86$ (cm), tehát

$SF_a = SF_b = \frac{1}{2} \cdot AS \approx 77{,}93$ (cm).

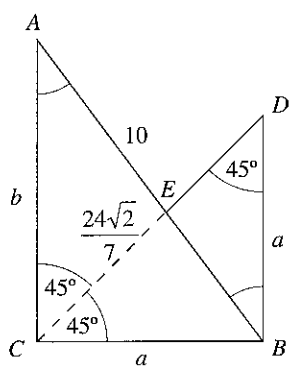
A súlypont az oldalfelező pontoktól 24 cm, illetve 77,93 cm távolságra van.

b) A súlypont oldalaktól való távolsága a megfelelő magasságok harmadával egyenlő. Ezek közül azonnal adódik $SF_c = 24$ cm.

Az ABC háromszög területe $\frac{308 \cdot 72}{2} = 11\,088$ (cm²). A háromszög másik két magassága egyenlő és a terület ismeretében kiszámítható: $m_a = m_b = \frac{2 \cdot 11088}{170} \approx$

$\approx 130{,}45$ (cm). A súlypont a száraktól $\frac{130{,}45}{3} \approx 43{,}48$ (cm) távolságra van.

3578. Vegyük fel a D pontot úgy, hogy a $BCD\,\Delta$ egyenlő szárú, derékszögű legyen, így $AEC\,\Delta \sim BED\,\Delta$ (45°-ok, illetve váltószögek miatt).



Ekkor $\frac{ED}{\frac{24\sqrt{2}}{7}} = \frac{a}{b}$ és $CD = \frac{24\sqrt{2}}{7} + ED$.

Kifejezve ED-t az elsőből és beírva a másodikba:

$CD = \frac{24\sqrt{2}(a+b)}{7b}$. Másrészt viszont a $BCD\,\Delta$-ből

$CD = \sqrt{2}a$; egybevetve a két kifejezést, kapjuk: $24(a + b) = 7ab$ (I). Az eredeti háromszögre a Pita-

gorasz-tétel: $a^2 + b^2 = 100$ (II). Írjuk fel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Felhasználva (I)-et és (II)-t: $(a+b)^2 = 100 + \frac{48}{7}(a+b)$. Ez $(a + b)$-re másodfokú egyenlet, megoldásai: 14, illetve $-7\frac{1}{7}$. Ez utóbbi nyilván értelmetlen. Előbbit beírva (I)-be, $ab = 48$ adódik, ami az $a + b = 14$ feltétellel egyenletrendszert alkotva elvezet a megoldáshoz (az ábra szerinti betűzésben): $a = 6$, $b = 8$.

Megjegyzés:
A $24(a + b) = 7ab$ egyenlethez más módon is eljuthatunk. Állítsunk merőlegest az E pontból a CB oldalra. Legyen a merőleges talppontja K. A CEK háromszög egyenlő szárú derékszögű, tehát befogói $\frac{24}{7}$ hosszúságúak. Az $EBK\,\Delta \sim ABC\,\Delta$, ezért $b : \frac{24}{7} = a : \left(a - \frac{24}{7}\right)$, amelyből átalakításokkal a fenti egyenlethez jutunk.

3579. a) 1) $\beta = \delta$, mert merőleges szárú hegyesszögek.

2) Az $ACD\,\Delta \sim ABC\,\Delta$, mert 2-2 szögük páronként egyenlő (a derékszög és a közös α).

3) A két hasonló háromszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő, ezért $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD$. (Ez az ún. befogótétel.)

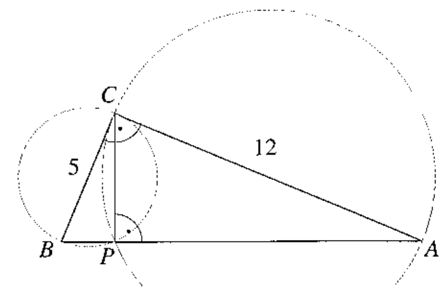
4) Az $ACD\,\Delta \sim CBD\,\Delta$, mert 2-2 szögük páronként egyenlő (a derékszög és $\beta = \delta$, [lásd 1)].

5) A két hasonló háromszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő, ezért $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD$. (Ez az ún. magasságtétel.)

b) Igen, ti. $2T(ABC) = AB \cdot CD = AC \cdot BC$. (Ez csak akkor igaz, ha a két oldal, AC és BC merőleges egymásra, tehát a háromszög derékszögű.)

c) Ismét felírjuk a kétszeres területet kétféleképpen.
$2T(ABC) = AB \cdot CD$, másrészt $2T(ABC) = AC \cdot BC \cdot \sin\gamma$.
Hegyesszögű háromszögnél $\sin\gamma < 1$, ezért $AC \cdot BC \cdot \sin\gamma < AC \cdot BC$.
Tehát hegyesszögű háromszögnél $AB \cdot CD < AC \cdot BC$.

3580. Minthogy az ABC derékszögű háromszög C csúcsból húzott magasság talppontjára fennáll a P-re adott kikötés, ezért P nem más, mint az átfogóhoz tartozó magasság talppontja.



Megjegyzés:
Azon pontok halmaza, amelyekből adott szakasz derékszögben látszik, az adott szakasz fölé rajzolt Thalész-kör (kivéve a szakasz két végpontját). Itt P egyúttal illeszkedik az AC átmérőjű és a BC átmérőjű Thalész-körre.

A Pitagorasz-tétel alapján $AB = 13$.

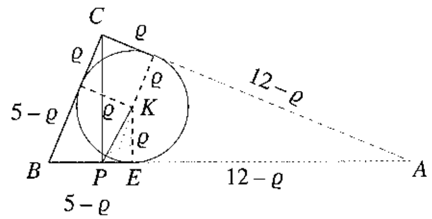
Alkalmazzuk a befogótételt: $13 \cdot BP = 25 \Rightarrow BP = \dfrac{25}{13}$;

$$AP = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13}.$$

A magasságtételből: $CP^2 = AP \cdot BP = \dfrac{144}{13} \cdot \dfrac{25}{13} \Rightarrow (0<)CP = \dfrac{60}{13}$

Tehát P pontnak az $ABC\,\Delta$ csúcspontjaitól való távolsága:

$AP = \dfrac{144}{13}$, $BP = \dfrac{25}{13}$, $CP = \dfrac{60}{13}$.



A háromszögbe írt K középpontú kör ϱ sugarát kiszámíthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért $(5-\varrho)+(12-\varrho)=13 \Rightarrow \varrho = 2$.

Másként is kiszámítható ϱ. Írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen:

egyrészt a $t = \varrho s$, (ahol a háromszög félkerülete $s = \dfrac{a+b+c}{2}$),

másrészt $t = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

Ezekből $\varrho = \dfrac{30}{15} = 2$.

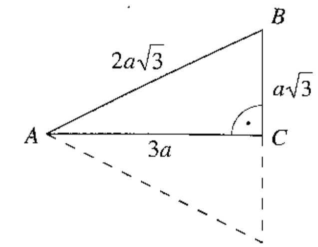
KP kiszámítása a KPE háromszögből: $PE = BE - BP = 3 - \dfrac{25}{13} = \dfrac{14}{13}$.

A $KPE\,\Delta$-re alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$KP^2 = PE^2 + \varrho^2 = \frac{196}{169} + 4 = \frac{872}{169} \Rightarrow KP = \sqrt{\frac{872}{169}} \approx 2{,}27.$$

P pont a kör középpontjától kb. 2,3 cm távolságra van.

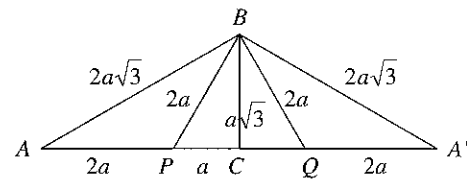
3581. a) A Pitagorasz-tétel megfordításából következik, hogy a háromszög derékszögű, ti. $(a\sqrt{3})^2 + (3a)^2 = (2a\sqrt{3})^2$ teljesül.



Ha ezeket a hosszértékeket osztjuk $\sqrt{3}$-mal, akkor az eredetihez hasonló háromszöget kapunk, melynek oldalai a, $a\sqrt{3}$, $2a$. Mint ismeretes, ez a $2a$ oldalú szabályos háromszög fele. Ezek szerint az ABC háromszög is egy szabályos háromszög fele, tehát szögeinek nagysága 30°, 60° és 90°.

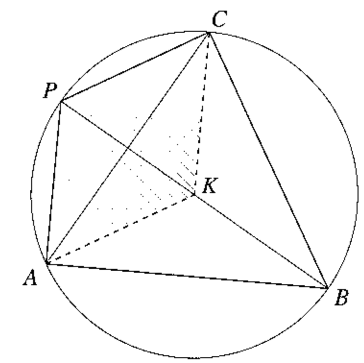
Megjegyzés:
A szögek az ABC háromszögből szögfüggvénnyel is meghatározhatók.

b) A BCP derékszögű háromszög két befogója a és $a\sqrt{3}$, így az átfogó $2a$. $BP = QP$ ezért $BPQ\,\Delta$ oldalai $2a$, $2a$, $2a$, tehát e háromszög szabályos, szögei 60°-osak.



c) Egyenlő szárú háromszögek: $ABA'\,\Delta$, $ABP\,\Delta \cong A'BQ\,\Delta$ és $BPQ\,\Delta$.

3582. a) Egy kör egyenlő íveihez egyenlő húrok tartoznak, így $PA = PC$, ezért az $APC\,\Delta$ egyenlő szárú.



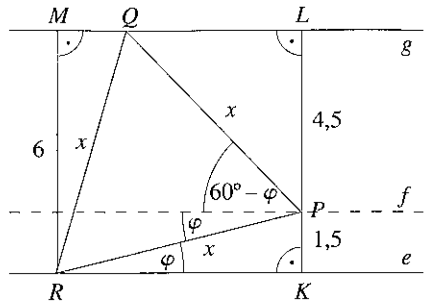
b) A feltételek miatt PB a kör átmérője, ami az AC húr felezőmerőlegese. Ebből adódik, hogy $ABCP$ deltoid, amelynek két szöge Thalész tétele alapján 90°-os. Minthogy $ABC\sphericalangle = 60° \Rightarrow APC\sphericalangle = 120°$.

Másik megoldás:
K a szabályos háromszög középpontja $\Rightarrow AKC\sphericalangle = 120°$.
P az AC ív felezőpontja $\Rightarrow AKP\sphericalangle = 60°$. $AKP\,\Delta$ és $CKP\,\Delta$ szabályos, ezért $APC\sphericalangle = 120°$.

c) $CKP\,\Delta$ és $AKP\,\Delta$ szabályos, együtt, az $AKCP$ rombuszt alkotják.

d) K az ABC szabályos háromszög középpontja, ezért $ABK\,\Delta \cong BCK\,\Delta \cong CAK\,\Delta$.
A rombuszt átlója két egybevágó háromszögre bontja: $ACK\,\Delta \cong ACP\,\Delta$.
Ezekből adódik, hogy az $T(ABCK) = T(AKCP)$.

3583. a) Az ábra szerinti $RKLM$ négyszög téglalap, tehát $RK = LM$.
Az RKP derékszögű háromszögből
$RK = \sqrt{x^2 - 1{,}5^2}$.
Az RMQ, illetve PLQ derékszögű háromszögekből:
$MQ = \sqrt{x^2 - 6^2}$, $LQ = \sqrt{x^2 - 4{,}5^2}$.
$LM = \sqrt{x^2 - 36} + \sqrt{x^2 - 20{,}25}$,



tehát igaz, hogy $\sqrt{x^2 - 36} + \sqrt{x^2 - 20{,}25} = \sqrt{x^2 - 2{,}25}$, ahol $x \geq 6$.

Négyzetre emelve: $x^2 - 36 + x^2 - 20{,}25 + 2\sqrt{(x^2 - 36)(x^2 - 20{,}25)} = x^2 - 2{,}25$.

Rendezve: $2\sqrt{(x^2 - 36)(x^2 - 20{,}25)} = 54 - x^2$ (tehát $6 \leq x \leq \sqrt{54} \approx 7{,}35$).

Újabb négyzetre emelés után: $4(x^4 - 56{,}25x^2 + 729) = x^4 - 108x^2 + 2916$.

A zárójel felbontása után: $4x^4 - 225x^2 + 2916 = x^4 - 108x^2 + 2916$, vagyis $3x^4 - 117x^2 = 0$. Ebből $3x^2(x^2 - 39) = 0$.

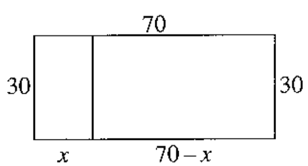
Mivel $x^2 = 0$ nem lehetséges ($x \geq 6$ miatt), ezért $x^2 = 39$, azaz (ismét csak $x \geq 6$ miatt) $x = \sqrt{39} \approx 6{,}245$ cm.

b) Az ábrán φ-vel jelzett szögek váltószögek. A PKR derékszögű háromszögből:
$\sin\varphi = \dfrac{1{,}5}{\sqrt{39}} \approx 0{,}2402$, ezért $\varphi \approx 13{,}90°$.

Az f egyenes a háromszög P-nél fekvő szögét 13,90°, illetve 46,10° nagyságú szögekre bontja.

3584. A szöveg alapján világos, hogy a telket felosztó vonal nem lehet párhuzamos a telek hosszabbik oldalával. Ha a középvonallal osztanák fel a telket, akkor egybevágó részek keletkeznének, más felosztás esetén pedig a két résztéglalap nem lehetne hasonló, hiszen a hosszabbik oldaluk egyenlő hosszúságú lenne. A felosztás tehát csak a hosszabbik oldalra merőleges egyenessel történhet.

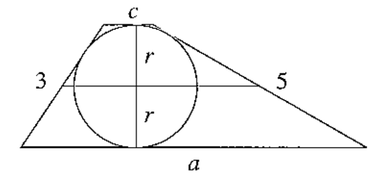
a) A két hasonló résztéglalap megfelelő oldalainak aránya egyenlő:
$\dfrac{x}{30} = \dfrac{30}{70 - x}$, ahol $0 < x < 70$
$x(70 - x) = 900$
$x^2 - 70x + 900 = 0$.
Megoldóképlettel $x \approx 17$, illetve $x \approx 53$ adódik.
A nagyobbik rész tehát egy 53 m × 30 m-es téglalap alakú telek.



Ellenőrzés:
A kisebbik telek 30 m × 17 m-es téglalap. A két résztelek hosszabbik oldalainak aránya $\dfrac{53}{30} \approx 1{,}77$, rövidebbik oldalaik aránya $\dfrac{30}{17} \approx 1{,}77$. A két telek tehát valóban hasonló.

b) W-ék telke esetén az a)-ban felírthoz hasonló $\dfrac{y}{40} = \dfrac{40}{70 - y}$ egyenlethez jutunk ($0 < y < 70$). Ebből $y^2 - 70y + 1600 = 0$ adódik. Ennek a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása, tehát W-ék telke nem osztható fel két hasonló, de nem egybevágó téglalapra.

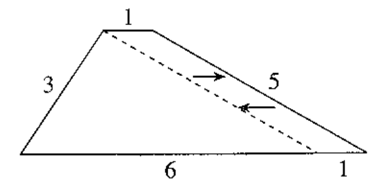
3585. a) Legyenek a trapéz alapjai a és c, ekkor középvonala $\dfrac{a+c}{2}$. Mivel van beírható köre, magassága $2r$ (≤ 3). A középvonal által létrehozott két trapéz mindegyikének r a magassága, közülük a kisebb (az ábrán felső)



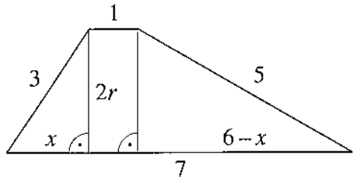
területe $\dfrac{c + \dfrac{a+c}{2}}{2} r = \dfrac{a + 3c}{2} r$, a nagyobbé (alsóé) pedig $\dfrac{\dfrac{a+c}{2} + a}{2} r = \dfrac{3a + c}{2} r$.

Ezek aránya $5:11$, azaz (egyszerűsítés után): $\dfrac{a + 3c}{3a + c} = \dfrac{5}{11}$. Ebből keresztbeszorzás és rendezés után $a = 7c$. Mivel a trapéznek van beírt köre, ezért ez egy érintőnégyszög, tehát szemközti oldalainak összege egyenlő: $3 + 5 = a + c$. (Ha nem ismerjük az érintőnégyszögek tételét, ez az eredmény mindössze plusz egy sor beiktatásával akkor is könnyen megkapható, a körhöz külső pontokból – nevezetesen a trapéz csúcsaiból – húzott érintőszakaszok egyenlőségének felírásával.) Beírva a kifejezését: $8 = 8c$, azaz $c = 1$ cm és $a = 7$ cm.

b) *Szerkesztés:*
Ha az egyik szárat (képzeletben) eltoljuk a rövidebb alap mentén annak másik végpontjába, akkor a két szár és az alapok különbsége egy háromszöget alkot, amelyet könnyen megszerkeszthetünk ($7 - 1 = 6$, 5, 3 oldalakkal). Ezután az alappal párhuzamost húzunk a háromszög harmadik csúcsán át, erre felmérjük az 1 egységnyi rövidebb alapot, és a (képzeletben) eltolt szárat visszatoljuk.



c) A trapéz rövidebb alapjának végpontjaiból merőlegeseket bocsátva a hosszabbik alapra, e magasságok és a szárak révén két derékszögű háromszöget kapunk. A hosszabbik alapra illeszkedő befogóik legyenek az ábra szerint x, illetve $6-x$. Felírva mindkét háromszögre a Pitagorasz-tételt:



$(2r)^2 + x^2 = 3^2$,

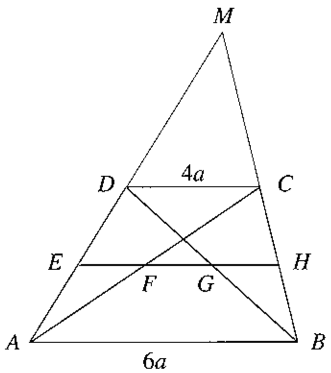
$(2r)^2 + (6-x)^2 = 5^2$.

Kivonva a második egyenletből az elsőt: $36 - 12x = 16 \Rightarrow 20 = 12x$ és $x = \frac{5}{3}$.

Ezt visszaírva az első Pitagorasz-tételbe: $4r^2 + \frac{25}{9} = 9$, amiből $r^2 = \frac{56}{36} = \frac{14}{9}$.

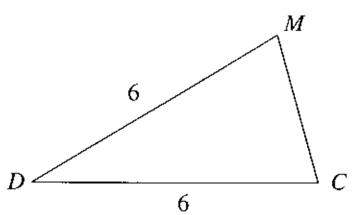
Gyökvonás után $r = \frac{\sqrt{14}}{3} \approx 1,247$ (cm).

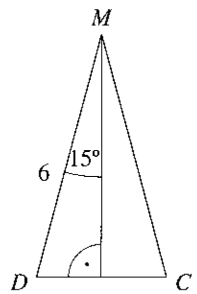
3586. a) EH az $ABCD$ trapéz középvonala, ezért $EH = \frac{4a+6a}{2} = 5a$.
EF, illetve GH az $ACD\,\Delta$, illetve a $BCD\,\Delta$ középvonala, ezért
$EF = 2a$, $GH = 2a$,
$FG = EH - (EF + GH) = a$.
A trapéz középvonalából kimetszett szakaszok hossza $2a$, a, $2a$.

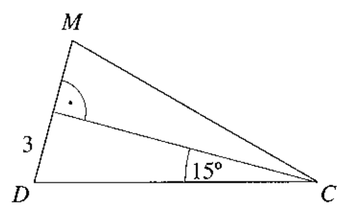


b) $AD = 3$. Minthogy az $ABM\,\Delta \sim DCM\,\Delta$, ezért felírható
$\frac{MD}{4a} = \frac{MD+3}{6a} \Rightarrow MD = 6$ cm.

c) A kiegészítő háromszög háromféleképen lehet egyenlő szárú:
1) $MD = DC$; 2) $MD = MC$; 3) $MC = DC$.





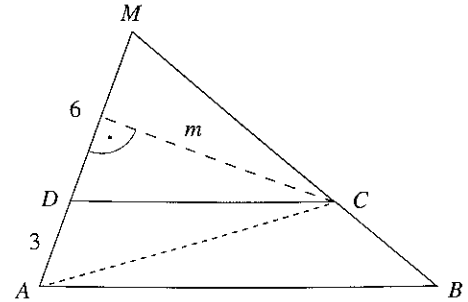


1) $DC = 6$ cm

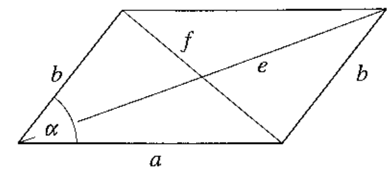
2) $\frac{1}{2}DC = 6 \cdot \sin 15° \Rightarrow DC = 12 \cdot \sin 15° \approx 3,1$ (cm)

3) $\sin 15° = \frac{3}{DC} \Rightarrow DC = \frac{3}{\sin 15°} \approx 11,6$ (cm).

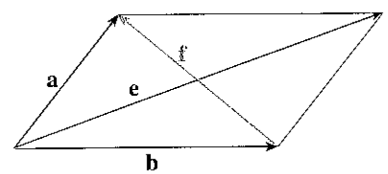
d) Minthogy $AD = 3$ cm és $DM = 6$ cm, továbbá az $ADC\,\Delta$ és az $MDC\,\Delta$ C csúcshoz tartozó magassága azonos, a két háromszög területének aránya egyenlő AD és DM arányával, azaz
$T(ACD) : T(DCM) = 1 : 2$.



3587. Ha adott egy paralelogramma két oldala és egy átlója, akkor a másik átlót egy koszinusztétellel tudjuk kiszámolni. Jelöljük az oldalak hosszát a és b, az átlókét e, f betűkkel. Ha a paralelogramma ábrán is jelölt szöge α, akkor az egyik átlóra a koszinusztételből azt kapjuk, hogy: $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$. A másik átlóra: $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$. Összeadva a két egyenletet egy nevezetes, a paralelogrammára vonatkozó összefüggést kapunk: $e^2 + f^2 = = 2a^2 + 2b^2$. (Ezt tételként is megfogalmazhatjuk. „A paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetének összegével." Aki a tételt tudja, alkalmazhatja, nem muszáj levezetnie.) Ebből, ha adott e, a, b, akkor $f^2 = 2a^2 + 2b^2 - e^2$, és ebből a pozitív négyzetgyök az átló hossza. Természetesen csak akkor létezik ilyen paralelogramma, ha a jobb oldal pozitív.

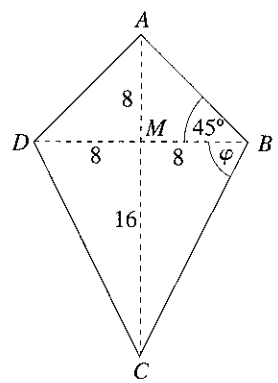


3588. Erre a jól ismert feladatra többféle megoldás adható (pl. koszinusztételekkel, lásd az előző feladat megoldását!), most egy vektorokat felhasználót mutatunk. Legyenek a paralelogramma oldalvektorai az ábra szerint **a** és **b**, ekkor az átlóvektorok **e** = **a** + **b** és **f** = **a** – **b**. Mivel egy vektor önmagával való skaláris szorzata egyúttal a hosszának négyzete is, ezért a feladat átfogalmazva: bizonyítandó, hogy $2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2 = \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2$.



Felhasználva, hogy vektorok skaláris szorzata disztributív a vektorok összeadására és kivonására nézve: $\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$, ami összevonások után éppen a kívánt $2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2$ kifejezéssel egyenlő.

3589. a) $t = \dfrac{24 \cdot 16}{2} = 192$ (cm²).



b) *BAD* egyenlő szárú derékszögű háromszög, a *DB* átlót az *AC* merőlegesen felezi. *AMB* és *AMD* tehát szintén egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $AM = MB = MD = 8$ cm és így $MC = 16$ cm.

$AB = AD = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31$ (cm),

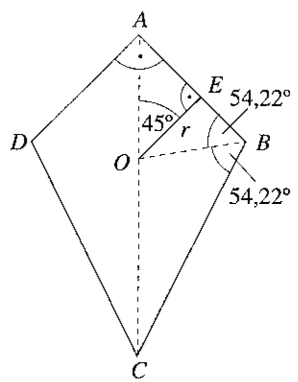
$BC = DC = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5} \approx 17{,}89$ (cm).

c) A *BMC* derékszögű háromszögből:

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{16}{8} = 2$, tehát $\varphi \approx 63{,}43°$.

$ABC\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 45° + \varphi \approx 108{,}43°$, $BCD\sphericalangle = 180° - 2\varphi \approx 53{,}14°$.

d) A deltoid beírt körének *O* középpontját a szimmetriatengelyen például az $ABC\sphericalangle$ szögfelezőjével metszhetjük ki. A beírt kör sugarát jelöljük *r*-rel. Az *E* érintési pontba vezető sugarat megrajzolva az *AOB* háromszöget két derékszögű háromszögre bonthatjuk. *AEO* egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $AE = r$. A *BEO* háromszögből $BE = r \cdot \operatorname{ctg} 54{,}22°$, tehát $AB = r + r \cdot \operatorname{ctg} 54{,}22°$.



A b) részből tudjuk, hogy $AB = 8\sqrt{2}$, tehát

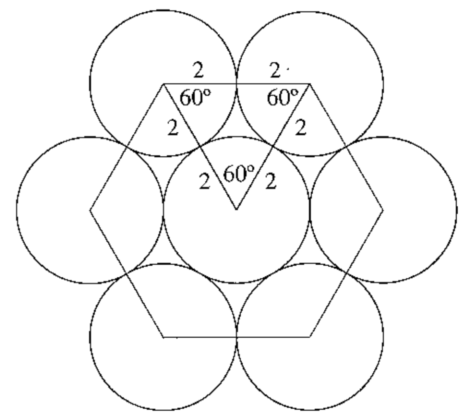
$r \cdot (1 + \operatorname{ctg} 54{,}22°) = 8\sqrt{2}$, amiből $r \approx 6{,}58$ cm.

Megjegyzés:

Az érintősokszögekre (így a konvex deltoidokra is) érvényes a háromszögeknél megismert képlet a beírt kör sugarára.

Ezzel számolva $r = \dfrac{T}{s} = \dfrac{192}{8\sqrt{2} + 8\sqrt{5}} = \dfrac{192}{29{,}20} \approx 6{,}58$ (cm).

3590. a) A hetedik kör sugara is 2 cm.



b) A hatszög csúcsai körül írt körlapok egy harmada fedi le a hatszög egy részét, összesen tehát 2 teljes körlap területével megegyező területű darabot. A hetedik körlappal együtt ezért 3 egész körlapnyi részt fednek le a hatszögből.

A hatszög területe

$6 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \approx 41{,}57$ cm²,

három körlap területe pedig

$3 \cdot 2^2\pi = 12\pi \approx 37{,}70$ cm².

A lefedetlen terület tehát 3,87 cm², ami a hatszög területének $\dfrac{3{,}87}{41{,}57} \approx 0{,}0931$ része, azaz 9,31%-a.

c) A minta elkészíthető úgy is, hogy a 4 m×75 m-es téglalapot 4 cm oldalhosszúságú szabályos hatszögekkel parkettázzuk, majd a hatszögek csúcsai körül 2 cm sugarú köröket rajzolunk, végül mindegyik hatszög belsejében még egy, másik hat kört érintő, 2 cm sugarú kört. A b)-ben kiszámítottak szerint mindegyik hatszög területének kb. 90,7%-át fedik le a körök, így a téglalap területének is kb. 90,7%-át kell befesteni.

$0{,}907 \cdot 4 \cdot 75 = 272{,}1$ ezért a pöttyös minta elkészítéséhez kb. 273 m² terület befestéséhez szükséges festékmennyiséget kell beszerezni.

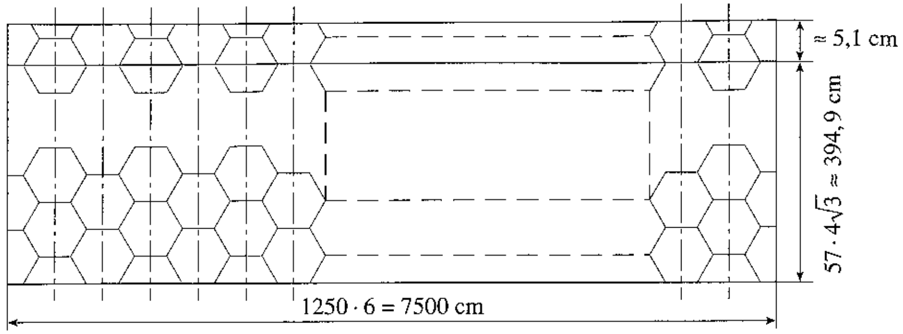
Megjegyzés:

Azt gondoljuk, hogy a fenti következtetés gyakorlati szempontból kielégítő eredményre vezet, miközben tudjuk, hogy a megadott téglalap nem parkettázható (tökéletesen) 4 cm oldalú szabályos hatszögekkel. Azt is „érezzük" azonban, hogy ha elég ügyesen tervezünk, akkor csupán a téglalap széleinél adódhatnak „töredék pöttyök". Ez nem befolyásolja a festett anyag felhasználhatóságát, hiszen a szabás folyamán várhatóan amúgy is „töredék pöttyök" keletkeznek).

Kicsit több munkával bizonyíthatjuk is, hogy elegendő 273 m² befestéséhez festéket beszerezni.

Az alábbi ábrán a 4 cm oldalú szabályos hatszögek csúcsai egy-egy kör (pötty) középpontját jelölik. Minden egyes teljes hatszögből 3 körlapnyi területet ($3 \cdot 2^2\pi \approx 37{,}70$ cm²) kell befesteni.

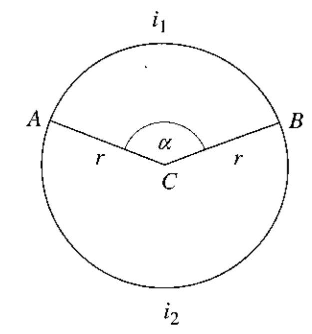
Az elhelyezhető hatszögek száma (és így a befestendő terület) némi számolással megállapítható (a számolásnál két fél-hatszöget, illetve négy negyed-hatszöget egy-egy egész hatszögnek számítva). A 75 méter hosszú („vizszintes") oldal mentén az ábra szerint 1250 darab 6 cm széles „függőleges" sáv hozható létre, a „függőleges" oldal mentén pedig $\left[\frac{400}{4\sqrt{3}}\right] = 57$ darab, egyenként $4\sqrt{3} \approx 6,93$ (cm) széles, vízszintes" sáv (a legfelső, 57. sáv „felső" határát az ábrán piros vonal jelzi).



Minden egyes 6 cm széles „függőleges" sáv a piros vonalig 57 teljes hatszöggel parkettázható $(57 \cdot \frac{1}{2} + 56 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 57)$, tehát az 1250 darab „függőleges" sáv összesen $1250 \cdot 57 = 71250$ darabbal.
A piros vonal feletti, kb. 5,1 cm széles sávban még 1250 db „fél" hatszög (ezek magassága $2\sqrt{3} \approx 3,46$ cm), azaz további 625 egész hatszög fér el.
Így a 75 m × 4 m-es anyagon biztosan elhelyezhető $71250 + 625 = 71875$ db teljes hatszög. A még figyelembe nem vett rész egy 75 méter hosszú, legfeljebb 1,7 cm széles sáv. Ennek akár a teljes befestéséhez is elegendő $75 \cdot 0,017 \approx$ $\approx 1,28$ m²-re való festék. Mivel a hatszögek belsejéből $71875 \cdot 3 \cdot 0,02^2\pi \approx$ $\approx 270,96$ m²-nyi területet kell befesteni, ezért a pöttyös anyag elkészítéséhez elegendő $1,28 + 270,96 = 272,24$ m²-re való festéket beszerezni. Ez pedig gyakorlatilag a jóval rövidebb úton kapott eredményünket adja.
A vázolt gondolatmenetből világos, hogy a gyakorlati közelítés akkor használható, ha a pöttyök átmérője a befestendő anyag méreteihez viszonyítva „kicsi". Ekkor a teljes hatszögek összeszámlálása után megmaradó rész (ami a fenti számolás során egy 1,7 cm szélességű sáv volt) területe a teljes területhez viszonyítva nem jelentős.
Ha azonban például 2 méter átmérőjű „óriáspöttyökkel" akarnánk mintázni a megadott méretekkel rendelkező anyagot, akkor az alkalmazott „gyakorlati" számítás már pontatlan eredményre vezetne (több négyzetméteres eltérést eredményezne).

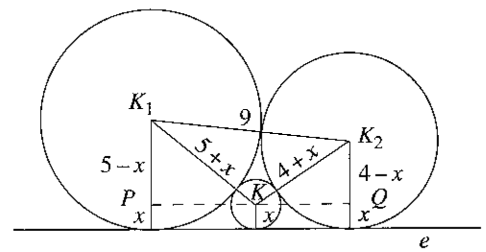
d) Nincs igaza. Mindkét esetben a teljes anyagfelületnek kb. 90,7%-át kell befesteni.

3591. Az ábra szerint jelölje a keresett ACB középponti szöget α, a kör sugarát r, az ívek hosszát i_1 és i_2.

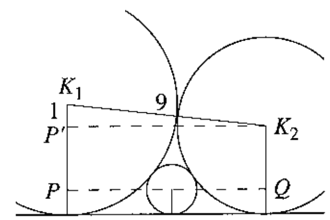


A feladat szövege szerint $i_2^2 = 2r\pi i_1$. Felhasználva, hogy $i_1 = r\alpha$ és $i_2 = r(2\pi - \alpha)$, azt kapjuk, hogy
$r^2(2\pi - \alpha)^2 = 2r\pi \cdot r\alpha$.
Egyszerűsítés után: $(2\pi - \alpha)^2 = 2\pi\alpha$, amiből az
$\alpha^2 - 6\pi\alpha + 4\pi^2 = 0$ másodfokú egyenletre jutunk.
Ebből $\alpha = (3 + \sqrt{5})\pi$, illetve $\alpha = (3 - \sqrt{5})\pi$ adódik.
Mivel $\alpha < 2\pi$, ezért csak a második eset lehetséges,
azaz $\alpha = (3 - \sqrt{5})\pi \approx 0,7639\pi$, ami kb. 137,5°-nak felel meg.

3592. Jelöljük x-szel a keresett sugarat. A körök középpontjából állítsunk merőlegest az e egyenesre és a legkisebb kör K középpontján keresztül húzzunk párhuzamost e-vel. Ennek az ábrán látható PQ szakaszát vizsgálva:



$PQ = PK + KQ$.
Használjuk fel, hogy az egymást kívülről érintő körök középpontjainak távolsága a körök sugarának összegével egyenlő.
Így a K_1PK derékszögű háromszögből $PK = \sqrt{(5+x)^2 - (5-x)^2} = \sqrt{20x}$, a K_2QK háromszögből $KQ = \sqrt{(4+x)^2 - (4-x)^2} = \sqrt{16x}$ adódik.
Másrészt a PQK_2K_1 derékszögű trapéz derékszögű szárát az ábra szerint eltolva, a $K_1P'K_2$ derékszögű háromszögből $P'K_2 = PQ = \sqrt{9^2 - 1^2} = \sqrt{80}$.



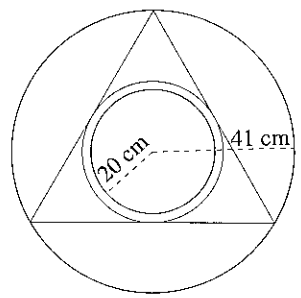
Igaz tehát, hogy $\sqrt{20x} + \sqrt{16x} = \sqrt{80}$.
A bal oldalon $\sqrt{x}$ kiemelhető:
$(\sqrt{20} + \sqrt{16})\sqrt{x} = \sqrt{80}$
$(2\sqrt{5} + 4)\sqrt{x} = 4\sqrt{5}$
$(\sqrt{5} + 2)\sqrt{x} = 2\sqrt{5}$
Mindkét oldalt $\sqrt{5} - 2$-vel megszorozva: $(5 - 4)\sqrt{x} = 2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)$, vagyis $\sqrt{x} = 10 - 4\sqrt{5}$, tehát $x = (10 - 4\sqrt{5})^2 = 180 - 80\sqrt{5} \approx 1,115$ (cm).

3593. a) Az első napon egy r sugarú körlap alakú területről legelt a kecske, a második napon egy olyan körgyűrű alakú részről, amelynek határkörei r, illetve k_1r sugarú körök, harmadnap pedig egy olyan körgyűrű alakú részről, amelynek határkörei k_1r, illetve k_2r sugarú körök ($k_2 > k_1 > 1$).

A szöveg szerint $(k_1r)^2\pi = 2r^2\pi$ és $(k_2r)^2\pi = 3r^2\pi$.

Ebből $k_1 = \sqrt{2}$ és $k_2 = \sqrt{3}$, tehát a második napon $\sqrt{2}$-ször, a harmadik napon $\sqrt{3}$-szor olyan hosszú kötelet kell választani, mint az első napon.

b) Igen, lehet.



A 41 cm sugarú körbe írható szabályos háromszög magassága $\frac{3}{2} \cdot 41 = \frac{123}{2}$ (cm), ebbe a háromszögbe írt kör sugara $\frac{1}{2} \cdot 41 = \frac{41}{2} = 20,5$ (cm). A szabályos háromszög oldalának tehát nincs közös pontja az előbbi két körrel koncentrikus, 20 cm sugarú körrel.

A szabályos háromszög oldala $\frac{123}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 41\sqrt{3} \approx 71,0$ (cm) hosszú.

c) $r, R > 0$

$$(R^2 - r^2)\pi = \frac{2}{3}r^2\pi$$

$$R^2 = \frac{5}{3}r^2$$

$$\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Tehát $R : r = \sqrt{5} : \sqrt{3} \approx 1,29$.

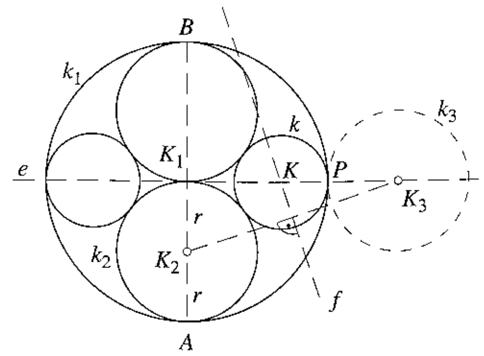
d) Az eredeti körök sugara r és $2r$, a közöttük lévő körgyűrű területe $3r^2\pi$.

Megváltoztatásuk után a sugarak: $0,7r$ és $2,4r$, az új körgyűrű területe pedig $(2,4r)^2\pi - (0,7r)^2\pi = 5,27r^2\pi$.

$\frac{5,27r^2\pi}{3r^2\pi} \approx 1,757$, tehát kb. 75,7%-kal nőtt a körgyűrű területe.

3594. a) A legnagyobb kör egyik átmérőjén megszerkesztjük a felezőponttól különböző két negyedelő pontot. A körök sugara a legnagyobb kör átmérőjének negyede.

b) A szerkesztés menete:

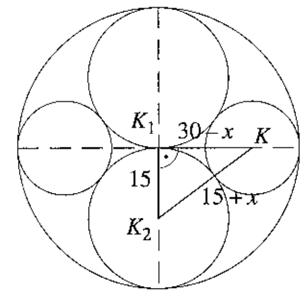


- A K_1 középpontú legnagyobb kör (k_1) egy AB átmérőjének megszerkesztése;
- AB felezőmerőlegese (e);
- K_1A felezőpontja (K_2);
- r sugarú kör a P pont körül $\Rightarrow K_3$ ($r := K_1K_2$, P a k_1 és az e közös pontja);
- K_2K_3 felezőmerőlegese (f);
- e és f metszéspontja (K) a keresett érintőkör (k) középpontja;
- KP sugarú kör.

Indoklás:

A szerkesztendő legkisebb kör a k_1-et P-ben érintő körök mindegyikét érinti. Mivel a K_3 középpontú, r sugarú segédkör (k_3) egybevágó a k_2 körrel, ezért a mindkettőjüket érintő körök középpontja a K_2K_3 felezőmerőlegesén helyezkedik el. A keresett érintőkör középpontja a szimmetria miatt az e egyenesen is rajta van, így csak az e és f egyenesek metszéspontja lehet.

d) Jelöljük a legkisebb kör sugarát x-szel. Az érintkező körök középpontjainak távolságáról tanultak felhasználásával adódik, hogy a KK_1K_2 derékszögű háromszögben



$KK_1 = 30 - x$ és

$KK_2 = 15 + x$.

Pitagorasz-tétellel:

$(15 + x)^2 = (30 - x)^2 + 15^2$.

Elvégezve a négyzetre emeléseket:

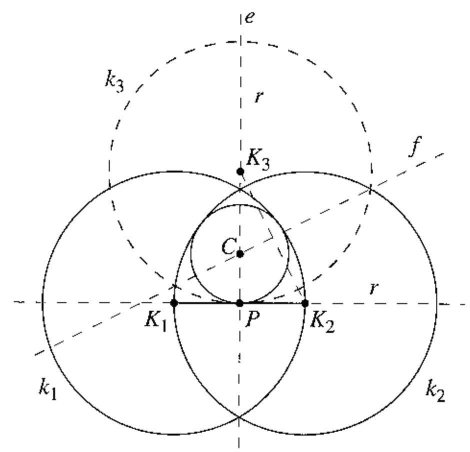
$225 + 30x + x^2 = 900 - 60x + x^2 + 225$

$90x = 900$

$x = 10$

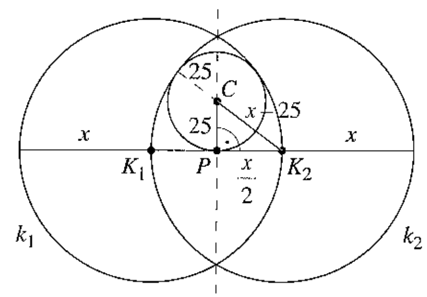
A legkisebb körök sugara tehát 10 cm.

3595. a) A szerkesztés menete:
- K_1K_2 felezőmerőlegese (e);
- mérjük fel az r-et az e-re P-ből $\Rightarrow K_3$;
- K_2K_3 felezőmerőlegese (f);
- e és f metszéspontja (C) a keresett érintőkör középpontja;
- CP sugarú kör.



b) Indoklás:
A szerkesztendő kör a K_1K_2 egyenesét P-ben érintő körök mindegyikét érinti. Mivel a K_3 középpontú, r sugarú segédkör (k_3) egybevágó a k_2 körrel, ezért a mindkettőjüket érintő körök középpontja a K_2K_3 felezőmerőlegesén helyezkedik el. A keresett érintőkör középpontja a szimmetria miatt az e egyenesen is rajta van, így csak az e és f egyenesek metszéspontja lehet.

d) Jelöljük az érintőkörök sugarát x-szel. A CPK_2 derékszögű háromszögben $CK_2 = x - 25$, mert a 25 cm sugarú kör belülről érinti a k_2 kört; $CP = 25$, mert a 25 cm sugarú kör érinti K_1K_2 egyenesét; $K_2P = \frac{x}{2}$, mert P felezi a K_1K_2 szakaszt.



Pitagorasz-tétellel:

$$(x-25)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 25^2.$$

Elvégezve a négyzetre emeléseket:

$$x^2 - 50x + 625 = \frac{x^2}{4} + 625$$

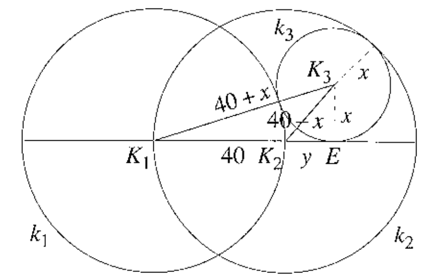
$$\frac{3}{4}x^2 - 50x = 0$$

Mivel $x > 0$, ezért $\frac{3}{4}x - 50 = 0$, vagyis $x = \frac{200}{3}$.

Az érintő körívek sugara tehát $\frac{200}{3} \approx 66,67$ cm.

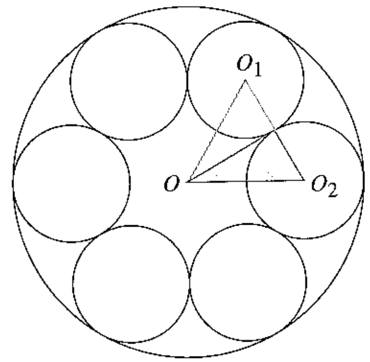
3596. A két legkisebb kör sugara a 3595. d) feladat megoldásában leírtak szerint a legnagyobbakénak éppen $\frac{3}{8}$-a, tehát $\frac{3}{8} \cdot 40 = 15$ cm.

A négy egybevágó, középső méretű kör sugarának meghatározásához készítsünk ábrát.

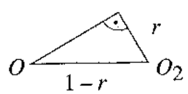


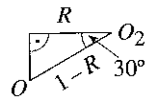
A körközéppontok K_1, K_2 és K_3, K_1K_2 egyenesét E-ben érinti a k_3 kör, melynek sugara x. Legyen $y := K_2E$.
A K_1EK_3 derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:
$\sqrt{(40+x)^2 - x^2} = 40 + y$, a K_2EK_3 derékszögű háromszögből ugyancsak Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{(40-x)^2 - x^2} = y$.
E két egyenletből következik, hogy $\sqrt{(40+x)^2 - x^2} = 40 + \sqrt{(40-x)^2 - x^2}$.
A négyzetre emelések és összevonások elvégzése után:
$\sqrt{80x + 1600} = 40 + \sqrt{1600 - 80x}$. Mindkét oldalt 4-gyel osztva:
$\sqrt{5x + 100} = 10 + \sqrt{100 - 5x}$.
Elegendő a]0; 20] halmazon keresni az egyenlet megoldását, hiszen a többi esetben az egyenletnek nyilvánvalóan nincs megoldása.
A négyzetre emelés ezen a halmazon ekvivalens átalakítás:
$100 + 5x = 100 + 100 - 5x + 20 \cdot \sqrt{100 - 5x}$
$x - 10 = 2 \cdot \sqrt{100 - 5x}$.
A 10-nél kisebb pozitív számok egyike sem lehet megoldása az egyenletnek, mert ekkor a bal oldalon negatív szám áll, a jobb oldalon pedig egy pozitív szám. Elegendő tehát a megoldást a [10, 20] halmazon keresni. Ezen a halmazon a négyzetre emeléssel kapott egyenlet ekvivalens az előzővel:
$x^2 - 20x + 100 = 4(100 - 5x)$
$x^2 = 300$
$|x| = 10\sqrt{3}$, s mivel a megoldás pozitív, ezért csak $x = 10\sqrt{3}$ lehet igaz
(és $10 \le 10\sqrt{3} \le 20$ is teljesül).
A négy középső méretű kör sugara tehát $10\sqrt{3} \approx 17,32$ (cm).

3597. Két egymást érintő kör középpontja és az érintési pont egy egyenesre (a két kör centrálisára) illeszkedik.



a) Az $OO_1O_2\,\Delta$ két oldala $OO_1 = OO_2 = 1 - r$, szárszöge 60°-os, tehát e háromszög szabályos. Ezért $O_1O_2 = OO_2 \Rightarrow 2r = 1 - r \Rightarrow$ $r = \frac{1}{3}$.





b) Az O középpontú $O_1O_2O_3\,\Delta$ szabályos.

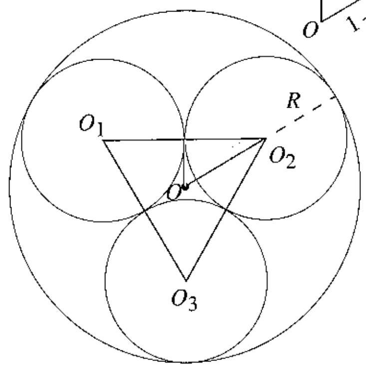
$OO_2 = 1 - R$

$$OO_2 = \frac{R}{\cos 30°} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

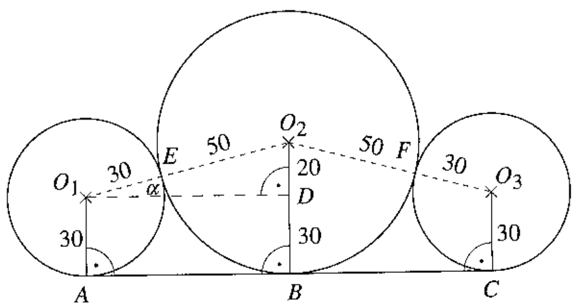
$$1 - R = \frac{2}{\sqrt{3}}R \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

A nevezőt gyöktelenítjük, a belső érintőkörök sugara: $R = 2\cdot\sqrt{3} - 3$.



3598. Két egymást érintő kör középpontja és az érintési pont egy egyenesre (a centrálisra) illeszkedik. Állítsunk merőlegest a körök középpontjából az egyenesre! A keletkezett AO_1O_2B, illetve BO_2O_3C négyszög trapéz, amelynek alapjai $r = 30$ cm, $R = 50$ cm, szárai $r + R = 80$ cm, illetve a trapéz AB, illetve BC magassága, amely az O_1O_2D derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján számítható ki.



$O_1D^2 + 20^2 = 80^2 \Rightarrow O_1D \approx 77{,}46.$

Ugyancsak az O_1O_2D derékszögű háromszögből:

$\sin\alpha = \frac{20}{80} \Rightarrow \alpha \approx 14{,}48° \Rightarrow O_2O_1A\sphericalangle = 90° + \alpha \approx 104{,}48°.$

A vízszintes elem és a két (kis és nagy) kör közötti szabad falfelület a keresett területnek a fele, ennek meghatározásához az AO_1O_2B trapéz és az AO_1E, illetve EO_2B körcikkek területének kiszámítására van szükség.

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(30+50)\cdot 77{,}46}{2} \approx 3098;\ T(AO_1E) = \frac{30^2\pi}{360}\cdot 104{,}48 \approx 820{,}58;$$

$$T(EO_2B) = \frac{50^2\pi}{360}\cdot(180 - 104{,}48) \approx 1647{,}59$$

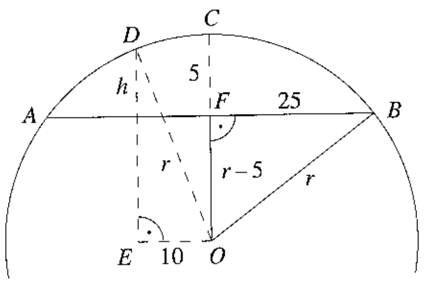
A vízszintes elem és a három (két kicsi és egy nagy) kör közötti szabad falfelület területe a keresett terület.

$2\{T(AO_1O_2B) - [T(AO_1E) + T(EO_2B)]$, azaz

$2\cdot[3098 - 2468] = 1260.$

Tehát a szabadon maradt falfelület területe kb. 1260 cm^2.

3599. Készítsünk (erősen torzított) ábrát!
A körív középpontja O, a híd tetőpontja C.



a) Az OFB derékszögű háromszögből:

$(r-5)^2 + 25^2 = r^2$

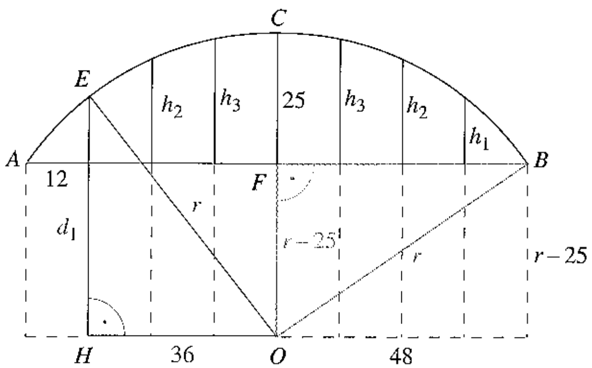
$-10r + 650 = 0$

$r = 65$

A körív sugara 65 méter.

b) Ha a hídnak a főút széle fölötti D pontja h távolságra van az úttesttől, akkor a kamionok biztonságos áthaladásához $h > 4$ (méter) szükséges.
Az OED derékszögű háromszögben $DE = r - 5 + h = 60 + h$,
tehát a Pitagorasz-tétel szerint $(60+h)^2 = r^2 - 10^2$,
amiből (felhasználva, hogy $r = 65$ és $60 + h > 0$) $60 + h = \sqrt{4125} \approx 64{,}2.$
Tehát $h \approx 4{,}2$ méter, így nincs szükség korlátozó táblákra.

3600. Számítsuk ki először a körív sugarát!
Az OFB derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint:
$(r-25)^2+48^2=r^2 \Rightarrow$
$r\approx 58,58 \Rightarrow$
$r-25\approx 33,58$ (m)
Jelöljük a legrövidebb tartóoszlop hosszát h_1-gyel (ábra)! Az EHO derékszögű háromszögben:

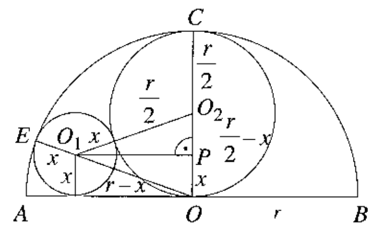


$d_1^2=r^2-36^2 \Rightarrow d_1\approx 46,21$ (m), tehát az első felfüggesztő oszlop hossza: $h_1=d_1-(r-25)\approx 12,63$ (m).

3601. a) Legyen x a keresett kis kör sugara. Két egymást érintő kör középpontja és az érintési pont egy egyenesre (a centrálisra) illeszkedik. Így

$O_1O_2=\frac{r}{2}+x;\ OO_1=r-x;$

$PO_2=\frac{r}{2}-x.$



Az O_1PO_2, illetve O_1PO derékszögű háromszögekben Pitagorasz tétele szerint:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{r}{2}+x\right)^2&=\left(\frac{r}{2}-x\right)^2+O_1P^2\\(r-x)^2&=x^2+O_1P^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(\frac{r}{2}+x\right)^2-\left(\frac{r}{2}-x\right)^2=(r-x)^2-x^2$$

$2rx=r^2-2rx$

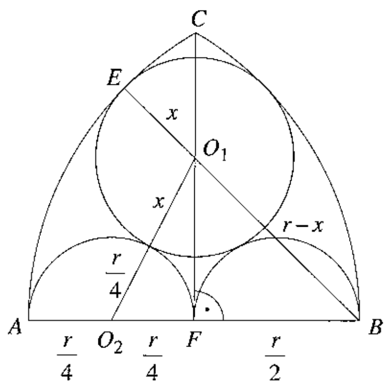
$4rx=r^2$

$\Rightarrow x=\frac{r}{4}$ a keresett kör sugara.

b) Legyen x a keresett kör sugara. Két egymást érintő kör középpontjai és az érintési pont egy egyenesre illeszkedik. Így

$O_1O_2=\frac{r}{4}+x;\ BO_1=r-x;$

$FO_2=\frac{r}{4};\ FB=\frac{r}{2}.$



Az O_1FO_2, illetve O_1FB derékszögű háromszögekben Pitagorasz tétele szerint

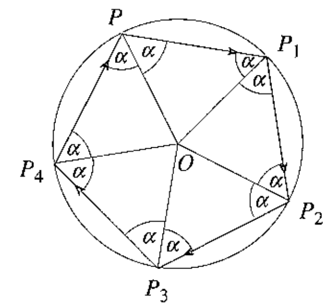
$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{r}{4}+x\right)^2&=\left(\frac{r}{4}\right)^2+FO_1^2\\(r-x)^2&=\left(\frac{r}{2}\right)^2+FO_1^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(\frac{r}{4}+x\right)^2-\left(\frac{r}{4}\right)^2=(r-x)^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$\frac{r}{2}x=\frac{3}{4}r^2-2rx$

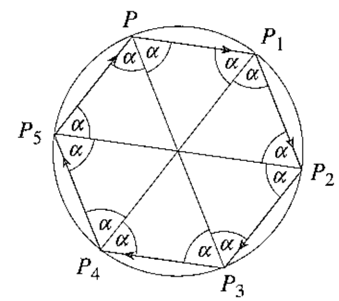
$\frac{5}{2}x=\frac{3}{4}r$

$x=\frac{3}{10}r$ a keresett kör sugara.

3602. a) és b) A sokszög szabályos, mert a tükrözés szabálya szerint a beesési és visszaverődési szög egyenlő (lásd az ábrát), emiatt – felhasználva, hogy mindegyik háromszög szára a kör sugara, tehát egyenlő szárúak – az összes jelölt szög egyenlő. Ezért, mivel az ötszög szögösszege 540°, egy szöge $\frac{540}{5}=108$ fokos.

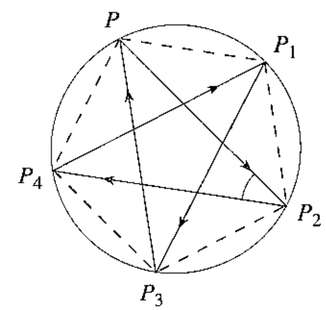


c) Hatszöget, amely hasonló gondolatmenet alapján szabályos, így egy szöge 120°.



d) Az ábrán látható ún. csillag ötszöget kapjuk. Az ábra szerint az öt csúcs a körön ugyanott van (egybevágó ötszög az első ábrával), de míg az első ábrán a fénysugár az oldalak mentén, a második esetben átlók mentén halad. Az a) szerint $P_1P_2P_3\sphericalangle=108°$. A PP_1P_2, $P_1P_2P_3$ és $P_2P_3P_4$ egybevágó egyenlő szárú háromszögek.

$PP_2P_1\sphericalangle=P_4P_2P_3\sphericalangle=\frac{180°-108°}{2}=$
$=36°$, így $PP_2P_4\sphericalangle=$
$=P_1P_2P_3\sphericalangle-2\cdot PP_2P_1\sphericalangle=36°.$



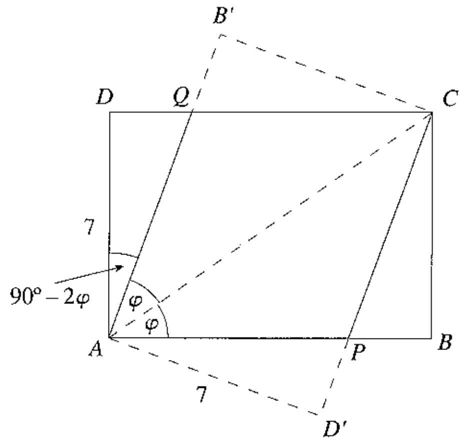
Megjegyzés:
Mivel a szabályos ötszög középponti szöge 72 fokos, ezért pl. PP_2P_4 szög egy kerületi szög lévén ennek fele azaz 36 fokos lesz.

3603. a) A téglalap félkerülete 17 méter. Foglaljuk táblázatba a lehetséges eseteket, ha a téglalap rövidebbik oldalának hossza x méter (világos, hogy $1 \le x \le 8$).

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$17-x$	16	15	14	13	12	11	10	9
T	16	30	42	52	60	66	70	72

Tehát a legnagyobb, a megadott feltételek szerint zsineggel körülkeríthető téglalap 72 m² területű.

b) Az $ABCD$ téglalapban $AB = CD = 10$ cm.
Az $ABCD$ téglalapot az AC átló egyenesére tükrözve kapjuk az $AB'CD'$ téglalapot. A két egybevágó téglalap közös része az $APCQ$ rombusz (rombusz, mert paralelogramma és AC átlója szögfelező).
Például az ABC derékszögű háromszögből:



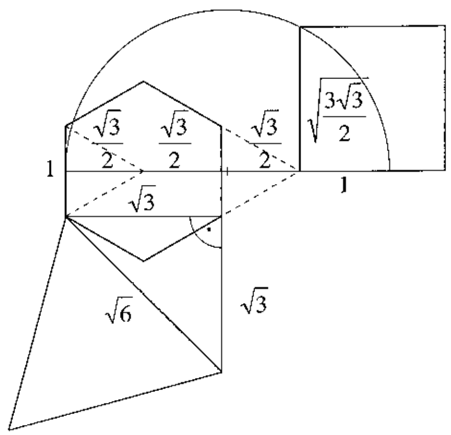
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{7}{10}$, ezért $\varphi \approx 35{,}0°$ és
$90° - 2\varphi \approx 20{,}0°$.
A rombusz oldala az ADQ derékszögű háromszögből: $AQ = \frac{7}{\cos 20{,}0°} \approx 7{,}45$ (cm), tehát a közös rész kerülete kb. 29,80 cm. A közös rész területe: $T_{APCQ} = 7{,}45^2 \cdot \sin(2 \cdot 35{,}0°) \approx 52{,}16$ (cm²).
(Ez megkapható úgy is, hogy az $ABCD$ téglalap területéből levonjuk az ADQ derékszögű háromszög területének kétszeresét. Az ADQ háromszögből: $DQ = 7 \cdot \operatorname{tg} 20{,}0° \approx 2{,}55$ (cm), tehát az ADQ háromszög területének kétszerese $7 \cdot 7 \operatorname{tg} 20{,}0° \approx 17{,}84$ (cm²).
A közös rész területe: $T_{APCQ} = 70 - 17{,}84 = 52{,}16$ (cm²).)

c) Két különböző eset lehetséges.
1. eset
A henger magassága 10 cm.
A henger alapkörének kerülete ekkor 7 cm, tehát az alapkör sugara $\frac{7}{2\pi}$ cm,
a henger térfogata pedig $\frac{7^2}{4\pi^2} \cdot \pi \cdot 10 = \frac{245}{2\pi} \approx 39{,}0$ (cm³).

2. eset
A henger magassága 7 cm.
A henger alapkörének kerülete ekkor 10 cm, tehát az alapkör sugara $\frac{10}{2\pi}$ cm,
a henger térfogata pedig $\frac{5^2}{\pi^2} \cdot \pi \cdot 7 = \frac{175}{\pi} \approx 55{,}7$ (cm³).

3604. a) Egységnyi oldalú szabályos hatszög területe 6 db, egységnyi oldalú szabályos háromszög területével egyezik meg: $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ($\approx 2{,}598$; a szabályos háromszög területével kapcsolatban l. pl. az 1943.-as megoldást). A vele egyenlő területű négyzet oldala ennek gyöke: $a = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \approx 1{,}612$. A megfelelő szabályos háromszög oldala pedig hasonlósági megfontolásokból $\sqrt{6} \approx 2{,}449$. (Mivel 6 db, egységnyi oldalú szabályos háromszög összterületével egyenlő területű szabályos háromszöget keresünk, ezért ennek területe hatszorosa egy kis háromszögének, amelyhez viszont hasonló. Ekkor a hasonlóság négyzete a területek aránya, innen következik az oldalhossz.)

b) A hatszöget alkotó szabályos háromszögek magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ezt a meglévő mellé még kétszer felmérve kapunk $\frac{3\sqrt{3}}{2}$-t, mellé mérve az egységet, a Thalész-körös szerkesztéssel adódik a gyöke (lásd az 1663. d) megoldást), ami a négyzet oldala. A hatszög két szemközti oldalának távolsága $\sqrt{3}$ (hiszen az imént használt $\frac{\sqrt{3}}{2}$-es kisháromszög-magasság kétszerese), ha ezzel mint befogóval egyenlő szárú derékszögű háromszöget szerkesztünk, annak átfogója $\sqrt{2}$-szer ekkora, azaz éppen $\sqrt{6}$ lesz, ami a keresett nagy háromszög oldala.

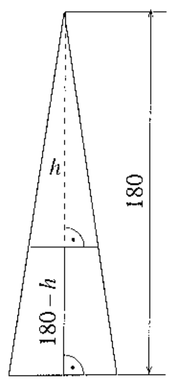


3605. a) A háromszög alapjának és magasságának hossza adott.
A szárak hossza: $\sqrt{180^2 + 27^2} \approx 182{,}0$ mm.
A háromszög kerülete $2 \cdot 182{,}0 + 54 = 418{,}0$ mm, területe 4860 mm².

b) A háromszög alapján fekvő szögek tangense $\frac{180}{27}=\frac{20}{3}$, ezek a szögek tehát 81,47° nagyságúak. A szárszög 17,06°-os.

c) $V=\frac{27^2\pi\cdot 180}{3}$ mm³, ami 137,4 cm³, tehát a flakonba kb. 137,4 ml édesítőszer tölthető.

d) A folyadék a flakon alsó, csonkakúp alakú részében van, így a fölötte lévő, forgáskúp alakú térrész 37,4 ml térfogatú.
A hasonló testek térfogatáról tanultak alapján írható: $\left(\frac{h}{180}\right)^3=\frac{37,4}{137,4}$.
Ebből $h=180\cdot\sqrt[3]{\frac{37,4}{137,4}}\approx 116,7$ mm.
A flakonban tehát $180-h\approx 63,3$ mm magasan áll a folyadék.



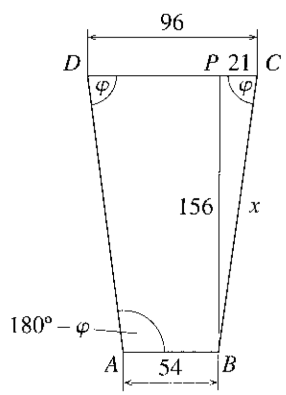
e) A cseppeket 0,15 cm sugarú gömböknek tekintve egy csepp térfogata $\frac{4\pi\cdot 0,15^3}{3}$ cm³-nek (kb. 0,014 ml-nek) adódik.
100 ml-ből tehát $\frac{100}{\frac{4\pi\cdot 0,15^3}{3}}=\frac{300}{4\pi\cdot 0,15^3}\approx 7074$-et cseppenthetünk.

3606. a) $T=\frac{54+96}{2}\cdot 156=11700$ (mm² = 117 cm²).

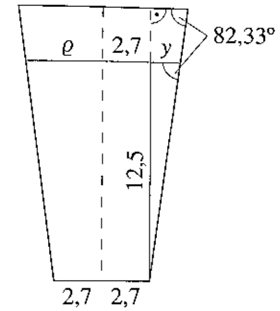
b) A BCP derékszögű háromszögből a trapéz szárának hossza: $x=\sqrt{21^2+156^2}=\sqrt{24777}\approx 157,4$ (mm), tehát a trapéz kerülete kb. 464,8 mm.

c) A BCP derékszögű háromszögből $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{156}{21}\approx$ 7,4286, így $\varphi\approx 82,33°$ és $180°-\varphi\approx 97,67°$.
A trapéz szögei 82,33°, illetve 97,67° nagyságúak.

d) Az edény térfogata cm³-ben mérve:
$\frac{15,6\pi}{3}(4,8^2+4,8\cdot 2,7+2,7^2)\approx 707,2$, tehát az edénybe legfeljebb 7,07 deciliter folyadék önthető.



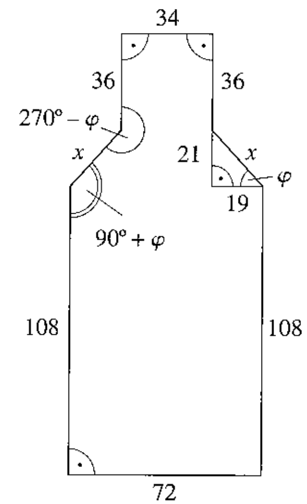
e) $y=12,5\cdot\mathrm{ctg}\,82,33°\approx 1,683$ (cm), ezért a vonalkánál a szabad folyadékfelszín sugara
$\varrho=2,7+y\approx 4,383$ (cm).
A kérdezett térfogat
$\frac{12,5\pi}{3}(2,7^2+4,383\cdot 2,7+4,383^2)\approx$
$\approx 501,8$ (cm³) = 0,50 (dm³).
A vonalka tehát 5 dl-t (fél litert) jelez.



3607. a) A nyolcszög kerülete mm-ben mérve:
$72+2\cdot 108+2x+2\cdot 36+34=394+2x$, ahol
$x=\sqrt{19^2+21^2}\approx 28,3$.
A nyolcszög kerülete 450,6 mm (45,06 cm).

b) A nyolcszög feldarabolható két téglalapra és egy szimmetrikus trapézra is, ezért a területe kiszámítható így is: $72\cdot 108+34\cdot 36+\frac{72+34}{2}\cdot 21=$
$=10\,113$ (mm² = 101,13 cm²).

c) $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{21}{19}$, tehát $\varphi\approx 47,86°$.
A (konkáv!) nyolcszög szögei (a „bal alsó" csúcstól indulva) rendre: 90°, 90°, 137,86°, 222,14°, 90°, 90°, 222,14°, 137,86°.



d) A flakon felbontható két forgáshengerre és egy csonkakúpra.
A nagyobbik (alsó) henger térfogata: $36^2\cdot\pi\cdot 108\approx 439722$ (mm³) (azaz kb. 439,7 cm³); a csonkakúp térfogata: $\frac{21\pi}{3}(36^2+36\cdot 17+17^2)\approx 48315$(mm³) (azaz kb. 48,3 cm³).
A két térfogat összege 488,0 cm³, tehát fél liter folyadék betöltésekor a „felső" hengerbe is kerül 12 cm³ térfogatú mennyiség.
Ez ebben a hengerben $h=\frac{12000}{17^2\pi}\approx 13,2$ (mm) magas folyadékoszlopot eredményez.
A flakont tehát 108 + 21 + 13,2 = 142,2 (mm), azaz kb. 14,2 cm magasságig töltötték fel.

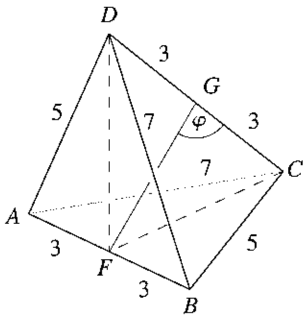
3608. a) A középvonalak által alkotott háromszög hasonló a PQR háromszöghöz, ezért ennek a szögeit számítjuk ki.
A legnagyobb szöget koszinusztétellel számíthatjuk:

$$\cos PQR\sphericalangle = \frac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6} = 0,2, \text{ ezért}$$

$PQR\sphericalangle = 78{,}46°$.
A másik két (hegyes)szög egyikét szinusztétellel, a másikat kivonással kaphatjuk: $QRP\sphericalangle = 57{,}12°$ és $RPQ\sphericalangle = 44{,}42°$.

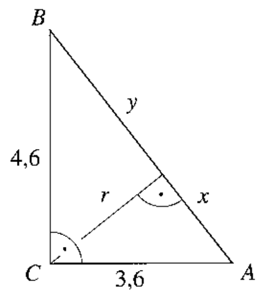
b) A gúla felszíne megegyezik a PQR háromszög területével: 58,79 cm².

c) Jelölje a 6 cm-es élek felezőpontját F, illetve G. Mivel a tetraéder lapjai egybevágó háromszögek és FC az ABC háromszög 6 cm-es oldalához tartozó súlyvonala, FD pedig az ABD háromszög 6 cm-es oldalához tartozó súlyvonala, ezért $FC = FD$. A CFD háromszög így egyenlő szárú, s ennek a CD alapjához tartozó súlyvonala éppen FG. Tehát FG valóban merőleges a CD élre ($\varphi = 90°$).
A fentiekhez hasonlóan látható be (az ABG háromszög segítségével), hogy FG merőleges az AB élre is.

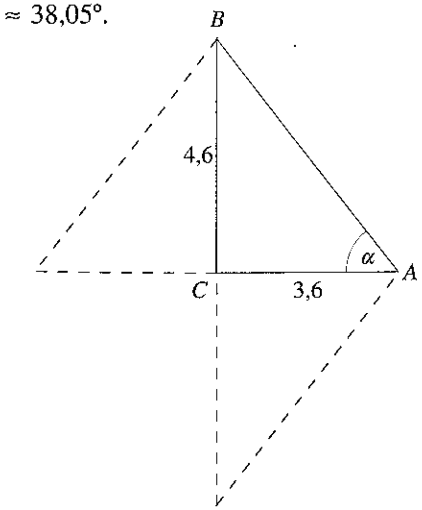


Megjegyzés:
A vizsgált tetraéder bármelyik két-két lapja egybevágó. Az ilyen tetraédert egyenlő oldalúnak nevezzük. A tetraéderek között csak az egyenlő oldalúaknál esik egybe a beírt és a körülírt gömb középpontja, ráadásul ekkor ez a pont a tetraéder súlypontja.

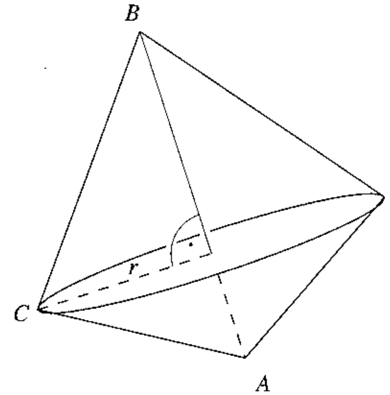
3609. a) $ACB\sphericalangle = 90°$. Ugyanis, ha $ACB\sphericalangle \neq 90°$, akkor az eredeti háromszög az AC egyenesre (illetve BC-re) vonatkozó tükörképével együtt (konvex vagy konkáv) négyszöget alkotna.



b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4,6}{3,6} \approx 1,2778 \Rightarrow \alpha \approx 51{,}95°,\ \beta \approx 38{,}05°$.



c) Az AB körül körbeforgatva a háromszöget forgástestet kapunk.



Ez két, alapjával összeillesztett kúpból áll, melyek alapkörének sugara r. A kúpok magasságának összege $AB = c$.
Pitagorasz-tételből: $c^2 = 3{,}6^2 + 4{,}6^2 = 34{,}12 \Rightarrow c \approx 5{,}841$.
Az r meghatározása céljából a háromszög kétszeres területét kétféleképpen írjuk fel: $c \cdot r = 3{,}6 \cdot 4{,}6$.

Ebből $(r \approx 2,835)$, $\quad r^2 = \frac{3,6^2\cdot 4,6^2}{34,12} \approx 8,037;$

$$V = \frac{r^2\pi x}{3} + \frac{r^2\pi y}{3} = \frac{r^2\pi}{3}(x+y) = \frac{8,037\cdot 5,841}{3}\pi \approx 49,16$$

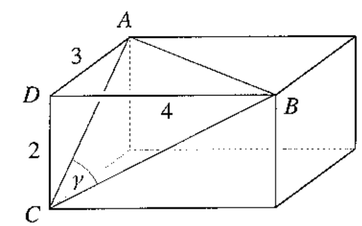
A forgástest térfogata tehát 49,2 cm³.

3610. a) A feladatban szereplő $ABC\,\Delta$ oldalait Pitagorasz-tétellel határozhatjuk meg az alábbi derékszögű háromszögekből:
$DAC\,\Delta$: $AC = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$;
$DBC\,\Delta$: $BC = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$;
$DAB\,\Delta$: $AB = \sqrt{16+9} = 5$.
A leghosszabb oldallal szemben van a legnagyobb szög. Ezt a koszinusztétellel számítjuk ki.

$25 = 13 + 20 - 2\sqrt{13}\cdot\sqrt{20}\cdot\cos\gamma$,

$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{65}} \approx 0,2481$,

$\gamma \approx 75,64°$.



b) $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{4}{65}} = \sqrt{\frac{61}{65}}$;

$$T(ABC) = \frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{20}\cdot\sin 75{,}64°}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13\cdot 20\cdot 61}{65}} = \sqrt{61} \approx 7{,}81.$$

Az ABC síkmetszet területe kb. 7,81 cm^2.

c) A lemetszett gúla térfogata: $V_g = \frac{1}{3}\cdot T\cdot m = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\right)\cdot 4 (= 4)$.

A téglatest térfogata: $V = 2\cdot 3\cdot 4\ (= 24)$.

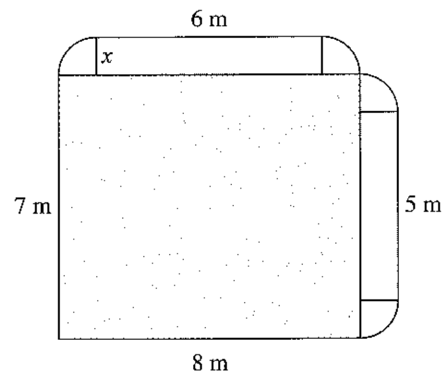
$$\frac{V_g}{V} = \frac{1}{6}.$$

Megjegyzés:

Ez az arány „számítás nélkül" is megállapítható. A gúla térfogata a vele azonos alapú és egyenlő magasságú hasáb térfogatának harmada. Itt az egyenlő magasságú hasáb és téglatest alapterületének aránya 1 : 2, ezért a keresett arány:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

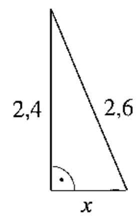
3611. a) A ház ábrája a kicsinyítésnek megfelelően a mellékelt rajz téglalapja, melynek oldalai 4 cm és 3,5 cm.



b) A kutyák feszített lánc esetén a ház falával párhuzamosan, a faltól legtávolabb x méter távolságban tudnak futni. $x = \sqrt{2{,}6^2 - 2{,}4^2} = 1$ (pontos érték).

A faltól legfeljebb 1 m távolságban futhatnak a kutyák.

A ház sarkainál figyelembe véve a kapott 1 m távolságot, a felerősített rudak hossza minimálisan $8 - 2 = 6$ (m), illetve $7 - 2 = 5$ (m).

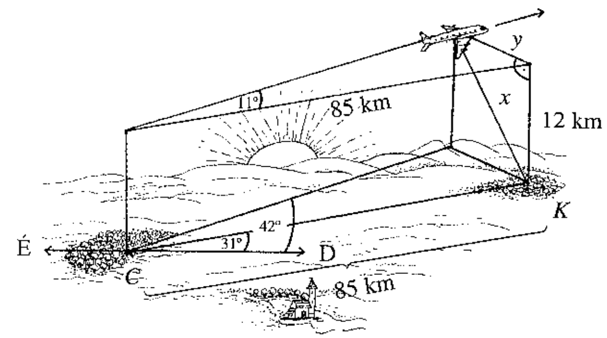


c) A kutyák által bejárható terület két 1 m szélességű, 6 m, illetve 5 m hosszúságú sávból (téglalapból) és négy 1 m sugarú negyed körből áll.

$T = (6 + 5)\cdot 1 + 1\pi = 11 + \pi \approx 14{,}14.$

A kutyák által bejárható terület nagysága 14,1 m^2.

3612. A mellékelt axonometrikus ábrán láthatjuk a helyzetet. Ilyen kis távolságoknál még a Föld gömbölyűsége elhanyagolható, ezért lehet egyenes szakaszokkal helyettesíteni a köríveket. Emellett a városok kiterjedését is elhanyagoljuk, ami Chicago esetén lehet, hogy túlzás. Mondjuk legyen a repülőtér távolsága a másik várostól 85 km. A repülőgép a városhoz akkor van a legközelebb, ha a városból egy, a repülőgép nyomvonalára állított merőleges egyenest veszünk, ami benne van egy, a Föld felszínére merőleges síkban. Ahol ez metszi a repülőgép nyomvonalát, ott van a keresett legközelebbi pont, amelynek távolságát a várostól x jelöli. Az adatokat is berajzoltuk az ábrába, így jól látszik, hogy a prizma (háromszög alapú hasáb) felső háromszöglapja egy derékszögű háromszög, melynek egyik hegyesszöge 11 fokos és átfogója 85 km.



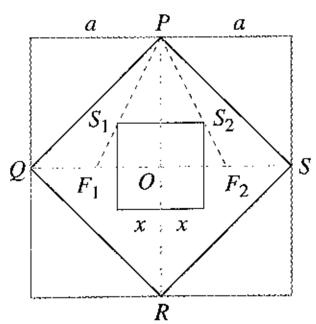
Ebből az y-nal jelölt befogó: $y = 85\cdot\sin 11° = 16{,}2$ (km).

Mivel a gép 12 km magasan repül, a prizma oldallapja egy téglalap, amelynek egyik oldala az imént kiszámolt y, míg a másik oldala 12 km. Ekkor a keresett x távolságra: $x = \sqrt{y^2 + 12^2} = \sqrt{16{,}2^2 + 144} \approx 20{,}2$ (km).

Tehát a repülőgép légvonalban a várostól legalább 20,2 km távolságban van.

3613. Válasszunk egy olyan síkot, amelyik a nagyobbik kockát valamelyik lapjával párhuzamosan vágja félbe. Ez a sík a kisebbik kockát is félbe vágja, mégpedig szintén egy lapjával párhuzamosan. A szabályos oktaédernek négy csúcsa van (az ábrán P, Q, R és S) a választott síkon.

A nagyobbik kocka éle legyen $2a$, a kisebbiké pedig $2x$.

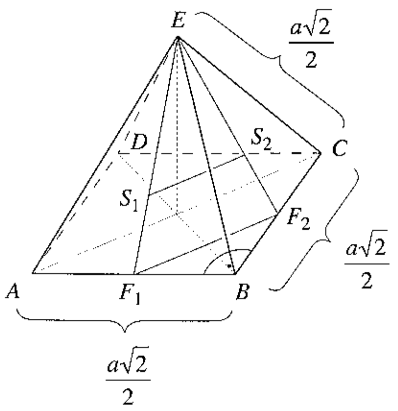


A kisebbik kocka mindegyik csúcsa a nagy kockába írt szabályos oktaéder egy-egy lapjának súlypontja. Ezért az ábra S_1, illetve S_2 pontja is egy-egy súlypont, mégpedig rendre a POQ, illetve POS háromszögé (O a kocka középpontja).

Az S_1S_2 szakasz hossza egyrészt $2x$, másrészt (a súlypont ismert tulajdonsága miatt) az F_1F_2 szakasz hosszának (ami éppen a-val egyenlő) a két harmada: $2x = \frac{2}{3}\cdot a = \frac{1}{3}\cdot(2a)$.

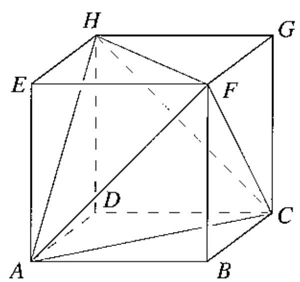
A kisebbik kocka éle tehát $\frac{1}{3}$-a, a felszíne $\frac{1}{9}$-e, a térfogata pedig $\frac{1}{27}$-e a nagyobb kockáénak.

Másik megoldás:
A szabályos oktaéder éle a kocka két szomszédos lapközéppontját köti össze, ezért minden oldala az a élű kocka egyik lapátlójának a fele, azaz $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Tekintsük az oktaéder felét. Az $ABCD$ egy $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ oldalú négyzet, tehát F_1F_2 a négyzet átlójának fele, $\frac{a}{2}$.
Legyen két szomszédos háromszöglap középpontja (súlypontja) az S_1 és S_2.
Az $S_1S_2E\,\Delta \sim F_1F_2E\,\Delta$, a hasonlóság aránya 2 : 3.



Tehát S_1S_2, azaz a kisebbik kocka éle $\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{3}$. Ebből következik, hogy felszíne $\frac{1}{9}$-e, térfogata $\frac{1}{27}$-e a nagyobb kockáénak.

3614. a) E testnek 4 csúcsa van (A, C, H, F), 6 éle (a 4 csúcs közül 6-féleképpen választható ki 2, amit él köt össze), 4 lapja (a 4 csúcs közül 4-féleképpen választható ki az a 3, ami egy lapot alkot).



b) Szabályos tetraédernek.

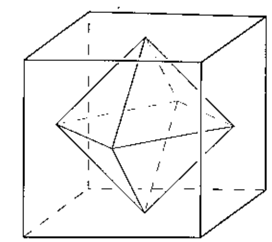
c) A tetraéder oldaléle a kocka lapátlója, tehát $\sqrt{2}$-szer akkora.

d) Legyen a kocka éle a, ekkor felszíne $6a^2$. A tetraéder éle ekkor $\sqrt{2}a$, felszíne $\sqrt{3}(\sqrt{2}a)^2=2\sqrt{3}a^2$. (A tetraéder felszínével kapcsolatban lásd pl. az 1943. megoldást.) A felszínek aránya ekkor $\frac{2\sqrt{3}a^2}{6a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

e) A kocka térfogata a^3, a tetraéderé pedig $\frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{2}a)^3=\frac{a^3}{3}$. (A tetraéder térfogatával kapcsolatban szintén lásd az 1943. megoldást.) Ekkor a térfogatok aránya $\frac{1}{3}$.

3615. a) E testnek 6 csúcsa van (a kocka 6 lapjának középpontja), 12 éle, 8 lapja.

b) Szabályos oktaédernek.



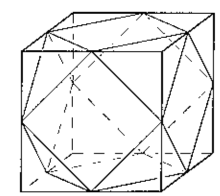
c) Az oktaéder oldaléle a kocka két lapközéppontját köti össze. Ezzel egyenlő a kocka két szomszédos élfelezőpontjának távolsága, ami a két él és a lapátló által meghatározott háromszög középvonala, tehát a lapátló fele. Vagyis az oktaéder éle a kocka élének $\frac{\sqrt{2}}{2}$ része.

d) Ha a kocka éle a, akkor felszíne $6a^2$. Az oktaéder éle ekkor $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, felszíne $2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\sqrt{3}a^2$ (lásd pl. az 1963. megoldást), aminek aránya a kockáéhoz $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

e) A kocka térfogata a^3, az oktaéderé $\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3=\frac{a^3}{6}$ (lásd pl. az 1963. megoldást), aminek aránya a kockáéhoz $\frac{1}{6}$.

Megjegyzés:
Ezt az eredményt összevetve az előző feladat e)-belivel azt látjuk, hogy egyazon kockába írt oktaéder és tetraéder térfogatának aránya 1 : 2.

3616. a) E testnek 12 csúcsa van (a kocka 12 élfelezőpontja), 14 lapja (a kocka mind a 6 lapján maradt egy négyzet, és mind a 8 csúcsánál keletkezett egy háromszög) és 24 éle (a 6 négyzetnek $6\cdot 4$, a 8 háromszögnek $8\cdot 3$, az összesen 48, de minden él két laphoz tartozik).



b) Négyzetek és szabályos háromszögek.

c) A kocka két szomszédos élfelezőpontjának távolsága a két él és a lapátló által meghatározott háromszög középvonala, tehát a lapátló fele. Vagyis az új test éle a kocka élének $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szerese.

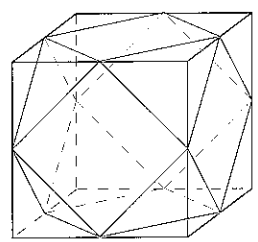
d) Ha a kocka éle a, akkor felszíne $6a^2$. Az új test éle ekkor $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, felszíne 6 ilyen élű négyzet és 8 ilyen élű szabályos háromszög területének összege:

$6\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=(3+\sqrt{3})a^2$. Ennek aránya a kockáéhoz: $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

e) A kocka térfogata a^3, az új testé ennél a nyolc csúcsnál „hiányzó" kis gúlák össztérfogatával kevesebb. Ha egy ilyen gúla alapjának az egyenlő szárú derékszögű háromszöglapját tekintjük, akkor annak területe $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{8}$, magassága $\frac{a}{2}$, így térfogata $\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{8}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{48}$. Az új test térfogata tehát $a^3-8\cdot\frac{a^3}{48}=a^3-\frac{a^3}{6}=$ $=\frac{5}{6}a^3$, aminek aránya a kockáéhoz $\frac{5}{6}$.

Megjegyzés:
Ezt az eredményt összevetve az előző feladat e)-belivel azt látjuk, hogy ezen új test térfogata az ugyanazon kockába írt oktaéder térfogatának 5-szöröse.

3617. a) A 8 metszősík mindegyikének a kocka 3-3 élfelező pontján kell áthaladnia. A keletkező testnek 6 lapja négyzet, 8 lapja pedig szabályos háromszög. A test lapjainak száma tehát 14, éleinek száma 24, csúcsainak száma 12 (lásd 3616. feladat).



b) A kiindulásul vett kocka éle 4 cm hosszú, ezért a félig szabályos test élei $2\sqrt{2}\approx 2,83$ (cm) hosszúak.

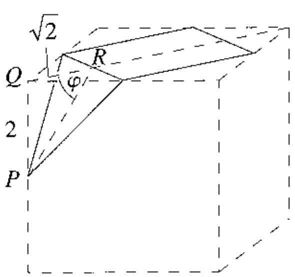
A 6 darab négyzet együttes területe: $6\cdot(2\sqrt{2})^2=48$ (cm²), a 8 darab szabályos háromszög együttes területe: $8\cdot\frac{(2\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}\approx 27,7$ (cm²).

A test felszíne kb. 75,7 cm².

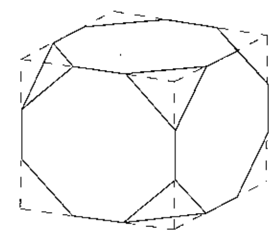
c) Bármely két, egy él mentén csatlakozó lap síkjának hajlásszöge ugyanannyi (az ábrán φ-vel jelölt szög). A PQR derékszögű háromszögből:

$\mathrm{tg}\varphi=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, tehát $\varphi\approx 54,74°$.

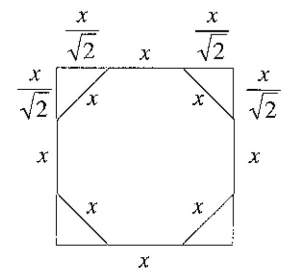
(A megadott szög kiegészítő szögét, 125,26°-ot a szomszédos lapok szögének nevezzük. Lásd még a 3618. c) feladathoz fűzött megjegyzést is.)



3618. a) A keletkezett testnek 6 nyolcszög és 8 háromszög lapja van, a lapok száma tehát 14. A csúcsok száma 24, az éleké pedig 36.



b) A kocka éle 4 cm hosszú. A kocka egy lapját kiemelve készítsünk ábrát.
Ha a félig szabályos test élhossza x cm, akkor igaz, hogy $x+2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}=4$.
Ebből $x(1+\sqrt{2})=4$, majd $x=4(\sqrt{2}-1)$ adódik, a keresett élhossz tehát $4(\sqrt{2}-1)\approx 1,6569$ (cm).
A felszín kiszámításához először egy szabályos nyolcszög és egy szabályos háromszög területét számítjuk ki:
egy nyolcszög területe



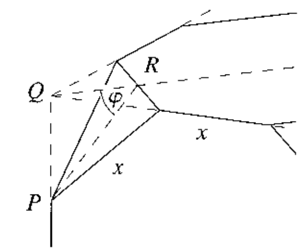
$4^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2=16-x^2\approx 13,255$ (cm²);

egy háromszög területe $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\approx 1,189$ (cm²).

A félig szabályos test felszíne: $6\cdot 13,255+8\cdot 1,189\approx 89,0$ (cm²).

c) Bármely két, egy él mentén csatlakozó lap síkjának hajlásszöge ugyanannyi (az ábrán φ-vel jelölt szög).
A PQR derékszögű háromszögből:

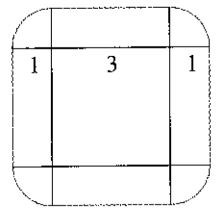
$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{2}}=\sqrt{2}$, tehát $\varphi\approx 54,74°$.



(A megadott szög kiegészítő szögét, 125,26°-ot a szomszédos lapok szögének nevezzük.)

Megjegyzés:
A kocka egy adott csúcsából kiinduló három élének végpontja szabályos háromszöget határoz meg. A 3617., illetve 3618. feladatban szereplő félig szabályos test háromszöglapjai egy-egy ilyen szabályos háromszöggel párhuzamos síkúak, ezért a φ szög meghatározható a kocka lapja és a kocka legnagyobb szabályos háromszög síkmetszete hajlásszögeként is (egyszerűbb az ábra és a számolás is).

3619. a) A fedő- és alaplapot részekre osztjuk: egy 3 cm oldalú négyzet, négy db 1 és 3 cm oldalú téglalap, és négy db 1 cm sugarú negyedkör alkotja mindkettőt. Ezért egy ilyen lap területe:



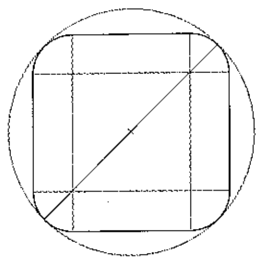
$$3^2 + 4\cdot 1\cdot 3 + 4\cdot\frac{1^2\cdot\pi}{4} = 21+\pi \approx 24{,}14 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A test palástja síkba kiteríthető, téglalap lesz, egyik oldala 4 cm, a másik a fedőlap kerülete. Ez négy db 3 cm-es szakaszból, és négy darab 1 cm sugarú negyedkörívből áll: $4\cdot 3 + 4\cdot\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{4} = 12+2\pi \approx 18{,}28$ (cm).

A test felszíne tehát: $A = 2\cdot(21+\pi) + 4\cdot(12+2\pi) = 90 + 10\pi \approx 121{,}4$ (cm^2).

b) Lévén egy hengerszerű testről szó, térfogata az a)-ban kiszámolt alapterület és az adott magasság szorzata: $V = (21+\pi)\cdot 4 = 84 + 4\pi \approx 96{,}57$ (cm^3).

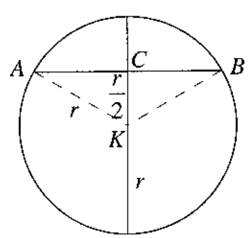
c) Matematikai modellként a test legtávolabbi két pontjának távolsága a kérdés. Melyik ez a két pont? Nyilván az egyik pontnak az alap-, másiknak a fedőlapon kell lennie, így tudjuk legjobban kihasználni a test magasságát. A keresett szakasz alaplapra eső vetülete pedig magán a lapon a leghosszabb lehetséges szakasz legyen. Ez utóbbi két szemközti, lekerekítő körív felezőpontja között húzódik, hiszen ez az alaplap köré írt kör átmérője, amely kör épp e pontokban érinti az alaplapot. Az alaplapon fekvő bármely más szakasz – leszámítva a másik ugyanilyen „átlót" – ennél csak rövidebb lehet, hiszen teljes egészében a kör belsejében fekszik. A leghosszabb térbeli szakasz tehát a „testátló", vagyis az alaplap egyik körívének felezőpontjától a fedőlap átellenes körívének felezőpontjáig tartó szakasz. Ez egy derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói a test magassága (4 cm), illetve az alaplap köré írt kör átmérője (két, 1 cm-es sugár és a 3 cm-es oldalú négyzet átlójának összege:



$2\cdot 1 + 3\sqrt{2}$ cm). Ekkor a testátló hossza: $\sqrt{4^2+(2+3\sqrt{2})^2} = \sqrt{38+12\sqrt{2}} =$

$$= \sqrt{\left(6+\sqrt{2}\right)^2} = 6+\sqrt{2} \approx 7{,}41 \text{ (cm)}.$$

3620. A hagyományos jelölésekkel ekkor $2r = m$. Az álló tartály térfogatának háromnegyede: $\frac{3}{4}\cdot r^2\pi\cdot m$,



vagyis m helyébe $2r$-et írva: $V_á = 1{,}5r^3\pi \approx 4{,}71r^3$.

A fekvő henger esetén a fő kérdés egy kör azon szeletének területe, amely a kör „magasságának", azaz átmérőjének háromnegyedéig tart. (Képzeljük azt ugyanis, hogy a víz belefagyott a tartályba, és azt a

körlapjára állítjuk. Ekkor is egy m magasságú hengerszerű test térfogata a kérdés, aminek alaplapja épp az említett körszelet.) Az átmérő háromnegyede éppen a felső sugár feléig tart, és a vízszint (AB) természetesen merőleges a függőleges átmérőre. Ekkor a $KAC\,\Delta$ derékszögű, átfogója kétszerese a rövidebb befogónak, vagyis ez a nevezetes 30°-60°-90°-os háromszög, $AKC\sphericalangle = 60°$. Ezért (a kisebbik) $AKB\sphericalangle =$ $= 120°$, vagyis a keresett körszelet egy 240°-os körcikkből, és egy 120° szárszögű egyenlő szárú háromszögből tevődik össze. Az előbbi területe természetesen $\frac{2}{3}$-a a körének $\left(\frac{240°}{360°}!\right)$, utóbbié pedig megegyezik egy r oldalú szabályos háromszög területével (hiszen azt az egyik magasságánál elvágva és a rövid befogói mentén összeillesztve kapjuk ezt a háromszöget). Ekkor a körszelet területe: $\frac{2}{3}r^2\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.

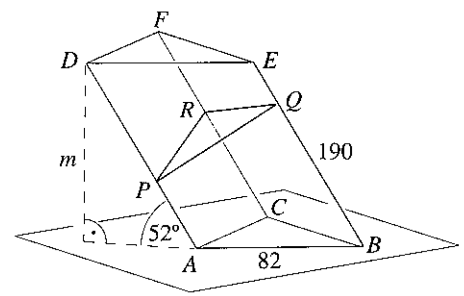
Vagyis a fekvő tartályban lévő víz térfogata:

$$V_f = \left(\frac{2}{3}r^2\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right)m = 2\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^3 \approx 5{,}05r^3.$$

Ez esetben van több víz a tartályban.

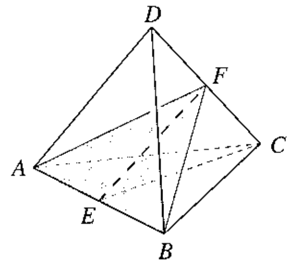
3621. a) A hasáb alapterülete: $T_a = \frac{82^2\sqrt{3}}{4}$ (cm^2), magassága $m = 190\cdot\sin 52°$ (cm), térfogata $V = T_a m \approx 435\,900$ cm^3.

b) A hasábot a PQR háromszög mentén kettévágva, majd a kapott részeket az ABC, illetve DEF lapjával egymásra illesztve egy olyan egyenes hasábot kapunk, amelynek alaplapja a PQR háromszög, magassága pedig 190 cm. Az egyenes hasáb térfogata megegyezik a ferde hasábéval (hiszen annak átdarabolásával kaptuk), tehát $T_{PQR}\cdot 190 = T_{ABC}\cdot m$.



Ebből $T_{PQR} = \frac{435\,900}{190} \approx 2294$ (cm^2).

3622. a) Az $ABF\,\Delta$ síkja a tetraéder szimmetria síkja, tehát felezi a testet, azaz a tetraéder térfogatát 1 : 1 arányban osztja.



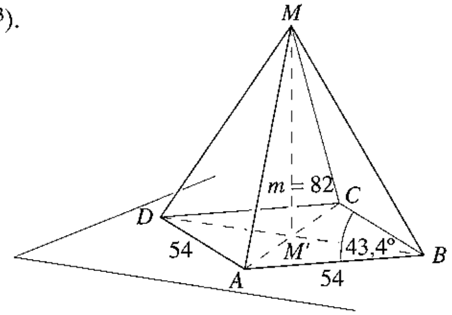
b) A szabályos tetraéder lapjai a = 4 dm oldalú szabályos háromszögek, ezek magassága:

$m = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ dm.

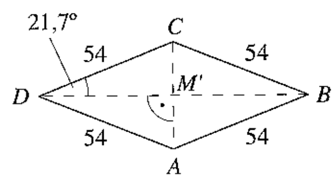
Itt AF és BF egy-egy lap magassága, az $ABF\,\Delta$ egyenlő szárú. Az $ABF\,\Delta$ oldalai: AB = 4 dm, $AF = BF = 2\sqrt{3}$ dm.

c) Két közös alappal rendelkező egyenlő szárú háromszög területe közül az a nagyobb, amelynek a közös alaphoz tartozó magassága a nagyobb. Itt az ECD egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magassága $EF \perp CD$, ezért a $DEF\,\Delta$ derékszögű. Átfogója $ED > EF$.
Tehát $T(ABD) > T(ABF)$.

3623. a) Az alaplap területe: $T_a = 54^2 \cdot \sin 43{,}4° \approx 2003{,}5$ (cm²), a gúla magassága 82 cm, tehát térfogata: $V = \frac{T_a m}{3} \approx 54764$ (cm³).



b) Az AM él hosszát az $AM'M$, a BM él hosszát a $BM'M$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel kaphatjuk meg. Ehhez azonban ismerni kell az AM', illetve BM' szakaszok hosszát.
Az $ABCD$ rombuszból:
$AM' = 54 \cdot \sin 21{,}7° \approx 19{,}97$ (cm),
$BM' = 54 \cdot \cos 21{,}7° \approx 50{,}17$ (cm).
Tehát a gúla oldaléleinek hossza:



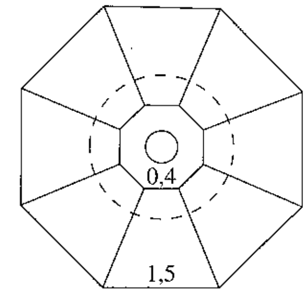
$AM = CM = \sqrt{82^2 + 19{,}97^2} \approx 84{,}4\,(\text{cm})$ és
$BM = DM = \sqrt{82^2 + 50{,}17^2} \approx 96{,}1\,(\text{cm})$.

c) A gúla alapterülete az a) részből ismert: 2003,5 cm². Az oldallapok egybevágó háromszögek, a háromszögek oldalai 54 cm, 84,4 cm, 96,1 cm hosszúak.
Az ABM háromszöget vizsgálva, a legnagyobb szögét például koszinusztétellel kaphatjuk meg: $\cos BAM\sphericalangle = \frac{54^2 + 84{,}4^2 - 96{,}1^2}{2 \cdot 54 \cdot 84{,}4} \approx 0{,}0882$, így

$BAM\sphericalangle \approx 84{,}94° \Rightarrow T_{ABM} = \frac{54 \cdot 84{,}4 \cdot \sin 84{,}94°}{2} \approx 2270$ (cm²).

A gúla felszíne: $2003{,}6 + 4 \cdot 2270 \approx 11080$ (cm²).

3624. A téglák számát a kémény anyagának (tégla + kötőanyag) térfogata ismeretében becsülhetjük meg. Ez a térfogat egy 10 méter magas, szabályos nyolcoldalú csonkagúla és egy ugyancsak 10 méter magas csonkakúp térfogatának különbségeként számítható ki. Lásd a felülnézeti ábrát! A csonkakúp térfogata:



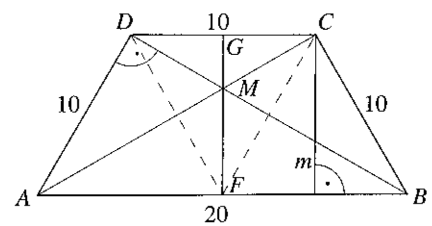
$V_1 = \frac{10\pi}{3}(0{,}5^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2) = 1{,}3\pi \approx 4{,}1$ (m³).

A csonkagúla térfogatának kiszámításához az alap-, illetve fedőlap területére van szükség. A szabályos nyolcszög területe kifejezhető a h oldalhossza segítségével is (a körülírt kör középpontjából induló sugarakkal 8 egyenlő szárú háromszögre bontással):

$t = 8 \cdot \frac{h^2 \cdot \text{tg}\,67{,}5°}{4} = 2 \cdot h^2 \cdot \text{tg}\,67{,}5°$.

A csonkagúla alaplapjának területe: $2 \cdot 1{,}5^2 \cdot \text{tg}\,67{,}5° \approx 10{,}9$ (m²), fedőlapjának területe: $2 \cdot 0{,}4^2 \cdot \text{tg}\,67{,}5° \approx 0{,}8$ (m²), tehát a szabályos nyolcoldalú csonkagúla térfogata: $V_2 = \frac{10}{3} \cdot (10{,}9 + \sqrt{10{,}9 \cdot 0{,}8} + 0{,}8) \approx 48{,}8$ (m³).
A kémény anyagának térfogata: $V = V_2 - V_1 = 44{,}7$ (m³).
Ennek 88%-a, tehát 39,3 m³ a beépített téglák együttes térfogata.
Egy tégla térfogata $0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}1 = 0{,}0045$ (m³), a szükséges téglák száma tehát $\frac{39{,}3}{0{,}0045} \approx 8733$.
Ez persze csak becslésnek fogadható el, hiszen egyrészt a kémény formája nem lehet pontosan a megadott testekével azonos, másrészt az építése során (főleg a kémény teteje közelében) nem lehet egész téglákkal kialakítani a kívánt formát, így a téglák törésére van szükség.
Gyakorlati szempontból ezért elfogadható becslés az, ha kb. 9 ezerben határozzuk meg a kémény építéséhez szükséges téglák számát.

3625. Foglalkozzunk előbb a test szimmetrikus trapéz alaplapjával. Ezt az alapok (20 és 10) és a szárak (10 és 10) ismeretében pl. a 3585. b) megoldásban ismertetett módon szerkeszthetjük meg. Ebből az következik, hogy ez a trapéz három, 10 egység oldalú szabályos háromszögből felépíthető, tehát szögei 60, illetve 120°-osak, magassága $m = 5\sqrt{3}$. Az alapok aránya 1 : 2, ezért az átlók is ilyen arányban osztják egymást. Az átlók felezik a nagyobbik alapon fekvő szögeket, a rövidebbik alap végpontjaiban pedig merőlegesek a szárakra. Hosszuk ezért

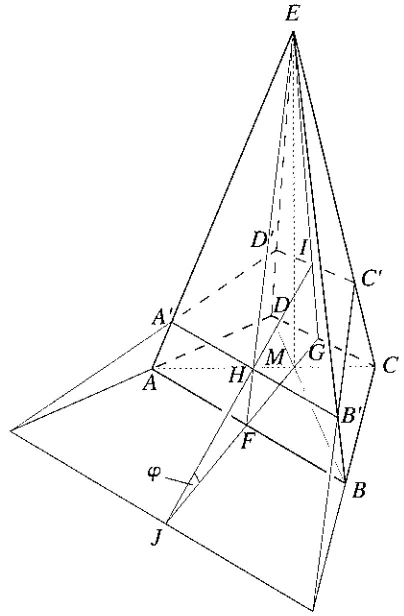


kiszámítható egy Pitagorasz-tételből: $10\sqrt{3}$. Ezért aztán $AM = BM = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, és $CM = DM = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. Legyen AB felezőpontja F, CD-é G. Ekkor persze $FG = m$, és $MF : MG = 2 : 1$ miatt $MF = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,(= CM = DM)$ és $MG = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Az M pont „fölött" van a gúla E csúcsa (30 egységgel), azaz EM merőleges az alaplapra. Ezért a test oldalélei Pitagorasz-tételekből kiszámíthatók:

$$AE = BE = \sqrt{30^2 + \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 10\sqrt{\frac{31}{3}} \approx$$
$$\approx 32,15; \text{ és}$$

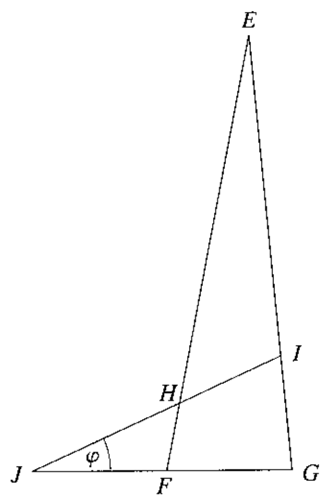
$$CE = DE = \sqrt{30^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 10\sqrt{\frac{28}{3}} \approx$$
$$\approx 30,55.$$



Ezeket az éleket metszi a ferde sík az A és B pontoktól 5, a C és D pontoktól 8 egység távolságra. A metszet-síkidom szintén egy szimmetrikus trapéz, $A'B'$ alapjának felezőpontja legyen H, $C'D'$ alapjáé I. A GF és az IH szakaszok meghosszabbításai J-ben messék egymást. A két sík keresett hajlásszöge az $IJG\sphericalangle$, azaz φ. A testből készített mellékelt metszeten ez eredeti méretében látszik.

Az $ABE\,\Delta$ EF magassága Pitagorasz-tétellel $\sqrt{EM^2 + MF^2}$ (vagy $\sqrt{AE^2 - AF^2}$), azaz $10\sqrt{\frac{28}{3}}$ (vagyis azonos pl. CE-vel).

A párhuzamos helyzetű ABE és $A'B'E$ háromszögek hasonlók, így $\frac{EH}{EF} = \frac{EB'}{EB}$, amiből $EH = 10\sqrt{\frac{28}{3}} - 5\sqrt{\frac{28}{31}} \approx 25,80$.

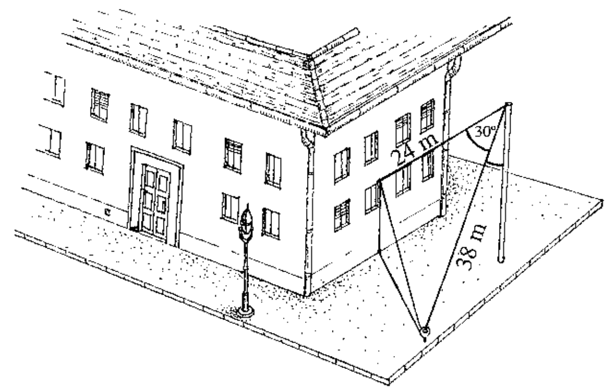


Ugyanígy a $CDE\,\Delta$ EG magassága Pitagorasz-tétellel $\sqrt{EM^2 + MG^2}$ (vagy

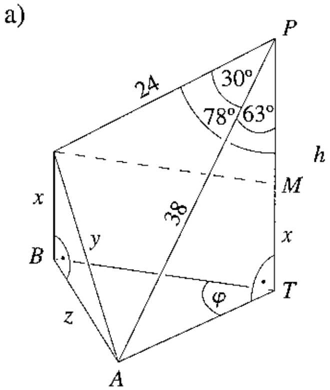
$\sqrt{CE^2 - CG^2}$), azaz $5\sqrt{\frac{109}{3}} \approx 30,14$. A párhuzamos helyzetű CDE és $C'D'E$ háromszögek hasonlók, így $\frac{EI}{EG} = \frac{EC'}{EC}$, amiből $EI = 5\sqrt{\frac{109}{3}} - 4\sqrt{\frac{109}{28}} \approx 22,25$.

Az $EGF\,\Delta$-ben $\cos EGF\sphericalangle = \frac{GF^2 + EG^2 - EF^2}{2 \cdot GF \cdot EG} = \frac{1}{\sqrt{109}} \approx 0,0958$, amiből $EGF\sphericalangle \approx 84,5°$. Ugyanebben a háromszögben egy szinusztétellel: $\sin FEG\sphericalangle = \frac{GF \cdot \sin EGF\sphericalangle}{EF} \approx 0,2822$, amiből $FEG\sphericalangle \approx 16,4°$. Az $EIH\,\Delta$-ben koszinusztétellel $HI = \sqrt{EH^2 + EI^2 - 2 \cdot EH \cdot EI \cdot \cos FEG\sphericalangle} \approx 7,70$. Ugyanebben a háromszögben egy újabb koszinusztételből: $\cos EIH\sphericalangle = \frac{EI^2 + HI^2 - EH^2}{2 \cdot EI \cdot HI} \approx -0,3252$, amiből $EIH\sphericalangle \approx 109°$. Ez a szög egyúttal a $GJI\,\Delta$ külső szöge, s így egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével, azaz $\varphi + EGF\sphericalangle$, ezért a keresett $\varphi = EIH\sphericalangle - EGF\sphericalangle = 109° - 84,5° = 24,5°$.

3626.



a)



b) A pózna hosszát jelöljük h-val. A PTA derékszögű háromszögből (feltéve, hogy a pózna függőleges, ezért PTA szög 90 fokos):
$\cos 63° = \frac{h}{38}$, ahonnan $h = 17,25$ (m).

c) A falon levő rögzítési pontból húzzunk a földfelszínnel (ilyen kis mértekben síknak tekinthető) párhuzamost, amely a póznát az M pontban metszi. Ekkor
$PM = 24 \cos 78° = 4,99$ (m).
Mivel MT a rögzítési pont falon lévő magasságával egyenlő hosszú, ezért
$MT = x = 17,25 - 4,99 = 12,26$ (m).

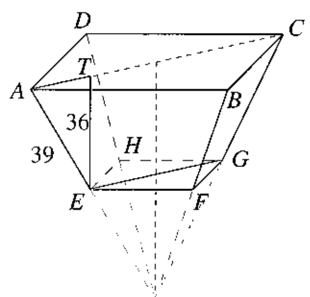
d) A kötelek árnyékának szöge (az ábránkon φ-vel jelölt szög) az ABT háromszögből számolható koszinusztétellel. Ehhez kell BT és AT hossza, amelyek rendre mint vetületek: 24 sin 78°, illetve 38 sin 63°. A harmadik AB oldal, amit az ábrán z-vel jelöltünk, az x, y, z oldalú derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével adódik: $z = \sqrt{y^2 - x^2}$, ahol az y-t koszinusztételből számíthatjuk ki:
$y^2 = 38^2 + 24^2 - 2 \cdot 38 \cdot 24 \cdot \cos 30°$.
Ebből $y \approx 20{,}98$ (m)-nek adódik, a $z \approx 17{,}03$ m.
Ezek után ismét a koszinusztételből:

$$\cos\varphi = \frac{24^2 \sin^2 78° + 38^2 \sin^2 63° - 17{,}03^2}{2 \cdot 24 \cdot 38 \cdot \sin 78° \cdot \sin 63°} = 0{,}885, \text{ azaz } \varphi = 27{,}7°.$$

3627. a) A homokkúp térfogata: $\frac{1{,}5^2 \pi \cdot 0{,}9}{3} \approx 2{,}1$ (m³), tehát a megrendelt mennyiségnek megfelelő.

b) Ha az „összelapátolt" kupac alapkörének sugara x méter, akkor a feladat szövege szerint igaz, hogy $\frac{x^2 \pi \cdot 0{,}9}{3} \approx 1{,}1$.
Ebből $x^2 \approx 1{,}17$, majd $x \approx 1{,}1$ adódik ($x > 0$), tehát a kupac alapkörének átmérője kb. 2,2 méter lesz.

3628. Az ábra jelöléseinek megfelelő adatok:
$AC = 50$ cm, $AE = 39$ cm, $m = 36$ cm.
A térfogat kiszámításához ismernünk kell az alaplap és a fedőlap területét is.
Az $ACGE$ szimmetrikus trapéz, magassága azonos a testmagassággal. Az ATE derékszögű háromszög $AT = x$ befogóját Pitagorasz-tétellel számítjuk ki.

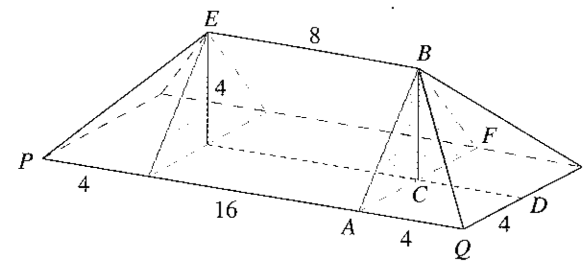


$x^2 = 39^2 - 36^2 = 225 \Rightarrow x = 15$
$EG = AC - 2x = 20$
Könnyen belátható, hogy a négyzet területe az átlók szorzatának a fele. Így az alap és fedőlap területe

$$t = \frac{20^2}{2}, \quad T = \frac{50^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{36}{3}\left(\frac{50^2}{2} + \sqrt{\frac{50^2}{2} \cdot \frac{20^2}{2}} + \frac{20^2}{2}\right)$$

$V = 12(1250 + 500 + 200) = 23\,400$.
Tehát a láda térfogata 23 400 cm³, azaz 23,4 dm³.

3629. a) A tető két szimmetrikus trapézból és két egyenlő szárú háromszögből áll.
Az ABC Δ-nek az A-nál és a DBC Δ-nek a D-nél levő szöge 45°-os. Ez azt jelenti, hogy e háromszögek egyenlő szárú derékszögűek. A szárak hossza 4, ezért $AB = 4\sqrt{2}$, ami egyúttal a tetőt jelentő trapéz és háromszög magassága is.

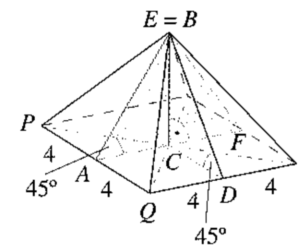


Egy trapéz területe: $48\sqrt{2}$, egy háromszög területe: $16\sqrt{2}$.
A cserepezésre váró felület területe $2(48\sqrt{2} + 16\sqrt{2}) = 128\sqrt{2} \approx 181{,}02$.
Tehát 181 m² területet kell becserepezni.

b) A tetőtér egy (fekvő) háromoldalú egyenes hasábból és két, egybevágó, egymáshoz illeszthető négyoldalú gúlából áll. Ezen összeillesztés eredményeként egy szabályos négyoldalú gúlát kapunk.
A hasáb alapja az ABF derékszögű háromszög, amely befogóinak hossza $4\sqrt{2}$ m; a hasáb magassága 8 m.

$V_h = \frac{8 \cdot 4}{2} \cdot 8 = 128.$

A szabályos négyoldalú gúla alapéle 8 m, magassága 4 m.



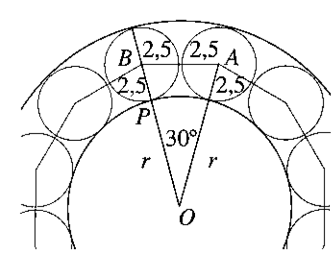
$V_g = \frac{8^2 \cdot 4}{3} = \frac{256}{3}.$

$V = V_h + V_g = 128\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{128 \cdot 5}{3} \approx 213{,}3.$

Tehát a padlástér térfogata kb. 213 m³.

3630. a) $m = 12 \cdot \frac{4\pi \cdot 2{,}5^3}{3} \cdot 10^{-9} \cdot 7840 \approx 6{,}2 \cdot 10^{-3}$ kg (azaz kb. 6,2 gramm).

b) A hagyományos golyóscsapágyban a golyók nem szorosan, egymáshoz érve helyezkednek el (részben) azért, hogy a kenőanyag közéjük kerülhessen. A 12 egyforma golyó szoros érintkezésekor középpontjaik egy szabályos 12-szög csúcsaival egyeznek meg. Ehhez az elhelyezkedéshez tartozó belső csapágygyűrű mm-ben mért külső átmérőjét jelöljük $2r$-rel.



Az AOB egyenlő szárú háromszögből (például az alap felezőmerőlegesének meghúzásával kapott derékszögű háromszög alapján): $AB = 2 \cdot OA \cdot \sin 15°$,

amiből $OA = \dfrac{AB}{2 \cdot \sin 15°}$, azaz $r + 2,5 = \dfrac{2,5}{\sin 15°}$ adódik.

Ebből $r \approx 7,16$.

A belső csapágygyűrű külső átmérője legalább 14,32 mm (a külső csapágygyűrű belső átmérője pedig legalább 10 mm-rel nagyobb, mint a belső csapágygyűrű külső átmérője).

3631. A 3 mázsa ólom 92%-a 276 kg ólom.

Egy puskagolyó térfogata $\dfrac{4\pi \cdot 5,5^3}{3} \approx 700$ (mm³),

ami $700 \cdot 10^{-9} = 700 \cdot 10^{-7}$ (m³)-rel egyenlő.

Egy ekkora térfogatú ólomgolyó tömege $700 \cdot 10^{-7} \cdot 11340 \approx 7,9 \cdot 10^{-3}$ (kg) (azaz kb. 7,9 gramm).

$\dfrac{276}{7,9 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{276000}{7,9} \approx 35000$, tehát kb. 35 ezer puskagolyót lehetett önteni a 3 mázsa ólomból.

3632. A golyó méterben mért sugarát jelölje R, a belső üreg sugarát r.

$4\pi R^2 = 628 \Rightarrow R \approx 7,07$;

$\dfrac{4\pi r^3}{3} = 904 \Rightarrow r \approx 6,0$.

A golyó falának vastagsága $R - r = 1,07$ méter.

3633. $x_1 = x \cdot \operatorname{ctg} 42°$ I.

$y_1 = y \cdot \operatorname{ctg} 42°$ II.

$250 + x_1 = x \cdot \operatorname{ctg} 29°$ III.

$250 + y_1 = y \cdot \operatorname{ctg} 32°$ IV.

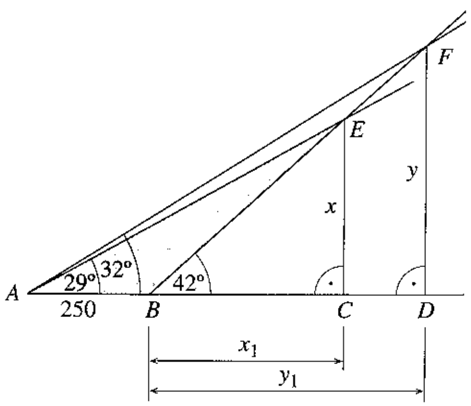
Két-két egyenlet különbségét képezzük, majd kiemeljük az x-et, illetve az y-t.

III. – I. $250 = x(\operatorname{ctg} 29° - \operatorname{ctg} 42°) \Rightarrow$

$x = \dfrac{250}{\operatorname{ctg} 29° - \operatorname{ctg} 42°} \approx 360,5$;

IV. – II. $250 = y(\operatorname{ctg} 32° - \operatorname{ctg} 42°) \Rightarrow$

$y = \dfrac{250}{\operatorname{ctg} 32° - \operatorname{ctg} 42°} \approx 510,5$.



A hegyek magassága (10 méteres pontossággal) 360 m, illetve 510 m.

Másik megoldás:

A BE és a BF szakaszokat szinusztétellel számítjuk ki.

$ABE\sphericalangle = 180° - 42° = 138° \Rightarrow AEB\sphericalangle = 13°$

Az ABE Δ-re felírt szinusztétel szerint:

$\dfrac{BE}{250} = \dfrac{\sin 29°}{\sin 13°} \Rightarrow BE = 250 \cdot \dfrac{\sin 29°}{\sin 13°} \approx 538,8$.

A BCE Δ-ben $x = BE \cdot \sin 42° \approx 360,5$.

Az $AFB\sphericalangle = 10°$.

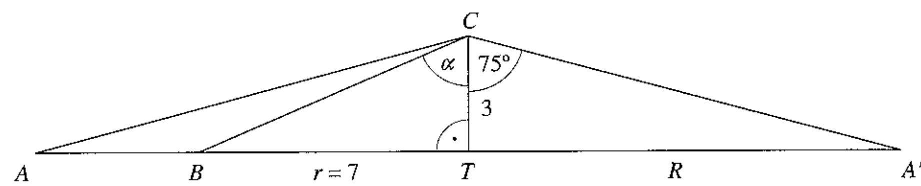
Az ABF Δ-re felírt szinusztétel szerint:

$\dfrac{BF}{250} = \dfrac{\sin 32°}{\sin 10°} \Rightarrow BF = 250 \cdot \dfrac{\sin 32°}{\sin 10°} \approx 762,9$.

A BDF Δ-ben $y = BF \cdot \sin 42° \approx 510,5$.

A hegyek magassága (10 méteres pontossággal) 360 m, illetve 510 m.

3634.



A bevilágítás tengelymetszete mindkét esetben egyenlő szárú háromszög.

Ezek fele egy-egy derékszögű háromszöget határoz meg. A megvilágított terület sugara első esetben R, a második esetben $r = 7$.

Az R-et és az α-t tangens szögfüggvénnyel számítjuk ki.

Az $A'TC$ Δ-ben $\operatorname{tg} 75° = \dfrac{R}{3} \Rightarrow R = 3 \operatorname{tg} 75° \approx 11,2 \Rightarrow 2R \approx 22,4$.

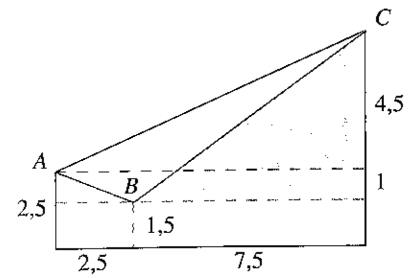
A BTC Δ-ben $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{7}{3} \Rightarrow \alpha \approx 66,8° \Rightarrow 2\alpha \approx 133,6°$.

a) A megvilágított terület átmérője kb. 22,4 m.

b) A megvilágítás szögét 133,6°-ra kell választani.

3635. Az ábrán látható derékszögű háromszögekre felírható Pitagorasz-tételekkel állapíthatjuk meg AB és BC hosszát.

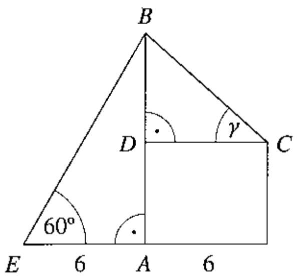
$AB = \sqrt{2,5^2 + 1}$, $BC = \sqrt{7,5^2 + 3^2}$



A lámpa legmélyebb pontja az oszlopok tetejétől kb. 2,69 m-re, illetve kb. 8,08 m-re van.

3636. Az ABE derékszögű háromszög 60°-os szögével szemközti befogója, $AB = 6 \cdot \sqrt{3}$.
$BD = 6 \cdot \sqrt{3} - 5$
A keresett szög a BCD Δ C-nél levő szöge: γ.

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{6\sqrt{3}-5}{6} \approx 0{,}8987 \Rightarrow \gamma \approx 41{,}9°.$$



3637. a) A h magasságban lévő léghajó az AT torony T csúcsából $LTC\sphericalangle = 42°10'$ emelkedési szögben, míg a léghajónak az L' tükörképe az AB szintjén lévő tóban $CTL'\sphericalangle = 47°28'$-nyi depressziószögben látszik.
TCL derékszögű háromszögben

$$\operatorname{tg}42°10' = \frac{h-30}{CT},$$

TCL' derékszögű háromszögben

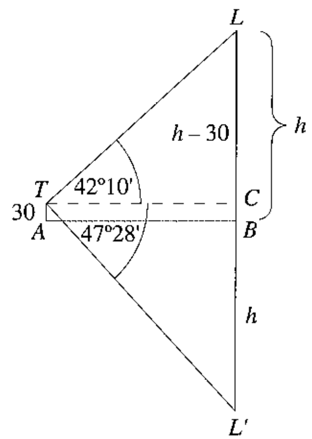
$$\operatorname{tg}47°28' = \frac{h+30}{CT}.$$

Mindkét egyenletből CT-t kifejezve és egyenlővé téve:

$$\frac{h-30}{\operatorname{tg}42°10'} = \frac{h+30}{\operatorname{tg}47°28'}$$

$$h = \frac{30 \cdot (\operatorname{tg}47°28' + \operatorname{tg}42°10')}{\operatorname{tg}47°28' - \operatorname{tg}42°10'}$$

$h \approx 325.$
Tehát a léghajó a tó víztükre felett kb. 325 méter magasan van.



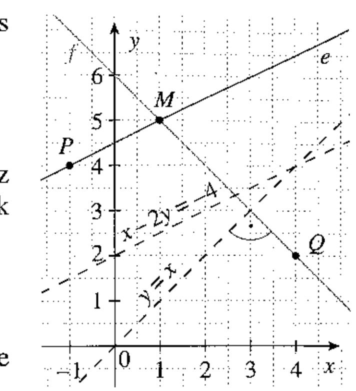
b) TCL derékszögű háromszögben TL távolság adja (légvonalban) a léghajó és a torony tetejének távolságát: $\sin 42°10' = \dfrac{h-30}{TL} \Rightarrow TL = \dfrac{h-30}{\sin 42°10'} \approx 439.$
Tehát a léghajó és a torony tetejének távolsága kb. 440 méter.

3638. Mivel e párhuzamos az $x - 2y = -4$ egyenessel, egy normálvektora $\mathbf{n}_e(1; -2)$, egy pontja $P(-1; 4)$, így egyenlete: e: $x - 2y = -9$.
Az $y = x$ egyenes meredeksége 1, a rá merőleges f egyenes meredeksége -1. $\Rightarrow$ $y = -x + b$.
Mivel f illeszkedik a $Q(4; 2)$ pontra, így $2 = -4 + b \Rightarrow b = 6$.
Tehát f egyenlete: $y = -x + 6$.

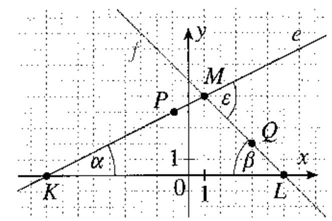
Az e és f egyenes metszéspontját az e és f egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{aligned} e&:\ x - 2y = -9 \\ f&:\ x + y = 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(1; 5).$$

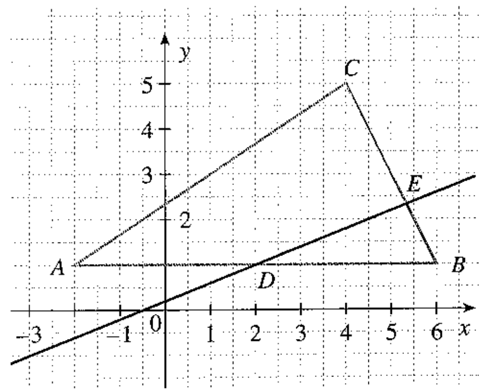
A két egyenes hajlásszöge meghatározható pl. az egyenesek normálvektorának skaláris szorzatának kétféle felírásából. $\mathbf{n}_f(1; 1)$, $\mathbf{n}_e(1; -2)$.
$\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_f = -1$
$\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_f = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cos\varphi$
Ebből $\cos\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$, ezért a normálvektorok szöge $\varphi \approx 108{,}4°$. Két egyenes hajlásszöge legfeljebb 90°, ezért az egyenesek szöge φ mellékszöge, azaz 71,6°.



Másik megoldás:
A két egyenes hajlásszöge másként is meghatározható. Legyen az e egyenes és az x tengely metszéspontja K, az f egyenes és az x tengely metszéspontja L. Az ábrából leolvasható (például az M pont koordinátáiból), hogy: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\alpha = 26{,}57°$, $\beta = 45°$.
Mivel ε külső szöge a KLM háromszögnek $\varepsilon = \alpha + \beta = 71{,}57°$.



3639. A háromszög oldalegyenesei közül kettő: AB: $y = 1$, BC: $2x + y = 13$. Az adott $2x - 5y = -1$ egyenesnek ezekkel való metszéspontjai (egyenletrendszerként összefogva és megoldva két-két egyenletet): $D = (2; 1)$, $E = \left(\dfrac{16}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$.
Tekintettel az x tengellyel párhuzamos AB oldalra, viszonylag könnyű meghatározni mind az ABC, mind a DBE háromszögek területét. $AB = 8$, a hozzá tartozó magasság (C távolsága ezen oldaltól): 4. Ezért $T_{ABC} = \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16$. $DB = 4$, a hozzá tartozó magasság (E távolsága ezen oldaltól): $\dfrac{4}{3}$. Ezért $T_{DBE} = \dfrac{4 \cdot \frac{4}{3}}{2} = \dfrac{8}{3}$. Ekkor az egyenes által az ABC háromszögből levágott másik darab, az $ADEC$ négyszög területe: $16 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{40}{3}$.



Vagyis az egyenes a háromszöget $\frac{40}{3}:\frac{8}{3} = 40:8 = 5:1$ területarányú részekre vágja.

3640. a) A metszéspont $M(-3; -1)$.

b) A két egyenes egy-egy normálvektorának (vagy irányvektorának) szöge ismeretében is megadhatjuk a választ.
Az e egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}_e(5; -2)$, az f egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}_f(1; 3)$. E két vektor φ szögét a skaláris szorzatuk ismeretében a $\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_e\mathbf{n}_f}{\mathbf{n}_e\mathbf{n}_f}$ összefüggésből határozhatjuk meg.

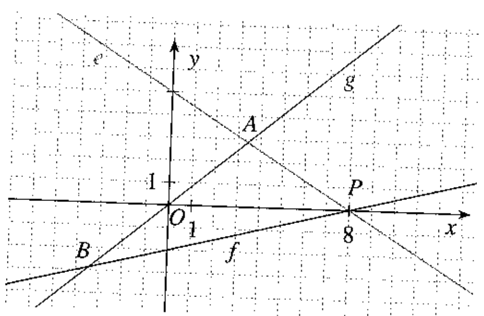
$\mathbf{n}_e\mathbf{n}_f = -1$, $\mathbf{n}_e = \sqrt{29}$, $\mathbf{n}_f = \sqrt{10}$, tehát $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{290}} \approx -0{,}0587$, azaz $\varphi \approx 93{,}37°$. A keresett hajlásszög tehát $86{,}63°$.

c) Az origóból az egyenesekre merőlegest állítunk, meghatározzuk a metszéspontokat; ezeknek az origótól való távolsága megegyezik a kérdezett távolsággal.

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= -13 \\ 2x + 5y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -\frac{65}{29} \\ y &= \frac{26}{29} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + 3y &= -6 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -\frac{3}{5} \\ y &= -\frac{9}{5} \end{aligned}\right\}$$

$$d(O,e) = \frac{13\sqrt{29}}{29} \approx 2{,}41 \qquad d(O,f) = \frac{3\sqrt{10}}{5} \approx 1{,}90$$

3641. a) A metszéspont $P(8; 0)$.



b) $m_e = -\frac{5}{8}$, $m_f = \frac{1}{4}$.
A megadott összefüggés szerint tehát
$m_g = \frac{2m_e m_f}{m_e + m_f} = \frac{5}{6}$.
A g egyenes egyenlete: $y = \frac{5}{6}x$.
Az e és a g egyenes A metszéspontját az $\left.\begin{aligned} 5x + 8y &= 40 \\ y &= \frac{5}{6}x \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása adja: $A\left(\frac{24}{7}; \frac{20}{7}\right)$.

Az f és a g egyenes B metszéspontját az $\left.\begin{aligned} x - 4y &= 8 \\ y &= \frac{5}{6}x \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása adja: $B\left(-\frac{24}{7}; -\frac{20}{7}\right)$.

Az origó tehát valóban az AB szakasz felezőpontja.

c) Az $O(0; 0)$, $P(8; 0)$, $A\left(\frac{24}{7}; \frac{20}{7}\right)$ pontok által meghatározott háromszög OP oldalához tartozó magasságának hossza éppen az A pont második koordinátája, ezért $T_{OPA} = \frac{8 \cdot \frac{20}{7}}{2} = \frac{80}{7}$.

Az ABP háromszögben OP súlyvonal, ezért $T_{ABP} = 2 \cdot T_{OPA} = \frac{160}{7}$.

3642. a) A metszéspont: $M(-3; 1)$.

b) Az ordinátatengely az e egyenest a $(0; -6{,}5)$ pontban, az f egyenest a $(0; 2)$ pontban metszi, ezért az ordinátatengely nem lehet azonos a g egyenessel.
A g egyenes egyenlete tehát írható $y = mx$ alakban is.
Először az e és g metszéspontját határozzuk meg.
$5x + 2y = -13 \ \wedge\ y = mx$
$(5 + 2m)x = -13 \ \wedge\ y = mx$
Ha $m = -\frac{5}{2}$, akkor a két egyenes párhuzamos, nincs metszéspont, tehát ez az érték nem felel meg.
Ha $m \neq -\frac{5}{2}$, akkor az egyenletrendszer így is írható:
$x = -\frac{13}{5+2m} \ \wedge\ y = -\frac{13m}{5+2m}$.
Ha tehát g metszi az e egyenest, akkor metszéspontjuk az $A\left(-\frac{13}{5+2m}; -\frac{13m}{5+2m}\right)$ pont.

Legyen az f és g egyenesek metszéspontja B. Az origó pontosan akkor felezi az AB szakaszt, ha az A pont origóra vonatkozó $A'\left(\frac{13}{5+2m}; \frac{13m}{5+2m}\right)$ tükörképe rajta van az f egyenesen (a tükörkép ekkor természetesen a B pont). Az A' koordinátáit behelyettesítve f egyenletébe: $\frac{13}{5+2m} - \frac{39m}{5+2m} = -6$.
Ebből ($m \neq -\frac{5}{2}$ feltevés felhasználásával) $m = \frac{43}{27}$ adódik.
A g egyenes egyenlete tehát: $y = \frac{43}{27}x$.

c) Legyen az origón áthaladó egyenes g.
Először e és g közös pontját határozzuk meg.

$$y = m_1x + b_1 \;\wedge\; y = \frac{m_1b_2 + m_2b_1}{b_1 + b_2}x$$

$$y = m_1x + b_1 \;\wedge\; m_1x + b_1 = \frac{m_1b_2 + m_2b_1}{b_1 + b_2}x$$

$$y = m_1x + b_1 \;\wedge\; (m_1x + b_1)(b_1 + b_2) = (m_1b_2 + m_2b_1)x$$

$$y = m_1x + b_1 \;\wedge\; (m_2 - m_1)b_1x = (b_1 + b_2)b_1$$

Ha $b_1 = 0$, akkor a g egyenes egyenlete: $y = m_1x$, vagyis g az e-vel azonos, így nincs a g-nek e és f közé eső szakasza. Tehát feltehetjük, hogy $b_1 \neq 0$.
Az egyenletrendszer ekkor így is írható:
$y = m_1x + b_1 \wedge (m_2 - m_1)x = b_1 + b_2$.
Ha $m_1 = m_2 =: m$, azaz e és f párhuzamos, akkor a g egyenes meredeksége: $\frac{mb_1 + mb_2}{b_1 + b_2} = m$, tehát g is párhuzamos e-vel és f-fel. Ebben az esetben sincs a g-nek e és f közé eső szakasza. Feltehetjük tehát, hogy $m_1 \neq m_2$.
Ekkor az egyenletrendszer:

$$y = m_1x + b_1 \;\wedge\; x = \frac{b_1 + b_2}{m_2 - m_1}$$

$$y = \frac{m_1(b_1 + b_2)}{m_2 - m_1} + b_1 \;\wedge\; x = \frac{b_1 + b_2}{m_2 - m_1}$$

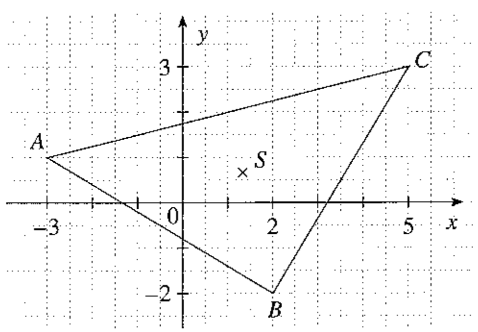
$$y = \frac{m_1b_2 + m_2b_1}{m_2 - m_1} \;\wedge\; x = \frac{b_1 + b_2}{m_2 - m_1}$$

Az e és g közös pontja tehát csak az $A\left(\frac{b_1 + b_2}{m_2 - m_1};\ \frac{m_1b_2 + m_2b_1}{m_2 - m_1}\right)$ pont lehet.

Az f és g közös pontját a fentiekhez hasonlóan is megkaphatjuk (ennél gyorsabban indexcserékkel): $B\left(\frac{b_2 + b_1}{m_1 - m_2};\ \frac{m_2b_1 + m_1b_2}{m_1 - m_2}\right)$.

Mivel $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$, ezért az origó valóban felezi az AB szakaszt.

3643. a) $\overrightarrow{BC}(3; 5) \Rightarrow a = |\overrightarrow{BC}| =$
$= \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5,8.$
$\overrightarrow{AC}(8; 2) \Rightarrow b = |\overrightarrow{AC}| =$
$= \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} \approx 8,2.$
$\overrightarrow{AB}(5; -3) \Rightarrow c = |\overrightarrow{AB}| =$
$= \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34} \approx 5,8.$



Másik megoldás:
A távolságképletből is számolható az oldalak hossza.

b) A háromszög súlypontja:

$$S\left(\frac{-3 + 2 + 5}{3};\ \frac{1 + (-2) + 3}{3}\right) \Rightarrow S\left(\frac{4}{3};\ \frac{2}{3}\right).$$

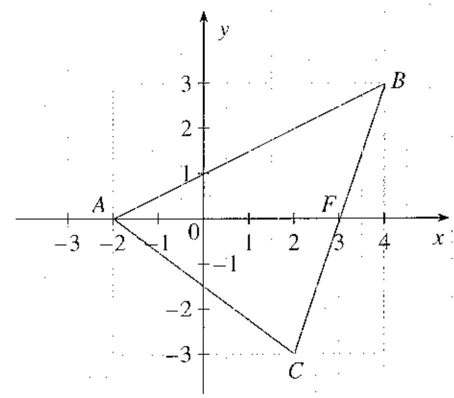
c) Az a)-ban kiszámított oldalvektorokból érdemes észrevenni, hogy $\overrightarrow{BC}$ az $\overrightarrow{AB}$ 90°-os elforgatottja, tehát $BC \perp AB$ és $BC = AB \Rightarrow$ az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Másik megoldás:
A háromszög oldalaira teljesül Pitagorasz tételének megfordítása, azaz
$(\sqrt{34})^2 + (\sqrt{34})^2 = (\sqrt{68})^2 \Rightarrow$ a háromszög derékszögű és B-nél van a derékszög.
Mivel a háromszög egyenlő szárú ($a = c$), ezért a két hegyesszöge egyenlő
$\Rightarrow \alpha = 45°;\ \gamma = 45°;\ \beta = 90°.$

3644. a) A háromszög csúcspontjainak és súlypontjának helyvektora **a**, **b**, **c**, **s**.
Ismert, hogy $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$, innen a háromszög súlypontja $S\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$.

b) A BC oldal felező pontja, $F(3; 0)$, ezért AF felezi az ABC háromszög területét, $T(ABC) = 2 \cdot T(ABF)$.
$AF = 5$ és az ehhez tartozó magasság 3, ezért $T(ABC) = 2 \cdot \frac{5 \cdot 3}{2} = 15$ (területegység).

Megjegyzés:
Ha az adott háromszög nem speciális helyzetű, akkor érdemes alkalmazni a következőt: foglaljuk a háromszöget az ábra szerint egy olyan téglalapba, amelynek oldalai párhuzamosak a kooordinátatengelyekkel. Ekkor a keresett háromszög területét úgy kapjuk meg, hogy a téglalap területéből kivonjuk a három vonalkázott derékszögű háromszög területét, azaz:
$T(ABC) = 36 - 6 - 6 - 9 = 15.$



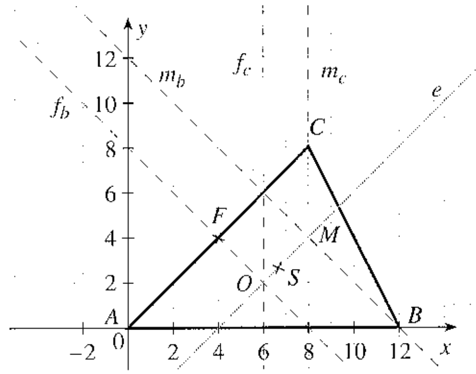
c) A B-ből induló magasságvonal egyik normálvektora: $\overrightarrow{AC}=(4;-3)$, egyenlete $4x-3y=7$.

Az A-ból induló magasságvonal egyik normálvektora: $\overrightarrow{CB}=(2;6)\parallel(1;3)$, egyenlete: $x+3y=-2$.
Az egyenletrendszer megoldása a háromszög magasságpontja: $M(1;-1)$.

3645. a) A háromszög köré írható kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Az AB oldal szakaszfelező merőlegese: f_c: $x=6$. Az AC oldal szakaszfelező merőlegese áthalad az AC oldal $F(4;4)$ felezőpontján, és egy normálvektora pl. $\mathbf{n}=\overrightarrow{AC}(8;8)\parallel\mathbf{n}'(1;1)\Rightarrow$

f_b: $x+y=8$.

$f_b\cap f_c=\{O\}\Rightarrow O(6;2)$



b) A háromszög súlypontja:

$S\left(\frac{0+12+8}{3};\frac{0+0+8}{3}\right)\Rightarrow S\left(\frac{20}{3};\frac{8}{3}\right)$.

c) A háromszög magasságpontja a magasságvonalak metszéspontja.

$m_c\parallel f_c\Rightarrow m_c$: $x=8$;

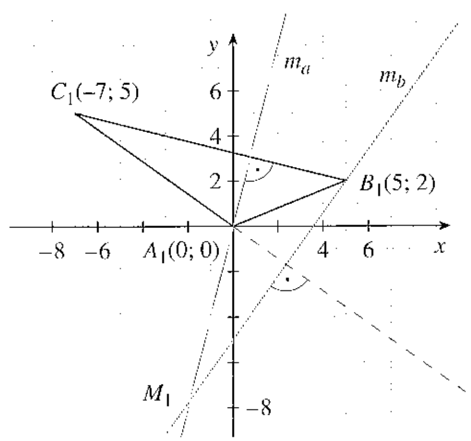
$m_b\parallel f_b$; $m_b\ni B\Rightarrow m_b$: $x+y=12$

$m_b\cap m_c=\{M\}\Rightarrow M(8;4)$

d) O; S; M egy egyenesen vannak és S az OM szakasz O-hoz közelebbi harmadoló pontja, ha $3\cdot\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}$. Ez teljesül, hiszen $\overrightarrow{OS}\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$; $\overrightarrow{OM}(2;2)$.

3646. Jelölje O az origót. Használjuk fel, hogy az origó kezdőpontú helyvektor koordinátái megegyeznek a vektor végpontjának koordinátáival!

a) $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA}+\mathbf{v}=$
$=(4,8;5,2)+(-4,8;-5,2)=(0;0)$,
tehát $A_1(0;0)$, $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OB}+\mathbf{v}=$
$=(9,8;7,2)+(-4,8;-5,2)=(5;2)$,
tehát $B_1(5;2)$, $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\mathbf{v}=$
$=(-2,2;10,2)+(-4,8;-5,2)=$
$=(-7;5)$, tehát $C_1(-7;5)$.



b) $\overrightarrow{B_1C_1}(-12;3)\parallel(4;-1)$, tehát m_a egyenlete: $4x-y=0$.
$\overrightarrow{A_1C_1}(-7;5)\parallel(7;-5)$, tehát m_b egyenlete: $7x-5y=25$.

Az M_1 magasságpont koordinátáit a $\left.\begin{array}{l}4x-y=0\\7x-5y=25\end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása adja: $M_1\left(-\frac{25}{13};-\frac{100}{13}\right)\approx(-1,92;-7,69)$.

c) A b) részben kapott eredmény segítségével gyorsan célhoz érhetünk. Az ABC háromszög M magasságpontját a $\mathbf{v}$ vektorral eltolva kaptuk az M_1 pontot, ezért $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM}+\mathbf{v}$, vagyis $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}-\mathbf{v}$.

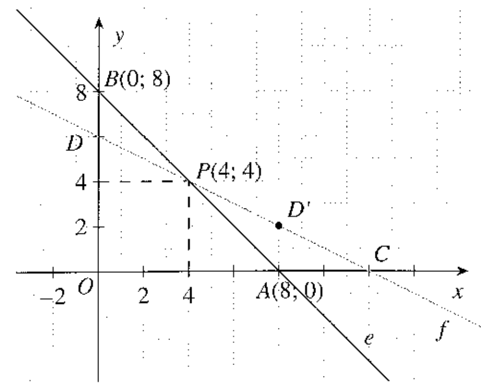
Ebből $\overrightarrow{OM}\left(\frac{187}{65};-\frac{162}{65}\right)$, így $M\left(\frac{187}{65};-\frac{162}{65}\right)\approx(2,88;-2,49)$.

d) Az ABC háromszög egybevágó az $A_1B_1C_1$ háromszöggel, így területük egyenlő. Az utóbbi háromszög területe könnyen megkapható, ha a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapba foglaljuk (egyik csúcsa a C_1 pont, egyik oldalegyenese az abszcisszatengely, egyik oldalegyenese átmegy a B_1 ponton). A téglalap területéből három derékszögű háromszög területét levonva kapjuk a keresett területet: $t=12\cdot5-\frac{5\cdot2}{2}-\frac{12\cdot3}{2}-\frac{5\cdot7}{2}=\frac{39}{2}=19,5$.

Másik megoldás:
Kiszámítjuk a háromszög egyik szögét (skaláris szorzás vagy koszinusztétel segítségével) és a szöget közrefogó két oldal hosszát, majd alkalmazzuk az ismert területképletet. (Pl. $\alpha=122,66°$, $b=\sqrt{74}$, $c=\sqrt{29}$, így
$t=\frac{\sqrt{74}\cdot\sqrt{29}\cdot\sin122,66°}{2}\approx19,50$.)

3647. Belátjuk, hogy az $m=-1$ iránytangensű (meredekségű) egyenes alkotja a koordinátatengelyek pozitív ágával a legkisebb területű háromszöget.

Igazolás:
A $P(4;4)$ pontra illeszkedő egyenesek közül csak a negatív iránytangensű egyenesek metszik mindkét koordinátatengely pozitív ágát. Ilyen egyenesek közül az $m=-1$ meredekségű e egyenes az x, illetve y tengelyt A, illetve B pontban metszi, az $m\neq-1$ tetszőleges meredekségű f egyenes az x, illetve y tengelyt C, illetve D pontban metszi az ábra szerint.

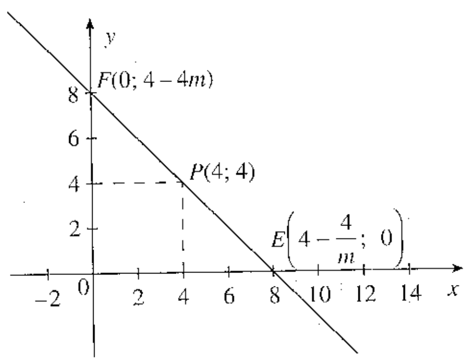


P felezi AB-t. D-nek P-re vonatkozó tükörképe D'. Így $BDP\,\Delta \cong AD'P\,\Delta$.
Minthogy D' a PC szakasz belső pontja, ezért $T(BDP) < T(ACP)$.
Így $T(ABO) < T(CDO)$.

Ezek szerint a keresett egyenes egyenlete $y = -x + 8$ és $T_{\min} = \dfrac{8 \cdot 8}{2} = 32$.

Megjegyzés:
1) Ha C az OA szakasz belső pontja, akkor C-nek P-re vonatkozó tükörképe lesz PD szakasz belső pontja. Az igazolás gondolatmenete megfelelő „átbetűzéssel” az előzővel megegyező.
2) A háromszög trigonometrikus területképletével is igazolható, hogy $T(BDP) < T(ACP)$.

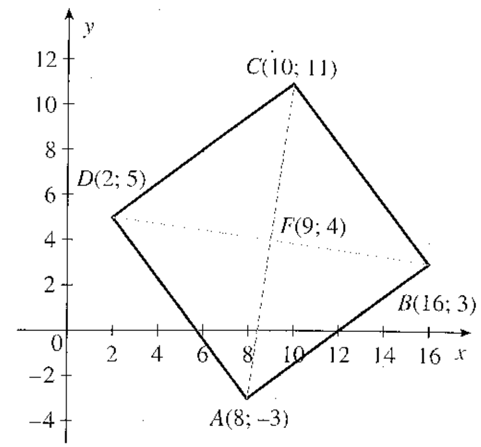
Másik megoldás:
A $P(4; 4)$ pontra illeszkedő $m < 0$ meredekségű egyenesek metszik a koordinátatengelyek pozitív ágát. Ezek egyenlete $y - 4 = m(x - 4)$.
Az y tengelyt az $F(0; 4 - 4m)$, az x tengelyt az $E\left(4 - \dfrac{4}{m};\ 0\right)$ pontban metszik.



A lemetszett háromszög területe:
$$t = \frac{1}{2}(4 - 4m)\left(4 - \frac{4}{m}\right).$$
Ez a következő alakban is írható:
$$t = 16 + 8\left[(-m) + \frac{1}{(-m)}\right].$$
Minthogy $(-m) > 0$, ezért $(-m) + \dfrac{1}{(-m)} \geq 2$. (Lásd a 3538. a) feladatot!)

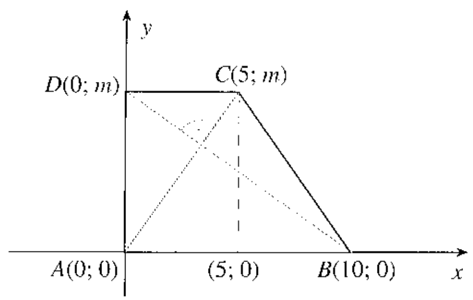
Ez az összeg minimális, ha $(-m) + \dfrac{1}{(-m)} = 2 \Rightarrow -m = 1$, azaz $m = -1$.
Ebben az esetben lesz a lemetszett háromszög területe minimális, és ez a minimális terület $t_{\min} = 32$ területegység.
A keresett egyenes egyenlete $y = -x + 8$.

3648. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást az $F(9; 4)$ pontban.
$AC = \sqrt{2^2 + 14^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.
Tehát az átlók egyenlők. Ez azt jelenti, hogy a rombusz négyzet.
Az $\overrightarrow{FC}(1; 7)$ vektort F körül $90°$-kal, illetve $-90°$-kal elforgatva kapjuk az $\overrightarrow{FD}(-7; 1)$ és az $\overrightarrow{FB}(7; -1)$ vektorokat.
Innen, minthogy
D helyvektora $\mathbf{d} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD}$ és
B helyvektora $\mathbf{b} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB}$, így
$D(2; 5)$ és $B(16; 3)$.



Másik megoldás:
A két átló egyenlő. (Bizonyítását lásd az első megoldásban.)
BD átló merőleges az AC átlóra. Ezért $\overrightarrow{AC}(2; 14) \parallel (1; 7)$ egyúttal a BD átló egyenesének egy normálvektora. Az átlók $F(9; 4)$-ben metszik egymást. Erre illeszkedik a BD átló, amelynek egyenlete $x + 7y = 37 \Rightarrow x = -7y + 37$ (*).
B és D illeszkedik még az F középpontú FA sugarú körre is.
$FA^2 = 50$, így a kör egyenlete $(x - 9)^2 + (y - 4)^2 = 50$ (**)
B és D koordinátái a (*) és (**)-ból álló egyenletrendszer megoldásából kapjuk meg: $D(2; 5)$, $B(16; 3)$.

3649. a) Legyen a koordináta-rendszer origója az A pont, a merőleges szár az y tengely, alapja pedig az x tengely, ekkor: $A(0; 0)$, $B(10; 0)$, lásd az ábrát.



b) $D(0; m)$, $C(5; m)$. A számszerű válaszhoz ki kell számolnunk m értékét, amire később is szükség lesz a trapéz területénél. Ehhez az egyetlen még nem használt feltételt fogjuk felírni, nevezetesen, hogy az átlók egymásra merőlegesek. Ez teljesül, ha egy-egy irányvektoruk skaláris szorzata 0.
$\overrightarrow{AC} = (5; m)$, míg $\overrightarrow{BD} = (-10; m)$. Ekkor a skaláris szorzatuk: $-50 + m^2 = 0$.
Innen $m = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$, mivel $m > 0$. Tehát $D(0;\ 5\sqrt{2})$ és $C(5;\ 5\sqrt{2})$.

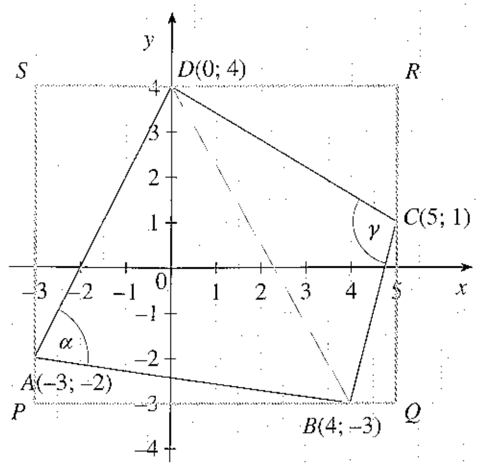
c) Ezzel a terület $\dfrac{(10 + 5) \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 37{,}5\sqrt{2} \approx 53.$

3650. A négyszöget két háromszögre bontjuk. Kiszámítjuk az oldalak hosszát, majd egy-egy szöget, végül a trigonometrikus területképletet alkalmazzuk.

$(AB)^2 = 50$; $(BC)^2 = 17$;

$(BD)^2 = 65$; $(DA)^2 = 45$;

$(CD)^2 = 34$.



Az $ABD\,\Delta$ α szögét koszinusztétellel számítjuk ki.

$$65 = 50 + 45 - 2\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{45}\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10};$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}},\ (0 < \alpha < 90°).$$

$$T(ABD) = \frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{45}\cdot\sin\alpha}{2} = \frac{15\sqrt{10}\cdot 3}{2\sqrt{10}} = 22,5.$$

A $BCD\,\Delta$ γ szögét is koszinusztétellel számítjuk ki.

$$65 = 34 + 17 - 2\sqrt{34}\cdot\sqrt{17}\cdot\cos\gamma,$$

$$\cos\gamma = -\frac{7}{17\sqrt{2}} \Rightarrow \sin^2\gamma = 1 - \frac{49}{289\cdot 2} = \frac{529}{578} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{23}{17\sqrt{2}}.$$

$$T(BCD) = \frac{\sqrt{34}\cdot\sqrt{17}\cdot\sin\gamma}{2} = \frac{17\cdot 23\sqrt{2}}{2\cdot 17\sqrt{2}} = \frac{23}{2} = 11,5.$$

$T(ABCD) = 22,5 + 11,5 = 34$ (területegység).

Másik megoldás:

Húzzunk a négyszög csúcspontjain keresztül a koordinátatengelyekkel párhuzamost a fenti ábra szerint. A négyszög területét megkapjuk, ha a $PQRS$ téglalap területéből kivonjuk a kiegészítő derékszögű háromszögek területét.

$PQ = 8$, $QR = 7$, $T(PQRS) = 56$.

$$T(ABP) = \frac{1\cdot 7}{2} = \frac{7}{2};$$

$$T(BQC) = \frac{1\cdot 4}{2} = 2;$$

$$T(CRD) = \frac{3\cdot 5}{2} = \frac{15}{2};$$

$$T(DSA) = \frac{3\cdot 6}{2} = 9.$$

Ezekből $T(ABCD) = 56 - 22 = 34$.

3651. a) Írjuk fel a négyszög oldalvektorait!

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (8; 2)$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (-5; 3)$,

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (-4; -1)$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = (1; -4)$

Látható, hogy $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$, tehát AB és CD párhuzamos szakaszok, továbbá $\overrightarrow{CD}^{+90°} = \overrightarrow{DA}$, így CD merőleges az AD szakaszra.

Az $ABCD$ négyszög tehát valóban derékszögű trapéz.

b) A trapéz kerülete: $\sqrt{68} + \sqrt{34} + 2\sqrt{17} = (4 + \sqrt{2})\sqrt{17} \approx 22,3$,

területe: $\dfrac{\sqrt{68} + \sqrt{17}}{2}\cdot\sqrt{17} = \dfrac{51}{2} = 25,5$.

3652. a) Az egyik középvonal az AB és CD szakasz felezőpontjait köti össze, a másik BC és DA felezőpontjait. Legyenek az ábra szerint ezek a felezőpontok rendre: F, G, H, I. Ekkor $F(-2; -1)$, $G(3,5; 2,5)$, $H(0,5; 4,5)$, $I(1; -3)$. Nekünk FG és HI egyenlete kell. FG egy irányvektora $(5,5; 3,5)$, ekkor egy normálvektora: $(-3,5; 5,5)$, s így egyenlete:

$-3,5x + 5,5y =$

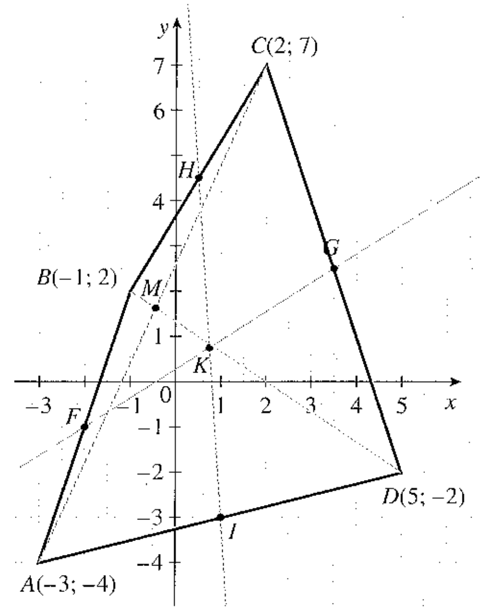
$= -3,5\cdot(-2) + 5,5\cdot(-1) =$

$= 7 - 5,5 = 1,5$ azaz $-7x + 11y = 3$.

HI egy irányvektora: $(0,5; -7,5)$, ezzel egy normálvektora: $(7,5; 0,5)$, s egyenlete: $7,5x + 0,5y =$

$= 7,5\cdot 1 + 0,5\cdot(-3) = 6$, azaz

$15x + y = 12$.



b) A középvonalak metszéspontja legyen K, ennek koordinátáit a két középvonal egyenletéből összeállított egyenletrendszer megoldása adja. A HI egyenes egyenletéből: $y = 12 - 15x$, ezt FG egyenletébe beírva: $-7x + 11(12 - 15x) = 3$, ahonnan $-172x = -129$, tehát $x = 0,75$, míg $y = 0,75$. Tehát $K(0,75; 0,75)$.

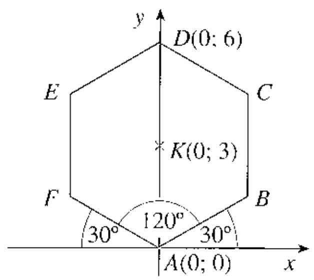
c) Az átlók metszéspontja az AC és BD egyenesek metszéspontja. $\overrightarrow{AC}(5; 11)$ azaz egyenesének egy normálvektora $(-11; 5)$, ez átmegy pl. a $C(2; 7)$ ponton, tehát egyenlete: $-11x + 5y = -11\cdot 2 + 5\cdot 7 = 13$. $\overrightarrow{BD}(6; -4)$, azaz egyenesének egy normálvektora $(4; 6)$, ez átmegy pl. a $B(-1; 2)$ ponton, tehát egyenlete: $4x + 6y = 4\cdot(-1) + 6\cdot 2 = 8$. Az átlók metszéspontja, M, közös megoldása az átlók egyenletéből álló egyenletrendszernek. Az első egyenletet 6-tal, a másodikat 5-

tel szorozva: $-66x + 30y = 78$ és $20x + 30y = 40$, kivonva a másodikból az elsőt: $86x = -38$, amiből $x = -\frac{19}{43} \approx -0{,}44$, majd visszahelyettesítve $y = \frac{70}{43} \approx 1{,}63$ adódik.

3653. a) Legyenek a csúcsok koordinátái rendre $A(p;\ q)$, $B(r;\ s)$, $C(t;\ u)$, $D(v;\ w)$. Ekkor AC átló felezőpontja $F\left(\frac{p+t}{2};\ \frac{q+u}{2}\right)$, míg BD átlóé $G\left(\frac{r+v}{2};\ \frac{s+w}{2}\right)$.
Az átlók felezőpontját összekötő szakasz felezőpontja éppen a súlypont lesz, hiszen $\frac{\frac{p+t}{2}+\frac{r+v}{2}}{2} = \frac{p+r+t+v}{4}$; hasonlóan $\frac{\frac{q+u}{2}+\frac{s+w}{2}}{2} = \frac{q+s+u+w}{4}$; ami a feladat szövege szerint éppen a súlypont két koordinátája.

b) Az előző levezetésből már megkaptuk, hogy a súlypont felezi, vagyis 1 : 1 arányban osztja az FG szakaszt.

3654. A hatszög leghosszabb átlója 6, tehát oldalának hossza 3.



a) AB egyenesének meredeksége: $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ugyanennyi a DE oldalegyenes meredeksége is. BC és EF egyenese párhuzamos az ordinátatengellyel, AF és CD egyenesének meredeksége: $\operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
A BC, illetve az EF egyenes az ordinátatengelytől $3\cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ távolságra van.
A hatszög oldalegyeneseinek egyenlete tehát

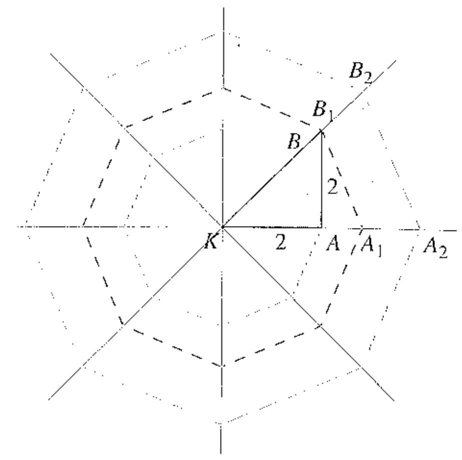
AB: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $\quad BC$: $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\quad CD$: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$,

DE: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$, $\quad EF$: $x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\quad AF$: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

b) Mindkét kör középpontja a $K(0;\ 3)$ pont, sugaruk hossza 3, illetve $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
A körülírt kör egyenlete: $x^2 + (y-3)^2 = 9$,
a beírt kör egyenlete: $x^2 + (y-3)^2 = \frac{27}{4}$.

c) $T = 6 \cdot \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \approx 23{,}38$

3655. Hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a lineáris méretek (megfelelő szakaszok) négyzetének arányával, azaz a hasonlóság arányának négyzetével.
Jelöljük az eredeti területet T_0-lal, a kétszeres területet T_1-gyel, illetve a négyszeres területet T_2-vel.

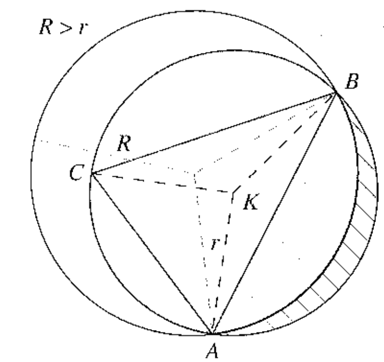


A hasonlóság aránya λ_1, illetve λ_2.
Ekkor $T_1 = \lambda_1^2 \cdot T_0$,
másrészt $T_1 = 2T_0 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{2}$.
Ugyanígy $T_2 = \lambda_2^2 \cdot T_0$,
másrészt $T_2 = 4 \cdot T_0 \Rightarrow \lambda_2 = 2$.

a) Így kétszeres területet kapunk, ha a lineáris méretek $\sqrt{2}$-szeresét vesszük:
$KB_1 = \sqrt{2}KB$, $KB = KA = 2$.
Ezt használjuk fel a szerkesztésben. KB_1 egyúttal a KAB_1 egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója, $KB_1 = KA \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
Négyszeres területet kapunk, ha a lineáris méretek kétszeresét vesszük:
$KB_2 = 2 \cdot KB = 4$.

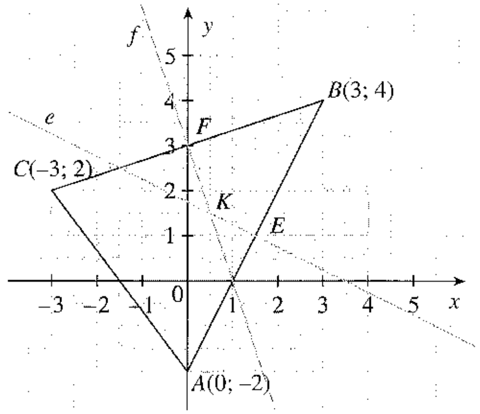
b) A szabályos nyolcszög 8 egybevágó, 45°-os szárszögű egyenlő szárú háromszögből áll. Az eredeti, AB oldalú nyolcszög területe $T_0 = 8 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 45°}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$.
Az A_1B_1 oldalú nyolcszög területe $T_1 = 2 \cdot T_0 = 16\sqrt{2}$.
Az A_2B_2 oldalú nyolcszög területe $T_2 = 4T_0 = 32\sqrt{2}$.
A kapott nyolcszögek területe az ábrán $T_1 \approx 22{,}6$,
$T_2 \approx 45{,}3$.

3656. a) Az öntözőberendezésnek a háromszög köré írt kör K középpontjában kell lennie. Ha ugyanis máshová helyezzük, akkor az a háromszög valamely csúcsától távolabbra kerül. Ez esetben az „öntözés sugarát” növelni kell. Minthogy a háromszög területe nem változik, ezért a feleslegesen öntözött terület így nagyobb lesz. Az optimális (legjobb) megoldást szemlélteti az ábra. A megoldás: az ABC háromszög köré írt r



sugarú kör. Ha ennek K középpontja helyett más középpontot választunk, akkor annak a körnek az R sugarára $R > r$ áll fenn.

A középpontot meghatározhatjuk a háromszög két oldalfelező merőlegesének metszéspontjaként.



$E\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $F(0; 3)$

$\overrightarrow{AB}(3; 6) \parallel (1; 2) = \mathbf{n}_e$,

$\overrightarrow{CB}(6; 2) \parallel (3; 1) = \mathbf{n}_f$

$E \in e$: $\quad x + 2y = \frac{7}{2}$;

$F \in f$: $\quad 3x + y = 3$.

Az egyenletrendszer megoldása:

$x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$.

Az öntözőberendezés legkedvezőbb helye: $K\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

b) Az öntözött terület sugara: $r = KA = \sqrt{12,5}$.

Az öntözött terület: $T = r^2\pi = 12,5\pi \approx 39,3$.

3657. a) $y^2 = 4x^2 \Leftrightarrow (y = 2x \vee y = -2x)$.

Az $y^2 = 4x^2$ egyenletű alakzat pontjai tehát két egyenest alkotnak, az $y = 2x$, illetve $y = -2x$ egyenletű egyenest.

b) A közös pontokat az alábbi két egyenletrendszer megoldásai adják:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = 17 \end{array}\right\}, \text{ illetve } \left.\begin{array}{l} y = -2x \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = 17 \end{array}\right\}.$$

Az első egyenletrendszer megoldásai: (0; 0) és (3,6; 7,2), a második egyenletrendszer megoldásai: (0; 0) és (–2,8; 5,6).

A két alakzatnak tehát három közös pontja van: (0; 0), (3,6; 7,2) és (–2,8; 5,6).

3658. $$\left.\begin{array}{ll} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 & \text{I.} \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 = 0 & \text{II.} \end{array}\right\}.$$

a) Az ábrázoláshoz meg kell állapítanunk a körök középpontját és sugarát. Ezek kiolvashatók a körök középponti egyenletéből, amit teljes négyzetté kiegészítéssel kapunk meg.

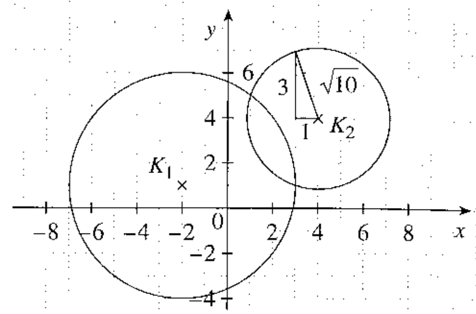
$$\left.\begin{array}{l} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 10 \end{array}\right\}.$$

A két kör középpontja és sugara:

$K_1(-2; 1)$, $r_1 = 5$,

$K_2(4; 4)$, $r_2 = \sqrt{10}$.

Ennek alapján az ábra elkészíthető.



b) A két kör közös pontjainak koordinátáit az I. és II. egyenletből álló egyenletrendszer megoldásából kapjuk.

I – II. $12x + 6y = 42 \Rightarrow 2x + y = 7 \Rightarrow y = -2x + 7 \quad (h)$

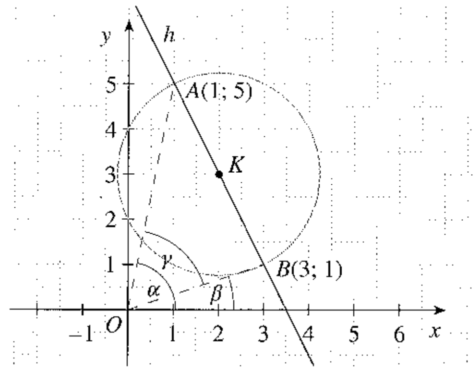
A h egyenesből kimetszett húr végpontjait az (I). és (h)-ból álló egyenletrendszer megoldása adja.

$(x + 2)^2 + (-2x + 6)^2 = 25$. Ennek a megoldása $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Ezeket behelyettesítve a (h) egyenletbe kapjuk, hogy $y_1 = 1$, $y_2 = 5$.

A húr két végpontja:

$A(1; 5)$, $B(3; 1)$.

A keresett AB átmérőjű kör középpontja $K(2; 3)$, sugara $r = \sqrt{5}$, egyenlete: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.



c) $\gamma = \alpha - \beta$, $\quad \operatorname{tg}\alpha = 5$, $\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. *

$\alpha \approx 78,69°$; $\beta \approx 18,43°$; $\gamma = \alpha - \beta \approx 60,26°$.

*-tól másként

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{5 - \frac{1}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}.$$

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{7}{4} \Rightarrow$ keresett $AOB\sphericalangle = \gamma \approx 60,26°$.

Megjegyzés:

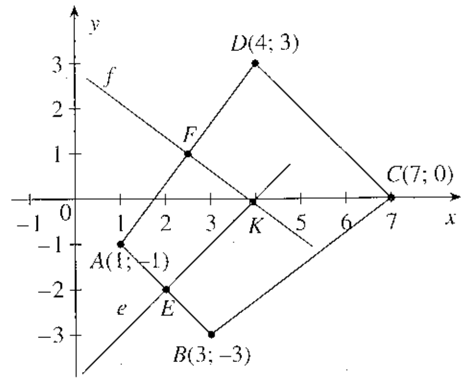
A γ szög meghatározható skaláris szorzattal is:

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos\gamma = \sqrt{26} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\gamma$,

másrészt $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3 + 5 = 8$.

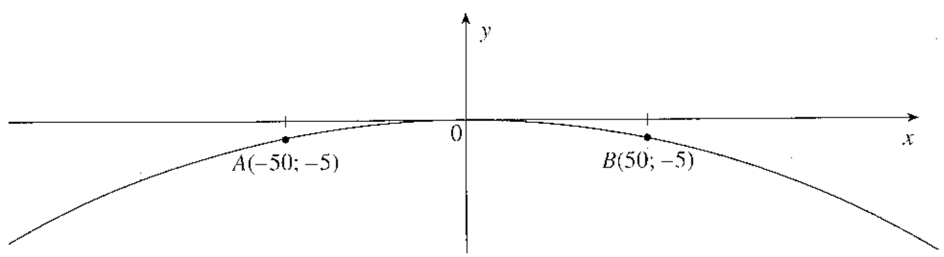
Ezekből $\cos\gamma = \frac{8}{\sqrt{260}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \approx 0,4961 \Rightarrow \gamma \approx 60,26°$.

3659. $\overrightarrow{AB}(2;-2)$, $\overrightarrow{CD}(-3;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$
A két szemközti oldal párhuzamos, tehát az $ABCD$ négyszög trapéz.



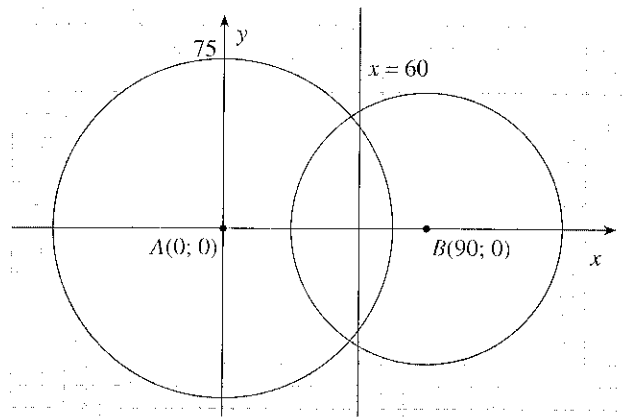
$\overrightarrow{AD}(3;4)$; $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.
$\overrightarrow{BC}(4;3)$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.
A két szár egyenlő, (de nem párhuzamos), tehát a trapéz tengelyesen szimmetrikus, azaz körbe írható.
A kör középpontját pl. két szomszédos oldal felezőmerőlegesének metszéspontja adja meg: $e \cap f = \{K\}$.
AB felezőpontja $E(2;-2) \to e$, $\overrightarrow{AB}(2;-2) = \mathbf{n}_e$,
e: $2x - 2y = 8 \Rightarrow y = x - 4$ *
AD felezőpontja $F\left(\frac{5}{2};1\right) \to f$, $\overrightarrow{AD}(3;4) = \mathbf{n}_f$,
f: $3x + 4y = \frac{15}{2} + 4 \Rightarrow 6x + 8y = 23$ **
A * és a **-ból álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk az e és f metszéspontját, K-t. $K\left(\frac{55}{14}; -\frac{1}{14}\right)$.
A kör sugara pl. $CK = r = \sqrt{\left(\frac{43}{14}\right)^2 + \left(\frac{1}{14}\right)^2} \Rightarrow r^2 = \frac{1850}{196} = \frac{925}{98}$
A négyszög köré írható kör egyenlete: $\left(x - \frac{55}{14}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{14}\right)^2 = \frac{925}{98}$.

3660. A híd mint körív húrhossza 100, míg a körszelet magassága 5 egység. A teljes kör egyenletét (amelyet $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ alakban keresünk) abból kapjuk meg, hogy középpontja az ábra szerint, mivel az ív szimmetrikus az y tengelyre, ezért az y tengelyen van, tehát $u = 0$.



Az egyenlethez a v és r értékeket kell még megadni, de mivel a körvonal az origón átmegy, ezért $-v = r$ is teljesül. Az utolsó feltétel még, hogy átmegy az $(50;-5)$ ponton, tehát: $(50-0)^2 + (-5-v)^2 = 50^2 + (-5+r)^2 = r^2$, ahonnan $-10r + 2525 = 0$, azaz $r = = 252{,}5$.
Ezzel a keresett kör egyenlete: $x^2 + (y + 252{,}5)^2 = 63756{,}25$.

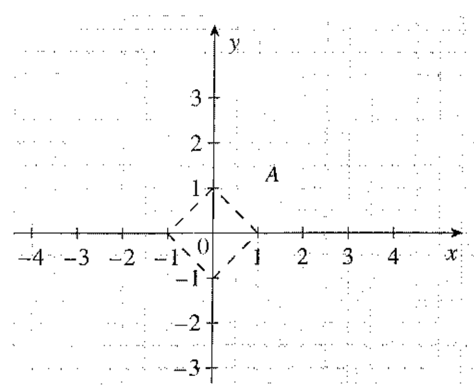
3661. a) Mivel az A pont az origó, célszerűen úgy vesszük fel az x tengelyt, hogy az a két adót összekötő egyenes legyen, ekkor $B(90;0)$, és az AB-re merőleges egyenes egyenlete, amelyik A-tól 60 km-re halad: $x = 60$.



b) Meg kell nézni a két adó középpontú 75, illetve 60 sugarú kör és az egyenes metszéspontjait, és a két húr közös része lesz a megoldás. Az A pont körüli körbe eső húr végpontjaira: $x = 60$ és $x^2 + y^2 = 75^2$ egyenletek teljesülnek, ahonnan $y^2 = 2025$, tehát $y_1 = 45$; $y_2 = -45$. A B pont körüli kör esetén $x = 60$ és $(x-90)^2 + y^2 = 60^2$, ahonnan $y^2 = 2700$ és így $|y| = 30\sqrt{3} \approx 51{,}96$. Tehát a közös rész a szűkebb tartomány, a $(60;-45)$ és $(60;45)$ végpontú szakasz pontjainak halmaza.

c) A két kör egyesítésén kívüli pontokat kell megjelölni, lásd az ábra pirossal színezett részét.

3662. Ábrázoljuk a két feltételt külön-külön!
1) Legyenek az A halmaz elemei azok a síkbeli $P(x;y)$ pontok, melyek koordinátáira teljesül: $1 < |x| + |y|$.
I. síknegyedben: $x \geq 0$; $y \geq 0 \Rightarrow$
$1 < x + y \Rightarrow y > -x + 1$.
II. síknegyedben: $x \leq 0$; $y \geq 0 \Rightarrow$
$1 < -x + y \Rightarrow y > x + 1$.
III. síknegyedben: $x \leq 0$; $y \leq 0 \Rightarrow$
$1 < -x - y \Rightarrow y < -x - 1$.
IV. síknegyedben: $x \geq 0$; $y \leq 0 \Rightarrow$
$1 < x - y \Rightarrow y < x - 1$.



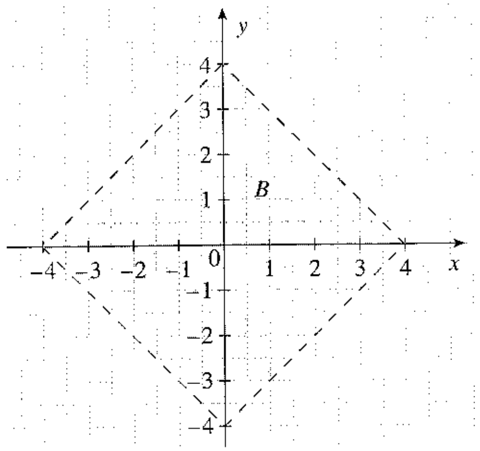
2) Legyenek a B halmaz elemei azok a síkbeli $Q(x; y)$ pontok, melyek koordinátáira teljesül: $|x| + |y| < 4$.

I. síknegyedben: $x \geq 0$; $y \geq 0 \Rightarrow x + y < 4 \Rightarrow y < -x + 4$.

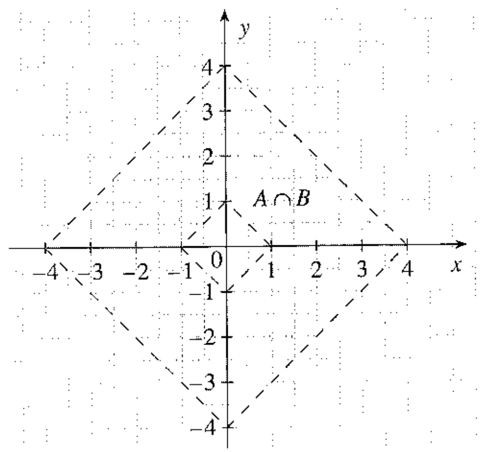
II. síknegyedben: $x \leq 0$; $y \geq 0 \Rightarrow -x + y < 4 \Rightarrow y < x + 4$.

III. síknegyedben: $x \leq 0$; $y \leq 0 \Rightarrow -x - y < 4 \Rightarrow y > -x - 4$.

IV. síknegyedben: $x \geq 0$; $y \leq 0 \Rightarrow x - y < 4 \Rightarrow y > x - 4$.



A két halmaz közös része, azaz $A \cap B$ halmaz pontjainak koordinátái adják az egyenlőtlenség megoldását, ez koordináta-rendszerben ábrázolva:

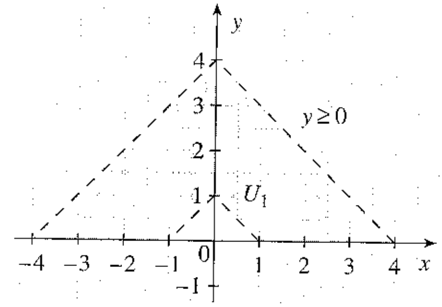


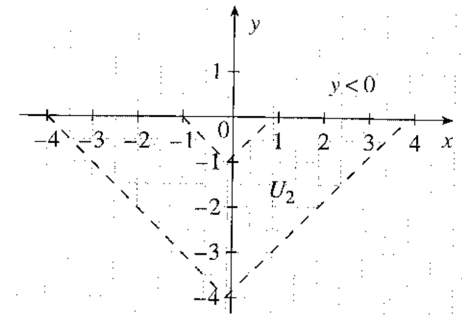
Másik megoldás:

Az adott $1 < |x| + |y| < 4$ egyenlőtlenségrendszer.

1) ha $y \geq 0$, akkor
$1 - |x| < y < 4 - |x|$

2) ha $y < 0$, akkor
$1 < |x| - y < 4$ beszorozva -1-gyel
$-1 > -|x| + y > -4$
$|x| - 4 < y < |x| - 1$





Ha $y \geq 0$, akkor a beszínezett U_1 tartomány a megoldás; ha $y < 0$, akkor U_2. Mivel $y \geq 0$ és $y < 0$ közül pontosan az egyik teljesül ezért, a megoldás $U = U_1 \cup U_2$. (Lásd az előző megoldás utolsó ábráját.)

3663. Tekintsünk egy százezer fős mintát. Ebben 40 beteg van, köztük 45% dohányos, akkor 18 dohányos beteg van. Tudjuk, hogy a 99 960, ebben a betegségben nem szenvedő között 20% a dohányos, tehát 19 992 dohányos van, aki nem beteg. A dohányosok összlétszáma eszerint 19 992 + 18 = 20 010 fő. Ennek a 18 fő a 0,09%-a. A nemdohányosok száma (100 000 – 20 010 =) 79 990 fő, köztük (40 – 18 =) 22 beteg van, tehát kb. 0,03%. Azaz a dohányosok között kb. háromszor olyan gyakori ez a betegség, mint a nemdohányosok között. (Bár mindkét „táborban" kicsi az arány, hiszen elég ritka betegségről van szó. A betegek aránya a teljes népességben 0,04%.)

3664. Legyen a negyedik mérési eredmény x watt.

A négy mért érték átlaga: $\dfrac{5,8 + 2 \cdot 6,1 + x}{4} = \dfrac{x + 18}{4} = 0,25x + 4,5.$

A feladat szövege alapján a szórásnégyzet 0,015, tehát

$$0,015 = \frac{(0,25x + 4,5 - 5,8)^2 + 2(0,25x + 4,5 - 6,1)^2 + (0,25x + 4,5 - x)^2}{4}$$

$0,06 = (0,25x - 1,3)^2 + 2(0,25x - 1,6)^2 + (4,5 - 0,75x)^2$

$0,75x^2 - 9x + 27 = 0$

$x^2 - 12x + 36 = 0$

$(x - 6)^2 = 0$

$x = 6$

A hiányzó mérési eredmény tehát 6 watt.

Ellenőrzés:

A négy mérési eredmény átlaga 6 watt, szórása pedig $\sqrt{\dfrac{0,2^2+2\cdot 0,1^2+0^2}{4}}=$

$=\sqrt{\dfrac{0,06}{4}}=\sqrt{0,015}$ watt, ami megegyezik a megadott értékkel.

3665. Legyen a két hiányzó mérési eredmény x kiloohm, illetve y kiloohm.

A négy mérési eredmény átlaga: $\dfrac{x+y+4,1+3,8}{4}=\dfrac{x+y+7,9}{4}=4,0.$

Rendezés után: $x+y=8,1$.

A szórásnégyzet: $0,122^2=\dfrac{(x-4)^2+(y-4)^2+0,1^2+0,2^2}{4}$;

rendezés (és kerekítés) után: $(x-4)^2+(y-4)^2=0,01$.

Megoldandó tehát az $\left.\begin{array}{r} x+y=8,1 \\ (x-4)^2+(y-4)^2=0,01 \end{array}\right\}$ másodfokú egyenletrendszer.

Két megoldás adódik: (4,0; 4,1) és (4,1; 4,0).

A hiányzó két mérési eredmény tehát 4,0 kΩ, illetve 4,1 kΩ.

Ellenőrzés:

A 3,8 kΩ; 4,0 kΩ; 4,1 kΩ; 4,1 kΩ mérési adatok átlaga valóban 4,0 kΩ,

szórása pedig $\sqrt{\dfrac{0,2^2+0^2+2\cdot 0,1^2}{4}}=\sqrt{0,015}\approx 0,122$ kΩ,

ami a megadottal egyező.

3666. a) Az átlagot megadó tört számlálójában a megfelelően súlyozott jegyek – témazárók, röpdolgozatok, nyulak, boszorkányok – összege, a nevezőben a súlyok összege, vagyis az osztályzatok „száma" szerepel.

Szandra átlaga: $\dfrac{2\cdot(2+4+5)+1\cdot(4+4+5+5)+\frac{9}{4}\cdot 5+\frac{1}{4}\cdot 1}{2\cdot 3+1\cdot 4+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\dfrac{51,5}{12,5}=4,12;$

míg Dávidé: $\dfrac{2\cdot(3+1)+1\cdot(2+3)+\frac{3}{4}\cdot 1}{2\cdot 2+1\cdot 2+\frac{3}{4}}=\dfrac{13,75}{6,75}\approx 2,04.$

Eszerint Szandra 4-esre, Dávid 2-esre számíthatott félévkor.

b) A legnagyobbat természetesen a 2-es témazáró kijavításával javíthat Szandra: ha helyette 5-öst ír, akkor átlagában a számláló $2\cdot(5-2)=6$-tal nő, míg a nevező változatlan marad. Az $\dfrac{57,5}{12,5}=4,60$ átlagra pedig már ötöst kap. (Ha csak négyesre javítja a kettesét, az még kevés. De megírta ötösre...)

c) Ahhoz, hogy Dávid átlagának 6,75 nevezőjű törtje meghaladja a 2,50-os értéket, a számlálónak legalább $6,75\cdot 2,50=16,875$-nek kell lennie, vagyis a mostani 13,75-ről legalább 3,125-et kell javulnia. Ha ő is megírná a témazárót ötösre, akkor $2\cdot(5-3)=4$ jegyet javítana, ami tehát már elegendő volna.

d) Van bizony! Ha ugyanis a hármas helyett netán egyest ír, akkor a számláló $2\cdot(1-3)=-4$-gyel változik, azaz 9,75-ra csökken, ami a 6,75-os nevezővel osztva már csak 1,44-os átlagot, tehát bukást jelent. (Sajnos, ez történt...)

3667. a) $\dfrac{1,071\cdot 10^8}{1,05\cdot 10^3}=1,02\cdot 10^5$, tehát 102 ezer forint a megkérdezettek átlagos havi jövedelme.

b) Igen. Például: ha 100-an havi 19 000 Ft-t, 100-an havi 185 000 Ft-ot és 850-en havi 102 000 Ft-ot keresnek.

c) Igen. Például 100-an havi 301 000 Ft-ot keresnek, a többi 950 ember pedig összesen havi 77 millió forintot (átlagosan havi kb. 81 052,6 Ft-ot).

d) Ha a kérdezett számot x-szel jelöljük, akkor teljesülnie kell a $2\cdot 10^5x\le 1,071\cdot 10^8$ egyenlőtlenségnek. Ebből $x\le 535,5$, tehát legfeljebb 535 megkérdezettnek lehet legalább havi 200 000 Ft jövedelme.

e) 210-en havi 50 000 Ft-ot kapnak, tehát összesen $1,05\cdot 10^7$ forintot, így a többi 840 megkérdezettre összesen havi $9,66\cdot 10^7$ forint jut. A d) részben alkalmazott gondolatmenettel ebből az adódik, hogy legfeljebb $\dfrac{9,66\cdot 10^7}{2\cdot 10^5}=483$-an kereshetnek legalább havi 200 000 Ft-ot.

3668. Csak akkor nem tud a két kiválasztott egymással beszélni, ha az egyiket az angolul és magyarul, a másikat a franciául és németül tudó csoportból választjuk ki. Ez $25\cdot 25$ lehetőség.

Az összes eset száma: $\dbinom{100}{2}$. Így annak a valószínűsége, hogy nem tudnak egymással beszélni: $\dfrac{25^2}{\dbinom{100}{2}}=\dfrac{2\cdot 625}{100\cdot 99}=\dfrac{25}{198}$.

Annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott két résztvevő tud egymással beszélni: $1-\frac{25}{198}=\frac{173}{198}\approx 0,8737$.

3669. a) A 10 szám közül az elsőt, a-t, 9-féleképpen húzhatjuk ki ($a \neq 0$), $\frac{9}{10}$ valószínűséggel. A második számot is 9 közül kell kihúzni, $b \neq a$ miatt $\frac{9}{10}$ valószínűséggel. A harmadik és negyedik szám egyértelműen meghatározott, a 10 szám közül csak egy jó, ezek kihúzásának valószínűsége mindkét esetben $\frac{1}{10}$. A húzások egymástól függetlenek, így az egyes húzások valószínűségét összeszorozzuk. Annak a valószínűsége, hogy $\overline{abab}$ ($b \neq a$) alakú négyjegyű számot kaptunk:
$\frac{9^2}{10^4}=0,0081$.

b) $\overline{abab}=\overline{ab}\cdot 101$. A 101 prímszám. E négyjegyű számnak akkor van pontosan két prímosztója, ha $\overline{ab}$ is prímszám. A kétjegyű prímszámok:
11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
Közülük a 11 nem felel meg a feltételnek (itt $a = b$).
Így 20 ilyen alakú számnak van pontosan 2 prímosztója.

3670. a) Az első számot 9 közül húzhattuk ki, $a \neq 0$ miatt, $\frac{9}{10}$ valószínűséggel.
A második egyértelműen meghatározott, így egyféleképpen, $\frac{1}{10}$ valószínűséggel, a harmadik számot $b \neq a$ miatt ismét $\frac{9}{10}$ valószínűséggel húzhattuk.
A negyediknek az előzővel meg kell egyeznie, ennek a valószínűsége $\frac{1}{10}$.
Annak a valószínűsége, hogy $\overline{aabb}$ ($b \neq a$) alakú négyjegyű számot kaptunk:
$\frac{9^2}{10^4}=0,0081$.

b) $\overline{aabb}=a\cdot 1100+b\cdot 11=11(100a+b)=$
$=11\cdot\overline{a0b}$. Az $\overline{aabb}$ pontosan akkor négyzetszám, ha az $\overline{a0b}$ háromjegyű szám, egy négyzetszám 11-szerese. Ezekből:
$101 \le 11\cdot n^2 \le 909 \Rightarrow 10 \le n^2 \le 82 \Rightarrow$
$4 \le n \le 9$. Csak egy ilyen négyjegyű szám van: $7744=(8\cdot 11)^2$.

n	n^2	$11\cdot n^2$	$121\cdot n^2$
4	16	176	1936
5	25	275	3025
6	36	396	4356
7	49	539	5929
8	**64**	**704**	**7744**
9	81	891	9801

3671. a) Rendezzük a dominókat pl. úgy, hogy mindegyiken a bal oldalra kerüljön a két félen látható pöttyök közül a kisebb értékű (azonos pötty-szám esetén természetesen mindegy). Ekkor a következőket állapíthatjuk meg:
- a bal fele üres (0-0; 0-1 stb.) 9 db
- a bal felén 1-es áll (1-1; 1-2 stb.) 8 db
- a bal felén 2-es áll (2-2; 2-3 stb.) 7 db

⋮

- a bal felén 7-es áll (7-7; 7-8) 2 db
- a bal felén 8-as áll (8-8) 1 db

Összesen tehát $1+2+3+\ldots+9=\frac{1+9}{2}\cdot 9=45$ kőből áll a készlet.

Másik megoldás:
„Dupla” dominó (0-0; 1-1; 2-2 stb.) összesen 9 db van.
A „nem dupla” (0-1; 0-2; …; 7-8) dominók száma $\frac{9\cdot 8}{2}=36$.
Összesen tehát 9 + 36 = 45 kőből áll a készlet.

b) 22 500 kő az a) részben kapott eredmény alapján $\frac{22\,500}{45}=500$ készletet jelent.
Egy dominókő térfogata $5\cdot 2,5\cdot 0,8=10\ \text{cm}^3$, a 22 500 darab együttes térfogata pedig $2,25\cdot 10^5\ \text{cm}^3$, ami $0,225\ \text{m}^3$-rel egyenlő. Ez a gyártáshoz szükséges faanyag 92%-a, tehát $\frac{0,225}{0,92}\approx 0,245\ \text{m}^3$ fára van szükség.

3672. a) Egy doboz térfogata $12,1\cdot 6,1\cdot 3,2\approx 236,2\ (\text{cm}^3)$,
egy dominó térfogata $4\cdot 2\cdot 0,8=6,4\ (\text{cm}^3)$.
Mivel $\frac{136,2}{6,4}\approx 36,9$, ezért egy dobozban legfeljebb 36 db dominó fér el.

Ha 4 rétegben, minden rétegben 9 dominót helyezünk el úgy, hogy a leghosszabb dominóél a leghosszabb dobozéllel, a legrövidebb dominóél a legrövidebb dobozéllel legyen párhuzamos, akkor hézagtalan elhelyezéssel egy 12 cm × 6 cm × 3,2 cm-es téglatestet építhetünk a 36 db dominóból. Tehát 36 db dominó belefér egy dobozba.

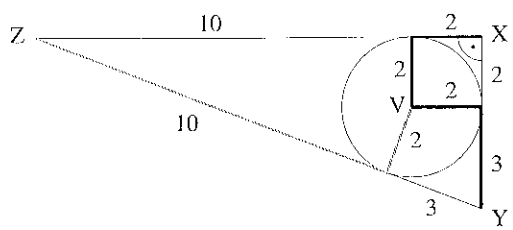
b) Például a 3671. a) megoldásában követett egyik gondolatmenettel beláthatjuk, hogy egy készlet 36 db dominóból áll. A rendelkezésre álló dobozok tehát megfelelnek a készletek csomagolásához.

3673. a) Ha igazmondót kérdezett meg, akkor a válasz alapján azt a következtetést vonhatja le a turista, hogy az X városban van. Ha hazudós válaszolt, akkor az igen válasz alapján ugyancsak arra következtethet, hogy az X városban van (hiszen a hazudós nem az X városban lakik). Más lehetőség nincs, tehát a turista az X városban van.

Megjegyzés:
A feladat szövege megengedi azt a (kissé erőltetett) feltételezést is, hogy a turista egy hazudós, éppen az adott városban tartózkodó (de nem Y-beli lakos) másik turistának tette fel a kérdést. Ebben az esetben az igen válasz semmilyen információt nem jelent, tehát akár X-ben, akár Y-ban történhetett az eset.

b) Ha 15 évvel ezelőtt az X városnak x, az Y-nak y fő volt a lakossága, akkor teljesül: $x \cdot 1{,}007^{15} = 100\,000$ és $y \cdot 1{,}01^{15} = 110\,000$. Ezekből $x \approx 90\,065$ és $y \approx 94\,748$, tehát Y-nak 15 évvel ezelőtt (is) több lakosa volt, mint X-nek.

c) Az XYZ háromszög derékszögű (mert $13^2 = 5^2 + 12^2$).
A mindhárom úttól egyenlő távolságra lévő pont az XYZ háromszög beírt körének középpontja, a megépítendő három bekötőút merőleges egy-egy útra és mindegyik hossza a beírt kör sugaráéval egyenlő.



A beírt kör sugara 2 km (ezt pl. a derékszögű háromszögekre igaz $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ összefüggésből is megkaphatjuk), tehát az X-belieknek legalább 4 km-t, az Y-belieknek legalább 5 km-t, a Z-beliek-nek legalább 12 km-t kell megtenniük a vidámparkig.

3674. a) 1.: méhecske
2.: döngicsél, illetve zümmög
3.: méhecske; mézet (vagy: döngicsél, illetve zümmög; mézet)

b) 1. hamis; 2. igaz; 3. hamis; 4. igaz; 5. igaz.

c) A csupor 9 cm magas; amikor tele van, akkor a benne lévő méz mennyisége:

$$M(9) = \frac{9^2 \cdot (15-9)\pi}{3} = 162\pi \approx 508{,}9 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

d) $$M(4{,}5) = \frac{4{,}5^2 \cdot (15-4{,}5)\pi}{3} \approx 222{,}7 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A henger alakú edény alapterülete $4{,}5^2\pi \approx 63{,}6$ (cm²), tehát a hengerben kb. $\dfrac{222{,}7}{63{,}6} \approx 3{,}50$ (cm) magasan áll majd a méz.

(Pontosan: $\dfrac{4{,}5^2 \cdot 10{,}5\pi}{3 \cdot 4{,}5^2\pi} = \dfrac{10{,}5}{3} = 3{,}5$ (cm).)

3675. a) 11-e és 22-e minden hónapban szerepel, ezért mindkét kockán egy-egy lapon szerepelnie kell az 1-es, és egy-egy lapon a 2-es számjegynek. Az egyik kockára tegyük még rá a 3-as számjegyet is. Eddig összesen 5 lapot foglaltunk le a 12-ből, tehát 7 lap maradt a 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek elhelyezésére.
30-a kirakása csak úgy lehetséges, ha a 0 számjegy más kockán van, mint a 3-as.
Az eddig lefoglalt és a még szabad lapokat szemlélteti a következő táblázat:

	1. lap	2. lap	3. lap	4. lap	5. lap	6. lap
1. kocka	0	1	2			
2. kocka	1	2	3			

A hónapok első napjai: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08 és 09. Ezek kirakásához szükséges, hogy mindkét kockán legyen 0 számjegy, hiszen különben legfeljebb 6 nap lenne kirakható a felsorolt 9-ből.
Fenti táblázatunk tehát így egészíthető ki:

	1. lap	2. lap	3. lap	4. lap	5. lap	6. lap
1. kocka	0	1	2			
2. kocka	1	2	3	0		

A fennmaradó 5 kockalapon kellene elhelyezni a 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeket. Ez azonban lehetetlennek látszik, hiszen 6 különböző számjegyről van szó.
A 6 és a 9 számjegyek azonban speciálisak, mert 180°-os elforgatással egymásból megkaphatók, így elegendő az egyik szerepeltetése az egyik kockán (ugyanis 66-a, 69-e, 96-a és 99-e kirakására nincs szükség).

Megjegyzés:
A 3675. feladathoz mellékelt ábra alapján könnyen látható, hogy a 2. kockán 180°-ot fordítva a február hatodikai dátumot lehet megjeleníteni.

Az alábbi táblázat alapján elkészített két kocka (könnyen ellenőrizhető módon) megfelel a naptárral szemben támasztott minden követelménynek:

	1. lap	2. lap	3. lap	4. lap	5. lap	6. lap
1. kocka	0	1	2	6 vagy 9	7	8
2. kocka	0	1	2	3	4	5

b) Egy naptárkészlet térfogata: $2 \cdot 4{,}5^3 + 3 \cdot 1{,}5^2 \cdot 9 = 243$ (cm³).
Az 1 m³ fából 0,7 m³, azaz 700 000 cm³ térfogatú naptár készülhet.
Ez $\dfrac{700\,000}{243} \approx 2880$ db készlet előállításához elegendő.

3676. Az üzemben eredetileg x ($x \in \mathbf{N}^+$) dolgozó volt, az első felvétel után $x + 32$.
Elbocsátotta a dolgozók 40%-át, maradt a dolgozók 60%-a, azaz $0{,}6 \cdot (x + 32)$. (Természetes szám!)
Később ehhez felvett 5 dolgozót, így $0{,}6 \cdot (x + 32) + 5$ dolgozója lett.

Végül elbocsátott a dolgozók $\frac{1}{5}$-énél 2-vel több embert, azaz maradt a $\frac{4}{5}$-énél 2-vel kevesebb, vagyis $\frac{4}{5}\cdot[0{,}6\cdot(x+32)+5]-2$.

A feltétel szerint ez a létszám az eredeti munkások számának $\frac{2}{3}$-a, azaz:

$\frac{4}{5}\cdot[0{,}6\cdot(x+32)+5]-2=\frac{2}{3}x \;\Rightarrow\; x=93.$

Vizsgáljuk meg, hogy a feladat közben kapott adatok reálisak-e?
Az üzemben eredetileg az első felvétel után 93 + 32 = 125 dolgozó lett.
Elbocsátotta a dolgozók 40%-át, azaz 50 dolgozót, maradt 75, azaz a dolgozók 60%-a, azaz 0,6 · 125 = 75. (Természetes szám!)
Később ehhez felvett 5 dolgozót, így 80 dolgozója lett.

Végül elbocsátott a jelenlegi dolgozók $\frac{1}{5}$-énél 2-vel több embert, azaz 18 dolgozót, maradt a $\frac{4}{5}$-énél 2-vel kevesebb, azaz 62 dolgozó.

A feltétel szerint ez a létszám az eredeti munkások számának $\frac{2}{3}$-a, azaz: $\frac{2}{3}\cdot 93=62.$
Tehát az üzemben eredetileg 93-an dolgoztak.

b) A külföldi munkára a mostani (62 fő) létszámból $\binom{62}{5}=6\,471\,002$-féleképpen tud kiválasztani 5 embert.

3677. Keressük azt a(z egész) számot, aminek ez négyzete lehet, 2^x+2^y alakban. Ennek négyzete: $(2^x)^2+2\cdot2^x\cdot2^y+(2^y)^2=2^{2x}+2^{x+y+1}+2^{2y}=4^x+4^{\frac{x+y+1}{2}}+4^y$.
A három adott kitevőt (13, 1000, n) háromféle módon feleltethetjük meg x, $\frac{x+y+1}{2}$, y valamelyikének. (Három dolgot hatféleképp lehet sorba rakni – de a „sor" két végén x és y szerepe szimmetrikus, így csak három valóban különböző kiosztás van.) Ha x, $\frac{x+y+1}{2}$, y szerepét ebben a sorrendben játssza: 13, 1000, n, akkor $n=1986$. Ha a sorrend 13, n, 1000, akkor $n=507$. Ha a sorrend 1000, 13, n, akkor $n=-975$, ami a feladatnak nem felel meg, hiszen 2^{-975} nem egész. (Vizsgáljuk meg a kapott két értéket. Ha $n=y=1986$ és $x=13$, akkor $(2^{13}+2^{1986})^2=$ $=2^{26}+2\cdot2^{13}\cdot2^{1986}+2^{3972}$, ahol a középső tag kitevője 1 + 13 + 1986 = 2000, tehát valóban a megfelelő 4-hatványokat kaptuk, és $2^{13}+2^{1986}$ valóban természetes szám – igaz, majdnem 10^{598} (!) nagyságú. Akkor lesz $n=\frac{x+y+1}{2}=507$, ha $x=13$ és $y=1000$, ekkor $(2^{13}+2^{1000})^2=2^{26}+2\cdot2^{13}\cdot2^{1000}+2^{2000}$, ahol a középső tag kitevője 1 + 13 + 1000 = 1014. Tehát valóban a megfelelő 4-hatványokat kaptuk, bár a kitűzéshez képest más sorrendben, és $2^{13}+2^{1000}$ is természetes szám – ez már „csak" 10^{301} nagyságrendű. Természetesen a két megoldás közül elegendő egyet megtalálni.)

Másik megoldás:
Képzeljük, hogy $4^{13}+4^{1000}+4^n=(a+b)^2$, ekkor lehet, hogy $a^2=4^{13}=(2^{13})^2$ és $b^2=4^{1000}=(2^{1000})^2$, ekkor $4^n=2ab=2\cdot2^{13}\cdot2^{1000}=2^{1014}=4^{507}\Rightarrow$ $n_1=507$. Lehet, hogy $a^2=4^{13}=(2^{13})^2$ és $b^2=4^n=2^{2n}$, ekkor $4^{1000}=2ab=$ $=2\cdot2^{13}\cdot2^n=2^{14+n}\Rightarrow 14+n=2000$, amiből $n_2=1986$.
Az $a^2=4^{1000}$ és $b^2=4^n$ nem lehetséges, mert ekkor $2ab=2\cdot2^{1000}\cdot2^n=$ $=2^{1001+n}$ lenne, ami nagyobb mint $2^{26}=4^{13}$.

3678. a) Egy szorzat úgy lehet prím, ha az egyik tényező 1, a másik a prím maga. Ha $|k^3-63|=1$, akkor vagy $k^3-63=1$, azaz $k^3=64$, azaz $k=4$; vagy $k^3-63=$ $=-1$, de ilyen egész k nincs. Ha pedig $k=4$, akkor $|k^2-65|=49$, ami nem prím. Ha pedig $|k^2-65|=1$, akkor vagy $k^2-65=1$, aminek megint nincs egész gyöke; vagy $k^2-65=-1$, amiből $k=\pm8$. Ha $k=8$, akkor $|k^3-63|=$ $=449$, ami prím; ha $k=-8$, akkor $|k^3-63|=575$, ez nem prím. Tehát a $k=8$ az egyetlen megoldás.

b) Egy k-szög belső szögeinek összege $(k-2)\cdot180°$, tehát $k=8$ esetén a nyolcszögé $6\cdot180°=1080°$.

c) k különböző színű golyót $k!$-féleképpen lehet sorba rakni, tehát most $8!=40\,320$-féleképpen.

3679. a) Az $x=\overline{abcd}$ négyjegyű számnak a feltétel szerint $225=25\cdot9$-cel oszthatónak kell lennie. Minthogy $(25;9)=1$, ezért kell, hogy 25-tel és 9-cel legyen osztható az x.
$25\,|\,\overline{abcd}$, s így $\overline{cd}$ lehetséges értéke 00, 25, 50, illetve 75 lehet.
$\overline{cd}=5\cdot\overline{ab}$, így ha
$\overline{cd}=00$, akkor $\overline{ab}=00\Rightarrow x=0$, ez nem négyjegyű;
$\overline{cd}=25$, akkor $\overline{ab}=05\Rightarrow x=525$, ez nem négyjegyű;
$\overline{cd}=50$, akkor $\overline{ab}=10\Rightarrow x=1050$, nem osztható 9-cel;
$\overline{cd}=75$, akkor $\overline{ab}=15\Rightarrow x=1575$, osztható 9-cel.
Ezért a keresett négyjegyű szám az 1575.

Másik megoldás:

Jelöljük az $\overline{ab}$ kétjegyű számot x-szel. A feltétel szerint $\overline{cd} = 5 \cdot \overline{ab}$, ezért a négyjegyű szám $100x + 5x = 105x$.

Tudjuk, hogy ez osztható $225 (= 3^2 \cdot 5^2)$-tel, azaz

$3^2 \cdot 5^2 \mid 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x \Rightarrow 3 \cdot 5 \mid 7 \cdot x$.

Mivel x és $5x$ is kétjegyű szám, ezért $x = 15$, és a feltételeknek (egyedül) megfelelő négyjegyű szám az 1575.

b) $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$

A számkártyákból alkotható négyjegyű számok mindegyike osztható 3-mal, mert $0 + 0 + 1 + 5 = 6$, ami osztható 3-mal. Ahhoz, hogy 6-tal is osztható legyen, szükséges (és itt elégséges is), hogy páros legyen, azaz az egyesek helyén 0 álljon. Négyjegyű akkor lesz a szám, ha az első jegye nem nulla. Az első és utolsó jegy tehát kötött: $5 * * 0$, illetve $1 * * 0$. A második helyre kettőből (0 és 1, illetve 0 és 5) lehet választani. Ezzel eldőlt a harmadik jegy is.

A keresett számok a fentiek figyelembevételével: 1050, 1500, 5010, 5100.

Az $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ számkártyákból alkotható négyjegyű számok mindegyike osztható 9-cel, mert számjegyeik összege (18) osztható 9-cel. Négy különböző jel $4! = 24$-féle sorrendbe állítható.

Itt a két 5-ös nem különböztethető meg egymástól, ezért ezek felcserélésével ugyanazt a négyjegyű számot kapjuk. Így minden számot kétszer számoltunk.

Tehát 12 db 9-cel osztható négyjegyű szám állítható elő az adott négy számkártyából.

3680. a) Az 1. feltétel szerint a keresett négyjegyű szám számjegyei a $\{2; 4; 6; 8\}$ halmaz elemei.

A 2. feltétel szerint a keresett szám $\overline{abca}$ alakú.

A 3. feltétel szerint $a + b = 2 \cdot (c + a) \Rightarrow b - a = 2 \cdot c$.

Innen az 1. feltételt is figyelembe véve $4 \le b - a \le 6$, illetve $2 \le c \le 3$. Minthogy c csak páros lehet, ezért $c = 2$ és $b - a = 4$.

A feltételeknek eleget tevő négyjegyű számok: 2622 és 4824.

b) 2, 4, 4, 8 számjegyek felhasználásával alkotható négyjegyű számok száma 12. (Lásd a 3679. b) feladat megoldását.)

c) 1. Egy egész szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyből alkotott (legfeljebb) kétjegyű szám osztható 4-gyel. Ezek közül a legnagyobb a 8424.

2. A megadott számjegyek összege 18, ezért az összes ilyen szám osztható 9-cel. Így a legkisebb 36-tal osztható szám megegyezik a legkisebb 4-gyel osztható négyjegyű számmal, ez a 2448.

3681. a) Ha az első könyvszekrényben x könyv van, akkor a másodikban $2x$, a harmadikban $3x$. Ha ez elsőből átteszünk 70-et a másodikba, akkor ott $2x + 70$ könyv lesz, ami 20-szal több, mint a harmadikban levő $3x$, tehát az egyenlet: $2x + 70 = 3x + 20$ amiből $x = 50$. Tehát kezdetben 50, 100 és 150 könyv van a polcokon. Mivel az elsőből 70-et kell áttenni a másodikba és az nem lehetséges, ezért nincs a feltételeknek eleget tevő megoldás!

b) Ha létezik a kérdésben leírt derékszögű háromszög, akkor legyenek a befogói a és b, átfogója pedig $2a$ egység hosszúságúak, ahol a és b pozitív egészeket jelölnek.

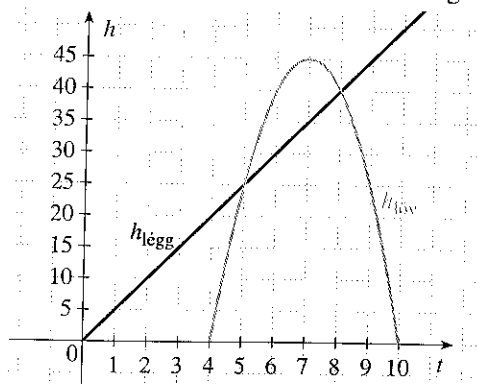
A Pitagorasz-tétel szerint ekkor: $a^2 + b^2 = (2a)^2$, vagyis $b^2 = 3a^2$.

Felhasználva, hogy a és b pozitív egészek: $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$.

Ez azonban lehetetlen, hiszen $\frac{b}{a}$ racionális (mert két pozitív egész szám hányadosa), $\sqrt{3}$ pedig irracionális szám.

A feladat szövegében feltett kérdésre tehát nemleges a válasz.

3682. a) Ha az időt a léggömb indulásától mérjük, akkor a lövedék magasságát a $h = v_0(t-4) - \frac{g}{2}(t-4)^2$ egyenlet írja le, pillanatnyi sebességének nagyságát pedig a $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{v_0^2 - 2gv_0(t-4) + g^2(t-4)^2}$ egyenlet. Megoldandó a $v < u$ egyenlőtlenség, ami behelyettesítés, négyzetre emelés, rendezés után $g^2(t-4)^2 - 2gv_0(t-4) + v_0^2 - u^2 < 0$ alakú. Beírva az adatokat (mértékegységek nélkül): $100(t-4)^2 - 600(t-4) + 875 < 0$. Fel lehet bontani a zárójeleket, de ügyesebb megoldani $t - 4$-re az egyenlőtlenséget, és aztán hozzáadni majd a 4 másodpercet az eredményhez. A másodfokú kifejezés két zérushelye 2,5 és 3,5; pozitív főegyütthatójú lévén, e gyökök között vesz fel negatív értékeket. Tehát a léggömb indulásától mért 6,5 és 7,5 másodpercek között lesz a lövedék sebességének nagysága kisebb a léggömbénél.



b) A léggömb ezen időpontok között ($h = ut$) 32,5 méterről emelkedik 37,5 méterre.

c) Ábrázoljuk tehát a $h_{légg} = 5t$,

és a $h_{löv} = 30(t-4) - 5(t-4)^2 =$

$= -5t^2 + 70t - 200 =$

$= -5(t^2 - 14t + 40) =$

$= -5((t-7)^2 - 9) =$

$= -5(t-7)^2 + 45$ függvényeket, illetve csak pozitív értékeiket (nyilván nincsenek a talajszint alatt...).

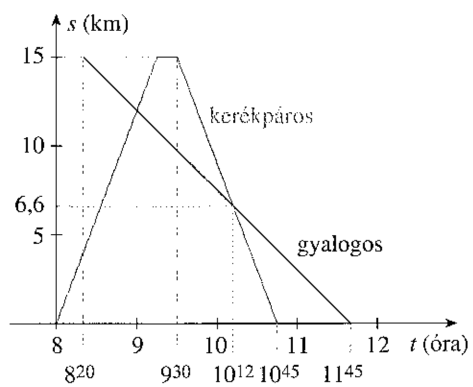
3683. a) A kerékpáros menetideje A várostól B városba és vissza 2,5 óra, a megtett út 30 km, amiből megállapítható, hogy a sebessége 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A kerékpáros a 15 km-es út $\frac{4}{5}$-ét tette meg 9 óráig. Ekkor B-től 3 km-re van. Ha ekkor találkozik a gyalogossal, akkor a gyalogos 40 perc $= \frac{2}{3}$ óra alatt 3 km utat tesz meg, ezért egy óra alatt $\frac{3}{2} \cdot 3$ km $= 4{,}5$ km utat tesz meg, sebessége 4,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) és c) B városból a gyalogos 8 óra 20 perckor, a kerékpáros 9 óra 30 perckor indul. A gyalogos t óra múlva találkozik másodszor a kerékpárossal, aki B-ből indulva $t - \frac{7}{6}$ órán át pedálozott.

A találkozásig ugyanakkora utat tesznek meg: $4{,}5 \cdot t = 12 \cdot \left(t - \frac{7}{6}\right)$.

Innen $t = \frac{28}{15}$. Tehát a kerékpáros $\frac{28}{15}$ óra $= 1$ óra 52 perc múlva, azaz 10 óra 12 perckor éri utol a gyalogost. Ekkor a B várostól $\frac{28}{15} \cdot \frac{9}{2} = 8{,}4$ km-re, az A várostól 6,6 km-re vannak.

Megjegyzés:
Kétszer találkoznak, de csak a 2. alkalommal jelent ez utolérést.



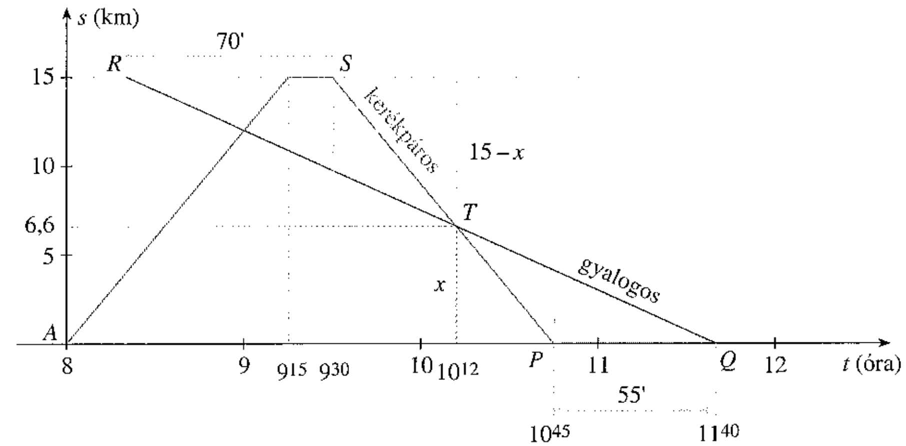
A b) és c) feladat másik megoldása:

A kerékpáros 9 h-ig a 15 km-es út $\frac{4}{5}$-ét teszi meg: 12 km-t. A gyalogos 40' alatt tesz meg 3 km utat, tehát sebessége $v = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}$, tehát 4,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Az ábra az adatok és a számított értékek alapján elkészíthető. Ennek jelölései szerint a $PQT\Delta \sim SRT\Delta$, mert 2-2 szög páronként egyenlő (váltószögek).

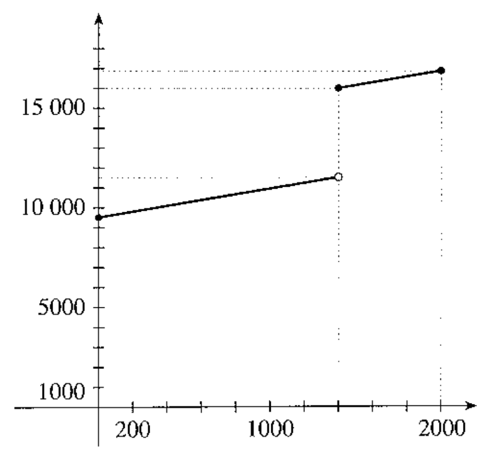
$\frac{x}{55} = \frac{15 - x}{70}$, ebből $x = \frac{825}{125} = \frac{33}{5}$.
A 2. találkozáskor (ekkor éri utol a kerékpáros a gyalogost) tehát 6,6 km-re vannak A-tól.

Ezt az utat a kerékpáros 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel $t = \frac{s}{v} = \frac{6{,}6}{12} = 0{,}55$ (óra), azaz 33 perc alatt teszi meg. Az utolérés időpontja: 10 h 45' – 33' = 10 h 12'.

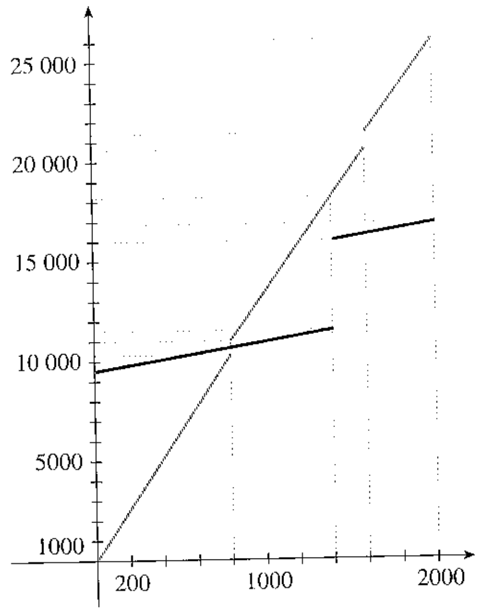


3684. a) A beruházás 5000 Ft + 5 · 900 Ft = = 9500 Ft. Ez 1400 óráig megy, utána újra kell 4500 Ft (a transzformátor élettartama jóval hosszabb, ha nem selejtet vettünk). Összesen 60 W a teljesítményük óránként, ami 0,06 kWh energiát és így 1,44 Ft-ot jelent óránként. A keresett összefüggés tehát:

$$K(t) = \begin{cases} 9500 + 1{,}44t, & \text{ha } 0 \le t < 1400 \\ 14\,000 + 1{,}44t, & \text{ha } 1400 \le t \le 2000 \end{cases}, \text{ mivel } 9500 + 4500 = 14\,000.$$



b) Megtérülés akkor van, ha már alacsonyabb az összköltségünk, azaz amikor az új grafikon alámegy a feladatban megadott normál izzós esetnek. Ezután persze még a drágább izzó-ár miatt 1400 óránál ismét válthat. $K(1400) = 16\,016$ (Ft), az adott grafikon szerint $F(1400) = 18\,200$ (Ft), tehát még a drágább beruházással is alatta van. 800 óráig nem térül meg a drágább beruházás, hiszen $K(800) = 9500 + 1152 = 10\,652$ (Ft), de F éppen ekkor ugrik (izzót kell venni) 10 300-ról 11 000 Ft-ra, tehát ettől kezdve jobb az új módszer. Azaz 800 óra után térül meg a beruházás.



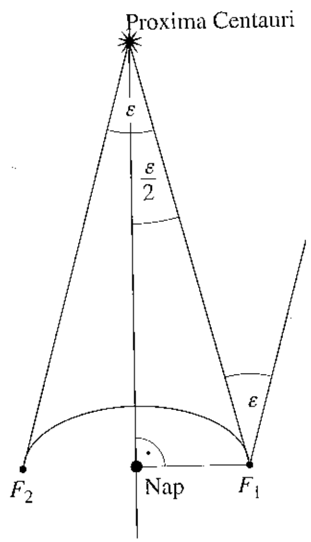
c) Meg kell nézni az $F(2000) - K(2000)$ különbséget:
$F(2000) = 26\,100$; $K(2000) = 16\,880$.
2000 órás használat alatt már 9220 Ft-ot takarítunk meg, azaz jól járunk.

3685. a) Az ábra szerint a két Föld-helyzet és Proxima Centauri alkotta háromszög egyenlő szárú, alapjának fele a Nap—Föld távolság, kb. 150 millió km. A Nap—Föld—Proxima Centauri háromszög derékszögű és az egyik szöge fele a megadott 0,000422 foknak, azaz 0,000211°. Ezzel a Nap—Proxima Centauri közötti keresett d távolsága:

$d = 1{,}5 \cdot 10^8 \cdot \operatorname{ctg} 0{,}000211°$, ahonnan

$d = 4{,}073 \cdot 10^{13}$, tehát kb. 40,73 billió km.

(Ez kb. 4,3 fényév.)



b) Ha a számítást elvégezzük 0,00043 fokkal, azaz ennek felével: 0,000215 fokkal, akkor

$d^* = 3{,}9974 \cdot 10^{13}$ adódik, ha pedig 0,00042 fokkal, azaz ennek felével: 0,00021 fokkal, akkor pedig $d' = 4{,}0926 \cdot 10^{13}$ km.

Tehát a távolság a $[d^*; d']$-ba esik.

c) A relatív hiba az intervallum szélessége és a középpontjainak hányadosa, tehát

$$\frac{4{,}09 \cdot 10^{13} - 3{,}99 \cdot 10^{13}}{4{,}05 \cdot 10^{13}} = \frac{0{,}09 \cdot 10^{13}}{4{,}05 \cdot 10^{13}} = 0{,}02, \text{ azaz } 2\%.$$

Ez elég jó eredmény, ami azért adódott, mivel pontos volt a szögmérés.

3686. A háromszög szögei a feladat szövege szerint:
$\alpha - d$; α; $\alpha + d$, ahol $\alpha > d$, és $\alpha, d \in \mathbf{N}$.
A háromszög szögeinek összege 180°, ezért $3\alpha = 180°$, amiből $\alpha = 60°$.
A háromszög szögei tehát $60° - d$, $60°$; $60° + d$, ahol $d \in \{0°; 1°; 2°; \ldots; 59°\}$.

- Egy olyan háromszög van, amelyiknek mindegyik szöge 60°-os és egyik oldala 1 cm hosszú.
- Ha a háromszög 60°-os szöge az 1 cm hosszú oldallal szemben van és a háromszög nem szabályos, akkor az 1 cm-es oldalon fekvő két szögre a következő lehetőségek adódnak: (1°; 119°); (2°; 118°); (3°; 117°); …; (59°; 61°). Ez összesen 59 különböző eset (a szögek sorrendjének felcserélése egybevágó háromszögre vezet).
- Ha a háromszög 60°-os szöge az 1 cm hosszú oldalon van és a háromszög nem szabályos, akkor az 1 cm-es oldalon fekvő másik szög nagysága lehet az $\{1°; 2°; 3°; \ldots; 59°; 61°; 62°; \ldots; 119°\}$ halmaz bármelyik eleme. Mivel egy háromszögben a nagyobbik szöggel szemben helyezkedik el a nagyobb oldal és viszont, ezért ezek a háromszögek egymással páronként nem egybevágók (viszont 59, két-két hasonló háromszög alkotta pár keletkezik). Ez újabb 118, az előzőekkel sem egybevágó háromszöget jelent. Más eset nincs, tehát az összes különböző háromszögek száma: $1 + 59 + 118 = 178$.

3687. Ha a mértani sorozat hányadosa $\frac{3}{2}$, akkor a háromszög oldalainak hossza a, $\frac{3}{2} \cdot a$ és $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot a$. Felírjuk a koszinusztételt a leghosszabb oldalra. (Ebből kiderül, hogy a háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű-e.)

$$\left(\frac{9}{4}a\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{13}{4} - \frac{81}{16}}{3} = -\frac{29}{48} \Rightarrow \gamma \approx 127{,}2°$$

A következő szöget szinusztétellel számítjuk ki: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{a \cdot \frac{9}{4}} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{4}{9}\sin\gamma.$

Innen, minthogy $\alpha < 90°$, így $\alpha \approx 20{,}7°$, valamint $\beta \approx 180° - 127{,}2° - 20{,}7° = 32{,}1°$.

Megjegyzés:
A számításból kiderül, hogy a háromszög legkisebb oldala, (a) lehet bármilyen pozitív szám, mert a feladatban szereplő háromszögek hasonlók, így $a = 1$-gyel vagy $a = 4$-gyel is dolgozhatunk.

3688. a)-b) A szóban forgó n oldalú konvex sokszög belső szögeinek fokban mért összege $\frac{2\cdot 112+7(n-1)}{2}\cdot n$, ami az ismert tétel szerint $(n-2)\cdot 180°$-nal egyenlő.

Tehát $\frac{2\cdot 112+7(n-1)}{2}\cdot n=(n-2)\cdot 180$, amiből a $7n^2-143n+720=0$ egyenletet kapjuk.

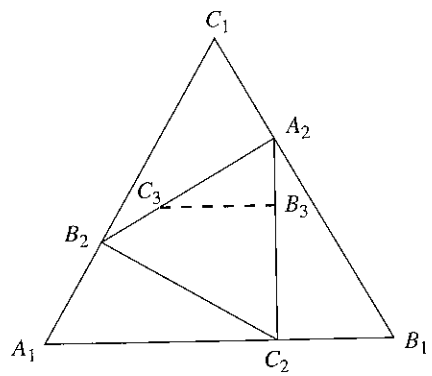
Megoldóképlettel $\frac{80}{7}$ és 9 adódik, de csak a 9 lehet egy sokszög oldalszáma.

Ha kilencszögről van szó, akkor ennek legnagyobb szöge $112° + 8\cdot 7° = 168°$, azaz a sokszög valóban konvex. A kérdéses sokszög tehát egy konvex kilencszög.

c) 27.

d) Minden konvex sokszögre (így a szóban forgóra is) igaz, hogy külső szögeinek összege 360°.

3689. a) $A_1C_2B_2\,\Delta \cong B_1A_2C_2\,\Delta \cong C_1B_2A_2\,\Delta$, mert két oldaluk és a közbezárt szögük páronként egyenlő, ezért harmadik oldaluk is egyenlő, tehát $B_2C_2 = C_2A_2 = A_2B_2$, ezért az osztáspontok által meghatározott háromszög szabályos.



b) Az $A_2C_2 \perp A_1B_1$, ugyanis $C_2B_1A_2$ egy szabályos háromszög fele, mert a 60° száraira illeszkedő hosszabb oldal kétszerese a rövidebbnek.
Ugyanígy megmutatható, hogy $C_3B_3 \perp A_2C_2$.
Ezekből következik, hogy $C_3B_3 \parallel A_1B_1$. Így minden második háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak.

c) Az $A_1C_2B_2$ derékszögű háromszögből $a_2 = C_2B_2 = \frac{2}{3}\cdot a_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a_1$, ahol $a_1 = A_1B_1$.

Hasonlóan $a_3 = C_3B_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot a_1$, stb. Az utasításnak megfelelően képzett háromszögek oldalainak a hossza egy mértani sorozat egymás utáni tagjai.

A sorozat első tagja $a_1 = 6$, kvóciense $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

A hatodik háromszög oldala $a_6 = a_1\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 = \frac{6}{(\sqrt{3})^5} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}$ (cm).

d) A kerületek is mértani sorozat egymás utáni tagjai: $k_1 = 18$, $q' = q = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Az első hat háromszög kerületének összege:

$$s_6 = 18\cdot\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}-1} = \frac{26\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)}{3} \approx 41{,}0 \text{ (cm)}.$$

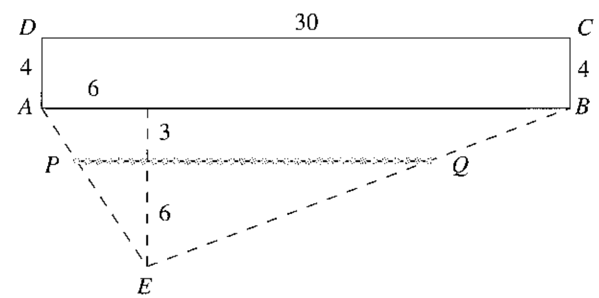
e) Hasonló sokszögek területének aránya a hasonlóság arányának a négyzetével egyenlő. A keletkező háromszögek területei is egy mértani sorozat egymás utáni tagjai.

Ennek első tagja $t_1 = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, hányadosa $q = \frac{1}{3}$,

az első hat tag összege $S_6 = 9\cdot\sqrt{3}\,\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{364\sqrt{3}}{27} \approx 23{,}4$.

Az első hat háromszög területének összege 23,4 cm^2.

3690. a) Az E középpontú $\lambda = \frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság az AB szakaszt a keresett PQ szakaszba viszi át. Tehát ha az AB oldal egy pontját összekötjük E-vel, e szakasznak PQ-val való metszéspontja a szakasz AB-hez közelebb eső harmadoló pontja. Így a tervezett növénysor a PQ szakaszon lesz.



b) A hasonlóság miatt $PQ = \frac{2}{3}AB = 20$, tehát 20 méter hosszan kell 50 cm-ként egy-egy bokrot ültetni. Összesen 41 bokrot ültettek. (Az elején egyet, majd ezután minden méterre még kettőt.)

3691. a) A kör területe $64\pi \approx 201{,}06$ (cm²).

A beírt hatszög oldala 8 cm, területe $6 \cdot \dfrac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} \approx 166{,}28$ (cm²), ami a kör területének 82,70%-a.

A körülírt hatszög oldala $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$, területe $6 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 128\sqrt{3} \approx$
$\approx 221{,}70$ (cm²), ez a kör területének 110,27%-a.

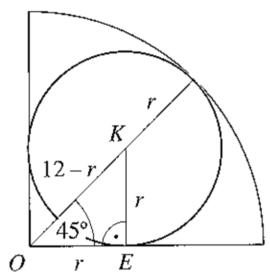
b) A beírt hatszög kezdő csúcspontjától a következő csúcsáig 3 lehetséges úton haladhatunk. Az első csúcspontba érkezés után vissza kell fordulni és a kezdő csúcspontba visszatérni, hiszen különben a megmaradt két vonaldarab csak csúcsok átlépése után lenne megrajzolható. A visszafelé vezető utat kétféleképpen választhatjuk meg, tehát a kezdőponttól az első csúcsig és vissza összesen 6 különböző módon haladhatunk. A kezdőponttól ismét az első csúcs felé kell haladnunk (mert a kezdő csúcs nem léphető át), erre egyetlen lehetőségünk maradt. A kezdő, és az első csúcs közötti három vonaldarabot tehát összesen hat különböző módon rajzolhatjuk újra. Az első csúcsba érve ugyanezt az okoskodást megismételve kapjuk, hogy az első és a második csúcs közötti három vonaldarabot is összesen hat különböző módon rajzolhatjuk újra.
Eljárásunkat folytatva adódik, hogy az összes különböző, a megadott feltételeknek megfelelő újrarajzolások száma $6^6 = 46\,656$.

c) A három síkidom kerületének összege: $6 \cdot 8 + 16\pi + 6 \cdot \dfrac{16\sqrt{3}}{3} \approx 153{,}69$ (cm).

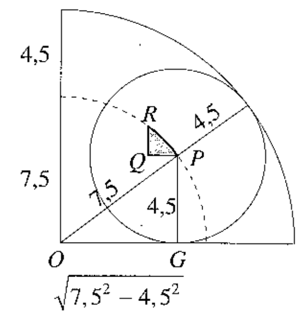
3692. a) 90°.

b) $2 \cdot 12 + \dfrac{1}{4} \cdot 2 \cdot 12 \cdot \pi = 24 + 6\pi \approx 42{,}85$ (cm).

c) A körcikk beírt körének r sugarára az OEK egyenlő szárú derékszögű háromszögből a következő összefüggés adódik: $r\sqrt{2} = 12 - r$, amiből
$r = 12(\sqrt{2} - 1) \approx 4{,}97$ (cm).
Ebből nyilvánvaló, hogy egy 4,5 cm sugarú körlap elhelyezkedhet úgy a körcikken, hogy a körlap sehol sem „lóg ki” belőle (pl. az ábrán látható beírt körrel koncentrikus helyzet is ilyen).



d) Görgessünk végig egy 4,5 cm sugarú körlapot a körcikk kerületén úgy, hogy közben sehol ne „lógjon ki” belőle. A végiggördített körlap középpontja egy olyan Q középpontú, PQR körcikket ír le, amelyiknek határoló sugarai a 12 cm-es sugaraktól 4,5 cm-re vannak, s amelynek íve szintén 4,5 cm-re van a 12 cm sugarú körcikk ívétől.
Az OGP derékszögű háromszögben
$OG = \sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2} = 6$, ezért
$PQ = QR = 6 - 4{,}5 = 1{,}5$ cm. A PQR körcikk tehát egy 1,5 cm sugarú negyedkör.

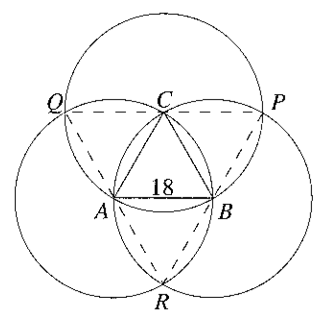


A feladat kérdésére rátérve megállapítható, hogy a 12 cm sugarú körre dobált, 4,5 cm sugarú korongok középpontja egy 7,5 cm sugarú, a 12 cm sugarú körrel koncentrikus körlap bármelyik pontja lehet. A 4,5 cm sugarú körlap nem „lóg ki” a 12 cm sugarú színes körcikkből, ha középpontja a PQR negyed körlapra esik.

A „kedvező” középpontok tehát egy $\dfrac{1{,}5^2\pi}{4}$ területű síkidomot határoznak meg, míg az összes lehetséges középpont egy $7{,}5^2\pi$ területű síkidomot.

A kérdezett valószínűség ezért: $\dfrac{\dfrac{1{,}5^2\pi}{4}}{7{,}5^2\pi} = \dfrac{1}{100}$.

3693. Jelöljük a 18 cm oldalú szabályos háromszög területét T-vel: $T = \dfrac{18^2\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}$ (cm²).
Legyen t a 18 cm sugarú, 60° középponti szögű körcikk területe: $t = \dfrac{1}{6} \cdot 18^2\pi = 54\pi$ (cm²).
Ezzel a jelöléssel a 18 cm sugarú kör területe $6t$.

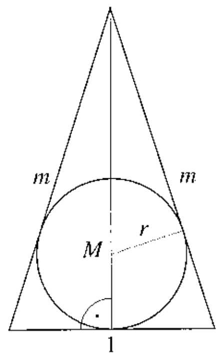


a) $t_3 = 3t - 2T = 162 \cdot (\pi - \sqrt{3}) \approx 228{,}35$ (cm²).

b) A kérdéses terület megkapható a PQR szabályos háromszög és hat „kis körszelet” területének összegeként.
A PQR szabályos háromszög területe $4T$, egy kis körszelet területe pedig $t - T$.
Tehát $t_2 = 4T + 6(t - T) = 6t - 2T = 162 \cdot (2\pi - \sqrt{3}) \approx 737{,}28$ (cm²).

c) A kérdezett terület megkapható a PQR szabályos háromszög és három félkör együttes területeként (a félkörök átmérője a PQR háromszög egy-egy oldala):
$t_1 = 4T + 9t \approx 2088{,}00$ (cm²).

3694. a) Egy, a gúla magasságára és az alaplap egyik középvonalára illeszkedő síkkal elmetszve a testeket, a gúlából egy egységnyi alapú, a gúláéval egyező M magasságú, egyenlő szárú háromszöget; a beírt gömbből ebbe a háromszögbe beírt, a gömbbel egyező (r) sugarú kört kapunk metszetül. A gúla oldallapjának m magassága, egyúttal e háromszög szára Pitagorasz-tétellel: $m = \sqrt{M^2 + 0,25}$.



A háromszög területe egyrészt $T = \dfrac{1 \cdot M}{2}$, másrészt $T = r \cdot s$, ahol s a fél kerület: $\dfrac{1 + 2m}{2}$.

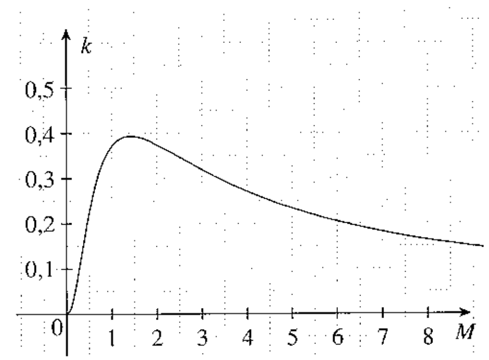
Egyenlővé téve a terület két kifejezését $r = \dfrac{M}{1+2m} = \dfrac{M}{1+2\sqrt{M^2+0,25}} =$

$= \dfrac{M}{1+\sqrt{4M^2+1}}$. A gömb felszíne így $A_{\text{gömb}} = 4r^2\pi = \dfrac{4M^2\pi}{\left(1+\sqrt{4M^2+1}\right)^2}$.

A gúla felszíne $A_{\text{gúla}} = 1^2 + 4 \cdot \dfrac{1 \cdot m}{2} = 1 + 2m = 1 + \sqrt{4M^2+1}$.

A két felszín aránya:

$$k = \frac{A_{\text{gömb}}}{A_{\text{gúla}}} = \frac{4M^2\pi}{\left(1+\sqrt{4M^2+1}\right)^3}.$$



Egy ilyen függvényt persze nem könnyű ábrázolni, célszerű grafikus számológéphez (esetleg számítógéphez) folyamodni, bár kellően sűrűn számítva helyettesítési értékeket, szintén célhoz érhetünk. (Aggódók megnyugtatására: magunk sem hisszük, hogy a feladat *ábrázolás* részét érettségin ki lehetne tűzni.)

b) A maximumhelyet deriválással keressük meg:

$$k' = \frac{8M\pi\left(1+\sqrt{4M^2+1}\right)^3 - 4M^2\pi \cdot 3\left(1+\sqrt{4M^2+1}\right)^2 \cdot \dfrac{8M}{2\sqrt{4M^2+1}}}{\left(1+\sqrt{4M^2+1}\right)^6}.$$

A számláló zérushelyét keressük. Egyszerűsítünk $8M\pi\left(1+\sqrt{4M^2+1}\right)^2$-nel, és

kapjuk: $\left(1+\sqrt{4M^2+1}\right) - \dfrac{6M^2}{\sqrt{4M^2+1}} = 0$, amiből $1+\sqrt{4M^2+1} = \dfrac{6M^2}{\sqrt{4M^2+1}}$, tovább $\sqrt{4M^2+1} + 4M^2 + 1 = 6M^2$, innen $\sqrt{4M^2+1} = 2M^2 - 1$, amit négyzetre emelve $4M^2 + 1 = 4M^4 - 4M^2 + 1$, ahonnan $0 = 4M^2(M^2 - 2)$. Az $M = 0$ hamis gyök (két lépéssel ezelőtt már négyzetre sem lehet ekkor emelni), $M = -\sqrt{2}$ most nyilván értelmetlen, tehát a maximumhely $M = \sqrt{2}$.

Visszahelyettesítve ezt k-ba, kapjuk: $\dfrac{8\pi}{\left(1+\sqrt{8+1}\right)^3} = \dfrac{\pi}{8} \approx 0,4$.

3695. a) Lásd az előző megoldás elejét! (Első ábra, m és r kiszámítása.)

A gömb térfogata $V_{\text{gömb}} = \dfrac{4}{3}r^3\pi = \dfrac{4M^3\pi}{3\left(1+\sqrt{4M^2+1}\right)^3}$,

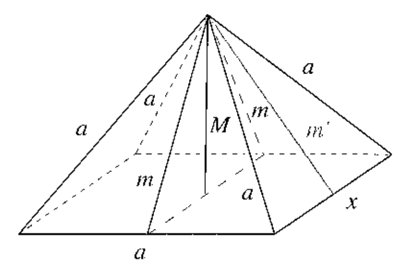
a gúláé $V_{\text{gúla}} = \dfrac{1^2 \cdot M}{3} = \dfrac{M}{3}$.

Ezek hányadosa $k = \dfrac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{gúla}}} = \dfrac{4M^2\pi}{\left(1+\sqrt{4M^2+1}\right)^3}$, vagyis megegyezik az előző megoldásbeli aránnyal. Ekkor az ábra szintén azonos.

b) A maximumhely és a maximális arány szintén megegyezik az előző megoldás b) részében megkapottakkal ($M = \sqrt{2}$ és $k_{\max} = \dfrac{\pi}{8}$). A gúla b oldalélét egy Pitagorasz-tételből kapjuk: az oldalél azon derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói M és az alaplap átlójának fele $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ekkor $b = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2,5} \approx 1,58$.

3696. a) Legyen az egyenlő alap- és oldalél a, a másik alapél x. Egy, a gúla magasságára és az x-szel párhuzamos középvonalára illeszkedő síkkal elmetszve a testet, egy x alapú, a gúláéval egyező M magasságú, egyenlő szárú háromszöget kapunk, amelynek szárai egyenlők a gúla szabályos háromszög oldallapjának



magasságával: $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ekkor kikötésünk: $0 < x < \sqrt{3}a$. A másik két (nem szabályos) háromszög-oldallap magassága Pitagorasz-tétellel $m' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}$. A testmagasság szintén Pitagorasz-tétellel: $M = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$. A gúla felszíne:

$$A = ax + 2\left(\frac{am}{2} + \frac{xm'}{2}\right) = ax + am + xm' = ax + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}.$$

A térfogat pedig $V = \frac{axM}{3} = \frac{ax\sqrt{3a^2 - x^2}}{6}$.

b) Keressük meg a maximumhelyet deriválással.

$$V' = \frac{a}{6}\left(\sqrt{3a^2 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{3a^2 - x^2}}\right) = 0, \text{ amiből } \sqrt{3a^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}},$$

innen $3a^2 - x^2 = x^2$, vagyis $x = \sqrt{\frac{3}{2}}a$ (az ellentettje nyilván nem lehetséges).

Visszahelyettesítve ezt a térfogatba, annak maximuma

$$V_{max} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{2}}a\sqrt{3a^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}a\right)^2}}{6} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{2}}a\sqrt{\frac{3}{2}}a}{6} = \frac{a^3}{4}.$$

Másik megoldás:

V maximális, ha a V^2 maximális, ezért elég a $\left(\frac{6V}{a}\right)^2 = x^2(3a^2 - x^2)$ maximumát keresni. $f(x) := x^2(3a^2 - x^2)$ $(x > 0)$.

Legyen $x^2 = z$, ekkor a $z \mapsto z(3a^2 - z)$ z-re másodfokú függvény maximumát keressük. (x-nek és z-nek ugyanott van maximuma, mert $x > 0$). Ennek a függvénynek maximuma van, ha $z = \frac{3a^2}{2}$; azaz $x = \sqrt{\frac{3}{2}}a = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Megjegyzés:

Az $x^2(3a^2 - x^2)$ függvény maximuma megkereshető a számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenséggel is. Az $x^2(3a^2 - x^2) \le \left[\frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2}\right]^2 =$

$= \frac{9a^4}{4}$. Ennyi az $x^2(3a^2 - x^2) = \left(\frac{6V}{a}\right)^2$ függvény maximális értéke, amelyet akkor vesz fel, ha az $x^2 = 3a^2 - x^2$; $x^2 = \frac{3}{2}a^2$, azaz $x = \sqrt{\frac{3}{2}}a$.

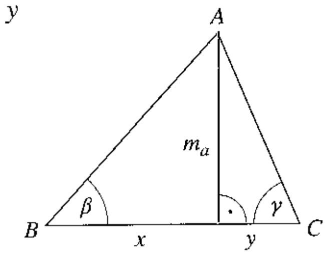
Tehát $\left(\frac{6V_{max}}{a}\right)^2 = \frac{9a^4}{4}$, amelyből $\frac{6V_{max}}{a} = \frac{3a^2}{2}$, azaz $V_{max} = \frac{a^3}{4}$.

3697. a) Legyen ezen keletkezett átlódarabok hossza a, b, c, d, és az egyik közrezárt szög γ. Ekkor ennek csúcsszöge is γ, a másik két keletkezett szög pedig $180° - \gamma$. Mivel $\sin\gamma = \sin(180° - \gamma)$, a négy keletkezett háromszög területe: $\frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}$, $\frac{bc\cdot\sin\gamma}{2}$, $\frac{cd\cdot\sin\gamma}{2}$, $\frac{da\cdot\sin\gamma}{2}$. Mivel az 1997 prímszám, ezért négy (pozitív) egész szorzataként csak $1\cdot1\cdot1\cdot1997$ módon írható fel. Tegyük fel, hogy az első három terület 1, és a negyedik 1997. Az első három tört egyenlőségéből $ab = bc = cd$, és így $a = c$, amiért $cd = ad$. De ekkor nem lehet a negyedik terület különböző tőlük, tehát a szorzat nem lehet 1997.

b) Az a)-ban felírt négy terület szorzata $\frac{a^2b^2c^2d^2\cdot\sin^4\gamma}{16}$, ami jól láthatóan $\frac{abcd\cdot\sin^2\gamma}{4}$-nek a négyzete. Ez persze egész szám, hiszen két (szintén egész) háromszögterület szorzata. Ekkor nem végződhet 1997-re, hiszen egy négyzetszám már 7-re sem végződhet! (Lásd 3109. feladat megoldását. Ez egyúttal egy másik, bár általánosabb megoldása az a) kérdésnek, hiszen 1997 maga is 1997-re végződik.)

3698. a) A reciprokok számtani közepének reciproka: $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = m_a$.

Megjegyzés:
Ez az x és y harmonikus közepe.



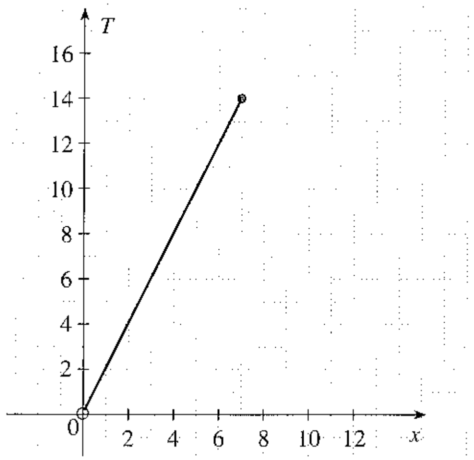
b) A nevezőben közös nevezőre hozással összeadjuk a két törtet, majd a törttel való osztás helyett reciprokával szorzunk: $m_a = \frac{2}{\frac{y + x}{xy}} = \frac{2xy}{x + y}$.

c) Mivel m_a merőleges BC-re, $\operatorname{tg}\beta = \frac{m_a}{x}$ és $\operatorname{tg}\gamma = \frac{m_a}{y}$. Összegük $\frac{m_a}{x} + \frac{m_a}{y}$, közös nevezőre hozás után: $\frac{m_a(x + y)}{xy}$.

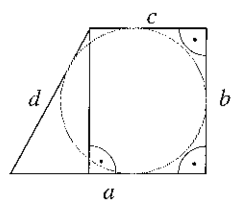
Beírva az m_a-ra a b)-ben kapott eredményt, $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = 2$.

d) Ekkor $BC = 2 + 3 = 5$, és a b)-beli összefüggés szerint $m_a = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2+3} = \dfrac{12}{5} = 2,4$. A háromszög területe $T = \dfrac{BC \cdot m_a}{2} = \dfrac{5 \cdot 2,4}{2} = 6$.

e) Ekkor $BC = x + 2$ és $m_a = \dfrac{2 \cdot x \cdot 2}{x+2}$, így a terület $T = \dfrac{(x+2)\dfrac{4x}{x+2}}{2} = 2x$. Tehát az $x \mapsto 2x$ függvényt kell ábrázolnunk a $]0; 7]$ intervallumon.



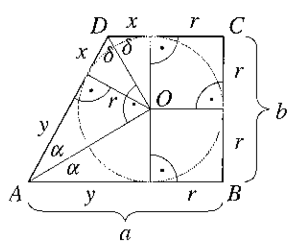
3699. a) Mivel a trapéz érintőnégyszög, ezért $a + c = b + d$, amiből $d = a + c - b$. (Ha nem ismerjük az érintőnégyszögek tételét, ez az eredmény mindössze plusz egy sor beiktatásával akkor is könnyen megkapható, a körhöz külső pontokból – nevezetesen a trapéz csúcsaiból – húzott érintőszakaszok egyenlőségének felírásával.) A merőleges szár egyúttal a trapéz magassága is, amit a rövidebb alap másik csúcsából felmérve az a hosszabbik alapból $a - c$ szakaszt vág le. Ebben a derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt: $b^2 + (a - c)^2 = d^2$, vagyis $b^2 + (a - c)^2 = (a + c - b)^2$. Felbontva a zárójeleket: $b^2 + a^2 - 2ac + c^2 = a^2 + c^2 + b^2 + 2ac - 2ab - 2bc$. Rendezve: $2ab + 2bc = 4ac$ (*), egyszerűsítés és kiemelés után: $b(a + c) = 2ac$, amiből osztással megkapjuk a bizonyítandó alakot.



Megjegyzés:
Vagyis b harmonikus közepe a-nak és c-nek.

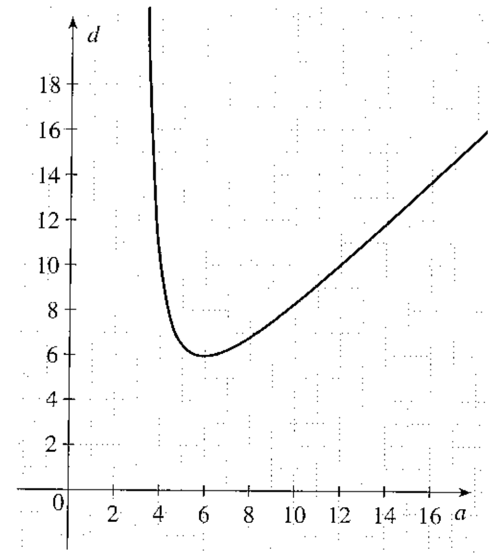
Másik megoldás:
A beírt kör középpontja az AO és DO szögfelezők metszéspontja. Az $AOD\sphericalangle = 90°$, mert $2\alpha + 2\delta = 180°$, amelyből $\alpha + \delta = 90°$. Írjuk fel az AOD háromszögre a magasságtételt: $r^2 = xy$, ahol $r = \dfrac{b}{2}$, $x = c - r$; $y = a - r$, tehát $r^2 = (c - r)(a - r)$, amelyből

$$r = \frac{ac}{a+c}; \quad b = 2r = \frac{2ac}{a+c}.$$

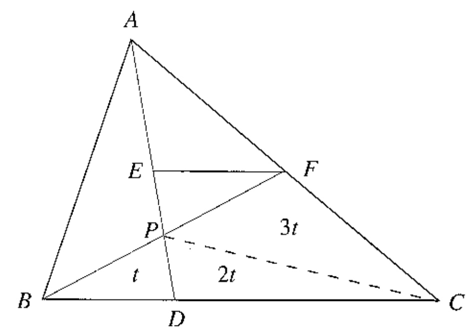


b) Például kiválóan megfelel egy 6 cm oldalú négyzet… (Persze számos más alkalmas trapéz is szerkeszthető, csak az a és c alapoknak nagyobbaknak kell lenniük 3 cm-nél. A négyzet esetén az előző pontbeli bizonyítás módosul ugyan, mert nem keletkezik a hivatkozott derékszögű háromszög, de ekkor a levezetés még egyszerűbb, lévén $a = b = c$.)

c) Minden b)-beli trapéz esetén $b = 6$ cm, és – mint már szó esett róla – 3 cm $< a$. Kettővel osztva és átrendezve az a)-ban kapott (*) összefüggést: $ab = 2ac - bc$, ahonnan $ab = (2a - b)c$. Leosztva a – fenti kikötések miatt biztosan nem nulla – $(2a - b)$-vel, kapjuk: $c = \dfrac{ab}{2a - b}$.
Szintén a)-ban kaptuk, hogy $d = a + c - b$, ahova ezt beírva: $d = a + \dfrac{ab}{2a - b} - b$, azaz a konkrét b értékkel: $d = a + \dfrac{6a}{2a - 6} - 6$.
Tehát (egyszerűsítve) az $a \mapsto a + \dfrac{3a}{a - 3} - 6$ függvényt kell ábrázolnunk a $]3; \infty[$ intervallumon.



3700. a) Vegyük fel E-t az AD-n úgy, hogy EF párhuzamos legyen BC-vel. Mivel F felezi AC-t, így EF az $ADC\,\Delta$ középvonala. Ezért egyrészt E felezi AD-t; másrészt EF fele DC-nek, vagyis egyenlő BD-vel. Ekkor $BDFE$ paralelogramma, vagyis P felezi BF-et. Egyúttal persze ED-t is, ami miatt P negyedelő pont az AD-n.



b) Ekkor $k = 1$ és $l = 3$. Számtani közepük $\dfrac{1+3}{2} = 2$, mértani közepük $\sqrt{1 \cdot 3} = \sqrt{3}$.

c) Mivel P felezi BF-et, ezért a BCP és PCF háromszögek területe egyenlő, nevezzük $3t$-nek. (Egyforma hosszú az alapjuk, és a hozzájuk tartozó magasság is azonos: C távolsága BF-től, illetve annak egyenesétől.) Mivel pedig D harmadolja

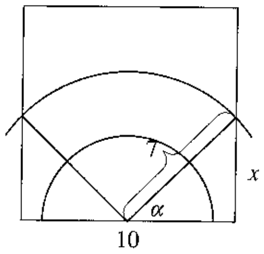
BC-t, a BDP Δ területe fele a PDC Δ-ének: t, illetve $2t$. (Alapjuk aránya 1 : 2, magasságuk azonos: P távolsága BC-től.) Ekkor a $DCFP$ négyszög területe ($5t$) a BDP Δ-ének (t) ötszöröse.

Másik megoldás:

$T_{BCF} = 6t$, mert alapja 3-szor, magassága 2-szer akkora, mint a PDB háromszögnek, tehát $T_{DCFP} = 6t - t = 5t$.

d) Tehát $q = 5$, vagyis egy 0 és $\frac{1}{5}$ közötti valószínűségű eseményt kell megadnunk. Ilyen például, hogy 6-ost dobunk egy szabályos játékkockával, mert ennek valószínűsége $\frac{1}{6}$.

3701. a) 4 m-es kötélen egy 4 m sugarú félkört legelhet le, aminek területe $\frac{4^2\pi}{2} = 8\pi \approx 25$ (m²). A 7 m-es kötélen egy körcikkből és két derékszögű háromszögből tevődik össze a lelegelhető terület. E háromszögek átfogója 7, egyik befogója 5, így másik befogója: $x = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24} \approx 4{,}90$. Az ábrán jelölt α szög koszinusza $\frac{5}{7}$, így $\alpha \approx 44{,}41°$, amiből a körcikk középponti szöge $180° - 2 \cdot 44{,}41° \approx 91{,}17°$. Területe ezért $7^2\pi\frac{91{,}17°}{360°} \approx 38{,}98$. A két háromszög együttes területe: $2 \cdot \frac{5x}{2} = 5\sqrt{24} \approx 24{,}49$. A lelegelhető terület így összesen kb. 63,48 m².



b) Amíg a kötél nem hosszabb 5 m-nél, a lelegelhető terület egyszerűen egy félkör: $\frac{r^2\pi}{2}$ $(0 \le r \le 5)$. Ha pedig hosszabb, úgy az előző pontbeli levezetés szerint: $\cos\alpha = \frac{5}{r}$, $x = \sqrt{r^2 - 5^2}$, a lelegelhető terület pedig

$$T = r^2\pi\frac{180° - 2\alpha}{360°} + 5\sqrt{r^2 - 25}.$$

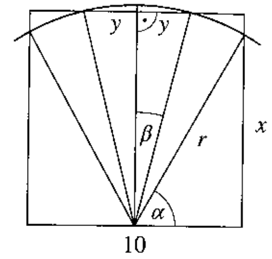
Ha ismerjük függvényként a „visszakeresést" jelentő arkusz koszinuszt, akkor felírhatjuk így (egyszerűsítés után): $T = r^2\pi\frac{90° - \arccos\frac{5}{r}}{180°} + 5\sqrt{r^2 - 25}$, (ahol a visszakeresés eredményét is fokban kapjuk meg.)

Ha ezt nem ismerjük, összefüggést akkor is tudunk teremteni r és T között, csak máshogyan: kifejezzük T-ből α-t. Rendezés után: $\alpha = 90° - \frac{T - 5\sqrt{r^2 - 25}}{r^2\pi} \cdot 180°$.

Ennek a koszinusza ismert, tehát: $\cos\left(90° - \frac{T - 5\sqrt{r^2 - 25}}{r^2\pi} \cdot 180°\right) = \frac{5}{r}$.

Ez az összefüggés $5 < r \le 10$ esetén érvényes; ha ugyanis a kötél hossza eléri a 10 m-t, akkor a négyzet szemközti oldala már levág a körcikkből egy darabot, így ekkor újabb összefüggés írandó fel.

Jelölje ekkor $2y$ a szemközti oldalból a kör belsejébe eső húrt, $y = \sqrt{r^2 - 10^2}$. Az ábrán jelölt β szögre $\cos\beta = \frac{10}{r}$. A lelegelhető terület ekkor két-két, α, illetve β szögű derékszögű háromszögből, és két, egyaránt $90° - \alpha - \beta$ középponti szögű körcikkből áll: $T = 2 \cdot \left(\frac{5x}{2} + \frac{10y}{2} + r^2\pi\frac{90° - \alpha - \beta}{360°}\right)$.



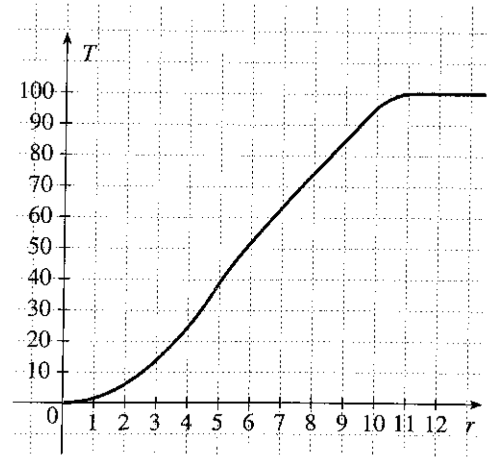
Beírva minden paramétert r-rel kifejezve:

$$T = 5\sqrt{r^2 - 25} + 10\sqrt{r^2 - 100} + r^2\pi\frac{90° - \arccos\frac{5}{r} - \arccos\frac{10}{r}}{180°}.$$

(Most is adódik más lehetőség, elkerülendő az arkusz koszinuszt: ekkor $\alpha + \beta$-t kell kifejezni a megelőző képletből, majd felírni a koszinuszát, amihez viszont már kell az egyes szögek szinusza is, ami persze meghatározható, de igen terjedelmes összefüggésre vezet.) Ez a képlet $10 < r < \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} \approx 11{,}18$ között érvényes; ha ugyanis r eléri $\sqrt{125}$-öt, akkor a kecske elér már a szemközti sarkokba is, és onnan kezdve bármilyen kötélhossz esetén a négyzet teljes területe, 100 (m²) lelegelhető.

c) Az látszik, hogy 5 m-es kötéllel még nem legelhető le a terület fele, hiszen ez a félkör még kisebb a négyzet felét jelentő téglalapnál. Az a)-ban viszont láttuk, hogy 7 m-essel már a felénél több elérhető, így a kettő között kell keresnünk a megfelelő r-et. Ábrázolva pl. a b)-ben kapott T–r összefüggések valamelyikét (itt a $T(r)$ függvényt), közelítőleg leolvasva 5,8 m az eredmény.

(A teljesebb áttekinthetőség kedvéért valamennyi tartományon ábrázoltuk a megfelelő összefüggéseket. De célravezető lehet pl. egy intervallumfelezés is, ebből pontosabb



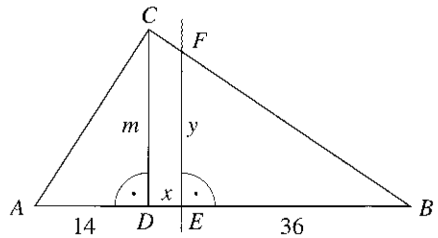
eredmény kapható: kb. 5,83 m. Géppel még több jegyre pontosan számolhatunk: 5,82822162 m. Ennek csak a matematikai modellben van jelentősége, a feladat gyakorlati szempontjából nincs.)

3702. a) Lásd az 1764. feladat megoldását!

$$T_{ABC} = \frac{(14+36)m}{2} = 25m$$

$$T_{BEF} = \frac{(36-x)y}{2} = \frac{T_{ABC}}{2} = 12,5m;$$

amiből $\frac{m}{y} = \frac{36-x}{25}$.



Másrészt $BDC\,\Delta \sim BEF\,\Delta$, mert oldalaik illeszkedők, illetve párhuzamosak, így $\frac{m}{y} = \frac{36}{36-x}$. A két tört egybevetéséből $(36-x)^2 = 36 \cdot 25 = 900$, amiből $36 - x = 30$ (a -30 nem jöhet szóba), és így $x = 6$. A keresett részek: $AE = 14 + x = 20$, $EB = 36 - x = 30$, amiknek aránya valóban $2:3$.

b) 20-nak és 30-nak a számtani közepe $\frac{20+30}{2} = 25$,

mértani közepük $\sqrt{20 \cdot 30} = 10\sqrt{6} \approx 24,49$.

c) $20 = 2^2 \cdot 5$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, ezért $(20; 30) = 2 \cdot 5 = 10$ és $[20; 30] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

d) 20 dobásból pontosan 3 hatost dobni $\binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17}$ valószínűséggel lehet (a binomiális eloszlás szerint). Ennek értéke kb. 0,238.

3703. a) $\frac{12 \cdot 9}{2} = 54$

b) Ha a sokszög oldalszámát n jelöli, akkor $\frac{n(n-3)}{2} = 495$.

Ebből $n = -30$ vagy $n = 33$ adódik, de csak a pozitív gyök lehet megoldás.

Ellenőrzés:

A konvex 33-szögnek $\frac{33 \cdot 30}{2} = 33 \cdot 15 = 495$ átlója van.

c) Ha a sokszög oldalszámát n jelöli, akkor $\frac{n(n-3)}{2} = p$ (1)

ahol p egy pozitív prímszámot jelöl és $n > 2$.

– Ha n páros, akkor $n = 2k$ alakban írható, ahol k egy 1-nél nagyobb egész számot jelöl. Az (1) szerint tehát ekkor $k(2k-3) = p$ teljesül. Mivel p prím és k

nem lehet 1, ezért a felírt egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $2k - 3 = 1$, vagyis $k = 2$, tehát $n = 4$.

A konvex négyszögnek két átlója van, és a 2 valóban prímszám.

– Ha n páratlan, akkor $n - 3$ páros, tehát $n = 2m + 3$ alakban írható, ahol m természetes számot jelöl. Az (1) szerint ekkor $(2m + 3)m = p$. Mivel p prím és $2m + 3 > 1$, ez csak úgy lehetséges, ha $m = 1$, azaz $n = 5$.

A konvex ötszög átlóinak száma is öt, és az 5 valóban prímszám.

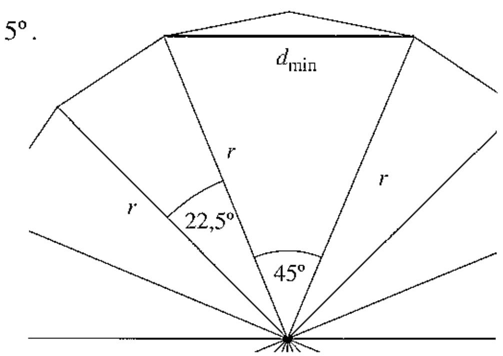
A feladatnak tehát két megoldása van: a sokszög oldalszáma 4 vagy 5.

d) Az átlók a paralelogrammát négy egyenlő területű háromszögre bontják. Egy ilyen háromszög területe $\frac{7 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{2} \approx 30,31$ (cm²).

3704. a) A szabályos sokszög szögei egyenlők. Az n oldalú szabályos sokszög egy szöge $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$, tehát most $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 157,5^\circ$.

Ebből $n = 16$ adódik, vagyis szabályos 16-szögről van szó. Ennek 16 szimmetriatengelye van.

b) Ha a körülírt kör sugara r, akkor a kör területe $r^2\pi$, a szabályos 16-szög területe pedig $16 \cdot \frac{r^2 \sin 22,5^\circ}{2} = 8r^2 \sin 22,5^\circ$.



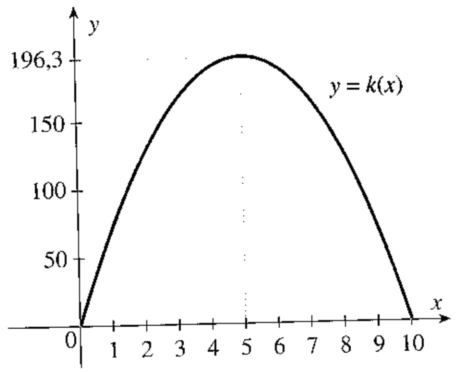
A kör területe a sokszög területének $\frac{r^2\pi}{8r^2 \sin 22,5^\circ} = \frac{\pi}{8 \sin 22,5^\circ} \approx 1,026$-szorosa, azaz kb. 102,6%-a.

c) A legrövidebb átló egy olyan egyenlő szárú háromszög alapjával egyező hosszúságú, amelynek szárszöge 45°, szárai pedig a körülírt kör sugarai: $d_{min} = 2 \cdot 12 \cdot \sin 22,5^\circ \approx 9,18$ (cm) (ez egyben az adott körbe írható szabályos nyolcszög oldalának hossza).

d) Rajzoljuk meg a hatszög körülírt körét. A Thalész-tétel miatt a derékszögű háromszög egyik oldala a szabályos hatszög két szemközti csúcsát összekötő szakasz. Ezt 3-féleképpen választhatjuk meg. Mindegyik választás esetén a többi négy csúcs bármelyikét választhatjuk a háromszög harmadik csúcsának. Összesen tehát $3 \cdot 4 = 12$ különböző módon választható ki derékszögű háromszög. (A kapott háromszögek mind egybevágók.)

3705. a) $k(x) = \dfrac{(x^3 - 30x^2 + 300x)\pi}{12} - \dfrac{x^3\pi}{12} = \dfrac{(50x - 5x^2)\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{2}x(10 - x).$

b) $D_k = [0;\ 10]$ az értelmezési tartomány. A grafikon parabolaív.



c) A k függvény maximumhelye az 5, a maximális függvényérték $\dfrac{125\pi}{2}$.

A víztérfogatok közötti legnagyobb különbség tehát $\dfrac{125\pi}{2} \approx 196,3$ (cm³), ami akkor adódik, amikor mindkét kúpban 5 cm magasan áll a víz. Az első kúpban ekkor $\dfrac{125\pi}{12} \approx 32,7$ (cm³), a másodikban $\dfrac{875\pi}{12} \approx 229,1$ (cm³) víz van.

3706. a) A C-J, E-F és A-G párosítások nyilvánvalók, hiszen a hengerben lévő folyadék térfogata a folyadékszint magasságával egyenesen arányos, a két kúp egybevágósága miatt a betölthető folyadék térfogata e két test esetében azonos, továbbá a két kúp közül a csúcsára állítottban kevés folyadék betöltése is nagy szintemelkedést jelent.

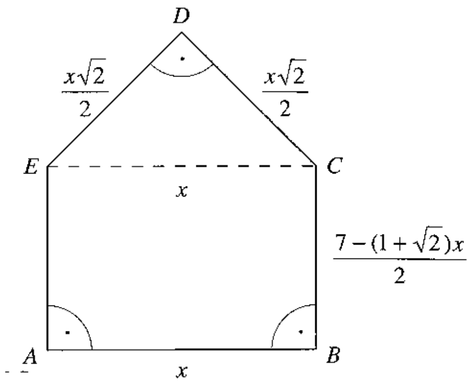
A gömb esetében mindaddig, amíg félig fel nem töltöttük, egyre több folyadék szükséges 1-1 cm-es szintnövekedéshez a test szélesedése miatt. Ezután a folyamat megfordul, egyre kevesebb folyadék is elegendő 1-1 cm-es szintnövekedéshez. A gömb feltöltési folyamatát tehát az I jelű grafikon jeleníti meg. A hiányzó két párosítás ezért: B-I és D-H.

b) A legtöbb folyadék a hengerben van, a legkevesebb pedig a csúcsára állított kúpban.

A legnagyobb térfogat a henger térfogatának fele: $\dfrac{250\pi}{2} \approx 392,7$ (cm³), a legkisebb a kúp térfogatának nyolcada: $\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{250\pi}{3} \approx 32,7$ (cm³) (felhasználtuk, hogy hasonló testek térfogatának aránya megegyezik a hasonlóságuk arányának köbével).

c) A henger és a gömb esetén a maximális térfogat feléhez 5 cm tartozik, a kúpok esetén ez az érték kb. 2,1, illetve kb. 7,9 cm, a csonkakúpnál pedig kb. 6,6 cm. A kérdezett sorrend (a magasságok helyett az edények jelzését használva):
$A < B = C < D < E$.

3707. a) Ha $AB = x$, akkor $EC = x$, és így a CDE egyenlő szárú derékszögű háromszög befogói:



$CD = ED = \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}.$

Mivel az ötszög kerülete 7 km, ezért

$AE = BC = \dfrac{1}{2}\left(7 - x - 2\cdot\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \dfrac{7 - (1+\sqrt{2})x}{2}$ (km).

b) Az ötszög oldalhossza pozitív számmal fejezhető ki, ezért $x > 0$ és $7 - (1+\sqrt{2})x > 0$ teljesülése szükséges, vagyis $0 < x < 7(\sqrt{2} - 1)$. $(0 < x < 2,90)$.

c) Az $ABCE$ téglalap területe $\dfrac{7x - (1+\sqrt{2})x^2}{2}$, a CDE háromszögé pedig $\dfrac{x^2}{4}$.

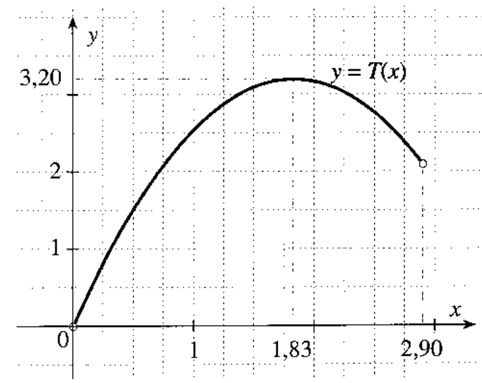
Az ötszög alakú földdarab területét leíró függvény tehát a következő:

$T\colon\ ]0;\ 7(\sqrt{2}-1)[\ \to \mathbf{R};\quad T(x) = \dfrac{14x - (2\sqrt{2}+1)x^2}{4}.$

(Másképpen: $T\colon\ ]0;\ 2,90[\ \to \mathbf{R};\quad T(x) = -0,957x^2 + 3,5x$.)

A T függvény egy olyan másodfokú függvény leszűkítése, amelynek zérushelyei a 0 és a $\dfrac{14}{2\sqrt{2}+1} \approx 3,66$, maximumhelye pedig $\dfrac{7}{2\sqrt{2}+1} \approx 1,83$.

A T függvény grafikonja tehát egy parabolaív.



d) A legnagyobb terület a c) alapján az $AB = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1,83$ km-es választás esetén adódik. Ekkor $BC = CD = DE = AE = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2} \approx 1,29$ (km) (a legnagyobb terület pedig kb. 3,2 km²).

3708. Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C-vel, oldalait és szögeit a szokásos módon betűzzük. A feladat szövege alapján ekkor feltehetjük, hogy igaz $a+b=14$ és $a^2+b^2=102{,}5$ is.

Az $a+b=14 \wedge a^2+b^2=102{,}5$ egyenletrendszer megoldásai az (5,5; 8,5) és (8,5; 5,5) rendezett számpárok, tehát a háromszög a és b oldalának hossza (valamilyen sorrendben) 5,5 m, illetve 8,5 m.

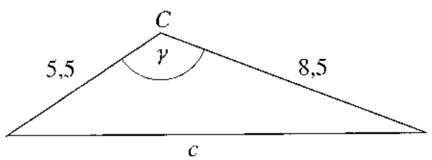
Első eset:

Ha a háromszög tompaszögét az a és b fogja közre, akkor a területre megadott érték alapján $19=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{5{,}5\cdot 8{,}5\cdot\sin\gamma}{2}$, amiből $\sin\gamma=0{,}8128$. Ebből, mivel γ tompaszög: $\gamma=125{,}63°$.

Koszinusztétellel:

$c^2=102{,}5-2\cdot 5{,}5\cdot 8{,}5\cdot\cos 125{,}63°$, amiből $c\approx 12{,}53$ m.

Például a 8,5 m-es oldallal szemközti hegyesszöget szinusztétellel is kiszámíthatjuk (legyen ez a háromszög β szöge): $\frac{\sin\beta}{\sin 125{,}63°}=\frac{8{,}5}{12{,}53}$, amiből $\beta\approx 33{,}47°$ és így $\alpha\approx 20{,}90°$ adódik.

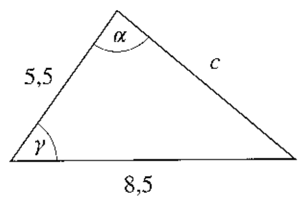


Második eset:

Ha a tompaszög nem az a és b által közrefogott szög, akkor ez csak a 8,5 cm-es oldallal (legyen ez most az a oldal) szemközti szög lehet (hiszen a háromszögben két oldal közül a nagyobbikkal szemben fekszik a nagyobb szög). Az a és a b oldal által közrefogott γ szög szinusza (természetesen) ismét 0,8128-nak adódik a területre megadott értékből, de most nyilvánvalóan hegyesszög, ezért $\gamma=54{,}37°$.

Koszinusztétellel: $c=6{,}93$ m.

Ismét koszinusztétellel az α tompaszögre:



$\cos\alpha=\frac{5{,}5^2+6{,}93^2-8{,}5^2}{2\cdot 5{,}5\cdot 6{,}93}>0$, ami nyilvánvalóan lehetetlen, hiszen tompaszög koszinusza negatív.

Ez az eset tehát nem felel meg a feladat szövegének.

Összefoglalva: egyetlen háromszög felel meg; ennek oldalai 5,5 m, 8,5 m, 12,53 m hosszúak, szögei pedig 20,90°, 33,47° és 125,63° nagyságúak.

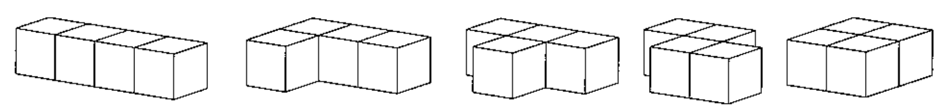
3709. a) Egy négyzetes oszlopból 4 kocka készíthető. Ezek együttes térfogata $4\cdot 4^3=256$ (cm³), a négyzetes oszlopé pedig $4{,}3^2\cdot 17{,}1\approx 316$ (cm³). A hulladék térfogata kb. 60 cm³, ami a 316 cm³-nek 19,0%-a. A gyártás során kb. 19,0% hulladék keletkezik.

b) A dobozban a szomszédos kockák teljes lapjaikkal csatlakoznak egymáshoz.
A téglatest alakú doboz egy csúcsból kiinduló három éle mentén elhelyezett kockák száma legyen a, b, illetve c és tegyük fel, hogy $a\ge b\ge c$.
A feladat követelménye, hogy a, b, c pozitív egészek legyenek és $abc=36$ teljesüljön.
Mivel $36=2^2\cdot 3^2$, ezért az alábbi táblázat szerinti esetek lehetségesek.

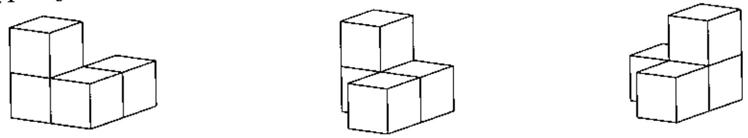
a	b	c	felszín (cm²)
36	1	1	2336
18	2	1	1792
12	3	1	1632
9	4	1	1568
9	2	2	1280
6	6	1	1536
6	3	2	1152
4	3	3	1056

A legkisebb felszín eléréséhez tehát a téglatest alakú doboz egy csúcsból kiinduló élei mentén 4, 3, 3 kockát kell elhelyezni.
A szükséges doboz méretei:
16 cm × 12 cm × 12 cm (ennek felszíne pedig $4\cdot 16\cdot 12+2\cdot 12^2=1056$ [cm²] ahogyan a táblázatból is kiolvasható).

c) A kérdés megválaszolásához meg kell mondanunk, hogy négy egybevágó kockából hány olyan test építhető fel, amelyek közül semelyik kettő nem vihető át egymásba térbeli mozgással, feltéve, hogy egy adott test építése során (a másodiktól kezdve) mindig csak úgy lehet a már meglévő kockákhoz újabbat illeszteni, hogy a csatlakozás egy teljes négyzetlapon történjék.
A lehetséges esetek számának meghatározásához először azokat a testeket adjuk meg, amelyekben a 4 kocka középpontja egy síkban (pl. egy vízszintes síkban) van:



Ezután meghatározzuk azoknak az eseteknek a számát, amelyekben a 4 kocka középpontja nincs egy síkban:



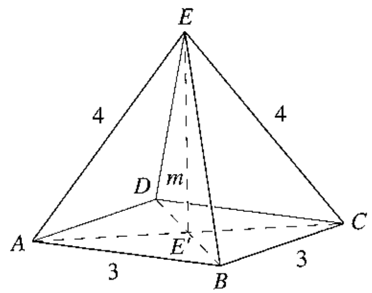
Összesen tehát 8 különböző, a megadott feltételeknek megfelelő test építhető. Ehhez 32 db kockára van szükség, ezért egy készlet elegendő ezek megépítéséhez.

Megjegyzés:
Az ábrázolt testek között a sorrendben 6. és 7. egybevágó ugyan, de térbeli mozgással nem vihetők át egymásba (mert e két test térbeli orientációja különböző, a tér mozgásai – eltolások és elforgatások – pedig nem változtatják meg az orientációt).

3710. a) A gúla m magassága meghatározható az ábra ACE egyenlő szárú háromszöge segítségével. A háromszög alapja: $AC = 3\sqrt{2}$, ezért

$$m^2 = 4^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{23}{2},$$

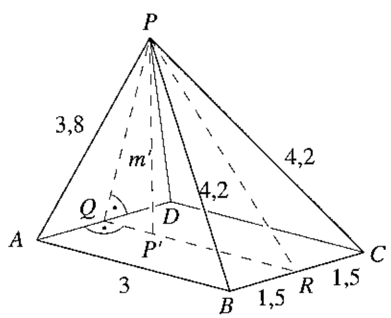
tehát $m = \sqrt{\frac{23}{2}} \approx 3,39$ (cm).



A gúla térfogata: $V_g = \dfrac{3^2 \cdot \sqrt{\frac{23}{2}}}{3} \approx 3 \cdot 3,39 = 10,17$ (cm³).

Egy oldallap-háromszög alaphoz tartozó magassága pl. Pitagorasz-tétellel is meghatározható: $\sqrt{4^2 - 1,5^2} \approx 3,71$, így egy oldallap területe kb. 5,56 cm², a gúla felszíne tehát $A_g \approx 3^2 + 4 \cdot 5,56 = 31,2$ (cm²).

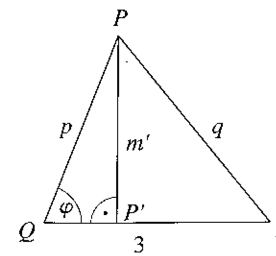
b) Az $ABCD$ alaplap RQ középvonalára és a gúla P csúcsára illeszkedő síkra szimmetrikus a „hibás" gúla. Emeljük ki az ábrából a PQR síkmetszetet.



Pitagorasz-tétellel az AQP, illetve BRP derékszögű háromszögekből:

$p = \sqrt{3,8^2 - 1,5^2} = \sqrt{12,19} \approx 3,49$ (cm), illetve

$q = \sqrt{4,2^2 - 1,5^2} = \sqrt{15,39} \approx 3,92$ (cm).



A PQR háromszögből koszinusztétellel

$\cos\varphi = \dfrac{9 + 12,19 - 15,39}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{12,19}} \approx 0,2769$, tehát

$\varphi \approx 73,9°$.

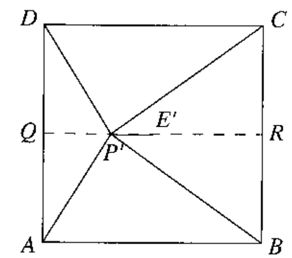
A $PP'Q$ derékszögű háromszögből $m' = p \cdot \sin\varphi \approx 3,35$ (cm).

A hibás gúlák magassága és így térfogata is kisebb tehát, mint a hibátlanoké. 1000 gúla esetén a különbség $1000(V_g - V_g')$, ahol V_g' egy hibás gúla térfogata.

$V_g' = \dfrac{3^2 m'}{3} \approx 10,05$ (cm³), tehát a keresett különbség kb.

$1000 \cdot (10,17 - 10,05) = 120$ (cm³).

c) A b)-ben megrajzolt $PP'Q$ derékszögű háromszögből: $QP' = p \cdot \cos\varphi \approx 0,97$ cm. Mivel E' felezi a QR középvonalat, ezért $QE' = 1,5$ cm. A gúla csúcsának merőleges vetülete az alaplap középpontjától $P'E' \approx 0,53$ cm-re, azaz 5,3 mm-re távolodott el.



Megjegyzés:
A most kapott kb. 5 mm-es eltérés a térfogatváltozás mértékével ellentétben jelentősnek mondható, amit indokolhatunk azzal is, hogy ekkora eltolódás akár szabad szemmel is azonnal érzékelhető.

3711. a) A feltekert alumínium térfogata (szorosan csévélt fólia esetén) két henger térfogatának különbségeként is megkapható:

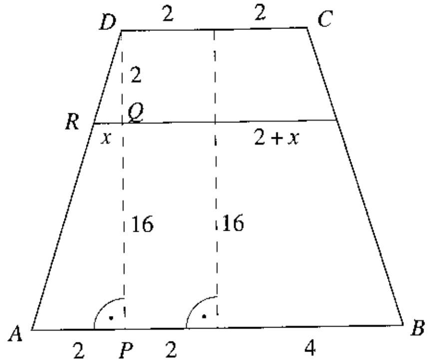
$V_{Al} = 17,1^2 \cdot \pi \cdot 290 - 13,5^2 \cdot \pi \cdot 290 = 290 \cdot \pi \cdot (17,1^2 - 13,5^2) \approx$
$\approx 290\pi(290 - 180) \approx 100000$ (mm³ $\approx$ 100 cm³)

A fólia tömege kb. 270 gramm.

b) Térfogatának ismeretében kiszámítható a fólia vastagsága is, ha a feltekerés előtti fóliát x mm vastagságú téglatestnek képzeljük el és így is felírjuk a térfogatát:
$100000 = 30000 \cdot 290 \cdot x \Rightarrow x \approx 0,0115$.
A fólia tehát kb. 0,0115 mm (11,5 μm) vastag.

c) Gyakorlati szempontból kielégítő választ kapunk, ha kiszámítjuk, hogy hány réteg fólia vastagsága lesz 3,6 mm. $\dfrac{3,6}{0,0115} \approx 313$, tehát kb. 310-320-szor fordult körbe a kartonhenger a fólia feltekerésekor.

3712. a) Készítsünk (magasságában erősen torzított) ábrát a flakon tengelymetszetéről.



16 cm-es töltési magasság esetén a mustár egy olyan csonkakúpot tölt meg, amelynek alapköre 4 cm sugarú, fedőkörének sugara pedig $2 + x$ cm. Az APD derékszögű háromszög hasonló az RQD derékszögű háromszöghöz (mert szögeik páronként egyenlők), ezért megfelelő oldalaik aránya is egyenlő: $\frac{RQ}{AP} = \frac{DQ}{DP}$, vagyis $\frac{x}{2} = \frac{2}{18}$. Ebből $x = \frac{2}{9}$, tehát $2 + x = \frac{20}{9} \approx 2,22$.

A mustár térfogata tehát $\frac{16\pi}{3}\left(4^2 + 4 \cdot \frac{20}{9} + \frac{20^2}{9^2}\right) \approx 499,8$ (cm^3),

tehát kb. 500 cm^3 (fél liter) az előírt töltési mennyiség.

b) A 14 cm-es magassághoz tartozó csonkakúp fedőkörének sugara (az a)-ban leírt módon meghatározva) $2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9} \approx 2,44$ (cm), a betöltött mustár térfogata pedig kb. 466 cm^3.

A teljes (18 cm-es) magassághoz tartozó térfogat kb. 528 cm^3.

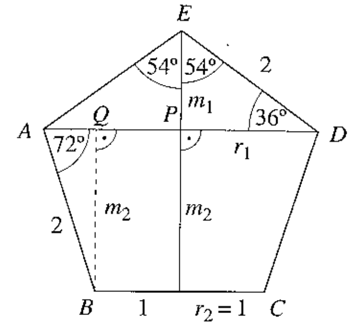
A töltési átlag: $\frac{5 \cdot 500 + 5 \cdot 466 + 5 \cdot 528}{15} = \frac{1494}{3} = 498$ (cm^3).

A mért értékek szórása: $\sqrt{\frac{5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 32^2 + 5 \cdot 30^2}{15}} = \sqrt{\frac{1928}{3}} \approx 25,4$ (cm^3).

A megengedett tűrés (szórás) a szöveg szerint ± 10 cm^3. A mért értékek esetén ennek a 2,5-szerese adódik, tehát a betöltő automatikán állítani kell (jóllehet „átlagosan nem károsodnak a fogyasztók", hiszen a mért értékek átlaga alig – mindössze 4 ezrelékkel – tér el az előírttól).

ÖSSZETETT, ILLETVE NEHEZEBB FELADATOK

3713. a) A függőón térfogata megkapható egy forgáskúp és egy csonkakúp térfogatának összegeként is.



Az EPD derékszögű háromszögből:
$m_1 = 2 \cdot \sin 36° \approx 1,176$
$r_1 = 2 \cdot \sin 54° \approx 1,618$.
Az AQB derékszögű háromszögből:
$m_2 = 2 \cdot \sin 72° \approx 1,902$.
A kúp térfogata:

$V_k = \frac{r_1^2 \pi m_1}{3} \approx 3,22$ cm^3.

A csonkakúp térfogata: $V_{cs} = \frac{m_2 \pi}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) \approx 10,43$ cm^3.

A függőón térfogata tehát $V = V_k + V_{cs} \approx 13,65$ cm^3, tömege pedig

$13,65\ \text{cm}^3 \cdot 7,84\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 107\ \text{g} = 10,7$ dkg.

b) A „minimális" henger alapkörének sugara r_1, magassága pedig $m_1 + m_2$, ezért térfogata $V_h = r_1^2\pi(m_1 + m_2) \approx 25,31$ cm^3.
A hulladék térfogata $25,31 - 13,65 = 11,66$ cm^3, ami a henger térfogatának kb. 46%-a.
Ha nagyobb hengerből indul a gyártás, akkor (mivel a függőón térfogata ugyanannyi marad) még nagyobb lesz a hulladék aránya.
A gyártás folyamán tehát legalább 46% hulladék keletkezik.

3714. a) $C - I$; $B - H$; $E - G$; $A - J$; $D - F$.

b) A képletekbe történő helyettesítések helyett figyeljük meg, hogy a C jelű hengerben a négy másik test bármelyike „elfér". Ebből már nyilvánvaló, hogy a hengerben lesz a legnagyobb a kérdéses vízfelszín területe (ezen a téren csak az 5 cm-es és a 10 cm-es magasságnál akadna a hengernek „versenytársa"), mégpedig $25\pi \approx 78,54$ (cm^2).

c) A b)-beli meggondolásból az is adódik, hogy a hengerbe fér a legtöbb víz, nevezetesen $250\pi \approx 785,4$ (cm^3).

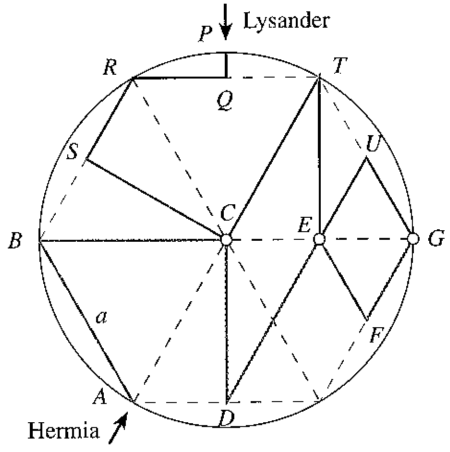
3715. A félig bemerülő golyó által kiszorított víz súlya $\frac{1}{2} \cdot V_g \cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$, ez pedig a szöveg szerint 300 N-nal egyenlő: $\frac{1}{2} \cdot V_g \cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{m}^3} = 300\ \text{N} \Rightarrow V_g = 6 \cdot 10^{-2}$ m^3.

Ha a golyó külső sugara R, akkor $\frac{4\pi R^3}{3} = 6 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10^{-2}}{2\pi}}\ \text{m} \approx$
$\approx 0,243$ m.

Ha a golyó belső sugara r, akkor a vas térfogata $\frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)$, súlya pedig 300 N.

Tehát $\frac{4\pi}{3}(0,243^3 - r^3)\cdot 7,7\cdot 10^4 = 300$. Ebből $r^3 = 0,243^3 - \frac{900}{4\pi\cdot 7,7\cdot 10^4} \approx$ $\approx 0,0134$, azaz $r \approx 0,238$ m. A golyó falvastagsága $R - r \approx 0,005$ m = 5 mm.

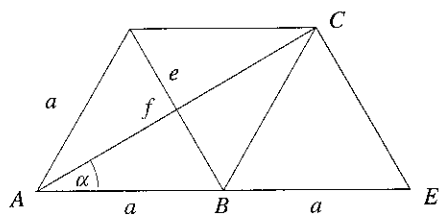
3716. A szabályos hatszög oldala $a = r$, ahol r a hatszög köré írt kör sugara.
Hermia útja A-tól C-ig:
$AB = a,\ \ BC = r,\ \ AB + BC = 2a.$
Lysander útja P-től C-ig:
$PQ + QR + RS + SC.$
$PQ + SC = r,$
$QR + RS = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a.$
$PQ + QR + RS + SC = 2a$



A C pontban találkoznak, mert egyszerre indultak, ugyanolyan sebességgel haladtak és addig mindketten $2a$ utat tettek meg.
Hermia további útja: $CD + DE$.
Lysander további útja: $CT + TE$.
$CDET$ paralelogramma, ezért két-két szomszédos oldalának összege egyenlő, tehát E-ben is találkoznak.

Végül $EFGU$ rombusz, melynek oldalai $\frac{a}{2}$ hosszúak, mindketten $2\cdot\frac{a}{2} = a$ utat járnak be, ezért a G kijárathoz ugyancsak egyszerre érnek.

3717. A rombusz átlói $e \perp f$ és $CE \parallel e \Rightarrow$ $CE \perp f$. Tehát az $AEC\,\Delta$ derékszögű, átfogója $AE = 2a$.
Ebből adódik, hogy a növekvő sorozat tagjai $e, f, 2a$.
$AEC\,\Delta$-re felírjuk a Pitagorasz-tételt
$e^2 + f^2 = (2a)^2 \quad *$

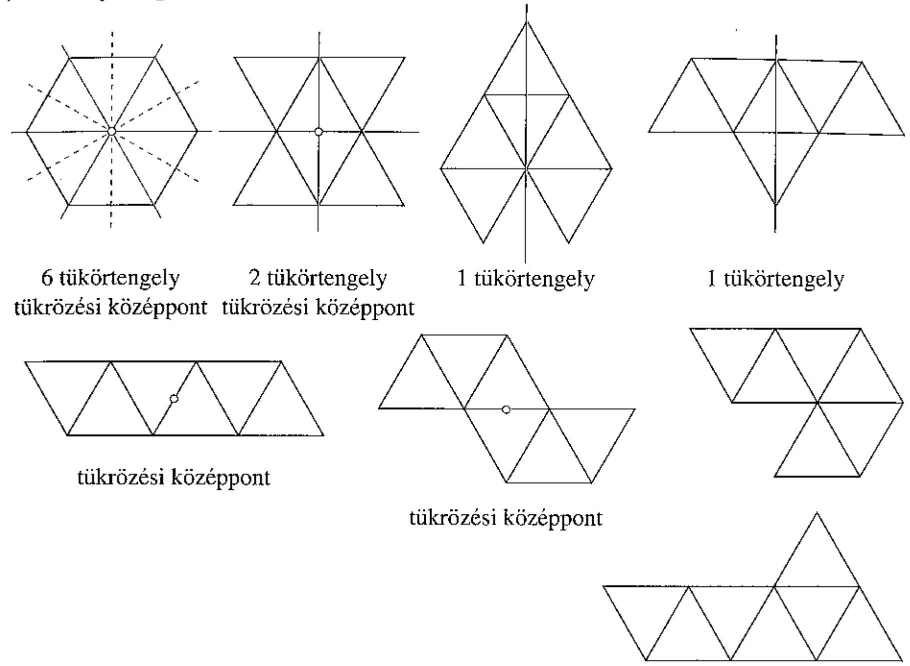


A számtani sorozat alapján: $e + 2a = 2f \Rightarrow 2a = 2f - e$,
ezt behelyettesítjük a *-gal jelölt egyenletbe: $e^2 + f^2 = (2f - e)^2$.
Ebből kapjuk: $3f^2 - 4ef = 0$.

Ezt szorzattá alakítjuk $f(3f - 4e) = 0\ \ f > 0,\ \ 3f = 4e \Rightarrow \frac{e}{f} = \frac{3}{4}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{e}{f} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \approx 36,87°.$
A rombusz szögei: $(2\alpha) \approx 73,74°$ és $180° - 73,74° = 106,26°$.

3718. a) Néhány megfelelő összeállítás:



b) Az egyesek helyén álló szám legyen: x.
Ekkor a tízesek helyén álló szám: $x + 2$,
a százasok helyén álló szám: $9 - (2x + 2) = 7 - 2x$.
Az eredeti szám: $100(7 - 2x) + 10(x + 2) + x = 720 - 189x$.
A felcserélt szám: $100x + 10(x + 2) + 7 - 2x = 108x + 27$.
A feltétel miatt: $720 - 189x = 108x + 27 + 99$.
Ebből $x = 2$.
A keresett szám 342.

Másik megoldás:

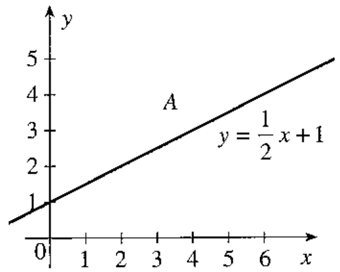
Az eredeti háromjegyű szám $\overline{abc}$.
$\overline{abc} - \overline{cba} = 99$, azaz $100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99$, így $a = c + 1$. A számjegyek ezért: $c + 1, c + 2, c$. Mivel az összeg 9, ezért $3c = 6$, ebből $c = 2$. A keresett szám 342.

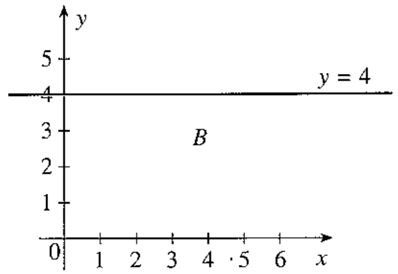
3719. a) $A := \{P(x;\ y) \mid y > \frac{1}{2}x + 1\}$

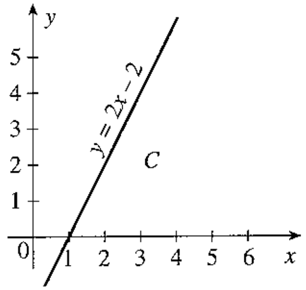
$B := \{P(x;\ y) \mid y \le 4\}$

$C := \{P(x;\ y) \mid y < 2x - 2\}$

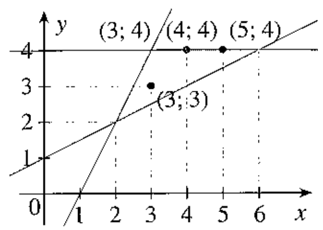
Az ábrákon színezéssel jeleztük a ponthalmazokat (illetve ezek egy részét).







b) Az A, B és C halmaz közös részének (metszetének) egész koordinátájú pontjai leolvashatók az ábráról. Az egész koordinátájú pontjai: $D(4;\ 4)$, $E(5;\ 4)$, $F(3;\ 3)$.



3720. A harmadik oldal, amelyik a másik kettő számtani közepe, nem lehet az átfogó, mert az a leghosszabb, tehát két eset van:

1) az átfogó a 24 cm, ekkor a két befogó a és $\frac{a+24}{2}$ és a Pitagorasz-tétel szerint:

$a^2 + \left(\frac{a+24}{2}\right)^2 = 24^2$, amiből $4a^2 + a^2 + 48a + 576 = 4 \cdot 576$, azaz

$5a^2 + 48a - 1728 = 0$.

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei: 14,4 és -24.

Mivel a egy befogó hosszát jelöli, csak pozitív szám lehet, így $a = 14{,}4$, s akkor a másik befogó $b = \frac{14{,}4 + 24}{2} = 19{,}2$, az átfogó pedig 24. (Ez éppen a klasszikus 3, 4, 5 derékszögű háromszög 4,8-szoros nagyítása.)

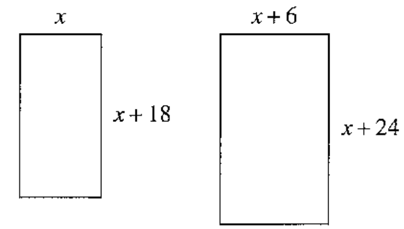
ÖSSZETETT, ILLETVE NEHEZEBB FELADATOK

2) az egyik befogó a 24, ekkor az átfogó legyen c, és a másik befogó $\frac{c+24}{2}$, ekkor a Pitagorasz-tétel szerint: $24^2 + \left(\frac{c+24}{2}\right)^2 = c^2$, amiből

$4c^2 = c^2 + 48c + 576 + 4 \cdot 576$, azaz $3c^2 - 48c - 2880 = 0$; $c^2 - 16 - 960 = 0$.

Ennek a másodfokú egyenletnek is két gyöke van: 40 és -24. Mivel c az átfogó hosszát jelöli, ezért csak 40 lehet. Ebben az esetben a két befogó 24 és $\frac{40+24}{2} = 32$. (Ez éppen a klasszikus 3, 4, 5 derékszögű háromszögnek a nyolcszoros nagyítása.)

3721. Legyenek az egyik téglalap oldalai x és $x + 18$; a másiké $x + 6$ és $x + 24$.



A feltétel szerint:

$(x + 6)(x + 24) = 360 + x(x + 18)$,

$12x = 360 - 144 = 216$; azaz $x = 18$.

Tehát a lemezek területe:

$t_1 = 18 \cdot 36 = 648$;

$t_2 = 24 \cdot 42 = 1008$.

Másik megoldás:

Legyen a és b az egyik, c és d a másik téglalap oldalainak centiméterben mért hossza. Ekkor a szöveg szerint: (1) $|ab - cd| = 360$

(2) $a - b = 18$

(3) $c - d = 18$

(4) $a - c = 6$

Ebből kell meghatározni az oldalakat. Fejezzünk ki mindent a segítségével: (4)-ből $c = a - 6$; (2)-ből $b = a - 18$, végül (3)-ból $d = c - 18 = a - 6 - 18 = a - 24$. Ezeket beírva (1)-be: $|a(a - 18) - (a - 6)(a - 24)| = 360$. Mivel a, $a - 6$, $a - 18$, $a - 24$ pozitívak (oldalhosszak), és $a > a - 6$, valamint $a - 18 > a - 24$, ezért az első szorzat nagyobb, mint a második, elhagyható az abszolútérték-jel:

$a(a - 18) - (a - 6)(a - 24) = 360$.

Ebből beszorzás után: $a^2 - 18a - a^2 + 30a - 144 = 360$, azaz $12a = 504$, tehát $a = 42$ adódik. Vagyis az egyik téglalap oldalai: 42 és 24; míg a másiké 36 és 18. Mind a négy egyenlet fennáll ezekre a számokra, így a kérdésre adott válaszunk: 1008 cm², illetve 648 cm² a két téglalap területe.

3722. a) A magasság lesz a bekötő út.

b) Ki kell számolni a háromszög kerületét, illetve egy-egy oldalának és a hozzátartozó magasság hosszának összegét. Ez utóbbiból három változat lehetséges. A kerület a megadott oldalak összege: 21 + 24 + 17 = 62 (km). A Heron-képletből a háromszög területe: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol s a fél kerület, tehát 31 (km). Ezzel a gyök alatt az alábbi négy szám szorzata szerepel: 31, 10, 7, 14. Tehát $T^2 = 30380$, ahonnan $T \approx 174{,}3$ km². A területet azonban úgy is kiszámíthatjuk, hogy az oldalt szorozzuk a hozzátartozó magassággal, és a szorzatot osztjuk 2-vel. Eszerint: $am_a = bm_b = cm_c \approx 348{,}6$. Mivel $a = 21$, $b = 24$, $c = 17$, ezért $m_a \approx 16{,}6$; $m_b \approx 14{,}5$; $m_c \approx 20{,}5$. Eszerint, ha minden települést mindegyikkel összekötik, akkor 62 km út kell, ha egy oldalt és a hozzátartozó magasságot, akkor a következő eredmények adódnak: 21 + 16,6 = 37,6 (km); 24 + 14,5 = 38,5 (km); 17 + 20,5 = 37,5 (km). E három utóbbi szám között nincs nagy különbség; a legjobb, ha a legrövidebb oldal és a hozzátartozó magasság mentén építik meg az utakat.

3723. a) A fürdőszoba alapjának kerülete 9 m. Ha 1,8 m magasságig mindent becsempéznénk, akkor 9 · 1,8 = 16,2 (m²) csempére lenne szükség. Az ajtó miatt 0,7 · 1,8 = = 1,26 (m²)-t, a fürdőkád miatt 1,6 m²-t levonva kapjuk a burkolandó felület területét: 13,34 m².

b) $\dfrac{13{,}34}{0{,}94} \approx 14{,}2$ (m²) csempére van szükség.

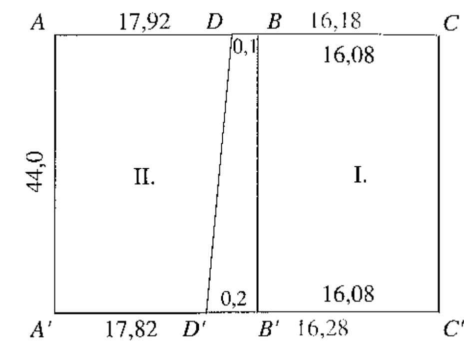
c) Egy csempe $0{,}2^2 = 0{,}04$ (m²) területű. Összesen kb. $\dfrac{14{,}2}{0{,}04} = 355$ darab csempére van szükség.

Megjegyzés:
A csempék között általában hézagot (úgynevezett fúgát) hagynak, amit később fehér vagy más színű kötőanyaggal töltenek ki. A hézag nagyságától függően a számítottnál kevesebb csempe is elegendő lehet.

d) A virágminta egy szirmának területe kiszámítható egy 10 cm sugarú negyedkör és egy 10 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területének különbségeként is. A virágminta területe tehát: $4 \cdot \left(\dfrac{10^2\pi}{4} - \dfrac{10^2}{2}\right) = 100(\pi - 2) \approx$ $\approx 114{,}2$ (cm²). Ez a csempe 400 cm²-es területének kb. 28,55%-a.
A burkolt felületnek kb. 71,4%-a lesz világosabb és 28,6%-a sötétebb tónusú.

e) Nem kell befesteni a szellőzőnyílást és az ajtó csempe fölé nyúló részét. A befestendő terület tehát: $2{,}5 \cdot 2 + 0{,}85 \cdot 9 - 0{,}1^2\pi - 0{,}2 \cdot 0{,}7 \approx 12{,}5$ (m²).
A festés 12,5 · 150 = 1875 Ft-ba kerül.

3724. a) Az eredeti területek:
$T(I) = T(BCC'B') = 16{,}08 \cdot 44 = 707{,}52 \Rightarrow$ Az I. telek területe 707,5 m².
$T(II) = T(ABB'A') = 18{,}02 \cdot 44 = 792{,}88 \Rightarrow$ A II. telek területe 792,9 m².
A területváltozás: $T(DBB'D') = \dfrac{0{,}1 + 0{,}2}{2} \cdot 44 = 6{,}60$.
$T(I) + 6{,}60 = 714{,}12$
A terület 714,1 m².
$T(II) - 6{,}60 = 786{,}28$
A terület 786,3 m².
$\dfrac{6{,}6}{707{,}5} \approx 0{,}0093 \Rightarrow$
T(I) növekedése 0,93%.
$\dfrac{6{,}6}{792{,}9} \approx 0{,}0083 \Rightarrow$
T(II) csökkenése 0,83%.



b) A kerítés tényleges hossza a $BB'D'D$ trapéz derékszögű, DD' szára. Ezt Pitagorasz tételével számítjuk ki:
$DD'^2 = 0{,}1^2 + 44{,}00^2 = 1936{,}01 \Rightarrow DD' \approx 44{,}00$ (m).
Megjegyzés:
DD'-nek a BB'-től való eltérése csak a 4. tizedes jegyben jelentkezik. A mérési hibahatár ennél nagyobb.

3725. a) Egy kartonlapból egy 70 cm átmérőjű körlap vágható ki; ennek kerülete $70\pi \approx$ ≈ 220 cm. $\dfrac{220}{53} \approx 4{,}15$, tehát 4 darab körcikk vágható ki egy kartonlapból.
A négy körcikk együttes területe $4 \cdot \dfrac{35 \cdot 53}{2} = 3710$ (cm²). A hulladék egy kartonlap esetén 5600 – 3710 = 1890 (cm²), ami a kartonlap területének kb. 34%-a.

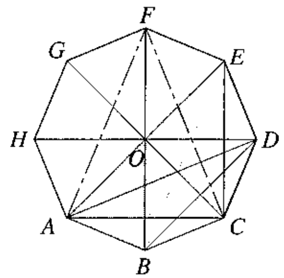
b) A körcikkből olyan kúp készíthető, amelynek alkotója 35 cm, alapkörének kerülete pedig 53 cm (tehát az alapkör sugara $\dfrac{53}{2\pi} \approx 8{,}44$ cm). Egy ilyen kúp magassága kb. 34 cm; ekkora távolságra lesz az asztallaptól a kúp csúcsa.

3726. a) A tölgy a $T(3; 4)$ pontban állt, a róka az $R(-2; 6)$ pontban, a nyúl pedig az $N(5; -1)$ pontban volt, ezért $TR = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ és $TN = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. Egyszerre hallották tehát a csattanást.

b) Bagoly a T középpontú, $\sqrt{29}$ sugarú kör $(1;\, b)$ pontjában volt. Ez azt jelenti, hogy az $(1;\, b)$ rendezett számpár az $(x-3)^2+(y-4)^2=29$ egyenletnek megoldása, tehát az $(1-3)^2+(b-4)^2=29$ kijelentés igaz.
Ebből $(b-4)^2=25 \Leftrightarrow b=-1 \vee b=9$.
Bagoly tehát vagy az $(1;\,-1)$ vagy az $(1;\,9)$ pontban csapott le a pocokra.

3727. a) Ha a kiválasztott csúcsok között van két szomszédos, például A és B, a keletkező háromszögek: $ABC\,\Delta \cong ABH\,\Delta$, $ABD\,\Delta \cong ABG\,\Delta$, $ABE\,\Delta \cong ABF\,\Delta$.
Ha nincs két szomszédos csúcs közöttük, akkor biztosan lesznek olyanok , amelyek második szomszédok, például A és C, a megfelelő háromszögek: $ACE\,\Delta \cong ACG\,\Delta$ és $ACF\,\Delta$. (Több különböző háromszög nincs, mert nem lehet mindhárom oldal AC átlónál nagyobb.) Tehát öt különböző háromszög jön így létre.

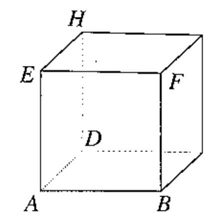
b) c) $AOB\sphericalangle = BOC\sphericalangle = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.



$OAB\sphericalangle = \dfrac{180^\circ-45^\circ}{2} = 67{,}5^\circ$.
Ezt felhasználva:
(1) az *ABC egyenlő szárú háromszög* szögei: $ABC\sphericalangle = 135^\circ$, $CAB\sphericalangle = BCA\sphericalangle = 22{,}5^\circ$.
(2) az *ABE derékszögű háromszög*, mert AE a kör átmérője, tehát (Thalész tétele szerint) $ABE\sphericalangle = 90^\circ$, valamint $EAB\sphericalangle = OAB\sphericalangle = 67{,}5^\circ$ és így $AEB\sphericalangle = 22{,}5^\circ$.
(3) az AE átmérő, ezért $ACE\sphericalangle = 90^\circ$, *ACE egyenlő szárú derékszögű háromszög EAC* $\sphericalangle = AEC\sphericalangle = 45^\circ$.
(4) az *ACF egyenlő szárú háromszög*. ABE és BAF egybevágó háromszögek, ezért $AFB\sphericalangle = AEB\sphericalangle = 22{,}5^\circ$ [l. (2)], így $AFC\sphericalangle = 45^\circ$ és a másik két szög $67{,}5^\circ$.
(5) Az ABD háromszögben $ABD\sphericalangle = ABO\sphericalangle + OBD\sphericalangle = 67{,}5^\circ + 45^\circ = 112{,}5^\circ$, valamint $BDA\sphericalangle = CEB\sphericalangle = AEC\sphericalangle - AEB\sphericalangle = 45^\circ - 22{,}5^\circ = 22{,}5^\circ$, és $DAB\sphericalangle = 45^\circ$.
Speciális háromszöget kapunk a felsoroltak közül az (1), (2), (3), (4) esetben.

Megjegyzés:
1) A megoldáshoz felhasználhatjuk, hogy a szabályos n-szög bármely szöge $\dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$. Ennek alapján a szabályos nyolcszög minden szöge 135°-os.
2) Hamarabb megkapjuk a háromszögek szögeit, ha felhasználjuk a középponti és kerületi szögek tételét.

3728. Ha a kiválasztott csúcsok között van két olyan, amelyek egy *él* végpontjai, akkor a harmadik csúccsal ezek egy olyan síkot határoznak meg, amely a kocka egy negyedik csúcsát is tartalmazza. Például ha a kiválasztott két csúcs A és B, akkor
C-vel együtt D (ill. D-vel együtt C),
E-vel együtt F (ill. F-fel együtt E),



G-vel együtt H (ill. H-val együtt G) is illeszkedik a megfelelő síkra.
Ha a kiválasztott csúcsok között szerepel egy *testátló* két végpontja, akkor ezek bármely harmadik csúccsal és annak a kocka középpontjára vonatkozó tükörképével egy téglalapot határoznak meg, tehát egy síkra illeszkednek.
Ahhoz, hogy a kiválasztott három pont síkjára ne illeszkedjen a kocka egy további csúcsa, szükséges, hogy a három csúcs közül bármelyik kettő egy *lapátló* két végpontja legyen. Így az alábbi négy-négy pontból kell hármat-hármat kiválasztani:
[1] A, C, F, H; [2] B, D, E, G.
(A két pontnégyes a kockába írható szabályos tetraéderek csúcspontjai.)
Az összes eset száma: $\binom{8}{3} = 56$, a kedvező esetek száma: $2\cdot\binom{4}{3} = 8$,

a keresett valószínűség: $\dfrac{2\cdot\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{1}{7} \approx 0{,}143$.

3729. a) $\left(\dfrac{1}{101}\right)^4 \approx 9{,}6\cdot 10^{-9}$.

b) Öcsi $x\ \dfrac{\text{m}}{\text{perc}}$ sebességgel gyalogol és y perc alatt kell beérniük az óvodába.
Megoldandó tehát az $xy = 480 \wedge (x+12)(y-2) = 480$ egyenletrendszer.
Kezdhető a megoldás behelyettesítő módszerrel is, de lehet, hogy rövidebbnek találjuk a következő utat:
$xy = 480 \wedge xy - 2x + 12y - 24 = 480$
$xy = 480 \wedge 480 - 2x + 12y - 24 = 480$
$xy = 480 \wedge x = 6y - 12$
$(6y-12)y = 480 \wedge x = 6y - 12$
$y^2 - 2y - 80 = 0 \wedge x = 6y - 12$
$(y = -8 \vee y = 10) \wedge x = 6y - 12$
A feladat szövege miatt csak $y = 10 \wedge x = 48$ lehetséges, azaz Öcsi $48\ \dfrac{\text{m}}{\text{perc}} = 2{,}88\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel gyalogol és 10 percig tart az óvodába vezető út.

Ellenőrzés:

$48\ \dfrac{\text{m}}{\text{perc}}$ sebességgel gyalogolva 10 perc alatt 480 métert tesznek meg.
Ha percenként 60 métert tesznek meg, akkor a 480 méter megtételéhez 8 percre, azaz valóban 2 perccel kevesebbre van szükség, mint eredetileg.
Tehát 7^{40}-ig kellett az oviba megérkezni.

3730. A feladat szövege szerint annak a valószínűsége, hogy a vadász 100 méterről eltalálja a rókát, egyrészt $\dfrac{k}{100^2}$-nel egyenlő (ahol k a fordított arányosság arányossági tényezője), másrészt $\dfrac{k}{100^2}=\dfrac{1}{2}$. Ebből $k = 5000$.

a) $\dfrac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a vadász elsőre nem találja el a rókát. Annak a valószínűsége, hogy a második lövésnél eltalálja: $\dfrac{k}{150^2}=\dfrac{5000}{22500}=\dfrac{2}{9}$.
Így annak a valószínűsége, hogy a vadász csak másodszorra találja el a rókát:
$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{9}\approx 0{,}11$.

b) A feladat szövegében leírt esemény kétféleképpen következhet be: vagy elsőre eltalálja a vadász a rókát (ekkor nincs második lövés), vagy elsőre nem talál, de másodikra igen.
A két esemény egymást kizárja, ezért annak a valószínűsége, hogy a róka megöléséhez két lövés elegendő: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{11}{18}\approx 0{,}61$.

3731.

a) Sorrend:		c) Távolságok:
Merkúr	0,39	$5{,}85\cdot10^7$ km
Vénusz	0,72	$1{,}08\cdot10^8$ km
Föld	1	$1{,}50\cdot10^8$ km
Mars	1,52	$2{,}28\cdot10^8$ km
Jupiter	5,2	$7{,}80\cdot10^8$ km
Szaturnusz	9,54	$1{,}43\cdot10^9$ km
Uránusz	19,19	$2{,}88\cdot10^9$ km
Neptunusz	30,06	$4{,}51\cdot10^9$ km
Plútó	39,52	$5{,}93\cdot10^9$ km
b) Átlag:	11,90	

d) 9 különböző dolgot 9! = 362 880-féleképpen rakhatunk sorba.

3732. a) Először a havi kiadásokról és bankköltségekről készítsünk táblázatot.

	átutalás_1	átutalás_2	átutalás_3	készpénzfelvét	egyéb díj	összesen
összege	10 000	12 000	13 000	50 000	–	85 000
BÉ díja	20	20	20	250	50	360
CÉ díja	40	48	52	200	–	340

Egy év alatt a BÉ bank összesen $12\cdot360 = 4320$, a CÉ bank pedig $12\cdot340 =$ $= 4080$ fabatka díjat számít fel.
Mivel a tartósan befektetett összeg mindkét bank esetében ugyanannyi, de a CÉ bank 1%-kal magasabb kamatot fizet, ezért ez a bank tűnik előnyösebbnek. Ezt támasztja alá az előbbi számításunk a felszámított díjakról, ráadásul a CÉ bankban havonta nagyobb összeg és ez még magasabb kamatlábbal is marad a lekötés nélküli számlánkon, mint a BÉ bankban.

b) A folyószámla év végi egyenlegének kiszámításához vegyük figyelembe, hogy azon a lekötött összegek, az ezek után járó kamat, a lekötés nélküli összegek és az ezek után járó kamat szerepel.
Ha a BÉ bankban havonta 10 ezer fabatkát köt le Alonzó, akkor az első 10 ezer fabatka az év végén (egy év múlva) $10\cdot1{,}1 = 11$ ezer fabatkát ér, tehát 1 ezer fabatka kamatot fizet a bank, a többi lekötött összeg után még nem írnak jóvá kamatot.
Minden újabb havi fizetés a lekötés nélküli tőkét
$100\,000 - 85\,000 - 10\,000 - 360 = 4640$ fabatkával növeli.
A lekötés nélküli összegeket havi kamatos kamatozással számolják el. Az első hónap elteltével tehát a 4640 fabatka után $4640\cdot0{,}036\cdot\dfrac{1}{12}\approx13{,}9$ fabatkát fizet a bank. Mivel a 13,9 fabatka éves kamata 0,5 fabatka körüli érték, ezért (ezt elhanyagolva) mondhatjuk, hogy egy év alatt körülbelül
$13{,}9 + 2\cdot13{,}9 + 3\cdot13{,}9 + \ldots + 12\cdot13{,}9 = 13{,}9\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + 12) =$
$= 13{,}9\cdot78\approx1084$ fabatkát fizet a bank a lekötés nélküli betétek után (ebben a becslésben 6 fabatkánál kevesebb a hiba).
$12\cdot10\,000 + 1000 + 12\cdot4640 + 1084 = 177\,764$, tehát a BÉ bankban a kezdőév végén kb. 177,76 ezer fabatka lenne Alonzó folyószámláján.
Ha a CÉ bankban havonta 10 ezer fabatkát köt le Alonzó, akkor az első 10 ezer fabatka az év végén (egy év múlva) $10\cdot1{,}11 = 11{,}1$ ezer fabatkát ér, tehát 1,1 ezer fabatka kamatot fizet a bank.
Minden újabb havi fizetés a lekötés nélküli tőkét
$100\,000 - 85\,000 - 10\,000 - 340 = 4660$ fabatkával növeli.
A lekötés nélküli összegeket havi kamatos kamatozással számolják el. Az első hónap elteltével tehát a 4660 fabatka után $4660\cdot0{,}048\cdot\dfrac{1}{12}\approx18{,}6$ fabatkát fizet a bank. Mivel a 18,6 fabatka éves kamata 0,9 fabatka körüli érték, ezért (ezt elhanyagolva) mondhatjuk, hogy egy év alatt körülbelül

$18{,}6 + 2 \cdot 18{,}6 + 3 \cdot 18{,}6 + \ldots + 12 \cdot 18{,}6 = 18{,}6 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 12) =$
$= 18{,}6 \cdot 78 = 1451$ fabatkát fizet a bank a lekötés nélküli betétek után (a becslés hibája kisebb 10 fabatkánál).
$12 \cdot 10000 + 1100 + 12 \cdot 4660 + 1451 = 178\,471$, tehát a CÉ bankban a kezdőév végén Alonzó folyószámláján kb. 178,47 ezer fabatka lenne.

3733. A szomszédos házak száma között a különbség 2. Ha Gézáék utcaszakaszán n ($n \geq 4$) ház áll és az első házszám a, akkor a házszámok összege $\frac{n \cdot [2a + 2 \cdot (n-1)]}{2}$.
A feltétel szerint $\frac{n \cdot [2a + 2 \cdot (n-1)]}{2} = 171$, ezért $n \cdot (a + n - 1) = 171$. Mivel $a \geq 1$, ezért $n \leq a + n - 1$, így 171-et úgy kell két tényező szorzatára bontani, hogy n a kisebbik tényező, amelyre tehát $4 \leq n < \sqrt{171}$, azaz $4 \leq n < 14$ áll fenn.
$171 = 3 \cdot 3 \cdot 19$, 171 osztói: 1, 3, 9, 19, 57, 171.
A feltételnek csak $n = 9$ felel meg. Ekkor $a = 11$, és Géza házszáma 17.

3734. I.) Ha $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, akkor az egyenlet elsőfokú ($-4x + 4 = 0$, és ennek egy valós gyöke van). Ekkor $\alpha = \frac{\pi}{3}$, illetve $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.

II.) $\cos\alpha \neq \frac{1}{2}$ esetén másodfokú egyenletet kapunk. Ennek pontosan akkor van egy valós megoldása, ha a diszkriminánsa nulla.
$D = 16 - 4 \cdot (2\cos\alpha - 1)(4\cos\alpha + 2) = 16 - 8(2\cos\alpha - 1) \cdot (2\cos\alpha + 1) =$
$= 24 - 32\cos^2\alpha$.
$D = 0$, ha $\cos^2\alpha = \frac{3}{4}$, azaz, ha $|\cos\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Figyelembe véve, hogy $\alpha \in [0;\ 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right\}$, a másodfokú egyenletnek egy gyöke van, ha $\alpha = \frac{\pi}{6}$, ill. ha $\alpha = \frac{11\pi}{6}$, vagy ha $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, ill. ha $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.
Összegezve:
A megadott egyenletnek akkor van pontosan egy valós megoldása, ha
$\alpha \in \left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{11\pi}{6}\right\}$.

3735. Tegyük fel, hogy $x \leq y \leq z$. Így $296 = 2^x + 2^y + 2^z \leq 3 \cdot 2^z$, amiből $z > 6$ adódik.
Másrészt $2^8 = 256 < 296 < 512 = 2^9$, ezért $z \leq 8$.
Tehát z lehetséges értékei:7, illetve 8.
Ha $z = 8$, akkor $40 = 2^x + 2^y \leq 2 \cdot 2^y$, és $2^x + 2^y = 40 < 64$.
Ezekből $20 \leq 2^y < 64$, azaz $4 < y < 6$, tehát $y = 5$ és $2^x = 40 - 32 = 2^3$, azaz $x = 3$.

Ha $z = 7$, akkor $2^x + 2^y = 168$ és $y \leq 7$, valamint $168 \leq 2 \cdot 2^y$, amiből $y > 6$, tehát y csak 7 lehet. Ekkor $2^x = 40$ adódik, ami semmilyen x egész számra nem teljesül.
Az egyenlet megoldása a (3; 5; 8) számhármas és ennek permutációi, azaz még a (3; 8; 5), (5; 3; 8), (5; 8; 3), (8; 3; 5), (8; 5; 3) számhármasok.

3736. a) Ismerünk három adatot, $t = 0$ legyen 1960, ekkor $N(0) = N_0 = 3 \cdot 10^9$. A K keresett állandó és az a paraméter értékét a másik két adatból számoljuk:
$N(17) = 4{,}1 \cdot 10^9$ és $N(34) = 5{,}5 \cdot 10^9$.
Az elsőből előbb: $4{,}1 \cdot 10^9 = \frac{K \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^9 + (K - 3 \cdot 10^9)a^{17}}$, majd:
$12{,}3 \cdot 10^9 + 4{,}1(K - 3 \cdot 10^9)a^{17} = 3K$, aztán:
$a^{17} = \frac{3K - 12{,}3 \cdot 10^9}{4{,}1K - 12{,}3 \cdot 10^9} = \frac{3(K - 4{,}1 \cdot 10^9)}{4{,}1(K - 3 \cdot 10^9)}$.
A másodikból előbb: $5{,}5 \cdot 10^9 = \frac{K \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^9 + (K - 3 \cdot 10^9)a^{34}}$, majd:
$16{,}5 \cdot 10^9 + 5{,}5(K - 3 \cdot 10^9)a^{34} = 3K$, aztán:
$a^{34} = \frac{3K - 16{,}5 \cdot 10^9}{5{,}5K - 16{,}5 \cdot 10^9} = \frac{3(K - 5{,}5 \cdot 10^9)}{5{,}5(K - 3 \cdot 10^9)}$.
Mivel $a^{34} = (a^{17})^2$, ezért $\frac{3(K - 5{,}5 \cdot 10^9)}{5{,}5(K - 3 \cdot 10^9)} = \left(\frac{3(K - 4{,}1 \cdot 10^9)}{4{,}1(K - 3 \cdot 10^9)}\right)^2$.
Kihasználva a számlálók és nevezők adta egyszerűsítési lehetőséget, keresztbeszorzás után: $16{,}81(K - 5{,}5 \cdot 10^9)(K - 3 \cdot 10^9) = 16{,}5(K - 4{,}1 \cdot 10^9)^2$.
Zárójelfelbontás után: $16{,}81K^2 - 142{,}885 \cdot 10^9 K + 277{,}365 \cdot 10^{18} =$
$= 16{,}5K^2 - 135{,}5 \cdot 10^9 K + 277{,}365 \cdot 10^{18}$.
A konstansok kiesnek, összevonás és a nyilván nem nulla K-val egyszerűsítés után: $0{,}31K = 7{,}585 \cdot 10^9$, azaz $K \approx 24{,}468 \cdot 10^9$.
Tehát a modell szerint kb. 24,5 milliárd ember tud megélni a Földön.

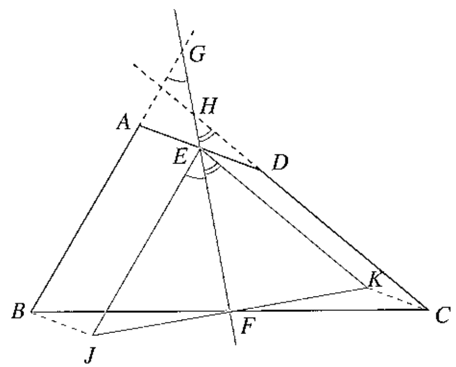
b) Visszaírva K értékét bármelyik, a-hatványt szolgáltató képletbe, és megfelelő gyököt vonva kapjuk: $a \approx 0{,}979$. Ezen paraméterekkel számolva 2050-ben $N(90) \approx 12{,}0$ milliárd, 2100-ban pedig $N(140) \approx 18{,}1$ milliárd lesz az emberiség létszáma.

3737. $f(0) = f(f(2002)) = f(f(f(4004))) = f(f(2003)) = f(f(f(4005))) = f(f(2004)) =$ $= f(f(f(4006))) = f(f(2005)) = f(f(f(4007))) = f(f(2006)) = f(5) =$ $= f(f(2007)) = f(6)$. Ez innen kezdve láthatóan minden második lépésre a 6 után következő, egész helyeken vett helyettesítési értékeket adja meg sorban. Folytassuk gondolatban egészen $f(2006)$-ig a sort, amire végre megkapjuk a konkrét helyettesítési értéket: 5.

3738. a) A számtani sorozat tagjait az első taggal és $d = 2$-vel kifejezve, átalakítjuk az adott kifejezést: $a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + 4a_4^2 =$
$= a_1^2 + 2(a_1+2)^2 + 3(a_1+4)^2 + 4(a_1+6)^2 = 10a_1^2 + 80a_1 + 200$.
A megoldáshoz először nézzük meg hogy bontható fel a 10 és a 200 két négyzetszám összegére! $10 = 1 + 9$, $200 = 100 + 100 = 4 + 196$. Ezek alapján több megfelelő felbontás is található: $10a_1^2 + 80a_1 + 200 = (a_1+10)^2 + (3a_1+10)^2 =$
$= (a_1-2)^2 + (3a_1+14)^2 = (-a_1-10)^2 + (3a_1+10)^2 =$
$= (a_1+10)^2 + (-3a_1-10)^2$ stb.

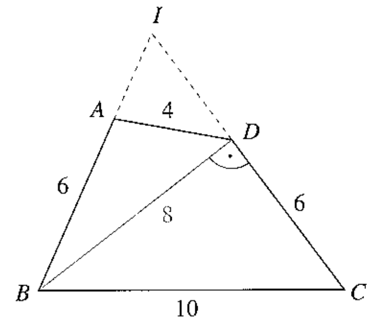
b) Az egész tagú számtani sorozat differenciáját jelöljük d-vel. A sorozat tagjait kifejezzük a_1-gyel és d-vel, majd behelyettesítjük a megadott kifejezésbe:
$a_1^2 + 2(a_1+d)^2 + 3(a_1+2d)^2 + 4(a_1+3d)^2 = 10a_1^2 + 40a_1d + 50d^2$.
Bontsuk fel a $10a_1^2$ és az $50d^2$ kifejezéseket két kifejezés négyzetének összegére!
$10a_1^2 = a_1^2 + (3a_1)^2$ és $50d^2 = (5d)^2 + (5d)^2 = d^2 + (7d)^2$. Ez alapján
$10a_1^2 + 40a_1d + 50d^2 = (a_1+5d)^2 + (3a_1+5d)^2 = (a_1-d)^2 + (3a_1+7d)^2$ stb.
(Ahhoz, hogy a megadott kifejezés valóban két négyzetszám összege legyen, szükséges, hogy a felbontásban szereplő tagok egészek legyenek. Ez teljesül, mivel a sorozat tagjai egészek, s így a_1 és d is egész.).
Tehát az állítás igaz minden egész tagú számtani sorozatra.

3739. a) Legyen $AB = CD$, és a másik két oldal felezőpontja E és F. Húzzunk E-ből AB-vel, illetve DC-vel párhuzamos és egyenlő szakaszokat (EJ, EK). Ekkor $ABJE$ és $EKCD$ paralelogramma, így $BJ \parallel KC$ és egyenlő, hiszen az egy egyenesbe eső és egyenlő AE-vel és ED-vel párhuzamosak és egyenlők. Így tehát $BJCK$ is parallelogramma, átlói felezik egymást, vagyis F nemcsak BC-nek, hanem JK-nak is felezőpontja. Mivel eredetileg $AB = DC$, ezért $EJ = EK$, az EJK Δ egyenlő szárú. Ekkor JK alapjához tartozó EF súlyvonala egyúttal szögfelező is: $JEF\sphericalangle = KEF\sphericalangle$. A G-nél,



H-nál keletkezett két, keresett szög pedig ezekkel egyállású, tehát velük (és így egymással is) egyenlő.

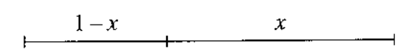
b) Az előző pont szerint a keresett szög a $JEK\sphericalangle$ fele. Viszont a $JEK\sphericalangle$-gel egyező a BA és CD oldalak meghosszabbításának metszéspontjában keletkezett szög (mert egyállásúak, az új ábrán ez az $AID\sphericalangle$). Most az adatok miatt (6, 8, 10-es szakaszok) a BCD Δ derékszögű. A $BAD\sphericalangle$-et meghatározzuk a koszinusztétellel:



$\cos BAD\sphericalangle = \dfrac{4^2+6^2-8^2}{2\cdot 4\cdot 6} = -0{,}25$,
ahonnan $BAD\sphericalangle = 104{,}5°$. Mellékszöge így $DAI\sphericalangle = 180° - 104{,}5° = 75{,}5°$.
Ugyancsak az ABD Δ-ben egy szinusztétel: $\dfrac{\sin ADB\sphericalangle}{\sin BAD\sphericalangle} = \dfrac{6}{8}$, amiből
$\sin ADB\sphericalangle = 0{,}7262$, amiből $ADB\sphericalangle = 46{,}6°$. A derékszöggel együtt így az $ADC\sphericalangle = 136{,}6°$, mellékszögeként $ADI\sphericalangle = 43{,}4°$. Az ADI Δ-ben a szögösszeg révén tehát $AID\sphericalangle = 180° - 75{,}5° - 43{,}4° = 61{,}0°$. Tehát ennek felét, vagyis 30,5°-ot zár be az AD és BC felezőpontjaira illeszkedő egyenes az AB, illetve CD oldalegyenesekkel.

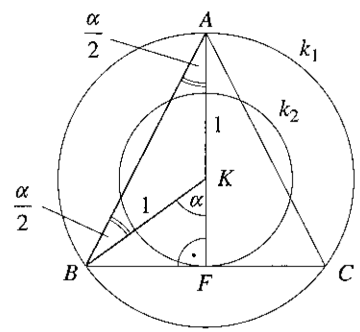
Másik megoldás:
$\sin CBD\sphericalangle = \dfrac{6}{10}$, ebből a $CBD\sphericalangle = 36{,}9°$.
$\cos ABD\sphericalangle = \dfrac{6^2+8^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 8}$, innen $ABD\sphericalangle \approx 29°$,
$BCD\sphericalangle = 90° - 36{,}9°$. Az $AID\sphericalangle = 180° - (ABD\sphericalangle + DBC\sphericalangle + BCD\sphericalangle)$.
Az $AID\sphericalangle = 61{,}0°$.

3740. a) Ha a k_2 kör sugara x, akkor $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1-x}{x}$.



Ebből $x^2 + x - 1 = 0$ adódik, amelynek két valós gyöke van: $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618$ és $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$.
Csak a pozitív megoldás lehetséges, tehát a k_2 kör sugara $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$.

b) Az AKB háromszög egyenlő szárú, mert KA és KB a k_1 kör egy-egy sugara. Ezért $KAB \sphericalangle = KBA \sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.
$BKF \sphericalangle$ az AKB háromszög külső szöge, tehát
$BKF \sphericalangle = KAB \sphericalangle + KBA \sphericalangle = \alpha$.
A BFK derékszögű háromszögből:
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180$,
tehát $\alpha \approx 51,83°$.



c) $\sin x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin^2 x = \cos x$

$1 - \cos^2 x = \cos x$

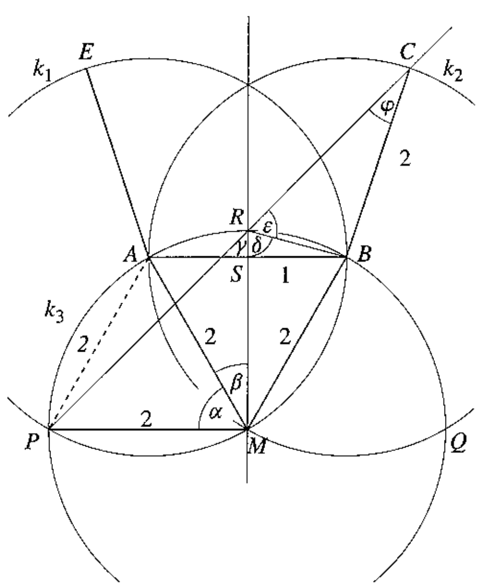
$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee \cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Hegyesszög koszinusza pozitív, ezért $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ lehetséges csak, azaz éppen az aranyszög a megoldás: $x \approx 0,9046$ radián, illetve $x \approx 51,83°$.

3741. a) A szabályos háromszög magassága $\sqrt{3}$ cm, tehát a kérdezett szakasz hossza $2-\sqrt{3} \approx 0,268$ cm.

b) Az ABC szöget az ABR és az RBC szög összegeként határozzuk meg.
A BMR egyenlő szárú háromszög szárszöge 30°-os, tehát
$\delta = MRB \sphericalangle = 75°$ és így
$ABR \sphericalangle = 90° - \delta = 15°$.
Az APM háromszög szabályos, ezért $\alpha = 60°$. Mivel $\beta = 30°$, így $\alpha + \beta = 90°$, vagyis a PMR háromszög M-nél derékszögű, továbbá $MP = MR = 2$ cm miatt egyenlő szárú is $\Rightarrow \gamma = 45°$.
$\varepsilon = 180° - \gamma - \delta = 60°$



Megjegyzés:
Több ismeret birtokában gyorsabban is meghatározhatjuk az ε szöget:
$PAB \sphericalangle = 2 \cdot 60° = 120°$, így a kerületi szögek tétele miatt
$PAB \sphericalangle = PRB \sphericalangle = 120°$, tehát $\varepsilon = 60°$.

Az RSB derékszögű háromszögben az a) alapján $RS = 2 - \sqrt{3}$, így Pitagorasz-tétellel:

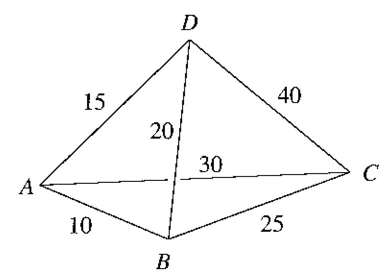
$RB = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1,035$ cm
(a feladat jellegéből adódóan célszerű a pontos értékekkel számolni).

Megjegyzés:
RB pontos értéke a BMR egyenlő szárú háromszögből pl. koszinusztétellel is gyorsan megkapható.
A φ hegyesszöget a BCR háromszögből szinusztétellel határozhatjuk meg:

$\frac{\sin\varphi}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \approx 0,4483 \Rightarrow$
$\varphi \approx 26,63°$

$RBC \sphericalangle = 180° - \varepsilon - \varphi \approx 93,37°$.
Tehát az $ABCDE$ ötszögben $ABC \sphericalangle \approx 93,37° + 15° = 108,37°$.
A szabályos ötszög egy belső szöge 108°-os. Az ettől való eltérés 0,37°, ami a 108°-nak mindössze 0,34%-a (3,4 ezreléke)!

3742. a) Legyen a 15 cm hosszú él pl. az AD.
Az ACD háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség miatt
$AC > CD - AD = 25$, tehát
$AC = 30$ cm.
Az ABC háromszögben a háromszög egyenlőtlenség miatt
$BC > AC - AB = 20$, tehát
$BC = 25$ cm.



Ebből pedig $BD = 20$ cm következik és ez lehetséges is, hiszen ekkor mind az ABD, mind a BCD háromszögben teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
Az AD él hosszának megválasztása után egyértelműen adódott a többi él hossza.
Ha az AD él helyett az AC (a BC vagy a BD) él hosszát választottuk volna 15 cm-nek, akkor ugyancsak egyértelműen adódott volna egy-egy háromoldalú gúla (tetraéder). Ezek azonban egybevágók az általunk megadottal, tehát nincs a megadottól lényegesen különböző háromoldalú gúla (tetraéder).

b) Az egyes lapok területe (az a)-beli méretezés esetén):
$T_{ABC} \approx 117,1$ cm^2, $T_{ABD} \approx 72,6$ cm^2, $T_{BCD} \approx 204,5$ cm^2, $T_{ACD} \approx 191,1$ cm^2.
A gúla felszíne 585,3 cm^2.

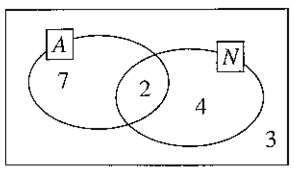
8. FELMÉRŐ FELADATSOROK

8.A. Első feladatsor

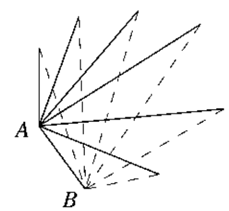
I. rész

A 1.		
A választott számoktól függően lehet, hogy igaz, pl.: $a = 1$ és $b = 2$, akkor $a^2 < b^2$, mert $1 < 4$; és lehet, hogy hamis, pl.: ha $a = -3$ és $b = 2$, akkor $a^2 > b^2$, mert $9 > 4$.	2 pont	A két eset megtalálásáért 1-1 pont jár.
Összesen	**2 pont**	

A 2.		
$[36; 45] = 180$ Legközelebb 180 s múlva kerülnek ismét egyszerre a kiindulási helyzetbe.	2 pont	Indoklás nélkül is két pontot ér a helyes válasz. Ha utal rá, hogy a legkisebb közös többszöröst kell felírni, de a kiszámítás hibás, vagy ha a mértékegység hiányzik, akkor 1 pont jár.
Összesen	**2 pont**	

A 3.		
I. megoldás: A feladat megoldásához célszerű Venn-diagramot készíteni.  	1 pont	Az 1 pont akkor jár, ha az ábrában szerepelnek a kiszámított értékek (a 7 és a 4) is.

A küldöttség $7 + 2 + 4 + 3 = 16$ tagú.	1 pont	
II. megoldás: A feladat megoldható a logikai szita alkalmazásával is. Angolul vagy németül $9 + 6 - 2$ küldött tud beszélni (hiszen az angolul és németül is tudókat a $9 + 6$ összegben kétszer vettük figyelembe). Így $13 + 3 = 16$-an utaztak külföldre.	2 pont	
Összesen	**2 pont**	

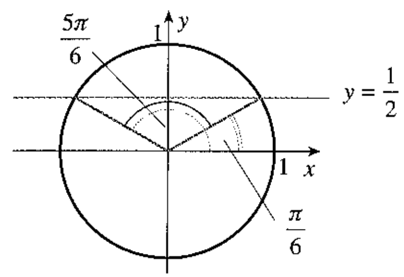
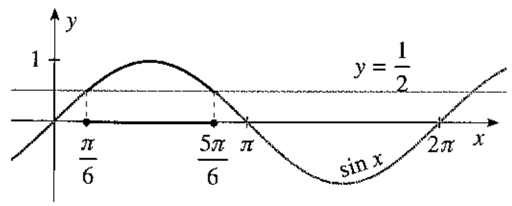
A 4.		
I. megoldás: A 8 barát mindegyike 7 másikkal fog kezet. A kézfogások száma $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$. (A $8 \cdot 7$ szorzatban minden kézfogást kétszer számoltunk, ezért osztani kell 2-vel.)	2 pont	
II. megoldás: Más módszerrel is össze lehet számolni a kézfogásokat: Pl.: Az *A, B, C, D, E, F, G* és *H* emberek közül *A* kezet fog 7 társával, *B* *A*-n kívül még 6 társával, *C* *A*-n és *B*-n kívül még további 5 barátjával stb. Így a kézfogások száma: $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.  	2 pont	
Összesen	**2 pont**	Az eredmény számszerű közlése indoklás, mellékszámítás nélkül csak 1 pontot ér.

A 5.		
$\|x^2-4\| = x^2-4$, ha $x^2-4 \geq 0$.	1 pont	Az $x^2-4 \geq 0$ feltétel kimondása esetén jár a pont. (Az $(x+2)(x-2) = x^2-4$ felhasználása kevés.)
$x^2-4 \geq 0$, ha $x \leq -2$ vagy $2 \leq x$.	1 pont	1 pont jár a megoldásért, függetlenül attól, hogy ehhez fejben számolással, szorzattá alakítással vagy függvény ábrázolás segítségével jut el a tanuló. Hiányos megoldásért nem jár ez a pont.
Összesen	**2 pont**	

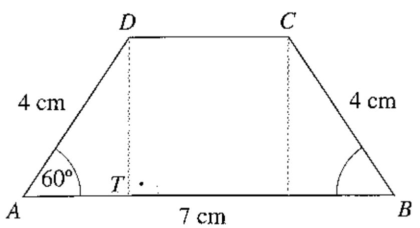
A 6.		
A feladatok megoldásában felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton.		Indoklás nélkül is járnak a pontok.
a) $2^{x-1} = 64\ (= 2^6) \Leftrightarrow x = 7$	1 pont	
b) $2^{1-x} = 64 \Leftrightarrow x = -5$	1 pont	
c) $2^{x-6} = 64 \Leftrightarrow x = 12$	1 pont	
Összesen	**3 pont**	

A 7.		
A logaritmus azonosságait alkalmazzuk. $\log_2 x = \log_2 \dfrac{6 \cdot 2}{4} = \log_2 3$.	1 pont	Indoklás nélkül is jár a pont.
Innen $x = 3$.	1 pont	
Összesen	**2 pont**	

A 8.		
Az $x^2+y^2 = 100$ kör azon pontjainak abszcisszája, amelyeknek ordinátája -6, az $x^2+36 = 100$ * egyenletből határozható meg.	1 pont	Az * egyenlet felírásáért, szöveges indoklás nélkül is jár a pont.
Az egyenlet gyökei: $x_1 = 8$ és $x_2 = -8$.	1 pont	
A keresett pontok: $P_1(8; -6)$, $P_2(-8; -6)$.	1 pont	Csak a két keresett pont helyes felírásáért jár ez a pont.
Összesen	**3 pont**	

A 9.		
$x \in [0; 2\pi]$ és $\sin x = \frac{1}{2}$ (*), ha $x = \frac{\pi}{6}$, illetve ha $x = \frac{5\pi}{6}$.	1 pont	
Az egyenlőtlenség megoldása leolvasható az egység sugarú kör vagy a szinuszfüggvény ábrájáról:  		
$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ (vagy másképpen az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$).	2 pont	Ha csak az „=" jel hiányzik, 1 pont adható. Egyéb hiányos „megoldásért" nem jár pont.

Összesen	**3 pont**	Ha a tanuló helyesen oldja meg az egyenlőtlenséget, megkapja a feladatért járó 3 pontot, függetlenül attól, hogy a (*) egyenlet megoldását leírta-e vagy sem.

A 10.		
	1 pont	Az ábra elkészítése, az adatok feltüntetésével.
Az ATD derékszögű háromszögben $AT = 4 \cos 60° = 2$ (cm)	1 pont	$AT = 2$ cm meghatározásáért (indoklás nélkül is).
$DC = 7 - 2 \cdot 2 = 3$ (cm). Tehát a trapéz rövidebb alapja 3 cm.	1 pont	Csak akkor jár a pont, ha mértékegység is szerepel.
Összesen	**3 pont**	

A 11.		
I. megoldás: A háromszög leghosszabb oldala $a\sqrt{3}$, ezzel szemben van a legnagyobb szög γ.	1 pont	Ha nem derül ki, hogy ez a legnagyobb oldal, akkor a megoldásra max. 2 pont adható.
Minthogy $\left(a\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2$ igaz,	1 pont	Az oldalak közötti összefüggés felismeréséért jár a pont.
ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint $\gamma = 90°$.	1 pont	Az 1 pontért hivatkozni kell a Pitagorasz-tétel megfordítására.

II. megoldás: A háromszög leghosszabb oldala $a\sqrt{3}$, ezzel szemben van a legnagyobb szög γ.	1 pont	Ha nem derül ki, hogy ez a legnagyobb oldal, akkor a megoldásra max. 2 pont adható.
A legnagyobb szög koszinusza: $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2a \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{0}{2a^2\sqrt{2}} = 0.$	1 pont	
A háromszög legnagyobb szöge 90°.	1 pont	
Összesen	**3 pont**	

A 12.		
Az első dobásnál nem 6-ost dobunk. Ennek a valószínűsége $\frac{5}{6}$.	1 pont	
A második dobás 6-os. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$.	1 pont	
A két dobás egymástól független. Így annak valószínűsége, hogy a második dobásnál kapunk először 6-ost $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.	1 pont	A helyes válasz felírásáért indoklás nélkül is jár a pont.
Összesen	**3 pont**	

II./a rész

A 13.		
a) *I. megoldás:* 6 különböző négyjegyű szám állítható elő a számkártyákból: $\overline{aabb}, \overline{abab}, \overline{abba}, \overline{baab}, \overline{baba}, \overline{bbaa}$.	3 pont	Ha a felsorolásból egy eset hiányzik, vagy egy többször is szerepel, akkor 2 pont, két hiba esetén 1 pont jár.

II. megoldás: A négyjegyű számok száma: $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ (*), felhasználva, hogy 4 különböző számkártya felhasználásával 4!-féle szám készíthető. Mivel 2-2 közülük megegyezik, ezek sorrendjének megváltoztatásával ugyanazt a számot kapjuk, ezért a 4!-t $2!\cdot 2! = 4$-gyel osztani kell.	3 pont	Ha megjelenik (*) egyenlőség, jár a 3 pont.
Összesen	**3 pont**	A végeredmény (6) indoklás nélkül 1 pontot ér.
b) Ha $a > b$, akkor e hat szám közül $\overline{aabb}$ a legnagyobb.	1 pont	
Összesen	**1 pont**	
c) *I. megoldás:* A legkisebb szám ($a > b$ feltétel esetén) $\overline{bbaa}$.	1 pont	
A legnagyobb és legkisebb szám különbsége: $\overline{aabb} - \overline{bbaa} = 1000a + 100a + 10b + b -$ $- (1000b + 100b + 10a + a) =$ $= 999(a-b) + 90(a-b) = 1089(a-b)$.	2 pont	
1089 osztható 9-cel ($1089 = 9 \cdot 121$), ezért a két szám különbsége osztható 9-cel.	1 pont	
II. megoldás: A legkisebb szám ($a > b$ feltétel esetén) $\overline{bbaa}$.	1 pont	
A legnagyobb és legkisebb szám különbsége: $\overline{aabb} - \overline{bbaa} = 100\overline{aa} + \overline{bb} - (100\overline{bb} - \overline{aa}) =$ $= 99(\overline{aa} - \overline{bb})$.	2 pont	
Ez osztható 9-cel.	1 pont	
III. megoldás: A képzett 6 szám közül bármely két szám jegyeinek összege ugyanannyi,	1 pont	
ezért 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adják.	2 pont	

Így a legnagyobb és a legkisebb számnak a különbsége osztható 9-cel.	1 pont	
Összesen	**4 pont**	
d) *I. megoldás:* A két négyjegyű szám különbsége $1089(a-b)$ pontosan akkor osztható 18-cal, ha $(a-b)$ páros,	2 pont	
azaz ha a és b azonos paritású (azaz mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan).	2 pont	
II. megoldás: A legnagyobb és legkisebb négyjegyű szám különbsége $99(\overline{aa} - \overline{bb})$ pontosan akkor osztható 18-cal, ha $\overline{aa} - \overline{bb}$ páros. $a > b$ miatt a különbség mindkét számjegye $a - b$. Tehát a 18-cal való oszthatóság feltétele az, hogy $(a-b)$ páros legyen.	2 pont	
Ez teljesül, ha a és b azonos paritású (azaz mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan).	2 pont	
Összesen	**4 pont**	

A 14.		
a) Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n(n-3)}{2}$, $(n \geq 3)$.	1 pont	$(n \geq 3)$ nélkül is jár a pont.
A feladat szövege szerint: $n + \frac{n(n-3)}{2} = 91$.	3 pont	
Innen: $n^2 - n - 182 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet gyökei: $n = 14$ és $n = -13$.	2 pont	
Ellenőrzés: $-13 < 0$, ezért nem megoldás. A 14 oldalú sokszögnek $\frac{14\cdot 11}{2} = 77$ átlója van. Az oldalak és átlók számának összege: $14 + 77 = 91$.	1 pont	
A sokszög tehát 14 oldalú.	1 pont	
Összesen	**9 pont**	

b) Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\,180°$.	1 pont	
Így a 14 oldalú sokszög belső szögeinek összege $12 \cdot 180° = 2160°$.	2 pont	
Összesen	**3 pont**	

A 15.		
a) A táblázatban szereplő 30 hőmérséklet *módusza* 10,0 °C.	1 pont	
Összesen	**1 pont**	
b) A havi középhőmérséklet a napi középhőmérsékletek átlaga: $\frac{9{,}3+9{,}2+9{,}4+\ldots+14{,}1}{30}=$	1 pont	
= 11,5 °C	2 pont	A jó eredményért 3 pont jár a képlet felírása nélkül is.
Összesen	**3 pont**	
c) Az első 10 nap középhőmérséklete: 9,7 °C.	2 pont	
A második 10 nap középhőmérséklete: 11,5 °C	2 pont	
A harmadik 10 nap középhőmérséklete: 13,4 °C.	2 pont	
Ezek átlaga 11,5 °C,	1 pont	A diák által kapott három fenti szám átlagának helyes kiszámítása esetén jár az 1 pont.
megegyezik a havi középhőmérséklettel.	1 pont	
Összesen	**8 pont**	Ha a mértékegységek hiányoznak, az összpontszám 1 ponttal csökken.

Megjegyzés:
Az eredmény nem meglepő, ui.

$$\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{10}}{10}+\frac{a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{20}}{10}+\frac{a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{30}}{10}}{3}=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{30}}{30}.$$

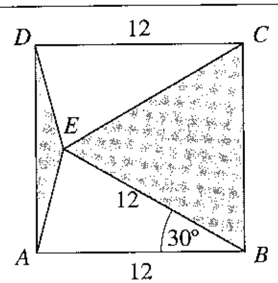
Minthogy az értékeket tized pontossággal számoltuk, ezért a kétféle számítás eredményeként lehetne eltérés is.

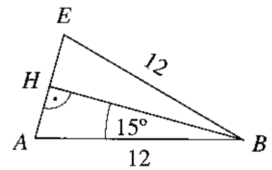
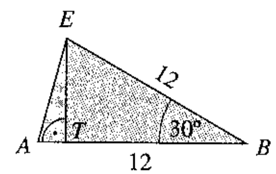
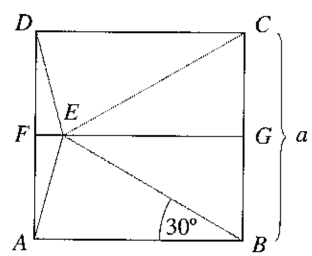
A 16.		
A 100 ezer Ft kamata 60 napos lekötés esetén: $100\,000 \cdot 0{,}0725 \cdot \frac{60}{365}$.	3 pont	
A 300 ezer Ft kamata 179 napos lekötés esetén: $300\,000 \cdot 0{,}0750 \cdot \frac{179}{365}$.	3 pont	
Marci bácsi kamatként e kettő összegét kapja.	1 pont *	
$\frac{100\,000}{365}\cdot(0{,}0725\cdot 60+3\cdot 0{,}0750\cdot 179)\approx$ $\approx 12\,226$.	4 pont	* Ha a kamat kiszámítása jó, akkor természetesen a fenti 1 pont is jár.
Tehát Marci bácsi összesen 12 226 forint kamatot vehet fel.	1 pont	Ha a banktól 60 nap, illetve 179 nap múlva felvehető kamat helyett a kamattal megnövekedett összeget jól számolja ki a tanuló, akkor ezért $1+1+1+4+0=7$ pontot kap.
Összesen	**12 pont**	

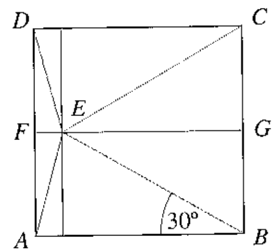
II./b rész

A 17.		
a) A (0; 5) és az (1; 3) ponton átmenő egyenes egyik irányvektora (1; –2).	1 pont	
Normálvektora: (2; 1), az egyenes egyenlete: $2x + y = 5$.	3 pont	Az egyenes egyenletének felírásáért jár a 3 pont. Ha csak a normálvektor felírása jó, akkor ezért 1 pont jár.
Összesen	**4 pont**	(A két ponton átmenő egyenes egyenletére vonatkozó képlet alkalmazásával is felírható az egyenes egyenlete.)

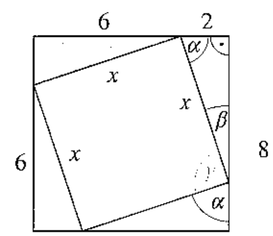
b) A másodfokú függvény hozzárendelési szabálya felírható $f(x) = a(x-u)^2 + v$ alakban. A feladat szerint $u = 0$ és $v = 5$, ezért $f(x) = ax^2 + 5$.	4 pont	*Másként:* Felírhatja a tanuló a parabola egyenletét: $y = ax^2 + 5$.
Az (1 ; 3) pont illeszkedik a grafikonra, tehát $f(1) = 3$, s így $a + 5 = 3$.	3 pont	Az (1 ; 3) pont illeszkedik a parabolára, ezért koordinátái kielégítik a parabola egyenletét. $3 = a + 5$.
Ebből $a = -2$.	1 pont	
A másodfokú függvény hozzárendelési szabálya $f(x) = -2x^2 + 5$.	2 pont	Más jelölés is elfogadható.
Összesen	**10 pont**	
c) A függvény zérushelyei az $f(x) = 0$ egyenlet gyökei. Megoldandó a $-2x^2 + 5 = 0$ egyenlet.	1 pont	
A másodfokú függvény zérushelyei: $\sqrt{\frac{5}{2}}$ és $-\sqrt{\frac{5}{2}}$.	2 pont	
Összesen	**3 pont**	Ha felírja a zérushelyeket, jár a 3 pont.

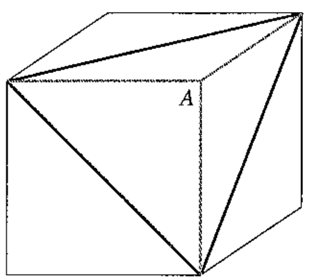
A 18.		
a) 	1 pont	
Az E szerkesztéséből adódik, hogy az ABE háromszög egyenlő szárú,	1 pont	
szárszöge 30°.	1 pont	

I. megoldás: Ennek szögfelezője az AE alapot H-ban metszi. Az ABH derékszögű háromszögben $\sin 15° = \frac{\frac{1}{2} \cdot AE}{12}$. 	2 pont	A megoldás kétféle befejezése egyaránt 5-5 pontot ér.
Ebből $AE = 24 \cdot \sin 15° \approx 6{,}2$.	2 pont	
Tehát $AE \approx 6{,}2$ cm.	1 pont	
II. megoldás: BTE derékszögű háromszögben $ET = 6$, $BT = 6\sqrt{3}$ 	2 pont	
AE meghatározható az ATE derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $AE^2 = 6^2 + \left(12 - 6\sqrt{3}\right)^2 = 144\left(2 - \sqrt{3}\right)$ $AE = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 6{,}2$	2 pont	
Tehát $AE \approx 6{,}2$ cm.	1 pont	
Összesen	**8 pont**	
b) *I. megoldás*  $T_{ADE} + T_{BCE} = \frac{1}{2} a \cdot (FE + EG) =$	3 pont	

$=\frac{1}{2}a^2$, ahol a négyzet oldalhossza a. Tehát a két háromszög területének összege a négyzet területének a fele.	2 pont	
II. megoldás: Alkalmazhatjuk a trigonometrikus területképletet: $T_{ABE}+T_{CDE}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin 30°=$	3 pont	
$=\frac{a^2}{2}$.	2 pont	
III. megoldás:  Az E pont az $ABCD$ négyzet középvonalán van. Ha az E ponton át a négyzet oldalaival párhuzamosokat húzunk, ezek 4 téglalapra bontják az $ABCD$ négyzetet. E téglalapokat az átlójuk az ábra szerint 2-2 egybevágó háromszögre bontja.	3 pont	
Ezért az ADE és a CBE háromszögek területének összege éppen az $ABCD$ négyzet területének a fele.	2 pont	
Összesen	**5 pont**	

c) *I. megoldás:* Az első háromszöget az 5 szín bármelyikével befesthetjük, a másodikat a maradék 4 szín valamelyikével, mert különböző színű háromszögeket kell kapnunk.	2 pont	
A harmadik háromszöghöz a fennmaradó 3 színből választhatunk, az utolsóhoz 2 szín áll rendelkezésünkre.	1 pont	
Így $5\cdot4\cdot3\cdot2=120$-féleképpen festhetjük be a háromszögeket.	1 pont	
II. megoldás: Az 5 színből egyet ötféleképpen hagyhatunk ki.	1 pont	
A maradék 4 színnel a 4 háromszög $4!=24$-féleképpen festhető be.	2 pont	
Így $5\cdot4\cdot3\cdot2=120$-féleképpen festhetjük be a háromszögeket.	1 pont	
Összesen	**4 pont**	

A 19.		
a) A kocka lapjai 8 cm oldalú négyzetek.  	1 pont	Ábra, az adatok felvétele
A feladatnak megfelelően bejelölt negyedelő pontok négyzetet határoznak meg.	1 pont	
Indoklás: A levágott négy derékszögű háromszög egybevágó, mert befogóik páronként egyenlőek. Átfogóik is egyenlők – ezek a négyszög oldalai. (A négyszög rombusz.)	1 pont *	

A derékszögű háromszögek hegyesszögei (α és β) egymást 90°-ra egészítik ki, ezért $\gamma = 90°$.	3 pont	
A keletkező négyzet oldalának négyzete Pitagorasz tétele alapján számítható ki: $x^2 = 4 + 36 = 40$.	2 pont	Az összes oldal kiszámítható így, ezért ha erre hivatkozik a tanuló, akkor megkaphatja a fenti * 1 pontot is.
A keletkező négyzet területe 40 cm².	1 pont	
Összesen	**9 pont**	
b) Ha egy kockát egy síkkal metszünk, a sík metszi a határoló lapokat is. A négyzetekre rajzolható legnagyobb szakasz a négyzet átlója. Ezért olyan szabályos háromszöget kell keresni, amelynek oldala a kocka lapátlója.	2 pont	
A kocka legnagyobb szabályos háromszögmetszetét közös csúcspontú három oldallap megfelelő lapátlói adják. Ezt az ábrán az A csúcsból induló élek végpontjai határozzák meg. 	2 pont	Az ábra elkészítéséért jár a 2 pont.
A kockának mind a 8 csúcspontjához tartozik egy ilyen szabályos háromszög. Ezek egymástól különbözőek. Tehát a kockának 8 ilyen szabályos háromszögmetszete van.	2 pont	Indoklás nélkül is jár a 2 pont.
Összesen	**6 pont**	
c) E háromszög oldala $8\sqrt{2}$ (kb. 11,3) cm.	2 pont	
Összesen	**2 pont**	

8.B. Második feladatsor

I. rész

B 1. $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
$B = \{8; 16; 24\}$;
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 16; 24\}$;
$A \cap B = \{8\}$;
$B \setminus A = \{16; 24\}$.

B 2. Pali és Juli egymás mellett ülhetnek az 1. és 2., illetve a 2. és 3., illetve a 3. és 4. széken. Minthogy ők helyet is cserélhetnek, a lehetőségek száma $3 \cdot 2 = 6$. A másik két helyre 2-féleképpen ülhetnek le a többiek. Tehát a gyerekek $6 \cdot 2 = 12$-féleképpen helyezkedhetnek el.

Másik megoldás:
A három fiú 3!-féleképpen ülhetne egymás mellé. Pali bármelyik oldalára ülhet Juli, tehát kétféleképpen. Ezért a négy fiatal $2 \cdot 3! = 12$-féleképpen foglalhat helyet a 4 egymás melletti széken.

B 3. $|x|$-et és $|y|$-t is két szám összegére bontjuk, az egyik tört értéke mindkét esetben 1, ezért csak a másik törteket kell összehasonlítanunk.
$|x| = \frac{2002}{2001} = \frac{2001}{2001} + \frac{1}{2001}$, $\quad |y| = \frac{2001}{2000} = \frac{2000}{2000} + \frac{1}{2000}$.
Minthogy $2001 > 2000$, ezért $\frac{1}{2001} < \frac{1}{2000}$, ami miatt $|x| < |y|$.

B 4. $N = \overline{200202x4}$. A feladat követelménye szerint N osztható 3-mal és 4-gyel, mert $[3; 4] = 12$.
Egy egész szám 3-mal pontosan akkor osztható, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal. Ennek megfelelően x lehetséges értékei <u>2</u>, 5, <u>8</u>.
Egy egész szám 4-gyel pontosan akkor osztható, ha az utolsó két jegyből álló szám 4-gyel osztható. Itt a szóba jöhető végződések: 04, <u>24</u>, 44, 64, <u>84</u>.
Mindkét feltételnek egyszerre csak a 2-es és a 8-as szám felel meg: $x = 2$ és $x = 8$.
(Tehát N lehetséges értékei: 20020224 és 20020284, ezek oszthatók 12-vel.)

B 5. a) $\sqrt{x} - 9 = 0 \Rightarrow x = 81$.

b) $\sqrt{x} + 9 = 0$, $x \geq 0$.
A bal oldal minden (nemnegatív) x-re pozitív, tehát nincs megoldás.

B 6. $5^{-x} = \frac{1}{625}$.

$5^{-x} = 5^{-4}$. Az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért $x = 4$.

B 7. $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$.

A minimum helye 3, értéke -4.

B 8. A második év végére a bankba tett pénz $t_2 = 80\,000 \cdot 1{,}1^2 = 96\,800$ forintra növekszik.

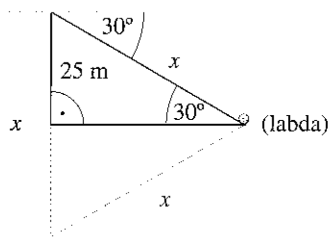
B 9. a) Igaz. A négyzet ilyen.

b) Hamis. A paralelogrammák közül pl. a négyzetnek 4 szimmetriatengelye van.

c) Hamis. Lehet pl. deltoid is.

B 10. $\sin 30° = \frac{25}{x} \Rightarrow x = 50$.

A keresett távolság 50 m.



Másik megoldás:

Az ábrán látható háromszög egy x oldalú szabályos háromszög fele, ezért $x = 2 \cdot 25 = 50$.

B 11. Az 1-nél nagyobb alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért

$$\left.\begin{array}{l}\log_2 3 > \log_2 2 = 1\\ \log_3 2 < \log_3 3 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \log_3 2 < \log_2 3.$$

B 12. Összes eset száma: 36.

Kedvező esetek: $3+6$, $6+3$, $4+5$, $5+4$.

Kedvező esetek száma 4. Tehát $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

II./a rész

B 13. a) Az első helyre 12-en kerülhetnek, a másodikra 11-en, a harmadikra 10-en.
Ezért $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.
Tehát 1320-féle lehet a végső sorrend.

b) 12 közül 6-ot $\binom{12}{6}$-féleképpen lehet kiválasztani, ha a sorrend nem számít:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6!} = 924 \text{ (másként: } \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924).$$

B 14. A mértani sorozat tagjai: $a_1 = 2, \ldots, a_3, \ldots, a_5$.

A számtani sorozat tagjai: $b_1 = 2$, $b_2 = a_3, \ldots, b_{11} = a_5$.

A mértani sorozatra vonatkozó összefüggés alapján: $a_3^2 = 2a_5$. I.

A számtani sorozatra vonatkozó összefüggés alapján: $b_{11} = 2 + 10(b_2 - 2)$.

Ez utóbbi egyenletbe beírjuk a mértani sorozat megfelelő tagjait:

$a_5 = 2 + 10(a_3 - 2)$. II.

A II.-ből az a_5-öt behelyettesítjük az I.-be és rendezünk: $a_3^2 - 20a_3 + 36 = 0$.

Gyökei: 18 és 2.

A mértani sorozatra vonatkozó összefüggés szerint $a_3 = 2q^2$.

Ezért, ha $a_3 = 18$, akkor $q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$

$q = 3$ esetén $a_{2004} = 2 \cdot 3^{2003}$

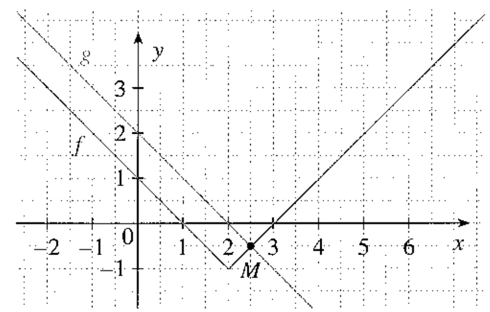
$q = -3$ esetén $a_{2004} = 2 \cdot (-3)^{2003} = -2 \cdot 3^{2003}$.

Ha az $a_3 = 2$, akkor $q^2 = 1 \Rightarrow q = \pm 1$

$q = 1$ esetén $a_{2004} = 2$.

$q = -1$ esetén $a_{2004} = -2$.

B 15. a) Lásd grafikon!



b) $f(x) = |x-2| - 1$

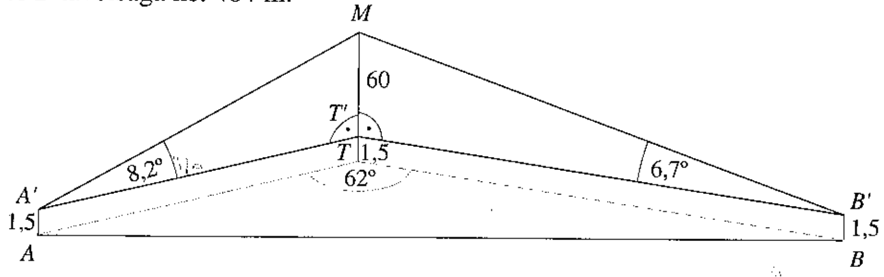
$g(x) = -x + 2$

A két grafikon metszéspontja:

$M\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

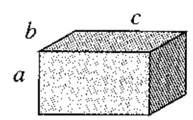
c) $g(x) > f(x)$, ha $x < \frac{5}{2}$.

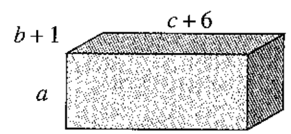
B 16. Az $A'T'M$ Δ derékszögű: $AT = A'T' = 60$ ctg $8{,}2°$ ($\approx 416{,}37$).
A $B'T'M$ Δ derékszögű: $BT = B'T' = 60$ ctg $6{,}7°$ ($\approx 510{,}76$).
Az ABT Δ-re felírjuk a koszinusztételt: $AB^2 = AT^2 + BT^2 - 2AT \cdot BT \cos 62°$.
$AB^2 = 60^2(\text{ctg}^2\, 8{,}2° + \text{ctg}^2\, 6{,}7° - 2\,\text{ctg}\, 8{,}2°\, \text{ctg}\, 6{,}7° \cos 62°)$, ebből $AB \approx 484{,}3$.
A és B távolsága kb. 484 m.



II./b rész

B 17.





A számtani sorozat három szomszédos tagja a, b, c, ezek d-vel kifejezve:
$b - d,\ \ b,\ \ b + d.$
$V = abc.$

A mértani sorozat három szomszédos tagja $a,\ \ b+1,\ \ c+6$, ezek közötti összefüggés I. $\ (b+1)^2 = a(c+6)$.
$V' = a(b+1)(c+6)$.

Az élhosszak összege:
II. $\ 4(a+b+c) = 84 \Rightarrow a+b+c = 21$
$(b-d) + b + (b+d) = 21$
$b = 7$
Ezt behelyettesítjük az II.-be, majd az I.-be:
$a + c = 14 \Rightarrow c = 14 - a;$
$64 = a(20 - a).$

Innen a számtani sorozat tagjai: a kisebb doboz élei:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 16 \\ b = 7 \\ c_1 = -2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} a_2 = 4 \\ b = 7 \\ c_2 = 10 \end{array}\right\}$$

nem megoldás. $\quad V = 280$.

a mértani sorozat tagjai: a nagyobb doboz élei:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \\ 8 \\ 16 \end{array}\right\}$$

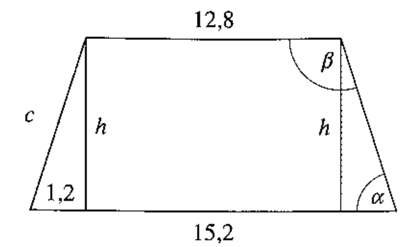
$V' = 512$.

A nagyobb doboz térfogata 232 cm³-rel nagyobb a kisebb doboz térfogatánál.

Megjegyzés:
$b = 7$ ismeretében a megoldás a következőképpen is folytatható:
A kis doboz élei: $7 - d,\ \ 7,\ \ 7 + d$; térfogata $V = 7(49 - d^2)$.
A nagy doboz élei: $7 - d,\ \ 8,\ \ 13 + d$, és ebből
$64 = (7 - d)(13 + d);$
$d^2 + 6d - 27 = 0;$
$d_1 = 3$. (A feladat szövege szerint $d > 0$)
A kis doboz élei 4, 7, 10; a nagy doboz élei: 4, 8, 16.

B 18. a) $280 = \dfrac{15{,}2 + 12{,}8}{2} \cdot h \ \Rightarrow\ h = 20$ (m).

b) c kiszámítása a színes derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:
$c^2 = 1{,}2^2 + 20^2 \Rightarrow c \approx 20{,}04$.
$K \approx 28 + 2 \cdot 20{,}04 \approx 68{,}08$.
Ennél 3 méterrel rövidebb a kerítés.
Kb. 65, 1 m drótra van szükségünk.



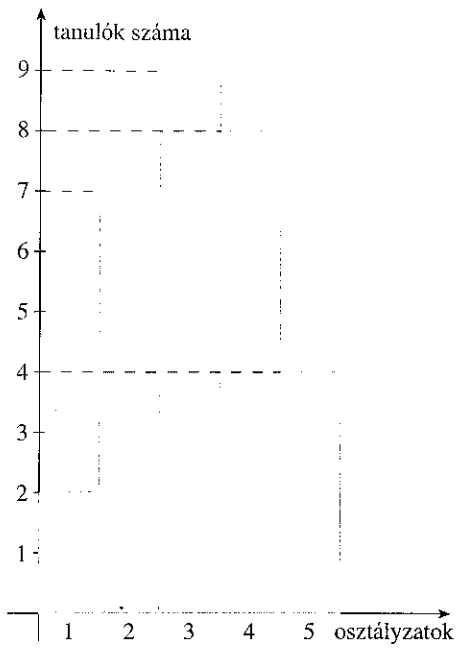
c) A telek füvezésre szánt területe: $280 - 30 = 250$ (m²).
Ha 1 kg fűmag 35 m²-re elég, akkor $\left(\dfrac{250}{35} \approx\right)$ 7,14 kg-ot használunk fel.
Ha 1 kg fűmag 40 m²-re elég, akkor $\left(\dfrac{250}{40} \approx\right)$ 6,25 kg-ot használunk fel.
Tehát kb. 7 kg fűmagra van szükség.

d) $\text{tg}\alpha = \dfrac{20}{1{,}2} \approx 16{,}67 \ \Rightarrow\ \alpha \approx 86{,}6°,\ \beta \approx 93{,}4°.$

B 19. a) Matematikából 4-es dolgozatot írt tanulók száma x.
A dolgozat átlaga $\dfrac{4 \cdot 5 + x \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{4 + x + 9 + 7 + 2} = \dfrac{63 + 4x}{22 + x}$.
A feladat szövege szerint az x természetes számra a következő egyenlőtlenségeknek kell teljesülnie:
$0 \le x < 9$, mert a közepes a leggyakoribb osztályzat.
$3{,}15 < \dfrac{63 + 4x}{22 + x} \ \Leftrightarrow\ 0{,}85x > 6{,}3;\quad x > 7{,}4$
$\dfrac{63 + 4x}{22 + x} < 3{,}20 \ \Leftrightarrow\ 0{,}8x < 7{,}4;\quad x < 9{,}25.$
Ezekből $x = 8$.
Tehát 8 tanuló írt 4-es dolgozatot.

b) Lásd a grafikont!

c) Ha a 2 hiányzó tanuló jeles dolgozatot írt volna, akkor 6 jeles, 8 jó, 9 közepes, 7 elégséges és 2 elégtelen lett volna. Így a dolgozat átlaga:
$$\frac{6\cdot5+8\cdot4+9\cdot3+7\cdot2+2\cdot1}{32}=$$
$$=\frac{105}{32}\approx3{,}28 \text{ lenne.}$$



8.C. Harmadik feladatsor

I. rész

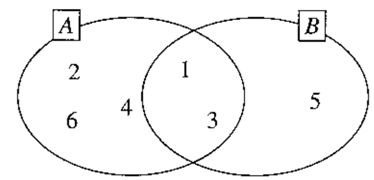
C 1. A: $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$;

B: $\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

C: $\log_3\frac{1}{9}=\log_3\frac{1}{3^2}=\log_3 3^{-2}=-2$.

A számok növekvő sorrendben: $C=-2$; $B=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $A=3$.

C 2. $A=\{1;2;3;4;6\}$;
$B=\{1;3;5\}$.



C 3. Jelöljük a személyeket A, B, C, D betűkkel. Ekkor a következőképpen választhatják ki az első két utast maguk közül:
Várható válasz: AB; AC; AD
BC; BD
CD

Tehát a válasz: $\binom{4}{2}=6$.

Másik megoldás:
Ha a sorrend is számítana, akkor az első utast 4-féleképp, a másodikat 3-féleképp lehetne kiválasztani.
Ez $4\cdot3=12$ lehetőség.
Mivel a sorrend nem számít, így minden esetet kétszer számolunk meg.
Tehát a feladat megoldása $\frac{12}{2}=6$.

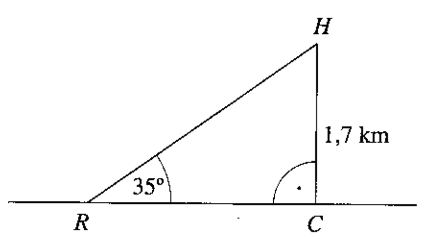
C 4. Két szám összege az alábbi esetekben lehet pozitív:
1. Mindkét szám pozitív, ekkor a szorzatuk pozitív.
2. Az egyik szám pozitív, a másik szám 0, ekkor a szorzatuk 0.
3. A két szám különböző előjelű, és a pozitív szám abszolút értéke nagyobb a negatív szám abszolút értékénél, ekkor a szorzatuk előjele negatív.

Tehát a két szám szorzata lehet pozitív, negatív vagy 0.

C 5. Jelöljük a teljes út hosszát s-sel.
Az első versenyző által megtett út:
$s\cdot\frac{3}{4}\cdot 0,6 = s\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{10} = s\cdot\frac{9}{20}$.
A második versenyző által megtett út:
$s\cdot\frac{2}{3}\cdot 0,7 = s\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{10} = s\cdot\frac{7}{15}$.
$\frac{9}{20}=\frac{27}{60}$; $\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$ $\quad \frac{27}{60}<\frac{28}{60}$, így $\frac{9}{20}s<\frac{7}{15}s$.
Tehát a második versenyző tett meg nagyobb utat az első nap.

C 6. Jelöljük a háromszög szögeit a következő betűkkel: α; β; γ.
$\alpha:\beta:\gamma = 1:3:5$
Tudjuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, azaz $\alpha = \frac{180°}{9} = 20°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 100°$.
Tehát a háromszög legnagyobb szöge 100°.

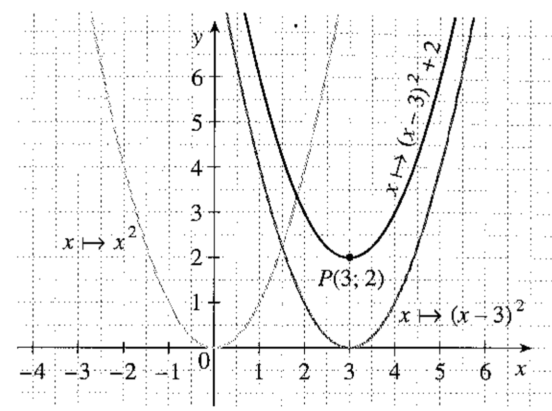
C 7. Készítsünk ábrát:
$HRC\sphericalangle = 35°$,
$HC = 1,7$ (km),
$RC = \frac{1,7}{\mathrm{tg}\,35°} = 2,428 \approx 2,4$ (km).
Tehát a repülőtér és a célpont távolsága kb. 2,4 km.



C 8. $1:25\,000$ méretarányú térképen a területek aránya: $1:(2,5\cdot 10^4)^2$. Azaz a térképen 1 cm² a valóságban $(2,5\cdot10^4)^2 = 6,25\cdot 10^8$ cm²-nek felel meg.
A térképen 5 cm² a valóságban $31,25\cdot 10^8$ cm²-nek felel meg, ami 312 500 m².

C 9. Az $A(3; 2)$ és $B(-3; 5)$ pontokon áthaladó e egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_e(6; -3)$.
Párhuzamos egyenesek irányvektorai párhuzamosak, ezért a keresett f egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_f(2; -1)$ is lehet.
Mivel f áthalad az origón, az egyenlete $y = -\frac{1}{2}x$.

C 10. Minimumhely: 3
Minimum: 2



C 11. $a_1 = 2$, $a_4 = 54$, $a_5 = ?$
A szokásos jelöléseket használva:
$a_4 = a_1\cdot q^3 \to 54 = 2\cdot q^3 \to q^3 = 27 \to q = 3$.
$a_5 = a_4\cdot q = 54\cdot 3 = 162$.

C 12. A lehetséges kimenetelek:

1;1	2;1	3;1	4;1	5;1	6;1
1;2	2;2	3;2	4;2	5;2	6;2
1;3	2;3	3;3	4;3	5;3	6;3
1;4	2;4	3;4	4;4	5;4	6;4
1;5	2;5	3;5	4;5	5;5	$\boxed{6;5}$
1;6	2;6	3;6	4;6	$\boxed{5;6}$	6;6

A lehetséges 36 egyenlően valószínű esetből 2 esetben lesz 11 a dobott számok összege, ezért $P(11$ a dobott számok összege$) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

II./a rész

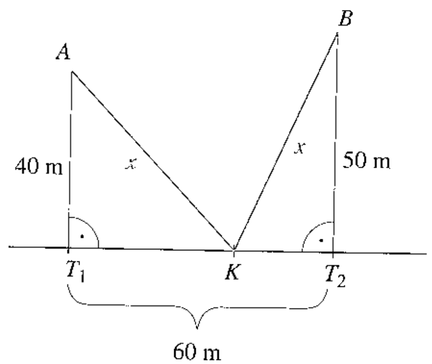
C 13. A gyár saját boltjában a szőnyegpadló métere $4800\cdot 0,85 = 4080$ Ft-ba kerül. Így az ott vásárolt szőnyegpadlón a vevő nyeresége méterenként 720 Ft.
Ha egy oda-vissza utat, azaz 160 km-t autóval megteszünk, akkor ez 3200 Ft-ba kerül. 3200 Ft-ot $\frac{3200}{720} = 4,44\ldots$ méter szőnyegpadló vásárlása esetén tudunk megtakarítani. Tehát ennél nagyobb (méterben számolva legalább 5 m) szőnyegpadló vásárlása esetén érdemes elmenni a gyár saját boltjába vásárolni.

C 14. a) A baktériumok száma a 2. óra végén 800.
A baktériumok száma a 4. óra végén 2500.
2500 a 800-nak $\frac{2500}{800} = 3{,}125$-szerese.

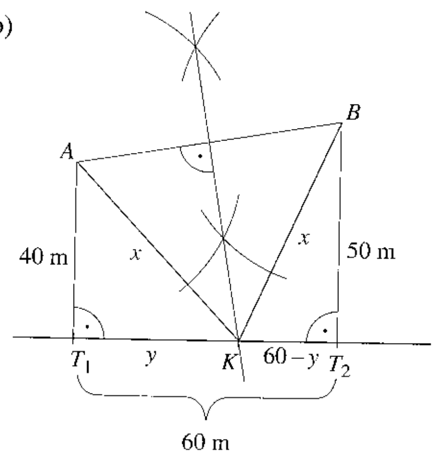
b) A baktériumok száma a megfigyelés kezdetén x, ennek $\frac{2500}{800}$-szorosa 800.
Egyenlettel:
$\frac{2500}{800} \cdot x = 800$, melyből $x = 256$.

c) Tegyük fel, hogy minden órában c-szeresére nő a baktériumok száma.
Az a) szerint $c^2 = \frac{2500}{800}$, tehát $c = \frac{5}{2\sqrt{2}}$.
A baktériumok száma a megfigyelés kezdete után 9 órával:
$256 \cdot c^9 = 256 \cdot \left(\frac{5}{2 \cdot \sqrt{2}}\right)^9 \approx 43\,200$.

C 15. a)



b)



b) Az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki T_1T_2-ből a kút helyét.

c) A b) feladatrészben használt jelölésekkel:
$y^2 + 40^2 = (60 - y)^2 + 50^2$
$y^2 + 40^2 = 60^2 - 120y + y^2 + 50^2$
$120y = 4500$
$y = 37{,}5$
Tehát $T_1K = 37{,}5$ m, $T_2K = 22{,}5$ m.

C 16. $V_{\text{fémgolyó}} = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot 3^3\pi}{3} = 36\pi \approx 113$ (cm³)
$V_{\text{fémkocka}} = 5^3 = 125$ (cm³)
Tehát a víz szintje többet emelkedik, ha a fémkockát helyezzük a vízbe.
Ha az emelkedések különbségét h-val jelöljük:
$5^2 \cdot \pi \cdot h = 125 - 36\pi$
$h = \frac{125 - 36\pi}{25\pi} \approx 0{,}15$ (cm).
Tehát közelítőleg 1,5 mm-rel nagyobb a vízszint emelkedése.

II./b rész

C 17. a) Írjuk fel a számtani sorozat tagjait, és figyeljük meg, hogy az összegük mikor éri el a 72-t.

$a_1 = 2$	$a_2 = 6$	$a_3 = 10$	$a_4 = 14$	$a_5 = 18$	$a_6 = 22$
$S_1 = 2$	$S_2 = 8$	$S_3 = 18$	$S_4 = 32$	$S_5 = 50$	$S_6 = 72$

Tehát $k = 6$.

Másik megoldás:
Használjuk az összegképletre vonatkozó összefüggést:
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$
$72 = \frac{2 + a_k}{2} k$
Az $a_k = 4k - 2$ behelyettesítéssel:
$72 = \frac{2 + 4k - 2}{2} k$
$72 = 2k^2 \to k^2 = 36 \to k = 6$ ($k = -6$ nem lehet).

b) Írjuk fel a sorozat első tíz tagját és adjuk össze:
$2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30 + 34 + 38 = 200$

Másik megoldás:
$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10$, ahol $a_1 = 2$, $a_{10} = 4 \cdot 10 - 2 = 38$.
$S_{10} = \frac{2 + 38}{2} \cdot 10 = 200$

c) Minden páros négyzetszám osztható 4-gyel. A sorozat minden tagja páros, de 4-gyel nem osztható egyik tagja sem.
Tehát a sorozat tagjai között nincs négyzetszám.

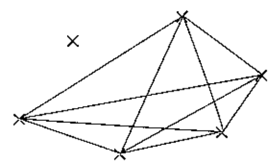
C 18. a) Fogalmazzunk „gráfnyelven": hány pontja van annak a gráfnak, amely éleinek száma hárommal nagyobb mint csúcspontjai számának kétszerese.
Használjuk az összefüggést, hogy n-pontú teljes gráf éleinek száma:
$\frac{n(n-1)}{2}$ (ahol n a csúcspontok száma).

Egyenlettel:
$\frac{n(n-1)}{2} - 3 = 2n$
$n^2 - 5n - 6 = 0$
$n_1 = 6 \qquad n_2 = -1$ (nem lehetséges).
Tehát 6 csapat nevezett a bajnokságra.

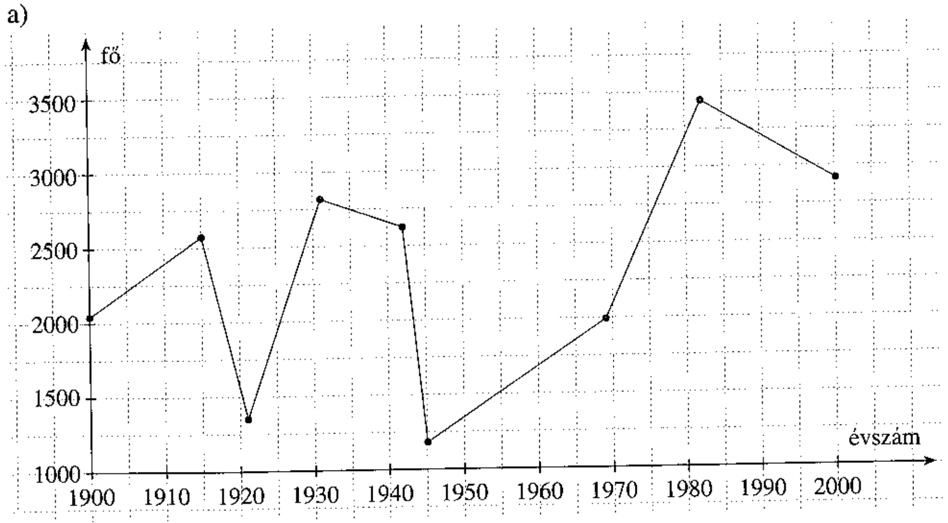
b) Mivel minden mérkőzést két csapat játszik, az egyes csapatok által lejátszott mérkőzések számának összege csak páros lehet.
Ezért a válasz: nem lehetséges.

Másik megoldás:
„Gráfnyelven": Mivel a gráf fokszáma kétszerese az élek számának, csak páros lehet.
A fokszámok összege 11 nem lehet.

c) „Gráfnyelven": a gráfnak van legalább egy izolált pontja. Az ötpontú teljes gráf éleinek száma:
$\frac{5\cdot 4}{2} = 10$, ezért legfeljebb 10 mérkőzést tartottak meg az ősszel.



C 19. a)



b) A lakosság száma 1942-ben: 2620,
a lakosság száma 1945-ben: 1176.
3 év alatt a lakosság számának csökkenése: 1444.
Tehát évente átlagosan $\frac{1444}{3} = 481,\dot{3}$, azaz 481 fővel csökkent a lakosság 1942 és 1945 között.

c) Használjuk a vonaldiagramot! Az 1921 és 1931 közötti szakasz meredekebb, tehát ebben az időszakban nagyobb arányú volt a lakosság növekedése.

Másik megoldás:
Az átlagos évi növekedés 1921 és 1931 között: $\frac{1466}{10} \approx 147$.
Az átlagos évi növekedés 1969 és 1982 között: $\frac{1450}{13} \approx 112$.
Tehát 1921 és 1931 között nagyobb.

8.D. Negyedik feladatsor

I. rész

D 1. $x^2 - 16 = 9$;
$x^2 = 25$;
$x_1 = 5$; $x_2 = -5$.

D 2. $A \cap B$ halmaz elemei a kétjegyű páros négyzetszámok, azaz $A \cap B = \{16; 36; 64\}$.
$A \setminus B$ halmaz elemei azok a kétjegyű négyzetszámok, amelyek nem párosak, azaz
$A \setminus B = \{25; 49; 81\}$.

D 3. a) Hamis, ellenpélda az összes 4-gyel osztva 2 maradékot adó szám például a 10.

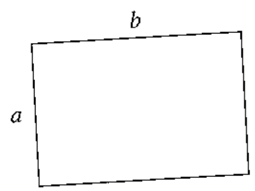
b) Hamis, ellenpélda az összes 4-gyel osztva 2 maradékot adó szám például a 10.

c) Igaz, a néggyel osztható számjegyek a 0, 4, 8 az ezekből képezhető 1- és 2-jegyű számok (0, 4, 8, 40, 44, 48, 80, 84, 88) mind oszthatók 4-gyel, és a 4-gyel való oszthatóság szempontjából csak az utolsó két számjegyből alkotott szám számít.

d) Hamis, pl. a 112 ellenpélda.

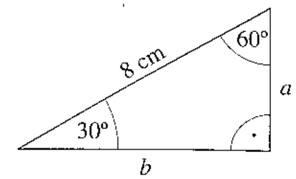
D 4. A polcokon levő könyvek száma fentről lefele haladva
1. polc: 25;
2. polc: 30;
3. polc: 35;
4. polc: 40.
A polcokon összesen $25 + 30 + 35 + 40 = 130$ könyv van.

D 5. A kert hosszabb oldala a rövidebb oldal 140%-a,
azaz $b = 1{,}4a$.



A téglalap kerülete:
$2a + 2b = 48$;
$a + b = 24$;
b helyébe $1{,}4a$-t helyettesítve
$a + 1{,}4a = 24$;
$2{,}4a = 24$;
$a = 10$; $b = 10 \cdot 1{,}4 = 14$
Azaz a téglalap alakú kert oldalai 10 m és 14 m hosszúságúak,
a kert területe 140 m^2.

D 6. Az olyan derékszögű háromszög, amelynek hegyesszögei 60° és 30°, egy szabályos háromszög szimmetriatengely menti elfelezésével kapható.

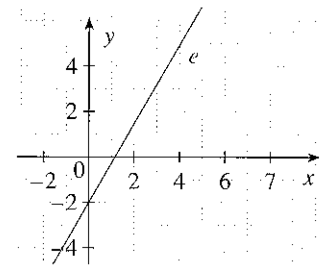


Ezért a rövidebb befogó $a = \frac{8}{2} = 4\,(\text{cm})$,

a hosszabb befogó $b = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}93\ (\text{cm})$.

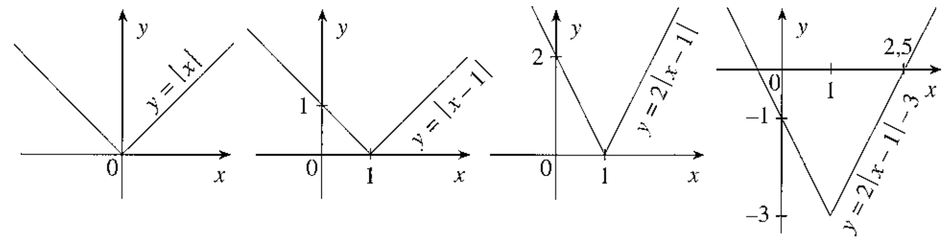
Másik megoldás:
$a = 8 \cdot \sin 30° = 4$ (cm) és $b = 8 \cdot \cos 30° \approx 6{,}93$ (cm).

D 7. Ha az egyenes irányszöge 60°, akkor iránytangense $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, ezért egyenlete $y = \sqrt{3}x - 2$.



D 8. Jelöljük a kocka élét a-val.
Tudjuk, hogy $V = 64$ dm^3, azaz $a^3 = 64$, ezért $a = 4$ (dm).
Tehát a kocka éle 4 dm. Egy felül nyitott kockának öt négyzet alakú oldallapja van, amelyek területe összesen $A = 5 \cdot 4^2 = 80$ (dm^2).
Tehát a kocka elkészítéséhez 80 dm^2 bádogra van szükség.

D 9. Az $f(x) = 2|x - 1| - 3$ függvény az $|x|$ függvényből transzformációkkal kapható meg az alábbi lépésekben:

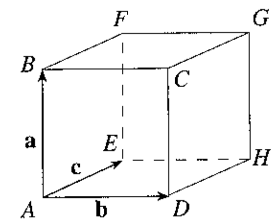


Az utolsó lépésben kapott grafikon az $f(x) = 2|x - 1| - 3$ függvény grafikonja, melynek minimumhelye 1, minimumértéke $f(1) = -3$.

D 10. A kifejezésnek pontosan akkor nincs értelme, ha a nevező 0.
Ebből $\cos x - 1 = 0$;
$\cos x = 1$;
$x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi$, ahol k egész szám.
Tehát a kifejezés az $\mathbf{R} \setminus \{k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbf{Z})\}$halmazon értelmezhető.
(Máshogy: a kifejezés minden valós számra értelmezhető, kivéve a 2π egész számú többszöröseit.)

D 11. A 8 cipőből 2-t $\frac{8 \cdot 7}{2}$-féleképpen választhatunk ki.
Tehát az összes eset száma: 28.
A 8 cipőből egy párat 4-féleképpen választhatunk ki.
Tehát a „jó" esetek száma: 4.
A pár kiválasztásának valószínűsége: $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.
Másik megoldás:
Az első cipőt bárhogy kiválaszthatom. A maradék 7-ből viszont már csak 1 jó választás van, ennek a valószínűsége: $\frac{1}{7}$.

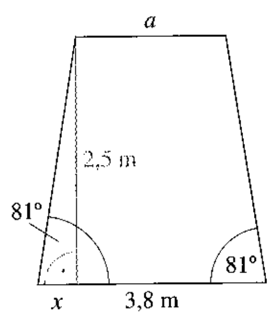
D 12. Az ábra alapján látható, hogy:
$\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$;
$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$;
$\overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$;
$\overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.
(A vektorok összegének definíciója alapján.)



II./a rész

D 13. a) Az ábra alapján
$\mathrm{tg}\,81° = \frac{2,5}{x}$
$x = 0,396$
$a = 3,8 - 2 \cdot 0,396 = 3,01$
A trapéz területe:
$T = \frac{3,01 + 3,8}{2} \cdot 2,5 = 8,51$ (m²).

A vájó felület:



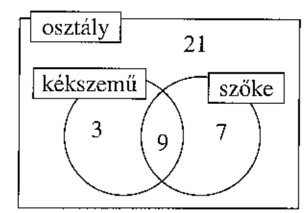
b) Az egy műszak alatt kibányászott szén mennyisége megegyezik egy trapéz alapú egyenes hasáb térfogatával. A hasáb alapja a vájó felület, magassága 6 m. Térfogata $V = T \cdot m \approx 51,1$ (m³).

c) A szén tömege: $m = V \cdot \varrho \approx 66\,380$ kg, ami kb. 66,4 tonna.

D 14. Egy év alatt a populáció létszáma kétszer nő 1,5-szeresére, azaz összesen $1,5^2 = 2,25$-szeresére nő. Jelöljük a kezdeti populáció létszámát a_0-val, az n. év végén a populáció létszámát a_n.
Ekkor $a_0 = 256$, így $a_1 = 256 \cdot 2,25 = 576$.
Ugyanígy $a_2 = 1296$;
$a_3 = 2916$;
$a_4 = 6561$.
Tehát a 4. év végén a rágcsálók száma 6561, azaz 4 évvel ezelőtt telepedtek meg a szigeten.
Másik megoldás:
$a_n = 256 \cdot 2,25^n$;
$6561 = 256 \cdot 2,25^n$;
$\frac{6561}{256} = 2,25^n$.
Vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát: $\lg \frac{6561}{256} = n \lg 2,25$

$$n = \frac{\lg \frac{6561}{256}}{\lg 2,25} = 4$$

D 15. A kékszeműek száma: $40 \cdot 0,3 = 12$;
a szőkék száma: $40 \cdot 0,4 = 16$;
kékszeműek és szőkék: $12 \cdot \frac{3}{4} = 9$;
kékszeműek, de nem szőkék: $12 - 9 = 3$;
szőkék, de nem kékszeműek: $16 - 9 = 7$;
kékszeműek vagy szőkék: $9 + 3 + 7 = 19$;
se nem kékszeműek, se nem szőkék: $40 - 19 = 21$.



D 16. a) Kapcsolási díj: 5 picula;
teljes árú percdíj: 15 picula;
5 perc után a percdíj: $15 \cdot 0,8 = 12$ picula;
10 perc után a percdíj: $15 \cdot 0,7 = 10,5$ picula.
Egy 25 perces beszélgetés alatt 5 percig teljes áron, 5 percig 20% kedvezménnyel, 15 percig 30% kedvezménnyel beszélünk.
Tehát a beszélgetés ára: $Á = 5 + 5 \cdot 15 + 5 \cdot 12 + 15 \cdot 10,5 = 297,5$ picula.

b) Teljes áron a beszélgetés ára: $Á' = 5 + 25 \cdot 15 = 380$ picula.
A kedvezmény 82,5 picula, 21,7%.

II./b rész

D 17. a) Az elkészült tévék számát az egy sorban levő két szám összeszorzásával kapjuk.
1997-ben: 9 990
1998-ban: 20 720
1999-ben: 16 800
2000-ben: 21 980
2001-ben: 22 800
Tehát 2001-ben készült a legtöbb tévé.

Másik megoldás:
A táblázat adataiból látszik, hogy a legnagyobb számot csak az utolsó két sor valamelyikéből kaphatjuk, tehát elég azt megnézni.

b) Az öt év alatt összesen 92 290 tévé készült,
tehát évente átlagosan $\frac{92\,290}{5} = 18\,458$.

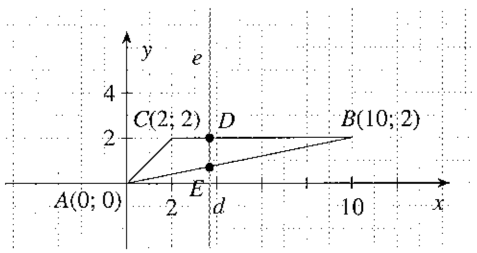
c) 2000-ben a nyereség egy tévén: 20 000 Ft
összesen: $21\,980 \cdot 20\,000 = 439{,}6$ millió Ft.
2001-ben a nyereség egy tévén: 20 000 Ft
összesen: $22\,800 \cdot 20\,000 = 456$ millió Ft.
A változás $\frac{456}{439{,}6} \approx 1{,}037$-szeres, azaz a nyereség 3,7%-kal nőtt.

d) $\frac{15}{9} \cdot 9990 = 16\,650.$
Tehát a 2001-ben gyártott készülékek száma 16 650 lett volna.

D 18. a) A háromszög BC oldalának hossza: $10 - 2 = 8$ egység; az oldalhoz tartozó magasság: 2 egység; a háromszög területe: $T = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8$ egység.

b) Az AB egyenes irányvektora:
$\overrightarrow{AB} = (10; 2)$ és átmegy az origón.
Tehát egyenlete: $2x - 10y = 0$.

Másik megoldás:
Az egyenes meredeksége: $\frac{2}{10} = 0{,}2$
és átmegy az origón, tehát egyenlete:
$y = 0{,}2x$.



c) A keresett e egyenes paraméteres egyenlete: $x = d$, ahol $2 < d < 10$ *, különben az egyenes nem felezheti a háromszög területét.
Az egyenes a BC oldalt a $D(d;\ 2)$ pontban metszi.
Az egyenes az AB oldalt az $E(d;\ 0{,}2d)$ pontban metszi.
A BDE háromszög BD oldalának hossza: $10 - d$, magassága $2 - 0{,}2d$.
Tehát a háromszög területe $\frac{(10-d)(2-0{,}2d)}{2}$.
A keresett e egyenes felezi a háromszög területét, azaz
$$\frac{(10-d)(2-0{,}2d)}{2} = 4$$
$$20 - 4d + 0{,}2d^2 = 8$$
$d_1 = 10 + 2\sqrt{10}$ és $d_2 = 10 - 2\sqrt{10}$.
A *-gal jelölt feltétel miatt, csak d_2 felel meg, azaz az e egyenes egyenlete
$x = 10 - 2\sqrt{10} \approx 3{,}68$.

d) $(x - 10)(x - 2) = 0$, másképpen $x^2 - 12x + 20 = 0$.

D 19. a) Az intenzitás 6 mm-ként a 10%-ára csökken, azaz 0,1-szeresére változik.
Ha az eredeti intenzitás A, akkor x mm mélységben az intenzitás:
$I(x) = A \cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}} \approx A \cdot 0{,}68^x$, mert $\sqrt[6]{0{,}1} \approx 0{,}68$.

b) $I(2) = A \cdot 0{,}1^{\frac{1}{3}} = A \cdot 0{,}4642$, azaz az eredeti intenzitás 0,4642-szerese.

c) $A = 800$
Az alábbi egyenlőtlenség-rendszert kell megoldani:
$200 < 800 \cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}} < 500$, azaz $0{,}25 < 0{,}1^{\frac{x}{6}} < 0{,}625$.
A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, ezért
$$\lg 0{,}25 < \lg 0{,}1^{\frac{x}{6}} < \lg 0{,}625$$
$$\lg 0{,}25 < -\frac{x}{6} < \lg 0{,}625$$
$-6 \cdot \lg 0{,}625 < x < -6 \cdot \lg 0{,}25$
$-6 \cdot \lg 0{,}625 \approx 1{,}22$
$-6 \cdot \lg 0{,}25 \approx 3{,}61$
ezért az intenzitás 1,22 mm és 3,61 mm közötti mélységben esik a megadott intervallumba.

d) $I = 150$ $\quad x = 7$
$150 = A \cdot 0{,}1^{\frac{7}{6}} \Rightarrow A \approx 2200$
Az eredeti intenzitásnak 2200 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$-nek kell lennie.

8.E. Ötödik feladatsor

I. rész

E 1. a) Igaz, mert $A \cap B$ minden eleme hozzá tartozik az A halmazhoz (és B-hez is).
b) Hamis, mert a $B \setminus A$ halmaz elemei nem tartoznak hozzá az A halmazhoz.

E 2. A Nap térfogata egy 0,7 millió km sugarú gömb térfogatával közelíthető:

$$\frac{4\pi \cdot (0,7 \cdot 10^6)^3}{3}\ \text{km}^3 \approx 1,4 \cdot 10^{18}\ \text{km}^3.$$

Ez 1,4· 10^{27} m³, tehát a Nap átlagos sűrűsége $\dfrac{2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{1,4 \cdot 10^{27}\ \text{m}^3} \approx 1400\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

E 3. Egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasábról van szó, magassága 2 cm.

E 4. Az 1–9. oldalak számozásához 9 számjegyet használt fel Kata. A további 22 számjegy 11 darab kétjegyű számhoz elegendő, ezek tehát a 10–20. oldalak lesznek. Összesen tehát 20 oldalt számozott meg Kata.

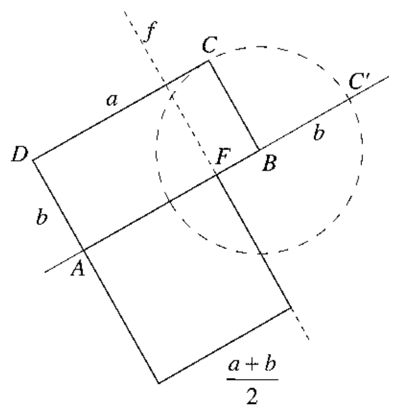
E 5. A megoldáshalmaz: $]-3; -1[\cup]4; 6]$.

E 6. A 9-re és a 3-ra.

E 7. A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságot alkalmazva:

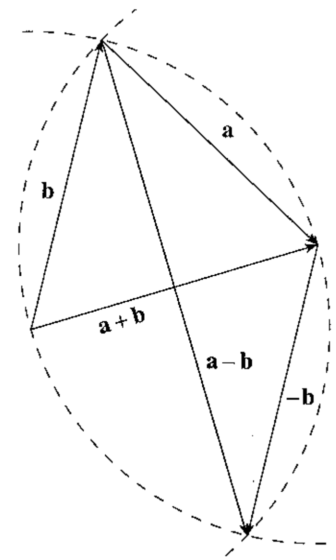
$2^p = m \cdot \lg 2$, amiből $m = \dfrac{2^p}{\lg 2}$.

E 8. Ha a téglalap egy csúcsból kiinduló oldalainak hossza a és b, akkor a szerkesztendő négyzet oldala $\dfrac{a+b}{2}$ (valóban: $2a + 2b = 4 \cdot \dfrac{a+b}{2}$).
A C' pont az $ABCD$ téglalap B csúcsa körül írt, b sugarú kör és az AB egyenesének A-tól távolabbi metszéspontja. Mivel $AC' = a + b$, ezért az AC' szakasz f felezőmerőlegese által kimetszett F pontra: $AF = \dfrac{a+b}{2}$.



Az AF szakasz fölé szerkesztett négyzet tehát megoldása a feladatnak.

E 9. Tudjuk, hogy
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.
Az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektort tehát a megadott ábra $\mathbf{b}$ vektorának kezdőpontjából az $\mathbf{a}$ végpontjába mutató vektor, az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektort pedig az $\mathbf{a}$ kezdőpontjából $-\mathbf{b}$ végpontjába mutató vektor adja meg.



E 10. Kockával dobva 1, 2, ..., 6 lehet az eredmény, ezek mindegyike $\dfrac{1}{6}$ valószínűségű (hiszen a kocka szabályos). Páratlan számot dobni az 1, 3, 5 eredmények egyikének bekövetkeztét jelenti, amelynek együttes valószínűsége $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Másik megoldás:
A kockával 3 páros és 3 páratlan számot dobhatunk. Mivel a lehetséges, egyenlő valószínűségű eredményeknek éppen a fele páratlan, ezért ez a valószínűség 0,5.

E 11. Az $x^2 + y^2 + 4y = 0$ egyenletű kör középponti egyenlete: $x^2 + (y + 2)^2 = 4$. Ebből kiolvasható, hogy a kör középpontja a $(0; -2)$ pont, sugara 2.

E 12. A helyes válasz: b) (mert az ötvözet bármekkora darabjában 30 : 70 az arany-ezüst arány).

II./a rész

E 13. Legyen a háromszög oldalainak betűzése a szokásos és $a := 2$, $b := 4$ (cm). A két megadott oldal által közrezárt szög a háromszögben γ.
A szöveg szerint $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot \sin\gamma}{2} = 2$, tehát $\sin\gamma = \dfrac{1}{2}$.

– Ha a háromszög tompaszöge éppen a γ szög, akkor $\gamma = 150°$.
– Ha γ nem tompaszög, akkor $\gamma = 30°$ és a háromszög tompaszöge ekkor csak a 4 cm hosszú oldallal szemközti β lehet.

Koszinusztétellel kiszámíthatjuk a c oldal hosszát: $c = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 30°}$, azaz $c \approx 2{,}48$ (cm).
Szinusztétellel:
$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, azaz $\sin\beta = \frac{4}{2{,}48} \cdot \sin 30° \approx 0{,}8065$, amiből $\beta \approx 126{,}25°$.
A feladatnak tehát két megoldása van: a háromszög tompaszöge lehet 150°, vagy 126,25° nagyságú.

E 14. A vízóra beszerelése után a család nem fizeti ki feleslegesen a 20 m³ víz 18%-ára jutó díjat, tehát a korábbiakhoz képest minden hónapban megspórolja 3,6 köbméter víz árát, azaz $3{,}6 \cdot 150 = 540$ tallért.
Mivel $\frac{12\,000}{540} \approx 22{,}2$, ezért kb. 23 hónap alatt térül meg a család számára a vízóra beszerelési költsége.

E 15. a) $x = 2005 - 1981 = 24$, tehát az elhalálozások száma $1{,}27 \cdot 1{,}569^{24} \approx 62\,915$, azaz 63 ezer körül várható.

b) Meg kell oldanunk az $1{,}27 \cdot 1{,}569^x = 10^6$ egyenletet a pozitív valós számok halmazán.

$1{,}569^x = 7{,}874 \cdot 10^5$

$\lg 1{,}569^x = \lg (7{,}874 \cdot 10^5)$

$x \cdot \lg 1{,}569 = \lg (7{,}874 \cdot 10^5)$

$x = \frac{\lg(7{,}874 \cdot 10^5)}{\lg 1{,}569} \approx 30{,}1.$

Kb. 30 év eltelte után, 2011-ben várható, hogy a halálesetek száma eléri az 1 milliót.

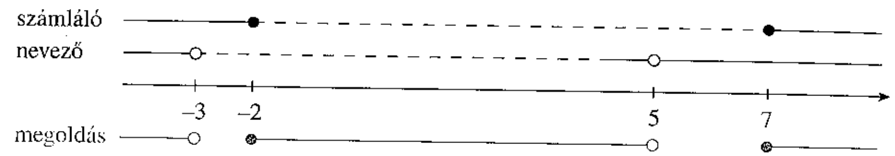
E 16. Kikötés: $x^2 - 2x - 15 \neq 0$, azaz $x \neq -3$; $x \neq 5$. Mindkét oldalból kivonunk 1-et, közös nevezőre hozunk, rendezünk:

$$0 \le \frac{2x^2 - 7x - 29}{x^2 - 2x - 15} - 1$$

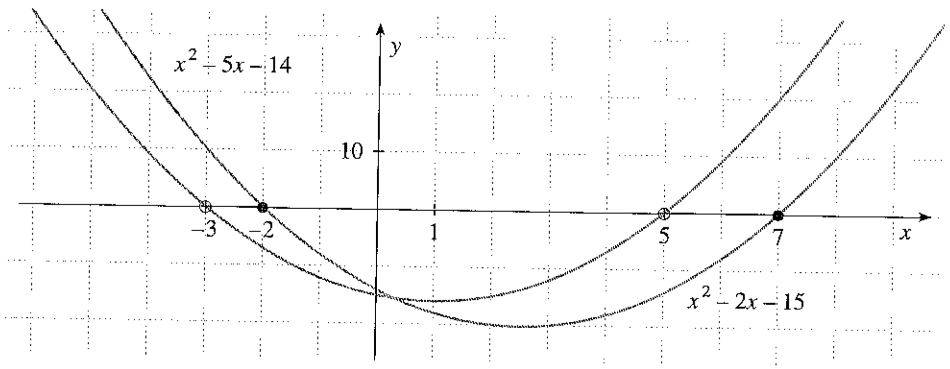
$$0 \le \frac{2x^2 - 7x - 29}{x^2 - 2x - 15} - \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 15}$$

$$0 \le \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 2x - 15}$$

Ezután a számláló és a nevező előjelét vizsgáljuk. A tört ott nemnegatív, ahol a két előjel megegyezik, vagy a számláló nulla. A számláló zérushelyei -2 és 7, a nevezőé (mint már láttuk) -3 és 5. Ábrázoljuk, hogy a számegyenes egyes intervallumain milyen a számláló, illetve a nevező előjele. Innen leolvasva a megoldás tehát: $x < -3$ vagy $-2 \le x < 5$ vagy $7 \le x$.



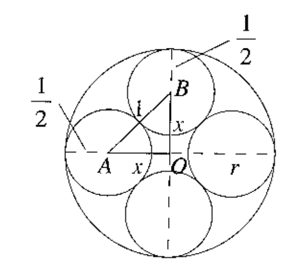
Másik megoldás:



II./b rész

E 17. Minden hosszúságot cm-ben mérünk.

a) Az OAB egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának hossza 1; befogójának hosszát x-szel jelölve: $x\sqrt{2} = 1$, tehát $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



A cső sugarának hosszát r-rel jelölve: $r = x + \frac{1}{2}$,

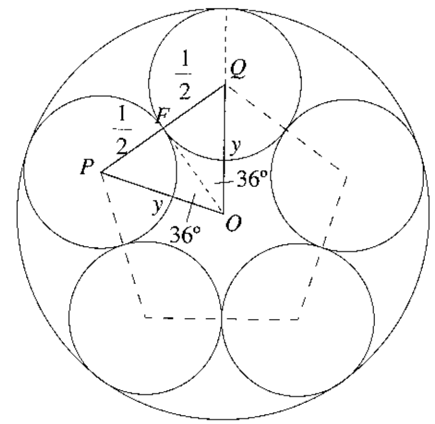
ezért $r = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

A cső tehát $\sqrt{2} + 1$ cm (azaz kb. 2,41 cm) belső átmérőjű.

b) A „kereszt" alakban elhelyezett kábelek egy 3 cm belső átmérőjű csőben futhatnak.
A szabályos ötszöges elrendezéshez készítsünk ábrát!
Az OPQ háromszög egyenlő szárú, PQ alapja 1 cm hosszú, szárszöge 72°, szárának hossza legyen y.
Az OFQ derékszögű háromszögből:

$$\sin 36° = \frac{\frac{1}{2}}{y}, \text{ amiből}$$

$$y = \frac{1}{2\sin 36°} \approx 0,8507 \text{ (cm)}.$$



A cső sugara $y + \frac{1}{2}$, a belső átmérője tehát $2y + 1 = \frac{1}{\sin 36°} + 1 \approx 2,70$ (cm).
A köteg átmérője tehát a szabályos ötszöges elrendezés esetén kisebb, mégpedig kb. 0,3 cm-rel.

E 18. a) Legyenek a tavalyi életkorok növekvő sorrendben p, q, r (mindhárom prím), és s azon prím, amelynek hatványai az idei életkorok.
Ekkor $p + 1 = s^a$, $q + 1 = s^b$, $r + 1 = s^c$, ahol a, b, c pozitív egészek. Így

$p = s^a - 1 = (s-1)(s^{a-1} + s^{a-2} + \ldots + 1)$,
$q = s^b - 1 = (s-1)(s^{b-1} + s^{b-2} + \ldots + 1)$,
$r = s^c - 1 = (s-1)(s^{c-1} + s^{c-2} + \ldots + 1)$.

De ha $s - 1$-gyel három különböző prímszám is osztható, akkor az csak az 1 lehet, vagyis $s = 2$. Vegyük sorra 2 azon hatványait, amelyek életkorként szóba jöhetnek, és vizsgáljuk meg, hogy az eggyel kisebb számok mely esetben prímek!

2^n	2	4	8	16	32	64
$2^n - 1$	1	3	7	15	31	63

Az 1, 15, 63 nem az, tehát azt kapjuk, hogy a gyermekek tavaly 3 és 7, apuka pedig 31 éves volt – idén tehát 4, 8, 32 évesek.

b) Legegyszerűbb, ha a két gyermek közti 4 éves korkülönbség a differencia, mert ekkor a 12, 16, 20, 24, 28 számok beiktatásával a 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 valóban egy számtani sorozat szomszédos tagjai. (Minden olyan pozitív szám alkalmas differenciának, amelynek egész számú többszöröse a 4, csak több szám közbeiktatására van szükség.)

c) A 3, 7, 31 csak akkor lehetnének ugyanazon mértani sorozat tagjai, ha találnánk olyan q számot, hogy annak valamely egész kitevős hatványa $\frac{7}{3}$, valamely más

egész kitevős hatványa pedig $\frac{31}{7}$ lenne. (A mértani sorozat bármely két tagjának hányadosa a kvóciens valahányadik, egész kitevős hatványa.) Tegyük fel, hogy $\frac{7}{3} = q^m$ és $\frac{31}{7} = q^n$, ahol m és n pozitív egészek. Ekkor $\left(\sqrt[m]{\frac{7}{3}}\right)^n = \frac{31}{7}$, vagyis $\frac{7^n}{3^n} = \frac{31^m}{7^m}$, átrendezve $7^{m+n} = 3^n \cdot 31^m$. Ez azonban lehetetlen, hiszen a bal oldal prímtényezős felbontásában csak 7-esek találhatók, a jobb oldalében pedig csak 3-asok és 31-esek. Nincs tehát ilyen q szám, tehát a 3, 7, 31 nem lehetnek egyazon mértani sorozat tagjai.

E 19. a) AB távolság a Pitagorasz-tételből:

$$\sqrt{(24-(-13))^2 + (60-23)^2} = \sqrt{2 \cdot 37^2} = 37\sqrt{2} \approx 52,3.$$

b) Az alábbi gondolatmenetet alkalmazhatjuk, ha CAB nem tompaszögű háromszög. A C csúcsból induló magasság hossza a kérdés, amit az AB oldalra C-ből állított merőleges megadásával és két pont távolságával számolunk. $\overrightarrow{AB} = (-37; -37)$, vegyünk egy rövidebb és egyszerűbb, a fentivel párhuzamos normálvektort, pl. $(-1; -1)$-et, ami a keresett magasság-egyenes egy normálvektora. Mivel a magasság keresztülmegy a C ponton, az egyenlete: $-x - y = -24 - (-14) = -10$, avagy $x + y = 10$. Ennek az AB egyenessel alkotott metszéspontja kell nekünk. AB egyenlete: $x - y = 24 - 60 = -36$. Itt felhasználtuk, hogy AB normálvektora, mivel merőleges a magasságra, pl. $(1; -1)$. A metszéspont kiszámításához először összeadjuk a két egyenletet: $2x = -26$, ahonnan $x = -13$; majd visszahelyettesítve pl. a második egyenletbe, kapjuk: $y = 23$.
Tehát a magasság talppontja $M(-13; 23)$. A magasság hossza:

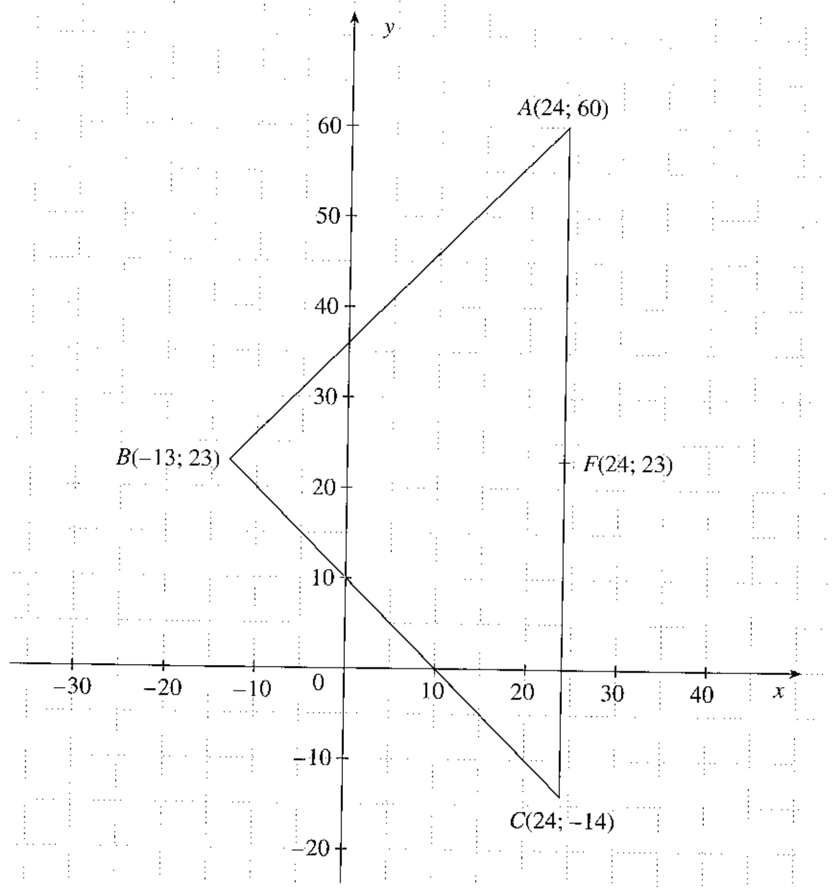
$$MC = \sqrt{(24-(-13))^2 + (-14-23)^2} = \sqrt{2 \cdot 37^2} = 37\sqrt{2} \approx 52,3.$$

Megjegyzés:
A magasság megegyezik AB hosszával, hiszen $M \equiv B$, ez egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. Ezt pl. a $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ vektorok felírásával észre is lehet venni.

c) A körülírt kör középpontjáról van szó, hiszen az az egyetlen pont a síkban, amely egyenlő távolságra van mindhárom csúcstól (településtől). A Thalész-tétel miatt a körülírt kör középpontja az átfogó, azaz most AC felezőpontja, tehát

$$F\left(\frac{24+24}{2}; \frac{60-14}{2}\right) = (24; 23).$$

Ha jó ábrát rajzolunk gyorsan igazolni is lehet, hogy ABC derékszögű egyenlő szárú háromszög, így a c) válasz azonnal adódik, hogy AC felezőpontja lesz az F pont. A b) válasz is gyors, hiszen a C-ből húzott magasság maga a BC oldal, így hossza megegyezik AB hosszával. Lásd az ábrát!



8.F. Hatodik feladatsor

I. rész

F 1. A helyes válasz: b) (mert a keverék töménysége nem lehet sem 22,5%-nál kisebb, sem 42,5%-nál nagyobb).

F 2. A helyes válasz: d) (mert $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ és ennek reciproka valóban $\frac{3}{7}$).

F 3. Az áprilisi napok napkeltéjének időpontja közelítőleg számtani sorozat egymás utáni tagjai, ahol a_1 = 5 óra 24 perc, $d = -2$ perc.
Így $a_{15} = a_1 + 14d$, azaz a_{15} = 4 óra 56 perc.

F 4. A Nap tömege kb. $6 \cdot 10^{21} \cdot 3{,}32 \cdot 10^5 = 1{,}99 \cdot 10^{27}$ tonna, azaz $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

F 5. A súlypont koordinátái a csúcspontok megfelelő koordinátáinak számtani közepeként adódnak, tehát $S\left(\frac{1+0-4}{3};\ \frac{1+6-1}{3}\right) = S(-1;\ 2)$.

F 6. A szóban forgó intervallum így is megadható: $\left]-\frac{16}{48};\ -\frac{12}{48}\right[$.

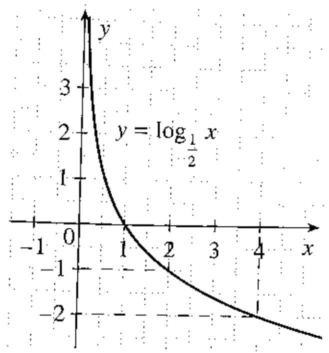
Ennek három különböző eleme: $-\frac{15}{48},\ -\frac{14}{48},\ -\frac{13}{48}$.

Megjegyzés:

$\left]-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{4}\right[\supset [-0{,}33;\ -0{,}26]$, tehát megfelelnek például a $-0{,}33$, $-0{,}3$, $-0{,}28$ számok is.

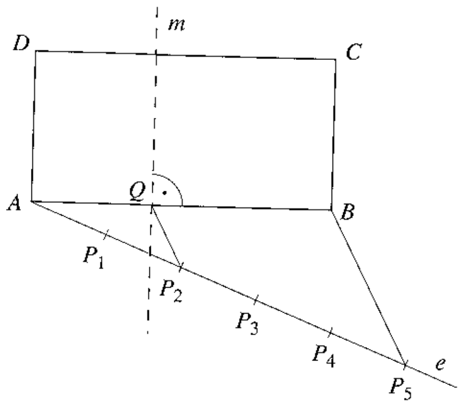
A feladatnak végtelen sok megoldása van, itt csupán két ötletre hívtuk fel a figyelmet.

F 7.



F 8. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $[2; 4] \cup [10; 12]$.

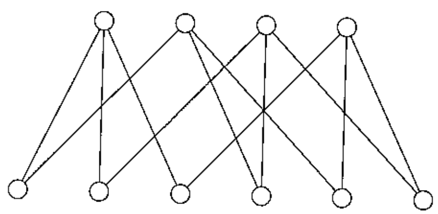
F 9. A téglalap egyik oldalának 2 : 3 arányú osztópontjában (Q) merőlegest állítva a szóban forgó oldalra olyan egyenest kapunk (m), amely kijelöli a téglalap belsejében a követelményeknek megfelelő kerítést.



Megjegyzés:
A feladatnak 4 megoldása van, amelyek közül kettő az AB oldalra, kettő pedig AD oldalra merőleges.

F 10. Ekkor a fiúk összes lány-ismeretségeinek száma $6 \cdot 2 = 12$. Mivel az ismeretség kölcsönös, és minden lány 3 fiút ismer, ezért $\frac{12}{3} = 4$ lány van a társaságban.

Megjegyzés:
Olyan gráffal szemléltethetjük a helyzetet, amelynek egyik részében 6 pontból pontonként 2 él indul ki, és ezek az élek a gráf másik részében hármasával futnak be 4 pontba. Mutatunk egy ilyen ábrát, természetesen többféle megvalósulás lehetséges.



F 11. Az egyenlet alaphalmaza $A := \mathbf{R} \setminus \{3\}$.
A nevező az alaphalmazon nem nulla. Mindkét oldalt $3 - x$-szel szorozva az eredetivel az alaphalmazon ekvivalens egyenlethez jutunk: $3 + 2x - x^2 = 0$.

Megoldóképlettel: $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$.

$x_1 = 3 \notin A$, $x_2 = -1 \in A$
Az egyenlet megoldáshalmaza tehát $\{-1\}$.

Másik megoldás:
A tört számlálója a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja segítségével szorzattá alakítható: $3 + 2x - x^2 = (3 - x)(x + 1)$. A bal oldalon álló tört egyszerűsítése után az eredeti egyenlet az A alaphalmazon így is írható: $x + 1 = 0$.
Ebből az első megoldásban megadott megoldáshalmazt kapjuk.

F 12. A homokkúp térfogata $V = \dfrac{6^2 \pi \cdot 3{,}6}{3} \approx 136$ (m³), ennek tömege kb. 272 tonna.
Az elszállításához az 5 tonnás teherautóból 55-re van szükség.
(272 : 5 ≈ 54,4, ezért 54 teherautó nem elég.)

II./a rész

F 13. A gyökös kifejezéseknek van értelme, ha $k \geq 0$. Az egyenlet nevezőjében nem állhat nulla, ezért $k \neq 1$.

Mivel a most megadott feltételek mellett $\sqrt[3]{k} \cdot \sqrt[6]{k} = k^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{6}} = k^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{k}$, ezért elegendő a megadott egyenletet $\sqrt{k}$-ra megoldani.

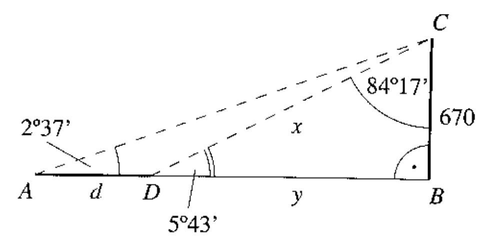
$\sqrt{k} + 1 = -9\sqrt{k} + 9$

$10\sqrt{k} = 8$

$\sqrt{k} = 0{,}8$

A feladatban megadott szorzat pontos értéke tehát 0,8.

F 14. Minden távolságot méterben mérünk.
A 2 óra alatt megtett AD távolság legyen d; D-től a C hegycsúcs x távolságra van légvonalban.



a) Az ábra CBD derékszögű háromszögéből: $y = 670 \cdot \text{tg}\, 84°17'$, az ABC derékszögű háromszögből: $d + y = 670 \cdot \text{tg}\, 87°23'$.

Így $d = 670 \cdot \text{tg}\, 87°23' - 670 \cdot \text{tg}\, 84°17'$.
Kiemelés után: $d = 670 \cdot (\text{tg}\, 87°23' - \text{tg}\, 84°17') \approx 7970$.
A kb. 7970 méteres AD távolságot 2 óra alatt tette meg a turista, ezért sebessége $\frac{7970}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{h}} \approx 3{,}99\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.

b) Ismét a CBD derékszögű háromszögből: $x = \dfrac{670}{\sin 5°43'} \approx 6730$.
Két órás gyaloglás után a turista légvonalban kb. 6730 méterre van a hegycsúcstól.

F 15. Mivel egyik nevező sem lehet 0, kikötés nem szükséges. Átírjuk mindegyik hatványt 2-es alapúba (felhasználva, hogy $4 = 2^2$): $\dfrac{1+2^{2x-2}}{2^{2x}} = \dfrac{17}{2^{x+3}}$. A nevezőkkel keresztbeszorozva (felhasználva, hogy azonos alapú hatványok szorzásakor a kitevők összeadódnak): $2^{x+3} + 2^{3x+1} = 17 \cdot 2^{2x}$. Elosztjuk az egyenletet a sosem nulla 2^x-nel: $2^3 + 2^{2x+1} = 17 \cdot 2^x$. Rendezve: $2 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$. Megoldva a 2^x-re másodfokú egyenletet, annak gyökei 8 és 0,5. Ha $2^x = 8 = 2^3$, akkor $x = 3$, ha $2^x = 0{,}5 = 2^{-1}$, akkor $x = -1$.
Ellenőrzéssel láthatjuk, hogy jól számoltunk, mindkét érték megoldása az egyenletnek.

F 16. a) 500 termék közül 10-et választani (úgy, hogy a sorrend közömbös)
$$\binom{500}{10} = \frac{500!}{490! \cdot 10!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot 497 \cdot 496 \cdot 495 \cdot 494 \cdot 493 \cdot 492 \cdot 491}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \approx$$
$\approx 2{,}46 \cdot 10^{20}$-féleképpen lehet. (A részletes szorzást azért írtuk ki, mert nem minden zsebszámológép boldogul gombnyomásra ekkora binomiális együtthatóval.)

b) Ekkor 5 terméket a 20 selejt közül, másik 5-öt a 480 jó közül választanak, tehát erre $\binom{20}{5} \cdot \binom{480}{5} \approx 3{,}22 \cdot 10^{15}$ lehetőség van.

c) A b) és a)-beli eredmények hányadosa kb. $1{,}31 \cdot 10^{-5}$.
Megjegyzés:
Ekkora valószínűséggel lesz a 10 választott termék között 5 selejt; feltéve, hogy olyan a kiválasztási eljárás, hogy bármely terméket ugyanolyan eséllyel választhatjuk ki.

II./b rész

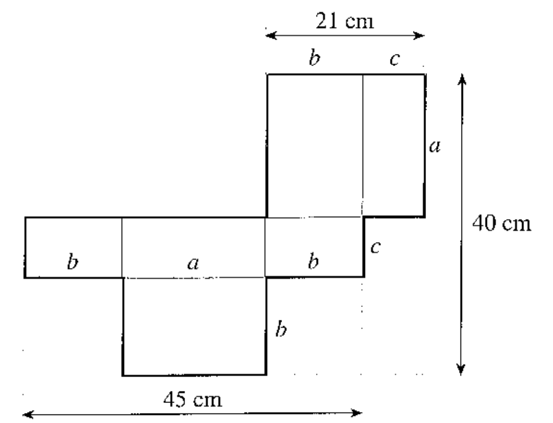
F 17. a) $\dfrac{125}{0{,}25} = 500$, tehát 500 kockacukornak felel meg a 125 ml édesítőszer és ebből $500 \cdot 8 = 4000$ csepp cseppenthető.

b) 1 csepp térfogata $\dfrac{0{,}25\ \text{ml}}{8} = 0{,}03125\ \text{ml} = 0{,}03125\ \text{cm}^3 = 31{,}25\ \text{mm}^3$.
Ha a gömb alakú csepp sugara mm-ben mérve r, akkor $\dfrac{4\pi r^3}{3} = 31{,}25$, amiből $r^3 \approx 7{,}46$, tehát $r \approx 1{,}95$. Egy csepp sugara kb. 1,95 mm.

c) 96 csepp összesen 12 db kockacukornak felel meg. A kávéjukat 3 kockacukornak megfelelő mennyiségű édesítőszerrel ivók száma ezért biztosan páros szám: 0, 2 vagy 4.
A feladat szövege szerint volt olyan vendég, aki 2 kockacukornak megfelelő édesítőszert használt és olyan is, aki 3 kockacukornak megfelelőt.
Ebből és az előbb megállapítottakból következik, hogy 2 vendég itta 3 kockacukornak megfelelő mennyiségű édesítőszerrel (24-24 cseppel) a kávéját és 3 pedig 2 kockacukornak megfelelő mennyiséggel (16-16 cseppel).
A társaságban a kávét édesítőszerrel fogyasztók száma tehát 5.

d) Ha egy csepp sugara az eredetinek 80%-a (0,8 része), akkor térfogata az eredetinek $0{,}8^3 = 0{,}512$-szerese.
A flakonból kitölthető cseppek száma és egy csepp térfogata fordítottan arányos mennyiségek (hiszen szorzatuk 125 ml-rel egyenlő) így a cseppek sugarának csökkentésekor a kitölthető cseppek száma az eredetinek $\dfrac{1}{0{,}512} \approx 1{,}95$-szerese lesz.

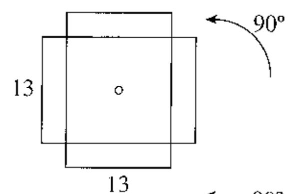
F 18. a) Legyen a téglatest egy csúcsából kiinduló három élének hossza a, b és c, továbbá legyen az ábra szerint
$a > b > c$.
A „függőlegesen” megadott 40 cm-es távolság éppen a-val hosszabb, mint a „vízszintesen” megadott 21 cm-es távolság, tehát
$a = 40 - 21 = 19$ (cm).



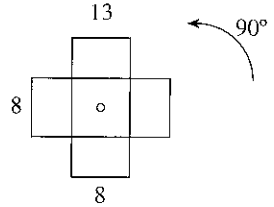
A másik „vízszintes" távolságból: 45 cm – 19 cm = 26 cm. Ez $2b$-vel egyenlő, tehát $b = 13$ (cm).
Ismét a 21 cm-es „vízszintes" távolságból: $c = 21 - 13$, tehát $c = 8$ (cm).
A téglatest éleinek hossza tehát 19 cm, 13 cm és 8 cm.

b) A téglatest térfogata $19 \cdot 13 \cdot 8 = 1976$ cm³.
A téglatest körülírt gömbjének átmérője a testátlókkal egyenlő hosszúságú, ezért hossza $\sqrt{19^2 + 13^2 + 8^2} \approx 24,4$ cm. A körülírt gömb térfogata kb. 7580 cm³.
A téglatest térfogata ennek $\frac{1976}{7580} \cdot 100 \approx 26\%$-a.

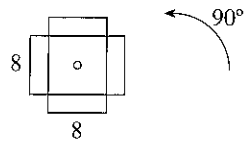
c) Mindegyik forgatásnál négyzetes oszlop lesz az eredeti és az elforgatott téglatest közös része. (A mellékelt ábrákhoz tartozó forgástengelyek merőlegesek az ábra síkjára.)
- Ha a 19 cm × 13 cm-es oldal középpontján átmenő tengely körül forgatunk, akkor egy 13 cm oldalú négyzet lesz az oszlop alaplapja és 8 cm lesz az oszlop magassága. A közös rész térfogata $V_1 = 13^2 \cdot 8 = 1352$ (cm³).



- Ha a 19 cm × 8 cm-es oldal középpontján átmenő tengely körül forgatunk, akkor egy 8 cm oldalú négyzet lesz az oszlop alaplapja és 13 cm lesz a magassága. Az oszlop térfogata $V_2 = 8^2 \cdot 13 = 832$ (cm³).



- Ha a 13 cm × 8 cm-es oldal középpontján átmenő tengely körül forgatunk, akkor egy 8 cm oldalú négyzet lesz az oszlop alaplapja és 19 cm lesz a magassága. Az oszlop térfogata $V_3 = 8^2 \cdot 19 = 1216$ (cm³).



A legnagyobb térfogatot tehát akkor kapjuk, ha a 19 cm × 13 cm-es oldal középpontján átmenő tengely körül forgatunk.

F 19. * a) Öt szaporodási ciklus van évente, azaz 2,4 hónaponként egy. Viszont 3 hónapos az élettartam, tehát minden moly életében csak egyszer szaporodik. Minden nőstény 150 petéjéből marad $\frac{1}{3}$ rész, azaz 50, amiből 25 nőstény, így minden szaporodáskor a születendő molyok száma épp 25-szöröse a szülőkének.
Egy-egy szaporodást követően még 0,6 hónapig együtt él a két generáció, aztán a szülők elpusztulnak. Így az *újszülött* molyok száma egy 2 kezdőtagú, 25-ös hányadosú mértani sorozat szerint növekszik, amelynek időciklusa 2,4 hónap, és a szaporodást követő 0,6 hónapig a molyok *összlétszáma* e mértani sorozat aktuális utolsó két tagjának összege. Tehát kezdetben ($t = 0$ időpontban) van $a_1 = 2$

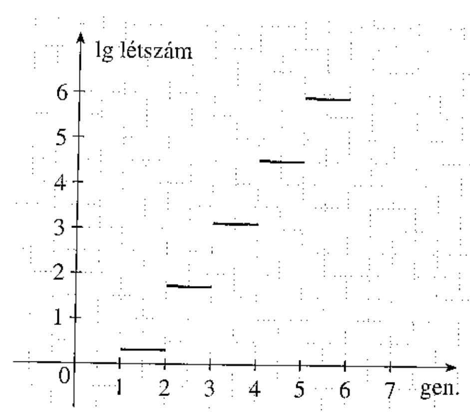
moly. Aztán $t = 2,4$ hónap múlva megszületik $a_2 = 50$ újabb moly, és $t = 3$ hónap időpontig $a_1 + a_2 = 52$ moly van. Ekkor csökken a molyok száma 50-re, majd $t = 4,8$ hónap időpontban megszületik $a_3 = 1250$ moly, és a $t = 5,4$ hónap időpontig $a_2 + a_3 = 1300$ moly van. Ezután a $t = 7,2$ hónap időpontig 1250 molyt számlálhatunk. Ekkor születik $a_4 = 31\,250$ moly, és a $t = 7,8$ hónap időpontig $a_3 + a_4 = 32\,500$ moly alkotja a családot. Innen a $t = 9,6$ hónapos időpontig 31 250 a létszám. Ekkor születik $a_5 = 781\,250$ moly, és így a $t = 10,2$ hónap időpontig $a_4 + a_5 = 812\,500$ moly zizeg, onnantól „csak" 781 250. És végül a $t = 12$ hónap időpontban születik újabb $a_6 = 19\,531\,250$ moly, vagyis az összlétszám ekkor $a_5 + a_6 = 20\,312\,500$.

b) Az a_1, a_2, a_3, a_4 létszámú moly-generációk teljes 3 hónapos élete „belefér" az 1 évbe, míg az a_5 létszámú generáció csak 2,4 hónapot, azaz élete 0,8 részét éli le a kérdéses évben. Így összes gyapjúfogyasztásuk:

$$20 \text{ mg} \cdot (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 0,8a) =$$
$$= 20 \text{ mg} \cdot 2 \cdot (25 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + 0,8 \cdot 25^5) =$$
$$= 20 \text{ mg} \cdot 50 \cdot \left(\frac{25^5 - 1}{25 - 1} - 0,2 \cdot 25^4\right) = 1000 \text{ mg} \cdot (406\,901 - 78\,125) =$$
$$= 1000 \text{ mg} \cdot 328\,776 = 328\,776\,000 \text{ mg} \approx 328,8 \text{ kg}.$$

(A c) feladatrész csak a feladatgyűjtemény 2005 előtti kiadásaiban található meg!)

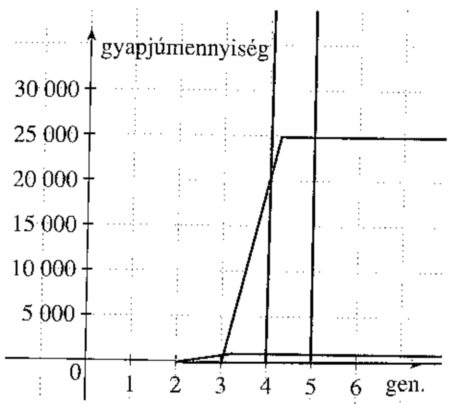
c) Lássuk először a létszámokat. Mivel mindig 2,4 hónaponként születnek az új molyok, ezért a $k \cdot 2,4$ időpontokban ($k \in \mathbf{N}$) $2 \cdot 25^k$-nal nő a létszám, de a $k \cdot 2,4 + 0,6$ időpontokban viszont $2 \cdot 25^{k-1}$-nel csökken. Tehát a $[k \cdot 2,4; k \cdot 2,4 + 0,6[$ intervallumokon $2(25^k + 25^{k-1})$ a létszám, a $[k \cdot 2,4 + 0,6; (k + 1)2,4[$ intervallumokon viszont csak $2 \cdot 25^k$. (Ráadásul $k = 0$ esetén kivétel van, mert [0; 2,4[-ben végig 2

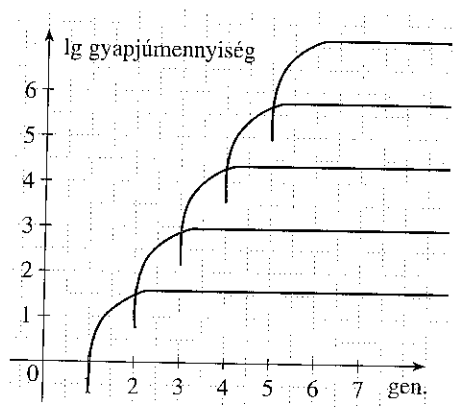


a létszám.) Transzformálva az időt a generációk sorszámává (megengedve a *nem egész* sorszámot is, mint a *folyamatosan* múló idő egyfajta mérőjét), osztanunk kell a megkapott intervallumokat 2,4-del, majd a függvényértékekben minden k helyébe $k - 1$-et kell írnunk, hogy az időmérés az 1. generációval kezdődjék. Így tehát a $[k; k + 0,25[$ intervallumokon $2(25^{k-1} + 25^{k-2})$ a létszám, a $[k + 0,25; k + 1[$ intervallumokon pedig $2 \cdot 25^{k-1}$, ahol $k \in \mathbf{N}^+$. Kivételt képez az [1; 2[intervallum, ahol végig 2 a létszám. (Ha a függvényértékeknek végig az egészrészét vesszük, akkor ez a kivétel elkerülhető.) Bár nem kérdés, de tanulságos ezen létszám-függvény grafikonja; a mértani sorozat szerinti növekedés miatt természetesen logaritmikus függőleges skálával, csak az első évben.

Térjünk át a gyapjúevésre. Tegyük fel, hogy az adott létszámok saját 3 hónapos (azaz a generációs skálán $\frac{3}{2,4} = 1,25$ generációs) élettartamuk alatt időarányosan falják fel a fejenként 20 mg gyapjút. Tehát $[k; k+1,25[$-ban az intervallum kezdetén született generáció minden tagja $\frac{20 \text{ mg}}{1,25} \cdot (x-k)$ gyapjút eszik meg. E generáció $2 \cdot 25^{k-1}$ tagú, tehát összfogyasztása élete során (a „mg" jelölést innentől elhagyjuk): $16 \cdot (x-k) \cdot 2 \cdot 25^{k-1} = 32 \cdot (x-k) \cdot 25^{k-1}$. Ha a generáció kipusztul, több gyapjút már nem fogyaszt, de az addig megevett mennyiség konstans tagként a későbbi összegekben továbbra is szerepel. E konstansok rendre az egyes generációk esetében: 40, 1000, 25000 – általánosan a k. generáció esetén $32 \cdot 1,25 \cdot 25^{k-1} = 40 \cdot 25^{k-1}$.

Az egyes generációk által megevett mennyiséget ábrázoltuk is – előbb lineáris skálán, de ezen a nagyon eltérő meredekségek miatt nem sok látszik; majd logaritmikus skálájú rendszerben. Ezeket a részeredményeket kell összegezni.





A $[k; k+0,25[$ intervallumokon a korábban kihalt generációk konstansai és a még élő 2 generáció lineáris összefüggései adódnak össze:

$40 \cdot (1 + 25 + \ldots + 25^{k-3}) + 32 \cdot (x-(k-1)) \cdot 25^{k-2} + 32 \cdot (x-k) \cdot 25^{k-1} =$

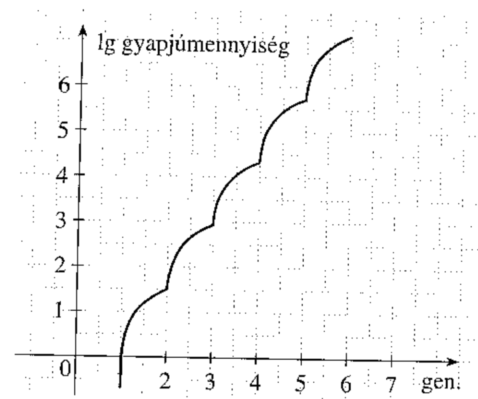
$= 40 \cdot \frac{25^{k-2}-1}{25-1} + 32 \cdot 25^{k-2} \cdot \{(x-(k-1)) + (x-k) \cdot 25\} =$

$= \frac{5}{3}(25^{k-2}-1) + 32 \cdot 25^{k-2} \cdot (26(x-k)+1).$

A $[k+0,25; k+1[$ intervallumokon pedig a korábban kihalt generációk konstansai és a még élő 1 generáció lineáris összefüggése adódik össze:

$40 \cdot (1 + 25 + \ldots + 25^{k-2}) + 32 \cdot (x-k) \cdot 25^{k-1} =$

$= 40 \cdot \frac{25^{k-1}-1}{25-1} + 32 \cdot 25^{k-1} \cdot (x-k)$, amit az előző eredményhez való nagyobb formai hasonlóság kedvéért $\frac{5}{3}(25^{k-1}-1) + 32 \cdot 25^{k-2} \cdot 25(x-k)$ alakban írhatunk. Kivétel a fentiek alól az $[1; 2[$ intervallum, ahol végig: $32 \cdot (x-1)$ a képlet. Lássuk e grafikont is, illetve persze megint csak az első évet, logaritmikus függőleges tengellyel.



8.G. Hetedik feladatsor

I. rész

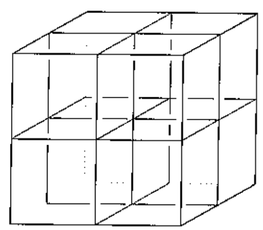
G 1. x db 5 Ft-os és x db 10 Ft-os értéke együttesen 210 Ft.
$5x + 10x = 210 \Rightarrow x = 14$
Tehát 14 db 5 Ft-os és 14 db 10 Ft-os érmére van szükségünk.

G 2. A legnagyobb 2-hatvány, amely kisebb 11-nél, a 8. Elosztjuk ezért vele, majd a maradékokat az egyre kisebb hatványokkal, és a hányadosokat sorban leírjuk. Így $11 = 1011_2$.

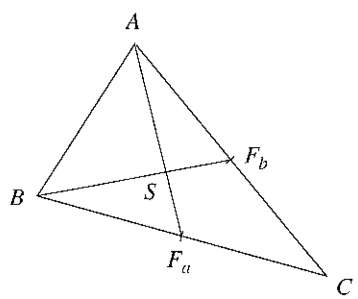
$11 : 8 = 1$
$3 : 4 = 0$
$3 : 2 = 1$
$1 : 1 = 1$

G 3. A függvény zérushelyét a $\lg x = 2$ egyenletből határozhatjuk meg: $x = 100$.

G 4. A legkisebb a kétszer akkora oldalélű kocka, amely felépíthető egybevágó kockákból. Minden kocka hasonló, és a térfogatok arányát a hasonlóság arányának köbe adja meg. Ekkor a nagy kocka $2^3 = 8$-szor akkora térfogatú, mint a kicsik, vagyis 8 db kisebb kockából építhető fel.



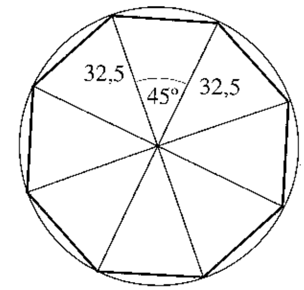
G 5. A háromszög súlypontját megkaphatjuk két súlyvonalának metszéspontjaként is.



G 6. Az $x^2 - 5x - 14 = 0$ egyenlet gyökei: 7 és −2. Tehát olyan másodfokú egyenletet kell felírnunk, melynek gyökei: 9 és 0. Ilyen másodfokú egyenlet pl: $x(x - 9) = 0$.

G 7. a) $H_1 = \{2; 3; 7\}$, $H_2 = \{2; 3; 5\}$
b) $H_1 \cap H_2 = \{2; 3\}$, $H_1 \cup H_2 = \{2; 3; 5; 7\}$

G 8. A legkevesebb hulladékot akkor kapjuk, ha egy, a körlapba írható, szabályos nyolcszöget vágunk ki.
A nyolcszög oldalhossza:
$2 \cdot 32{,}5 \cdot \sin 22{,}5°$, ami kb. 24,9 cm.



G 9. A Thalész-tétel miatt a derékszögű háromszög köré írt kör sugara az átfogó fele, tehát az átfogó most 6 cm. Ekkor a 4,8 cm-es befogóval szemközti hegyesszög szinusza: $\frac{4{,}8}{6} = 0{,}8$, amiből ez a hegyesszög kb. 53,13°.
A másik hegyesszög ennek pótszöge: $90° - 53{,}13° = 36{,}87°$.

Megjegyzés:
Ez a háromszög hasonló a klasszikus pitagoraszi 3, 4, 5 oldalhosszúságú alapháromszöghöz, annak 1,2-szeres nagyítású képe.

G 10. Írjuk az egyes betűk helyére, hogy a kiválasztott betűhöz hány különböző úton juthatunk el a megadott feltételek mellett:

1	1	1	1		
1	2	3	4		
1	3	6	10		
			10	10	10
			10	20	30

A HATÁROZOTT szó tehát 30-féleképpen olvasható ki a feladat ábrájából.

G 11. Minden egyes év elteltével 1,075-szeresére nő a bankban nyilvántartott összeg, tehát a d) válasz a helyes.

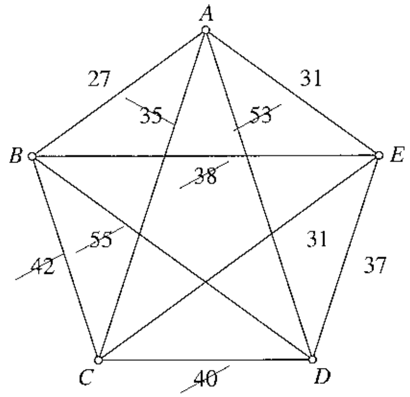
G 12. a) Hamis. (Pl. a −1, 0, 1 adathalmaz mediánja 0, de szórása kb. 0,816.)

b) Igaz. (Ha a legkisebb és a legnagyobb adat egyenlő, akkor mindegyik egyenlő, így a szórás persze 0.)

c) Igaz. (Ha a szórás 0, akkor minden adat egyenlő az átlaggal, tehát egymással is, így a terjedelem 0.)

II./a rész

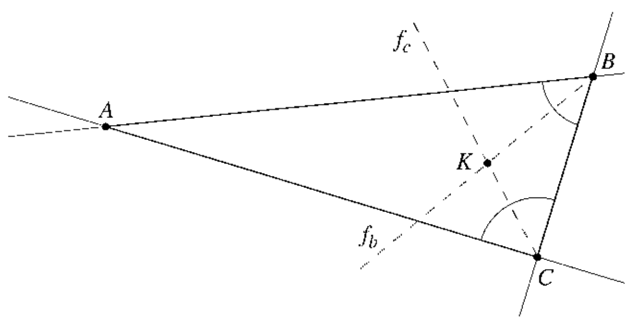
G 13. Ábrázoljuk az irodákat egy gráf csúcsaiként, az összeköttetéseket pedig értékkel rendelkező élekként. Cél, hogy a lehető legkisebb értékösszegű élekkel még összefüggő gráfot hozzunk létre. A legkevesebb élet tartalmazó, még összefüggő gráf a fa, így elég 4 élet meghagynunk. Az nem biztos, hogy a 4 legolcsóbb él összefüggő gráfot eredményez, ezért a teljes gráfból kiindulva mindig azt a legdrágább élet töröljük, amitől még nem „esik szét” a gráf. Ez az 55, 53, 42, 40, 38 értékű élek törlésekor még teljesül. A következő legdrágább él a 37-es lenne, de ennek törlésekor a D pont izolálódna, így ezt meg kell hagynunk, és helyette a következő értékűt, a 35-öst törölnünk, mert ettől még összefüggő marad a gráf. Ekkor a maradék 4 él értékei: 37, 31, 31, 27. A legolcsóbb, még összefüggő hálózat tehát az ED, EC, EA, AB élek megépítésével hozható létre.



G 14. a) Ha az első díj x Ft, akkor a második a feltétel szerint $\frac{3x}{4}$, míg a harmadik $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}x = 0,5x$. Mivel összesen 1 800 000 Ft van: $x+\frac{3x}{4}+\frac{x}{2}=\frac{9x}{4}=1800000$, ahonnan $x = 800\,000$.
Tehát az első díj 800 000 Ft, a második 600 000 Ft, míg a harmadik 400 000 Ft.

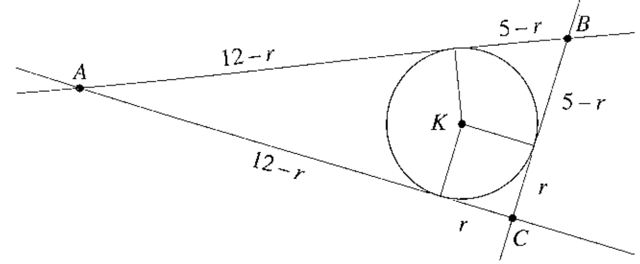
b) Ha 8 pályázó van, akkor az elsőre 8, a másodikra 7, a harmadikra 6 lehetőség van, tehát $8\cdot7\cdot6 = 336$-féle díjazás lehetséges. (Ki kell választani 8-ból 3-at, és a sorrend is számít, nem mindegy, hogy melyik díjat kapjuk, azaz variációról van szó.)

G 15. a) A megadott méretarány szerint a rajz 1 cm-es távolsága a valóságban 200 000 cm, vagyis 2 km. A három útkereszteződés tehát egy olyan háromszög három csúcsa lesz a rajzon, amelynek oldalai 2,5 cm, 6 cm, illetve 6,5 cm hosszúak (ábra ABC háromszöge).



Az üzletközpont helyét (K) a megszerkesztett háromszög beírt körének középpontja, azaz valamelyik két belső szögfelező metszéspontja adja meg.

b) A legrövidebb bekötőutakat a K-ból az egyes útszakaszokra állított merőleges szakaszok jelölik ki.
Ezek éppen a háromszög beírt körének egy-egy sugarával egyenlők, ezért a sugár hosszát kell meghatározni.
A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt az ABC háromszög derékszögű, hiszen igaz, hogy $12^2+5^2=13^2$.



A külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlőségét felhasználva adódnak az ábrára írt távolságok. Az átfogó: $13 = 5-r+12-r$; tehát
$r=\frac{12+5-13}{2}=2$ (km).
Az építendő bekötőutak összhossza 6 km.

Megjegyzés:

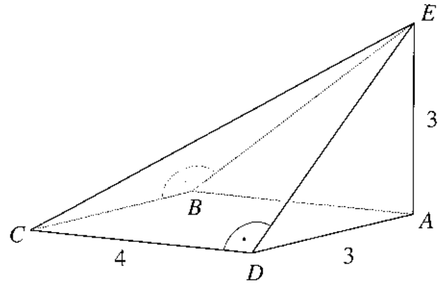
Trigonometria alkalmazásával: $BC = r + r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, ahonnan $r=\frac{BC}{1+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$.

Mivel $BC = 5$ (km) és $\frac{\beta}{2}\approx 33,69°$, ezért $r \approx 2,00$ (km).

G 16. A limonádéba dobott jéggömbök együttes térfogata:
$3\cdot\frac{4\pi\cdot 0,5^3}{3}=0,5\pi\approx1,57$ (cm³).
A folyadékszint 1 mm-rel történő megemelkedéséhez $3^2\pi\cdot0,1=0,9\pi\approx2,83$ (cm³) térfogat növekedés szükséges (ennyi a 6 cm alapkör átmérőjű, 1 mm magas henger térfogata). A jéggömbök még teljes bemerülésük esetén sem szorítanának ki ennyi folyadékot, tehát a limonádé nem csordul ki a pohárból.

II./b rész

G 17. a) Lásd az ábrát!



b) Az $ABCD$ téglalap területe 12 cm². Az ADE egyenlő szárú derékszögű háromszög területe 4,5 cm². Az ABE derékszögű háromszög területe 6 cm²; a háromszög BE átfogója Pitagorasz-tétellel 5 cm-nek adódik, így a BCE derékszögű háromszög területe 7,5 cm². A DE szakasz hossza az ADE egyenlő szárú derékszögű háromszögből $3\sqrt{2}$ cm, így a DCE derékszögű háromszög területe $6\sqrt{2}$ cm² (kb. 8,49 cm²).

A gúla felszíne: $12 + 4,5 + 6 + 7,5 + 6\sqrt{2} = 30 + 6\sqrt{2} \approx 38,49$ (cm²).

c) A gúla alaplapja az $ABCD$ téglalap, magassága az AE él hosszával egyenlő, ezért térfogata $\frac{12 \cdot 3}{3} = 12$ (cm³).

d) Az AE él merőleges az alaplapra, tehát az alapsíkkal bezárt szöge 90°.
A BE él alaplapra eső merőleges vetülete AB, ezért az alapsíkkal bezárt szöge éppen az ABE derékszögű háromszög B csúcsánál fekvő szöge.

$\operatorname{tg} ABE\sphericalangle = \frac{AE}{AB} = \frac{3}{4} = 0,75$, tehát $ABE\sphericalangle \approx 36,87°$.

A DE él alaplapra eső merőleges vetülete AD, ezért az alapsíkkal bezárt szöge éppen az ADE egyenlő szárú derékszögű háromszög D csúcsánál fekvő szöge: 45°.
A CE él alaplapra eső merőleges vetülete AC, ezért az alapsíkkal bezárt szöge az ACE derékszögű háromszög C csúcsánál fekvő szöge. Mivel AC az alaplap átlója, így hossza Pitagorasz-tétellel 5 cm-nek adódik.

Tehát $\operatorname{tg} ACE\sphericalangle = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5} = 0,6$. Ebből $ACE\sphericalangle \approx 30,96°$.

G 18. a) $h(0) = 0,8 \cdot 10^{0,02 \cdot 0} = 0,8 \cdot 10^0 = 0,8$ (mm);
$d(0) = 0,9 \cdot 10^{0,015 \cdot 0} = 0,9 \cdot 10^0 = 0,9$ (mm).

b) Az első hajtás növekedése:

$h(24) - h(0) = 0,8 \cdot 10^{0,02 \cdot 24} - 0,8 = 0,8 \cdot 10^{0,48} - 0,8 \approx 1,62$ (mm),
a másodiké pedig:
$d(24) - d(0) = 0,9 \cdot 10^{0,015 \cdot 24} - 0,9 = 0,9 \cdot 10^{0,36} - 0,9 \approx 1,16$ (mm).

c) Ahhoz, hogy megtudjuk mennyi idő alatt éri el az első hajtás hossza az 1 cm-t (10 mm-t), meg kell oldanunk a $0,8 \cdot 10^{0,02x} = 10$ exponenciális egyenletet.
$10^{0,02x} = 12,5 \Leftrightarrow 0,02x = \lg 12,5 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 12,5}{0,02} \approx 54,8\,(\text{óra})$
A második hajtás esetén a szükséges időtartamot a $0,9 \cdot 10^{0,015y} = 10$ egyenlet megoldása adja: $y \approx \frac{\lg 11,11}{0,015} \approx 69,7$ (óra).
Az első hajtás hossza hamarabb lesz 1 cm, mint a másodiké.

G 19. a) Az előkert területe 80 m². A füvezett sáv T területe a két virágágy t területének másfélszerese. Így felírható: $t + 1,5t = 80$. Ebből a virágágyak területe 32 m², a füvezett sáv területe: 48 m².
A sáv szélessége x m.
Az előkert méreteit figyelembe véve $2x < 8$ és $3x < 10$, tehát $x < \frac{10}{3}$.
A füvezett sáv területe felírható pl. így: $2 \cdot 10x + 3 \cdot (8 - 2x)x = 48$.
A $3x^2 - 22x + 24 = 0$ egyenlet megoldása $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 6$.
Figyelembe véve, hogy $0 < x < \frac{10}{3}$, az $x = \frac{4}{3} \approx 1,33$.
Tehát a fűsáv szélessége 1,3 m.

b) Az 1 kg fűmag nem elegendő a bevetésére, mert a füvezett rész területe 48 m².

8.H. Nyolcadik feladatsor

I. rész

H 1. A gép értéke eredetileg x Ft, a 10%-os csökkenés után $0{,}9x$ Ft. Az új tulajdonos megveheti $0{,}75 \cdot 0{,}9x = 0{,}675x$ forintért. Így az új tulajdonos az eredeti érték 67,5%-áért jutott a géphez.

H 2. $3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -9$ esetén lesz az $x \mapsto 3x^2 - 6x + c$, azaz az $x \mapsto 3x^2 - 6x - 9$ függvény egyik zérushelye -1.

H 3. Ha konvex sokszög oldalainak száma n, akkor átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$.

A feladat szövege szerint $n + \frac{n(n-3)}{2} = 153$. Ebből az $n^2 - n - 306 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, melynek -17 és 18 a megoldása.
A sokszög oldalszáma csak pozitív lehet, ezért csak 18-szögről lehet szó.

Ellenőrzés:

A konvex 18-szögnek $\frac{18 \cdot 15}{2} = 135$ átlója van, továbbá $18 + 135 = 153$ igaz, tehát a konvex sokszögnek valóban 18 oldala van.

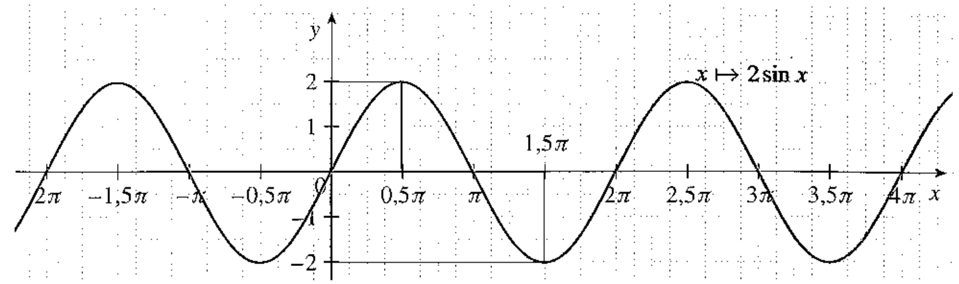
H 4. a) $\frac{76!}{74!} = \frac{76 \cdot 75 \cdot 74!}{74!} = 76 \cdot 75 = 5700$.

b) $73 \cdot 72! - \frac{74!}{74} = 73! - 73! = 0$.

H 5. Egy nap alatt egyedül egyikük a teljes munka $\frac{1}{8}$ részét, a másik az $\frac{1}{12}$ részét végezné el. Tehát ketten együtt 1 nap alatt $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$ részt végeznek el. A teljes munka elvégzésére $1 : \frac{5}{24} = \frac{24}{5} = 4{,}8$ nap kell nekik. Tehát az ügyintézőknek igazuk van, nincs szükségük teljes 5 napra a munka elvégzéséhez.

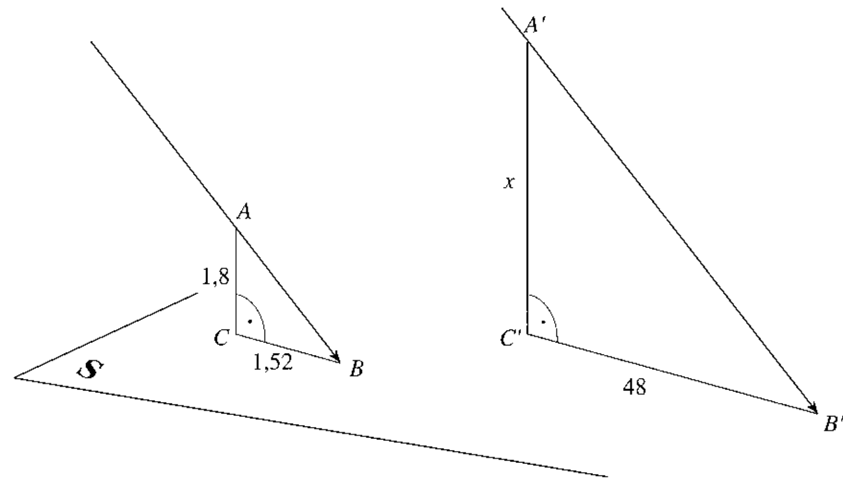
H 6. 400 MW $= 4 \cdot 10^8$ W, 24 óra $= 8{,}64 \cdot 10^4$ s, tehát egy nap alatt az erőmű $4 \cdot 10^8\ \mathrm{W} \cdot 8{,}64 \cdot 10^4\ \mathrm{s} = 34{,}56 \cdot 10^{12}$ Ws ($34{,}56 \cdot 10^{12}$ joule) energiát termel.
Helyes válasz: a).

H 7.



H 8. A feladatgyűjtemény ábráját használva
$\overrightarrow{EF} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{KB} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$; $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$; $\overrightarrow{KF} = -\mathbf{c}$.

H 9. Feltehetjük, hogy a napsugarak kis távolságon belül párhuzamosak.
Így $ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$. Mert két-két szögük egyenlő (egyállású szögek) $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő. Jelöljük a gyárkémény m-ben mért magasságát x-szel.
$\frac{x}{48} = \frac{1{,}8}{1{,}52} \Rightarrow x \approx 56{,}8$
Tehát a gyárkémény kb. 56,8 m magas.



H 10. A helyes válasz a „b".
A feladatgyűjteményben látható négyszög rombusz, melynek átlói merőlegesen felezik egymást. A hiányzó átló fele (x) Pitagorasz-tétellel számolható: $x^2 + 9^2 = 15^2$.
(Mivel x pozitív) $\Rightarrow x = 12$.
Így a rombusz területe (az átlók szorzatának a fele): $\frac{18 \cdot 24}{2} = 216$ (cm²).

H 11. Ha az első kísérlet abból áll, hogy egy szabályos érmét 210-szer dobunk fel és az A esemény az, hogy egy adott feldobásnál fejet dobunk, a második kísérletben pedig egy szabályos dobókockát 1150-szer dobunk fel és a B esemény az, hogy egy adott feldobásnál hatost dobunk, akkor világos, hogy az A esemény valószínűsége (0,5) nagyobb, mint a B eseményé (ami $\frac{1}{6}$).
Irénnek igaza van, hiszen a megadott információk alapján csak azt állítja, hogy a B esemény valószínűsége lehet kisebb, mint az A eseményé, de azt nem állítja, hogy ez biztosan így is van.

H 12. A két megadott alakzat (egyenes) közös pontjában van a fényforrás. A közös pont meghatározásához meg kell oldanunk a $2x - 8y = 2 \wedge 4x + y = 21$ egyenletrendszert: $x = 5 \wedge y = 1$.
A fényforrás az (5; 1) pontban van.

II./a rész

H 13. Tudjuk, hogy 18 DIN = 50 ASA.

a) A 24 DIN kétszer 3 DIN-nel több a 18 DIN-nél, ezért az 50 ASA értéket kétszer kell duplázni: 24 DIN = 200 ASA.
A 100 ASA éppen duplája az 50 ASA-nak, ezért a 100 ASA érzékenység DIN-ben mért értéke 3-mal több 18-nál, vagyis 100 ASA = 21 DIN.

b) A feladat szövege szerint :
(18 + 3) DIN = 50 · 2 ASA
(18 + 3 + 3) DIN = 50 · 2 · 2 ASA
(18 + 3 + 3 + 3) DIN = 50 · 2 · 2 · 2 ASA
⋮
(18 + 3x) DIN = 50 · 2^x ASA

Ha a DIN-ben megadott érzékenység d, akkor ezt $d = 18 + 3x$ alakban felírva $x = \frac{d-18}{3}$ adódik.

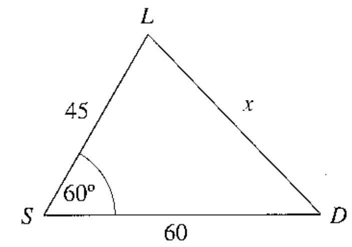
Tehát d DIN = $50 \cdot 2^{\frac{d-18}{3}}$ ASA.

H 14. a) A logaritmus definíciója szerint:
$T = 10^{0,8 \cdot \lg C + 1,2} = (10^{\lg C})^{0,8} \cdot 10^{1,2} \approx C^{0,8} \cdot 15,85.$
Vagy másképp: $15,85 \cdot \sqrt[5]{C^4}$.)

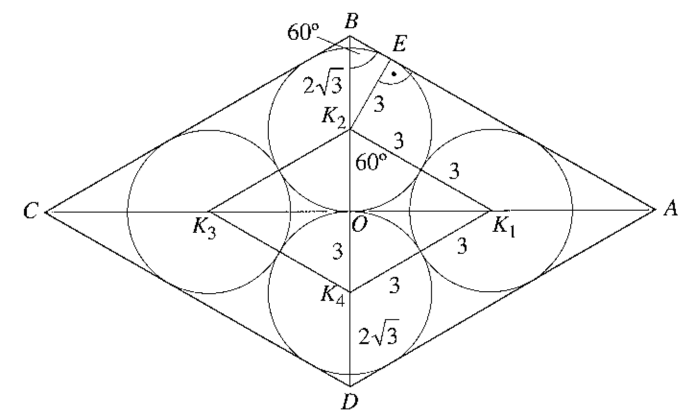
b) Az eredeti képlet mindkét oldalából kivonunk 1,2-et, és osztunk 0,8-del: $\frac{\lg T - 1,2}{0,8} = \lg C$, majd a 10-et felemeljük azon kitevőkre, amelyek az egyenlet két oldalán szereplő kifejezések: $10^{\frac{\lg T - 1,2}{0,8}} = 10^{(\lg T - 1,2)\cdot 1,25} = 10^{\lg C}$. Felhasználva a hatványozás és a logaritmus azonosságait: $C = \frac{T^{1,25}}{10^{1,2 \cdot 1,25}} \approx \frac{T^{1,25}}{31,62}$.

c) Ekkor C = 100 cm, behelyettesítve az a)-ban kapott képletbe:
$T = 15,85 \cdot 100^{0,8} \approx 631 \left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2 \cdot \text{év}}\right)$.

H 15. 15 másodperc alatt Laci 45 métert, Dani 60 métert tett meg. Távolságukat az SDL háromszögből koszinusztétellel is megkaphatjuk:
$x = \sqrt{45^2 + 60^2 - 2 \cdot 45 \cdot 60 \cdot \cos 60°} \approx$
$\approx 54,1$ (m).
A két fiú tehát kb. 54 méterre lesz egymástól.



H 16. A kedvezőbb ajánlatot az a vállalkozó adja, aki a csomagoláshoz kisebb felszínű dobozt használ.
Az első vállalkozó téglatest alakú dobozt választott. A téglatest egy csúcsából kiinduló három élének hossza rendre 24 cm, 6 cm, 6 cm, így a doboz felszíne
$4 \cdot 24 \cdot 6 + 2 \cdot 6^2 = 648$ cm².
A második vállalkozó egy rombusz alapú hasáb alakú dobozt ajánl; a hasáb magassága 6 cm. A doboz felszínének kiszámításához ismernünk kell a rombusz oldalhosszát.



A felülnézeti ábrán a 4 kör középpontja egy olyan $K_1K_2K_3K_4$ rombuszt határoz meg, amelynek minden oldala 6 cm és a rövidebb átlója is 6 cm, ezért ennek a rombusznak a hegyesszöge 60° nagyságú. Ebből következik, hogy az (ábra jelöléseit használva) $ABCD$ rombusz is két szabályos háromszögből rakható össze $\Rightarrow$ $OBA\sphericalangle = 60°$.
A K_2 körközéppontból merőlegest állítva AB-re olyan derékszögű háromszöget kapunk (BEK_2), amelyben $K_2E = 3$. Ez, a szabályos háromszög magasságáról tanultak szerint, $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese a BK_2 szakasznak, tehát az átfogó hossza: $BK_2 = 2\sqrt{3}$.
A rombusz oldala tehát: $AB = BD = 2\cdot 3 + 2\cdot 2\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{3} \approx 12{,}93$ (cm) hosszú, területe pedig $\frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{2} \approx 144{,}8$ (cm²).
A doboz oldallapjainak területe egyenként $6\cdot 12{,}93 \approx 77{,}6$ (cm²).
A rombusz alapú hasáb alakú doboz felszíne kb. $2\cdot 144{,}8 + 4\cdot 77{,}6 = 600$ (cm²).
A második vállalkozó ajánlata tehát kedvezőbb, mint az elsőé.

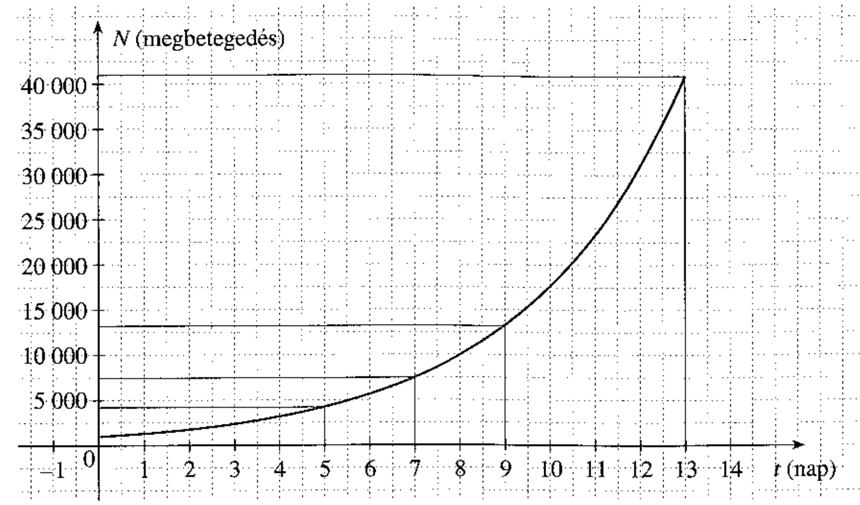
II./b rész

H 17. a) A szöveg alapján a képletben szereplő K és N_0 paraméterek értéke: 1 500 000, illetve 1000. Ezenkívül tudjuk, hogy $N(5) = 4205$.
Ebből kapjuk majd a értékét: $4205 = \frac{1\,500\,000\cdot 1000}{1000 + (1\,500\,000 - 1000)\cdot a^5}$, ahonnan
$1\,499\,000a^5 + 1000 = 356\,718{,}2$, ebből $a^5 = 0{,}2373$, és $a = 0{,}75$. Tehát valóban $a = 0{,}75$ (nem teljesen pontosan, de jó közelítéssel).

b) 7, illetve 13 nap múlva a képletbe helyettesítve (1000-rel való egyszerűsítés után):
$N(7) = \frac{1\,500\,000}{1 + (1500-1)\cdot 0{,}75^7} = 7459$, illetve $N(13) = \frac{1\,500\,000}{1 + (1500-1)\cdot 0{,}75^{13}} =$
$= 40\,970$ beteg várható a formula alapján.

c) Ez egy „inverz" kérdés: milyen t mellett lesz $N(t)$ éppen 13 210? Ismét 1000-rel való egyszerűsítés után: $\frac{1\,500\,000}{1 + (1500-1)\cdot 0{,}75^t} = 13\,210$, amiből
$113{,}55 = 1 + 1499\cdot 0{,}75^t$, majd $0{,}75^t = 0{,}075$, ahonnan $t = \frac{\lg 0{,}075}{\lg 0{,}75} = 9$.
Azaz a kilencedik napon várható ennyi beteg.

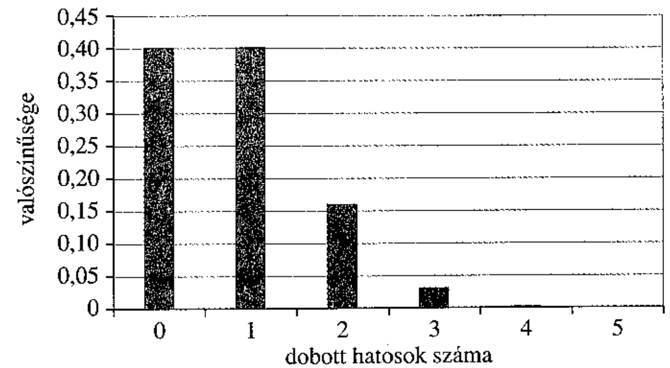
d) Az ábrázolandó függvény a [0, 13] intervallumon:



Megjegyzés:
Grafikus kalkulátorral vagy számítógéppel lehet ilyen szépen megadni a grafikont. Továbbá fontos, hogy a növekedés telítődik, 1 500 000 fölé nem mehet, tehát a növekedés később lelassul.

H 18. a)

k	0	1	2	3	4	5
$\binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$	0,402	0,402	0,161	0,032	0,003	0,000

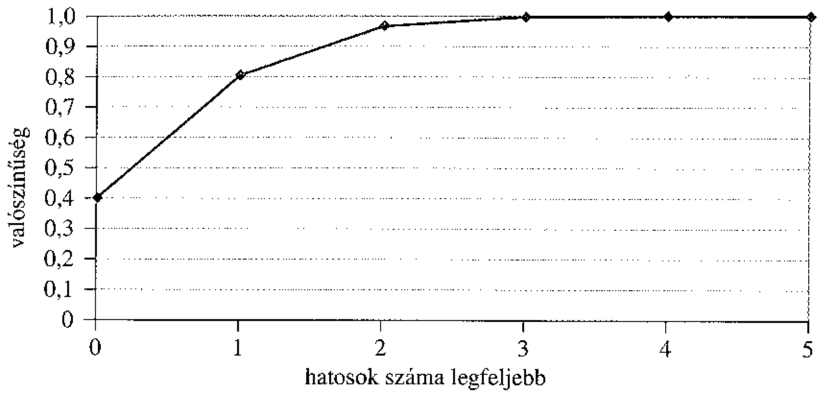


b) Az esemény akkor következik be, ha a k értéke 0, 1 vagy 2. Az előző táblázat alapján ennek valószínűsége kb. $0{,}402 + 0{,}402 + 0{,}161 = 0{,}965$.

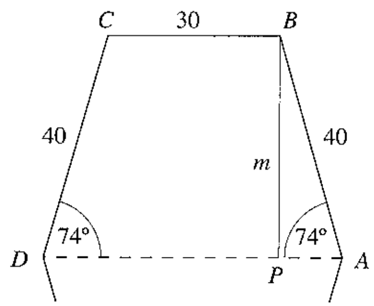
c)

A dobott hatosok száma legfeljebb	Valószínűsége
0	0,402
1	0,804
2	0,965
3	0,997
4	1,000
5	1,000

d)



H 19. a) A hatszög másik négy szöge 106°-os.
A hatszög területét megkaphatjuk az *ABCD* szimmetrikus trapéz területének kétszereseként is.
Az *APB* derékszögű háromszögből:
$m = 40 \cdot \sin 74° \approx 38{,}45$ (cm),
$AP = 40 \cdot \cos 74° \approx 11{,}03$ (cm).
A trapéz hosszabbik alapja
$30 + 2 \cdot 11{,}03 = 52{,}06$ (cm), ezért
területe $\dfrac{52{,}06 + 30}{2} \cdot 38{,}45$ cm².



A hatszög területe tehát $(52{,}06 + 30) \cdot 38{,}45 \approx 3155$ (cm²).

b) A „hordó" két egybevágó csonkakúpból tehető össze, tehát térfogata:
$2 \cdot \dfrac{38{,}45\pi}{3}(26{,}03^2 + 26{,}03 \cdot 15 + 15^2)$ cm³ $\approx$ 104 000 cm³ = 104 dm³, azaz kb. 104 liter. A hordószerű testbe kb. 104 liter bor tölthető.

c) Az adósnak legalább 6 hordó bort kell küldenie, hiszen $5 \cdot 155 < 846$. A hat hordó együttesen 930 liter bort tartalmaz, ezért, ha a második kereskedő visszaküld egy 84 literes teli hordót, akkor az adósság kifizettetett, hiszen $930 - 84 = 846$.

8.I. Kilencedik feladatsor

I. rész

I 1. a) Az állítás igaz. A páros számok általános alakja $2n$, $n \in \mathbf{Z}$.
Így $2n + 2k = 2(n + k)$. Ha n, illetve k egész számok, akkor $n + k$ is egész szám, így a két páros szám összege is osztható 2-vel, azaz páros.

Másik megoldás:
Ha egy összeg mindkét tagja osztható 2-vel, akkor az összeg is.

b) Az állítás igaz. A páros számok általános alakja $2n$, $n \in \mathbf{Z}$, a páratlan számok általános alakja $2k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$.
Így egy páros és egy páratlan szám összege: $2n + 2k + 1 = 2(n + k) + 1$, $n \in \mathbf{Z}$; $k \in \mathbf{Z}$, mivel $n + k$ is egész, a kapott összeg páratlan számot ad.

c) Az állítás hamis. Pl.: két egymás utáni páros szám a 2 és a 4. Ezek szorzata 8, nem osztható 6-tal.

I 2. Mivel $15 = 3 \cdot 5$, ezért a következő 9 db szám megfelel: 3, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

I 3. Ha az első zöldségesnél x Ft a krumpli kilója, akkor a másodiknál $x + 12$ Ft.
A szöveg alapján: $18x = 15(x + 12)$, amiből $x = 60$ adódik.
Az első zöldségesnél egy kg krumpli 60 Ft-ba, a másodiknál 72 Ft-ba kerül.

Ellenőrzés:
18 kg krumpliért az első zöldségesnél $18 \cdot 60 = 1080$ Ft-ot fizetünk; a második zöldségesnél ezért a pénzért valóban 15 kg krumplit vehetünk, hiszen $15 \cdot 72 = 1080$ is igaz.

I 4. $10^4 \cdot 1{,}05^4 \approx 1{,}216 \cdot 10^4$ (USD).

I 5. Számtani sorozat, melyre: $a_1 = 15$; $d = 1$; $n = 20 \Rightarrow S_n = 490$.
Tehát a teltházas előadás idején 490 néző lehet a moziban.

I 6. A háromszög *AB* oldala párhuzamos az x tengellyel, *BC* oldala pedig az y tengellyel. A háromszög tehát derékszögű, magasságpontja a derékszögű csúccsal, azaz a *B* csúccsal azonos: $M(-5; 3)$.

I 7. Legyen az eredeti kocka élhossza $2a$.
A kocka felszíne $24a^2$, a 8 db kis kocka felszíne pedig $8 \cdot 6a^2 = 48a^2$, tehát kétszerese az eredetiének.

I 8. Az egyenlőség nem igaz.

Mivel az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, így az egyenlőség jobb oldala negatív, a bal oldala (ha létezik ez az érték) pozitív, így az egyenlőség nem teljesülhet.

(Az egyenlőség bal oldala biztosan pozitív, mert az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedő volta miatt $5 = \sqrt{25} > \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$; és pozitív szám négyzetgyöke is pozitív.)

I 9. A d) válasz a helyes.

I 10. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) - f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

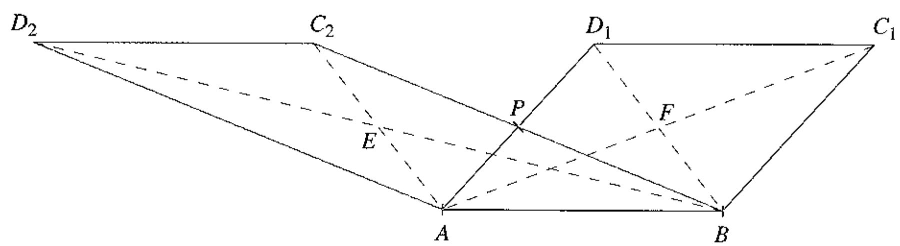
I 11. A 72°-os középponti szög a teljesszög egyötöde, így a hozzá tartozó ívhossz is a teljes kerület egyötöde, $i = \frac{90\,\text{cm}}{5} = 18\,\text{cm}$. (Felhasználtuk, hogy egy körben a középponti szög egyenesen arányos a hozzátartozó körív hosszával.)

I 12. Adott A, B és P.

A feladatnak két megoldása van.

1) Az A tükörképe P-re D_1, a BD_1 felezőpontja F, az A tükörképe F-re C_1.

2) B tükörképe P-re C_2, az AC_2 felezőpontja E, a B tükörképe E-re D_2.



A megszerkesztett paralelogrammák ABC_1D_1 és ABC_2D_2. Ezek egyik oldala AB és az egyik szomszédos oldal felezőpontja P.

II./a rész

I 13. a) A gép állandó sebességgel 1 perc alatt $\sqrt{(14-5)^2+(17-15)^2} = \sqrt{85} \approx$ $\approx 9{,}22$ (km) utat tett meg, ezért sebességének nagysága $9{,}22\ \frac{\text{km}}{\text{perc}} \approx 553\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) A gép elmozdulásvektora az első 1 percben $\mathbf{s}$ = (14; 17) – (5; 15) = (9; 2). Ha nem változik a sebességvektora, akkor a következő 1,5 percben $1{,}5\mathbf{s}$ = (13,5; 3) lesz az elmozdulásvektora, tehát a (14; 17) + (13,5; 3) = (27,5; 20) pontban lesz.

I 14. Átrendezve az egyenletet: $a^2b^2 - a^2c^2 = b^4 - c^4$.

Mindkét oldalt szorzattá alakítva: $a^2(b^2 - c^2) = (b^2 - c^2)(b^2 + c^2)$.

A bal oldalra rendezve, kiemelés után: $(b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2) = 0$.

Egy szorzat csak akkor lehet 0, ha egyik tényezője az. Ha $b^2 - c^2 = 0$, akkor (mivel háromszög oldalainak hosszáról, azaz pozitív mennyiségekről van szó) $b = c$, tehát a háromszög egyenlő szárú. Ha viszont $a^2 - b^2 - c^2 = 0$, akkor $a^2 = b^2 + c^2$, vagyis a háromszög egyik oldalának négyzete egyenlő a másik kettő négyzetének összegével, ez pedig a Pitagorasz-tétel, tehát a háromszög derékszögű. (Igaz, kissé szokatlan a betűzés, mert a az átfogó és b, c a befogók. Egyébként a két tulajdonság – egyenlő szár, derékszög – egyszerre is fennállhat.)

I 15. a) 2 dl = 200 cm³.

Egy narancs térfogata átlagosan $\frac{4\pi\cdot 3{,}5^3}{3} \approx 180$ cm³, ennek 56%-a kb. 101 cm³, tehát kb. két teljes narancs szükséges a 2 dl ivólé előállításához.

b) 1 liter ivóléhez kb. 10 db narancs szükséges, ezek együttes tömege kb. $\frac{10}{11}\cdot 2$ kg, ára pedig $\frac{10}{11}\cdot 2\cdot 200$ peták ≈ 364 peták.

c) A 2 dl előállításához szükséges narancs beszerzési ára kb. $\frac{364}{5}$ peták ≈ 73 peták, tehát erre 125 peták árrést számítanak fel. Ez a beszerzési ár $\frac{125}{73}\cdot 100 \approx 171\%$-a.

I 16. Mivel azt nem tudjuk, hogy a $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebesség előjele milyen (felfelé vagy lefelé mozog-e a kő), ezért két egyenletet is fel kell írnunk; igaz, megtehetjük egyben: $15 = (\pm 10 + 5t)t$. Rendezve: $5t^2 \pm 10t - 15 = 0$. A pozitív előjel esetén az egyenlet két gyöke $t = 1$ és -3; a negatív előjel esetén $t = 3$ és -1. A két negatív gyök értelmetlen (erre még visszatérünk), a pozitívakból viszont megtudtuk, hogy a követ (ha még felfelé repül) 1 másodperccel, illetve (ha már lefelé esik) 3 másodperccel ezelőtt lőtték ki a talajszintről.

Megjegyzés:

Eredményünk azt jelenti, hogy egy függőleges hajítás során azonos magasságban a még fel-, vagy a már lefelé mozgó test sebességének nagysága azonos, csak iránya ellenkező. Ezen szimmetria miatt egyébként a negatív gyökök azt a fizikai tartalmat hordozzák, hogy a földet érés majd 3, illetve 1 másodperc múlva következik be.

II./b rész

I 17. Számoljunk ezer forintos egységekkel!

a) Ha takarékba fektetett pénzünk évente x-szeresére nőtt, akkor $400x^2 = 552$.

Ebből (felhasználva, hogy $x > 0$) $x = \sqrt{\frac{552}{400}} \approx 1{,}1747.$

Az évenkénti gyarapodás mértéke tehát 17,47%-os volt.

b) Ha az első évben k-szorosára nőtt az összeg, akkor a második évben $k + 0{,}05$-szörösére. Ezért $k(k + 0{,}05) \cdot 400 = 552$, amiből a $k^2 + 0{,}05k - 1{,}38 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei a $-1{,}2$ és az $1{,}15$. Megoldásként csak a pozitív gyök jöhet számításba.

Az első évben elért kamatláb tehát 15% volt.

Ellenőrzés:

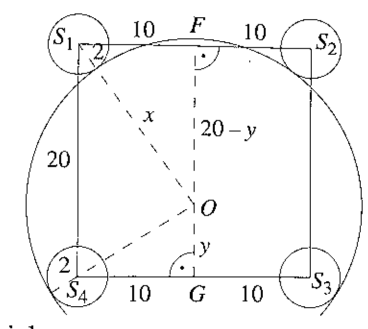
$400 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}2 = 400 \cdot 1{,}38 = 552$, ami megegyezik a feladat szövegében megadott értékkel.

c) Ha két évvel ezelőtt e forintot kellett fizetni azért az áruért, ami most 552 forintba kerül, akkor az évi 9%-os infláció miatt $1{,}09^2 e = 552$, amiből

$e = \frac{552}{1{,}09^2} \approx 464{,}6.$

Az 552 ezer forint annyit ér (annyi árut lehet belőle vásárolni), amennyit a 464,6 ezer forint ért (amennyi árut 464,6 ezer forintért lehetett vásárolni) két évvel korábban.

I 18. a) Legyen a körút sugarának hossza x méter.



A körút középpontja az $S_1S_2S_3S_4$ négyzet FG középvonalán, G-től y méterre van. Az érintkező körök középpontjának távolságáról tanultak miatt $OS_1 = x + 2$ méter, $OS_4 = x - 2$ méter.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az OFS_1, illetve az OGS_4 derékszögű háromszögre. A következő egyenletrendszert kapjuk:

$(x+2)^2 - (20-y)^2 = 10^2 \wedge (x-2)^2 - y^2 = 10^2.$

Ez ekvivalens a következővel:

$8x + 40y - 400 = 0 \wedge (x-2)^2 - y^2 = 100$, ahol az első egyenletet az egyenletrendszer két egyenlete különbségeként kaptuk.

$x = 50 - 5y \wedge (x-2)^2 - y^2 = 100$

$x = 50 - 5y \wedge (48 - 5y)^2 - y^2 = 100$

$x = 50 - 5y \wedge 24y^2 - 480y + 2304 = 100$

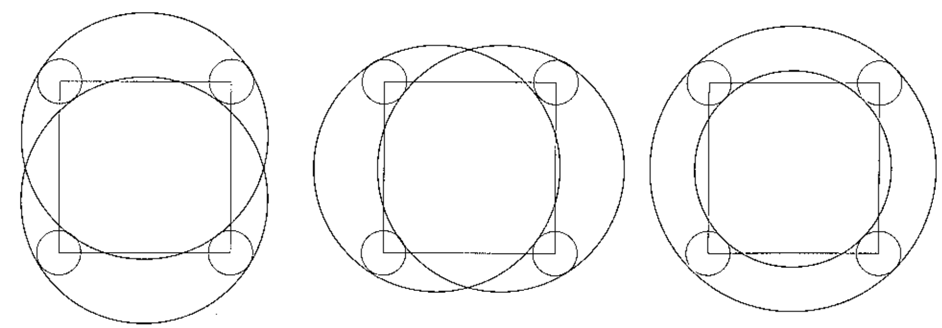
$x = 50 - 5y \wedge 3y^2 - 60y + 275{,}5 = 0$

A másodfokú egyenletből $y \approx 12{,}86$, illetve $y \approx 7{,}14$ adódik.

Mivel x nyilván pozitív, ezért csak az $y \approx 7{,}14$ lehet igaz, így $x \approx 50 - 5 \cdot 7{,}14 = 14{,}3$. A körút sugara tehát kb. 14,3 méter, hossza pedig $2\pi \cdot 14{,}3 \approx 90$ méter.

b) A legkisebb kerületű, megfelelő kör koncentrikus a négyzet körülírt körével, sugara a körülírt kör sugaránál 2 méterrel kisebb, azaz $10\sqrt{2} - 2$ méter ($\approx 12{,}14$ méter). A legrövidebb, adott tulajdonságú körséta hossza tehát $2\pi \cdot 12{,}14 \approx 76$ méter lenne.

c) Hatot.



I 19. Az 1000 darab egybevágó kis kockából épített nagy kocka éle 10-szer akkora, mint egy kis kocka éle.

a) Pontosan egy piros lapja azoknak a kis kockáknak van, amelyeknek van közös lapja a nagy kocka valamelyik lapjával, de nincs közös élük. Ezek száma $6 \cdot 8^2 = 384$, tehát a kérdezett valószínűség $\frac{384}{1000} = 0,384$.

b) Azoknak a kis kockáknak nincs piros lapja, amelyeknek nincs közös lapja a nagy kockával. Ezek a kis kockák egy olyan kockát alkotnak, amelynek éle egy kis kocka élének 8-szorosa. Tehát a festett lappal nem rendelkező kis kockák száma $8^3 = 512$.
A kérdezett valószínűség $\frac{512}{1000} = 0,512$.

8.J. Tizedik feladatsor

I. rész

J 1. Ha az intervallumot pl. a $\left]\frac{8}{24}; \frac{12}{24}\right[$ alakban írjuk fel, akkor könnyen megadható három megfelelő szám: $\frac{9}{24}; \frac{10}{24}; \frac{11}{24}$ (egyszerűsítés után: $\frac{3}{8}; \frac{5}{12}; \frac{11}{24}$).

Megjegyzés:
Mivel $]0,33; 0,49[\subset \left]\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[$, ezért megfelelő számhármas például a 0,34; 0,409; 0,4756 is.
A feladatnak végtelen sok megoldása van, itt csupán két ötletre hívtuk fel a figyelmet.

J 2. Az első prím, a 2, páros, mindegyik más pedig páratlan. Ezért az első 100 prím szorzata is páros. Összegükben pedig a 99 páratlan szám összege páratlan, ehhez hozzáadva az egy párosat, a végeredmény is páratlan lesz.

J 3. 5000 sejtből indulunk, 2 nap múlva 10 000 lesz, 4 nap múlva 20 000, s így tovább 16 nap múlva 8 duplázódáson lesznek túl, azaz $5000 \cdot 2^8 = 5000 \cdot 256 = 1\,280\,000$ sejt lesz 16 nap múlva.

J 4. [A Betelgeuze átmérője kb. ötszázmillió km, sűrűsége kb. $10^{-6}\ \frac{g}{cm^3}$.]
$r = 2,5 \cdot 10^8$ km $= 2,5 \cdot 10^{13}$ cm, ezért a csillag térfogata kb. $4,2 \cdot (2,5 \cdot 10^{13})^3 = 4,2 \cdot 15,6 \cdot 10^{39} = 6,6 \cdot 10^{40}$ (cm3).
A csillag tömege kb. $6,6 \cdot 10^{40} \cdot 10^{-6}$ g $= 6,6 \cdot 10^{34}$ g $= 6,6 \cdot 10^{31}$ kg.
A Betelgeuze tömege tehát kb. $6,6 \cdot 10^{31}$ kg.

Megjegyzés:
A Betelgeuze átmérője, így sűrűsége sem állandó.

J 5. A tízes alapú logaritmus definíciója alapján $m = \lg 2^p$, ami a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság alapján így is írható: $m = p \cdot \lg 2$.

J 6. Kiemelés után: $x^2(x^2+5x-6)=0$.
Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha a tényezői között van nulla:
$x^2=0 \lor x^2+5x-6=0$
$x=0 \lor x=-6 \lor x=1$
A megoldáshalmaz: $M=\{-6;0;1\}$.

J 7. Értelmezési tartomány: $]-1;6]$;
értékkészlet: $[-3;1]$;
zérushely: 5;
minimumhely: 2, a minimum értéke: -3;
maximumhely: 6, a maximum értéke: 1.

J 8. A P csúcsú derékszög szárai a kör egy átmérőjének végpontjaiban metszik a kört (Thalész-tétel). A kör átmérője tehát 5 cm hosszú (Pitagorasz-tétellel).
A legnagyobb rész területe egy félkör és egy derékszögű háromszög területének összegével egyenlő: $t=\dfrac{2,5^2\pi}{2}+\dfrac{3\cdot 4}{2}\approx 15,82$ (cm²).

J 9. A „jó" választások száma $\binom{4}{2}=6$, az összes választások száma $\binom{6}{2}=15$.
Mivel az esetek egyenlően valószínűek, a kérdezett valószínűség $\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}=0,4$, vagyis 40%. A d) válasz a helyes.

J 10. Az AB szakasz F felezőpontjában állítsunk merőlegest AB-re (m). Az F középpontú, FA sugarú körrel alkotott metszéspontjainak egyike (C) megfelel a háromszög harmadik csúcsaként (a Thalész tétel miatt ugyanis a háromszög C-nél derékszögű, s mivel C rajta van az AB felezőmerőlegesén, ezért egyenlő szárú is).

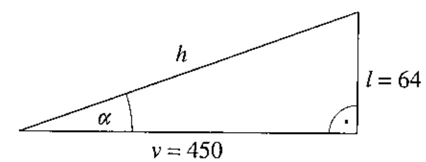
J 11. A megadott egyenes egyenlete írható így is: $3x-5y=-7$, tehát egyik normálvektora a $(3;-5)$ vektor. A keresett merőleges egyenes egyik normálvektora tehát $(5;3)$, így egyenlete: $5x+3y=5\cdot(-2)+3\cdot 3$, vagyis $5x+3y=-1$.

J 12. Felhasználva a hatványozás azonosságait: $\dfrac{1}{3}\cdot 3^x+3^x+3\cdot 3^x=39$.
Kiemelés után: $3^x\left(\dfrac{1}{3}+1+3\right)=39$, közös nevezőre hozva: $3^x\cdot\dfrac{13}{3}=39$.
Osztva $\dfrac{13}{3}$-dal: $3^x=\dfrac{39\cdot 3}{13}=9$, azaz $x=2$.
Ellenőrzés:
$3+9+27=39$

II./a rész

J 13. Az autópályán megtehető legnagyobb távolság legyen x km.
A szöveg alapján útiköltségünk ekkor:
$10\cdot x+0,056\cdot 250\cdot x+0,064\cdot 250\cdot(1500-x)$.
Nem léphetjük túl a 29000 Ft-ot:
$10x+0,056\cdot 250x+0,064\cdot 250\cdot(1500-x)\le 29\,000$
$10x+14x-16x+24\,000\le 29\,000$
$8x\le 5000$
$x\le 625$
Legfeljebb 625 km-t haladhatunk autópályán.
Ellenőrzés:
Ha pontosan 625 km-t teszünk meg autópályán, akkor összköltségünk így alakul:
– autópálya díj: 6250 Ft;
– üzemanyag autópályán: 8750 Ft;
– üzemanyag egyéb úton: 14 000 Ft.
Ez összesen 29 000 Ft.
Ha 625 km-nél kevesebbet megyünk autópályán, akkor km-enként 10 Ft-ot spórolunk az autópálya díjon, üzemanyagköltségünk azonban csak $0,008\cdot 250=2$ Ft-tal növekszik, tehát a 29 000 Ft elegendő.
Ha 625 km-nél többet megyünk autópályán, akkor (az előbb kiszámítottak szerint) km-enként 8 Ft-tal többet kell fizetni a 29 000 Ft-on felül, tehát kevés lenne a pénzünk.

J 14. a) Pitagorasz tételéből:
$h^2=64^2+450^2$,
$h\approx 455$ m.



b) $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{64}{450}\ \Rightarrow\ \alpha\approx 8,1°$
Az adatok méter pontosságúak, s a kisebb pontosságú adat két értékes jegyet tartalmaz, ezért α-t is ilyen pontossággal határozhatjuk meg.

Megjegyzés:
Az adatokat kerekítettnek vehetjük.
Így $63,5\le l<64,5$, illetve $449,5\le v<450,5$. Ezért
$\dfrac{63,5}{450,5}<\mathrm{tg}\alpha<\dfrac{64,5}{449,5}$
$8,023°<\alpha<8,166°$
Tehát indokolt α-t 8,1°-nak venni.

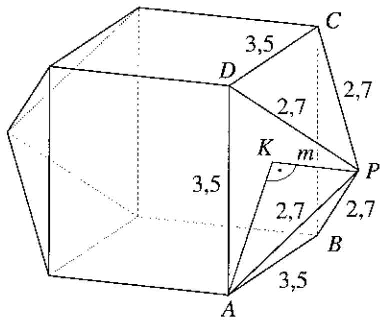
J 15. a) A nehezék összerakható egy 3,5 cm élű kockából és két olyan egybevágó négyoldalú szabályos gúlából, amelyeknek alapéle 3,5 cm, oldaléle pedig 2,7 cm hosszú.

A kocka térfogata:

$3{,}5^3$ cm³ = 42,875 cm³.

A gúlák alapterülete:

$3{,}5^2$ cm² = 12,25 cm², magasságukat pedig az ábra AKP háromszögéből Pitagorasz-tétellel kapjuk. Mivel K az $ABCD$ négyzet középpontja, ezért $AK = \dfrac{3{,}5\sqrt{2}}{2}$ cm.



$$m^2 = 2{,}7^2 - \left(\frac{3{,}5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1{,}165, \text{ ezért } m \approx 1{,}08 \text{ cm}.$$

A két gúla együttes térfogata: $2 \cdot \dfrac{12{,}25 \cdot 1{,}08}{3}$ cm³ = 8,82 cm³.

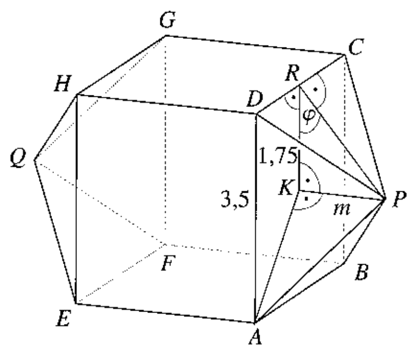
Az üvegtest térfogata tehát kb. 42,88 + 8,82 = 51,7 cm³ = $5{,}17 \cdot 10^{-5}$ m³, így tömege $5{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot 2500$ kg ≈ $1{,}293 \cdot 10^{-1}$ kg (másként: kb. 12,9 dkg).

b) Például a $CDHG$ négyzetlap és a CDP háromszöglap szöge az ábra PKR derékszögű háromszögének φ hegyesszögénél 90°-kal nagyobb (R a DC él felezőpontja). KR hossza a kocka élhosszának a fele, azaz 1,75 cm.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{KP}{KR} \approx \frac{1{,}08}{1{,}75} \approx 0{,}617, \text{ tehát}$$

$\varphi \approx 31{,}7°$.

Az üvegtest négyzetlapja és a hozzá élben csatlakozó háromszöglap 121,7°-os szöget zár be (a test belsejéből nézve). A többi lappár esetén ugyanekkora szög adódik.



Megjegyzés:

Az említett két lap síkjának hajlásszöge 90° – φ ≈ 58,3°.

J 16. a) A négyzetgyökök miatt teljesülnie kell: $-\dfrac{1}{6} \le x \wedge x \le \dfrac{2}{15}$.

Az egyenlet alaphalmaza tehát $A := \left[-\dfrac{1}{6};\ \dfrac{2}{15}\right]$.

Ezen a halmazon a megadott egyenlet ekvivalens a következőkkel:

$$\sqrt{\frac{2}{3} - 5x} = \sqrt{3x + \frac{1}{2}};$$

$$\frac{2}{3} - 5x = 3x + \frac{1}{2};$$

$$8x = \frac{1}{6};$$

$$x = \frac{1}{48}.$$

Mivel $\dfrac{1}{48} \in A$, ezért a megoldáshalmaz $M = \left\{\dfrac{1}{48}\right\}$.

b) Használjuk fel a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ azonosságot: $4\sin^2 x - 8\sin x - 5 = 0$.
Megoldóképlettel adódik: $\sin x = 2{,}5 \vee \sin x = -0{,}5$.
Mivel $|\sin x| \le 1$ minden valós szám esetén, ezért csak $\sin x = -0{,}5$ lehet igaz.
Ebből $x = \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \dfrac{11}{6}\pi + 2m\pi$ adódik, ahol $k, m \in \mathbf{Z}$.

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért az $M\left\{\dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi;\ \dfrac{11}{6}\pi + 2m\pi\right\}$ halmaz minden eleme megoldása a megadott egyenletnek.

II./b rész

J 17. a) Az edény 12 cm magas és kb. 900 cm³ folyadék tölthető bele.

b) Az edény gömb alakú, a gömb átmérője 12 cm.

c) A kúp térfogata $V = \dfrac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot \pi \cdot 24 = 1152\pi$ (cm³).

Ha a kúpot fele magasságig töltjük fel, akkor a fel nem töltött rész (kis kúp) térfogata éppen nyolcada a teljes kúptérfogatnak (a hasonló testek térfogatáról tanultak miatt). A kúpba töltött folyadék térfogata tehát $\dfrac{7}{8}V = 1008\pi$ (cm³).

Ez biztosan több a gömb térfogatának felénél, ami kevesebb 500 cm³-nél.

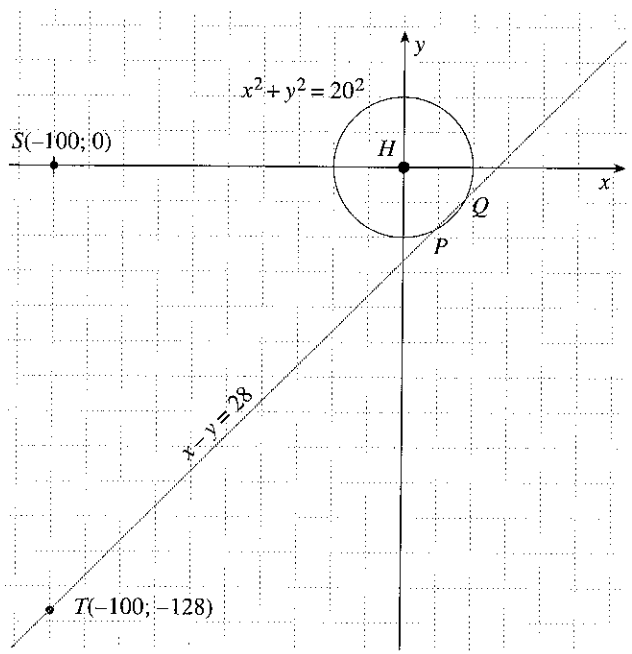
Megjegyzés:
A kúpba írható gömb sugara kb. 7,42 cm, tehát ebből is következik, hogy a fele magasságáig töltött kúpban több folyadék fér el, mint a fele magasságáig töltött gömbben.

J 18. a) A bal felső 1-es (BF1) lehetősége 7-féle: tejfog: ép, tömött, lyukas, maradandó fog: ép, tömött, lyukas vagy hiányzik.
Minden egyes fogra BF1-től BF5-ig (5db), BA1-től BA5-ig (5db), JF1-től JF5-ig (5db), JA1-től JA5-ig (5db) 7-7 féle lehetőség van, ez összesen 7^{20}-féle eset.
A maradandó fogak ilyen korban csak a BF6, BF7, BA6, BA7, JF6, JF7, JA6, JA7, ezek mindegyike 4-féle lehetőséggel fordulhat elő: ép, tömött, lyukas vagy hiányzik $\Rightarrow$ ezek lehetősége: 4^8-féle.
Így egy ilyen korú gyermekről elvileg $7^{20} \cdot 4^8 \approx 5{,}23 \cdot 10^{21}$-féleképpen tölthető ki a táblázat.

b) Mivel a táblázat lehetséges kitöltéseinek száma ($5{,}23 \cdot 10^{21}$) nagyobb, mint a tanulók száma (24), ezért nem lehet azt állítani, hogy biztosan van két olyan tanuló akinek ugyanolyan a táblázatuk.

J 19. Vegyünk fel alkalmas derékszögű koordináta-rendszert! Az egység hossza mindkét tengelyen egy mérföld legyen.

a) Ha a hajótöröttek a $H(0; 0)$ pontban vannak és a kis szigetet $S(-100; 0)$ jelöli, akkor a tengerjáró hajónak a $T(-100; -128)$ pont felel meg.
A tengerjáró hajó a T ponton átmenő, $\mathbf{v}(1; 1)$ irányvektorú egyenesen halad.
Az egyenes egyenlete: $x - y = 28$.
A segélykérő jelek az origó középpontú, 20 sugarú körlap pontjaiban észlelhetők. A hajótörötteknek tehát akkor van esélyük a megmenekülésre, ha a



tengerjáró hajó útvonalának van közös pontja az $x^2 + y^2 = 20^2$ egyenletű körrel.

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 28 \\ x^2 - y^2 &= 400 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= x - 28 \\ x^2 + (x-28)^2 &= 400 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= x - 28 \\ x^2 - 28x + 192 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív ($D = 16$), ezért a felírt egyenletrendszernek van megoldása. Ez azt jelenti, hogy a tengerjáró hajó útvonalának van közös pontja az origó középpontú, 20 sugarú körlappal. A hajótörötteknek tehát van esélyük a megmenekülésre.

b) Az a)-ban felírt egyenletrendszernek két megoldása van: $(12; -16)$ és $(16; -12)$. Az $x - y = 28$ egyenletű egyenes a $P(12; -16)$ és $Q(16; -12)$ pontokban metszi az $x^2 + y^2 = 20^2$ egyenletű kört. A tengerjáró hajó a PQ szakasz bármelyik pontjában észlelheti a hajótöröttek jelzéseit.
A PQ szakasz hossza: $\sqrt{(12-16)^2 + (-16+12)^2} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ (mérföld).

TARTALOMJEGYZÉK