A tankönyv engedélyszáma: TTI-39839-13/4-KT/20

Bírálók: dr. Korányi Erzsébet
dr. Megyesi László

Alkotószerkesztő: Környei László

Konsept-H Kiadó
2081 Piliscsaba, Fő út 197.
Tel./fax: 06 26 373-367
E-mail: konsept@konsept.hu
Internet cím: www.konsept.hu

2. kiadás
Felelős kiadó: Simon István
Tipográfiai terv: Bíró Mária
Műszaki szerkesztés: Dreamworks Bt.
Számítógépes grafika: Dreamworks Bt.
Nyomás és kötés: Széchenyi Nyomda Kft., Győr
Felelős vezető: Nemere Zsolt ügyvezető igazgató
Terjedelem: 47,3 A/5 ív

3.5. Sorozatok

1471. a) $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$;

b) $b_n = \frac{10n}{3^n}$;

c) $c_n = 2 - (n-1)\frac{4}{9}$.

1472. a) Nem lehet. A sorozat első két tagja egyenlő. Számtani sorozat esetén ez 0 differenciát, vagyis konstans sorozatot jelent, ami most nem teljesül.

b) Nem lehet. A sorozat első két tagja egyenlő. Mértani sorozat esetén ez 1 hányadost, vagyis konstans sorozatot jelent. Ez most nem teljesül.

c) Igen, lehet. Ha az ábrázolt sorozat első két tagja 1, akkor a harmadik tagja az ábra szerint 2, a negyedik tagja 3, a további tagok rendre 5, 8 és 13. Ellenőrizhető, hogy éppen a Fibonacci-sorozat első 7 tagjának felelnek meg ezek a számok. Az ábrázolt sorozat tehát lehet Fibonacci-sorozat.

d) A Fibonacci-sorozat 8. tagja: $a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = 21$,
9. tagja: $a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = 34$.

1473. $c_1 = \binom{2}{2} = 1$; $c_2 = \binom{3}{2} = 3$; $c_{10} = \binom{11}{2} = 55$.

1474. a) Ha kezdetben 1000 egyed volt, akkor $a_0 = 1000$. A rekurziós formulát használva adódik, hogy $a_1 = 1000$; $a_2 = 1005$; $a_3 = 1015$; $a_4 = 1030$; $a_5 = 1050$; $a_6 = 1075$; $a_7 = 1105$; $a_8 = 1140$; $a_9 = 1180$ és végül a keresett $a_{10} = 1225$. Azaz 1225 baktérium lesz 10 óra múlva a feltétel szerint.

b) $a_n = a_0 + 5[0+1+2+\ldots+(n-1)] = a_0 + \frac{5n(n-1)}{2}$,

ahol felhasználtuk, hogy az első n természetes szám összege egy számtani sorozat összegeként kapható meg. Ebből természetesen az a) kérdésre közvetlen választ is kaphatunk, ha $n = 10$, akkor $a_{10} = 1000 + \frac{5 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 1225$.

1475. a) a_{15} értéket egyszerű végigszámlálással is megkaphatjuk: 3; 5; 8; 12; 17; 23; 30; 38; 47; 57; 68; 80; 93; 107; 122. Másként: lásd a b) megoldást, amiből:

$a_{15} = a_1 + \frac{15 \cdot 16}{2} - 1 = 122$.

b) $a_n = a_1 + (2+3+\ldots+n) = a_1 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 = 2 + \frac{n(n+1)}{2}$.

(Ez a képlet a_1-re is igaz, hiszen $a_1 = a_1 + \frac{1\cdot 2}{2} - 1$.)

c) $\sum_{i=1}^{100} a_i = \sum_{i=1}^{100}\left(a_1 + \frac{i(i+1)}{2} - 1\right) = 100a_1 - 100 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{100} i^2 + \sum_{i=1}^{100} i\right) =$

$= 200 + \frac{1}{2}\left(\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6} + \frac{100\cdot 101}{2}\right) = 171\ 900.$

1476. A termelés növekedése 1991-ben p%-os, 1992-ben $(p+10\%)$-os volt. A szöveg alapján tehát $10\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p+10}{100}\right) = 21.$

$\frac{p^2}{10\ 000} + \frac{21p}{1000} + 1{,}1 = 2{,}1$

$p^2 + 210p - 10\ 000 = 0$

A másodfokú egyenlet gyökei -250 és 40. A feladat szövege miatt csak a második gyök lehet megoldás.

A termelés 1991-ben 40%-kal, 1992-ben 50%-kal emelkedett.

Ellenőrzés:

1991-ben 14 tonnás termelés volt, ami 1992-re a másfélszeresére, 21 tonnára nőtt. Ez megfelel a szövegben leírtaknak.

1477. a) A feltétel szerint a következőképpen alakultak a bevételek: 11,2; 12,4; 13,6; 9,6; $(9{,}6\cdot 1{,}1 =)$ 10,56; $(10{,}56\cdot 1{,}1 =)$ 11,616; $(11{,}616\cdot 1{,}1 \approx)$ 12,778; $(12{,}778\cdot 1{,}1 \approx)$ 14,056; $(14{,}056\cdot 0{,}6 \approx)$ 8,434; $(8{,}434 + 2{,}5 =)$ 10,934; $(10{,}934 + 2{,}5 =)$ 13,434. A második visszaesés előtt 14,056 millió Ft bevételük volt, ami több, mint az első előtti 13,6 millió Ft.

b) Az utolsó éves bevétel: 13,434 millió Ft.

c) Ha a kezdeti, évi 1,2 milliós növekedés maradt volna és nincs semmi visszaesés, akkor a 13,6 milliótól számítva 8 éven át évi 1,2 millióval nőtt volna a bevétel, tehát: $13{,}6 + 9{,}6 = 23{,}2$ millió Ft lett volna a bevételük. Ez közel 10 millióval lett volna több, mint ami a feltételek szerint valójában volt.

1478. A feltétel szerint a múzeum látogatóinak száma kezdetben 165 000 fő volt. Ha az első évben d fővel nőtt, akkor a következő évben d + 14 500-zal, a rákövetkezőben d + 29 000-rel, végül a negyedik évben d + 43 500-zal nőtt. Tehát a 4. évben $\{[(165\ 000 + d) + d + 14\ 500] + d + 29\ 000\} + d + 43\ 500 = 165\ 000 + 87\ 000 + 4d$ látogatójuk volt, ami 252 000 + 4d. Mivel csak a növekedés növekménye (a 14 500) volt megadva, a d értéke nem, ezért számszerű választ nem lehet adni.

1479. a) A sorozat úgy indul, hogy 5; 7; 12; 20; 31; 45; 62; 82; 105; 131;
a különbségsorozat 2 5 8 11 14 17 20 23 26
a különbségsorozat differenciája 3 3 3 3 3 3 3 3

Itt a 10. tagig ábrázoltuk a folyamatot, még két lépés van: előbb 29-et, majd 32-t kell adni a_{10}-hez, azaz $a_{11} = 160$, és a keresett $a_{12} = 192$.

b) Az első 20 tag összegéhez még a hiányzó 8 tagot a_{13}-tól a_{20}-ig meg kell határozni, s aztán összeadni. Így először 35-öt, aztán 38-at, majd 41-et, 44-et, 47-et, 50-et, 53-at, 56-ot kell adni az előző elemhez. Tehát $a_{13} = 227$; majd 265; 306; 350; 397; 447; 500; $a_{20} = 556$. Ezután a keresett 20 elem összege pl. zsebszámológéppel összeadva: 3900.

c) Ha a felrajzolt struktúrát nézzük, akkor $a_2 = 5 + 2$; $a_3 = (5+2) + (2+3)$; $a_4 = a_3 + 2 + 2\cdot 3 = 5 + 3\cdot 2 + (1+2)\cdot 3$. Nem nehéz látni, hogy mindig 2-t, valamint az index mínusz kétszer 3-at kell hozzáadni az előző elemhez, azaz

$a_k = 5 + (k-1)\cdot 2 + (1 + 2 + \ldots + k - 2)\cdot 3 = 3 + 2k + \frac{(k-2)(k-1)}{2}\cdot 3.$

Ellenőrzés:

Például $a_{12} = 3 + 24 + 165 = 192$. (Egyébként ezzel a b) kérdésre is lehetne kevesebb számolással választ adni, csak a fenti formulából ki kell fejezni az első n tag összegét:

$\sum_{k=1}^{n}\left(3 + 2k + \frac{3(k-2)(k-1)}{2}\right) = 3n + n(n+1) + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - 3k + 2\right) =$

$= n^2 + 4n + \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3n(n+1)}{2} + 2n\right) =$

$= n^2 + 7n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{9n(n+1)}{4} = n\left(n + 7 + \frac{2n^2+3n+1}{4} - \frac{9n+9}{4}\right) =$

$= n\left(\frac{4n + 28 + 2n^2 + 3n + 1 - 9n - 9}{4}\right) = n\left(\frac{2n^2 - 2n + 20}{4}\right) = \frac{n\left(n^2 - n + 10\right)}{2}.$

Ellenőrzés, például az első 5 tag összege: eszerint 75, ami valóban stimmel. Eszerint az első 20 tag összege egyszerűbben adódik: $10\cdot 390 = 3900$.

1480. $\sum_{i=1}^{n} i(3i+1) = \sum_{i=1}^{n}\left(3i^2 + i\right) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} =$

$= \frac{n(n+1)}{2}(2n+2) = n(n+1)^2.$

1481. $\sum_{i=1}^{n} i(4i+3) = \sum_{i=1}^{n}\left(4i^2+3i\right) = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i = 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n-1)}{2} =$
$= \frac{n(n+1)}{6}\left[4(2n+1)+9\right] = \frac{n(n+1)(8n+13)}{6}$.

1482.* Ha 100 kecskével kezdett, és az első évre a növekedés d kecske, akkor az első év végére $100 + d$ kecskéje lesz, a következő évben pedig már
$(100 + d) + d + 4 = 100 + 2d + 4 = 104 + 2d$ kecskéje.
A harmadik évben hasonlóan: $(104 + 2d) + (d + 4 + 4) = 112 + 3d$.
A negyedik évben már $124 + 4d$, és végül az ötödik évben $140 + 5d$ kecskéje lesz.
Erre azt mondja a feladat, hogy ez 265 kecske. $140 + 5d = 265$, $d = 25$. Tehát a 15. év végén 955 kecskéje lesz.

1483. Állítás: $\frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = a_k$.
Bizonyítás: $\frac{a_n - (k-1)d + a_n + (k-1)d}{2}$ a kijelölt műveletek elvégzése után eredményül a_n-et kapunk. Az állítás igaz, de csak a második tagtól kezdve. Az első tagnak ugyanis nincs mindkét oldalon szomszédja.

1484. $a_7 = a_5 + 2d$, ezért $d = \frac{a_7 - a_5}{2} = -3{,}5$.
Viszont $a_5 = a_1 + 4d$, ezért $a_1 = a_5 - 4d = 31$. Továbbá $S_8 = 8a_1 + \frac{8 \cdot 7}{2}d = 150$.

1485. Legyenek az oldalak ekkor $a - d$, a, $a + d$. A Pitagorasz-tétel miatt:
$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2$. Felbontva, rendezve: $a^2 = 4ad$. Mivel nyilván $a \neq 0$, tehát $d = \frac{a}{4}$. Az oldalak ekkor $0{,}75a$, a, $1{,}25a$; a háromszög területe pedig: $\frac{0{,}75a \cdot a}{2} =$
$= T = 150$. Ebből $a = 20$ (a formailag szintén adódó -20 nyilván értelmetlen a feladat szempontjából), így a háromszög oldalai: 15 cm, 20 cm, 25 cm.

1486. Ha most $a_3 = 3a_2$, ugyanakkor általánosan: $a_3 = a_2 + d$, akkor $d = 2a_2$, továbbá $a_1 = a_2 - d = -a_2$. Így viszont $a_2 = -a_1$, $d = -2a_1$ és $a_3 = -3a_1$. Ha $S_n = 40a_3$, akkor $S_n = -120a_1$.
Másrészről viszont általánosan: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, azaz $na_1 + \frac{n(n-1)}{2}(-2a_1) =$
$= na_1 - (n^2 - n)a_1 = (-n^2 + 2n)a_1$. Tehát $-120 = -n^2 + 2n$, amiből $n = 12$ (vagy -10, de ez most értelmetlen). Ki kell tehát fejeznünk a_{12}-t, ami: $a_{12} = a_1 + 11d =$
$= a_1 + 11(-2a_1) = -21a_1$.

1487. Vagyis most $\frac{S_5}{S_{10} - S_5} = \frac{1}{3}$, és kérdés $\frac{S_{10}}{S_{20} - S_{10}}$. Átrendezve az egyenletet:
$4S_5 = S_{10}$. Felírva mindegyiket a_1-gyel és d-vel: $4\left(5a_1 + \frac{5 \cdot 4}{2}d\right) = 10a_1 + \frac{10 \cdot 9}{2}d$,
rendezés után: $2a_1 = d$. Ezt visszaírva: $S_{10} = 100a_1$. Felírjuk még:
$S_{20} = 20a_1 + \frac{20 \cdot 19}{2}d = 400a_1$. Ekkor a kérdéses arány $\frac{100a_1}{400a_1 - 100a_1} = \frac{1}{3}$.

1488. *Első (favágó) megoldás:* ekkor $x = 10 + 12 + 14 + \ldots + 98$; vagyis a 10 kezdőtagú, 2 differenciájú számtani sorozat első 45 tagjának összegéről van szó. Ez a képlet szerint: $45 \cdot \frac{10 + 98}{2} = 2430$. Hasonlóan $y = 11 + 13 + 15 + \ldots + 99$; ez a 11 kezdőtagú, 2 differenciájú sorozat első 45 tagjának összege, vagyis: $45 \cdot \frac{11 + 99}{2} = 2475$.
Vagyis y nagyobb x-nél, 45-tel.

Másik (okos) megoldás:
A két összeg tagjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk:
$x = 10 + 12 + 14 + \ldots + 98$. A két összegnek ugyanannyi, nevezetesen 45 tagja van,
$y = 11 + 13 + 15 + \ldots + 99$
és y-ban minden tag pontosan 1-gyel nagyobb, mint a megfelelője x-ben. Tehát y a nagyobb, mégpedig 45-tel.

1489. 900 db háromjegyű szám van, ebből 450 páros és 450 páratlan szám. Állítsuk párba az egymás után következő páros, illetve páratlan számokat.
100; 102; 104; … 996; 998
101; 103; 105; … 997; 999
Minden páratlan szám 1-gyel nagyobb a természetes számsorban előtte álló páros számnál.
Mivel 450 db ilyen pár van, ezért a háromjegyű páratlan számok összege 450-nel nagyobb, mint a háromjegyű páros számok összege.
Másik megoldás:
A háromjegyű páros, illetve páratlan számok számtani sorozatot alkotnak, melyek különbsége (differenciája) 2.
A páros számok összege: $S_{\text{páros}} = \frac{450 \cdot (100 + 998)}{2} = 247\,050$.
A páratlan számok összege: $S_{\text{páratlan}} = \frac{450 \cdot (101 + 999)}{2} = 247\,500$.
$S_{\text{páratlan}} - S_{\text{páros}} = 450$.
Tehát a háromjegyű páratlan számok összege 450-nel nagyobb a háromjegyű páros számok összegénél.

1490. $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2 + \frac{n(n-1)}{2}4 = 96$. Rendezve: $3n^2 - 2n - 96 = 0$, amiből $n = 6$ (vagy $-5,\dot{3}$, de ez most értelmetlen). (Ellenőrzés: ekkor az első tag 6, és az első hat tag összege: $6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26$ valóban 96.)

1491. A számtani sorozat n-edik tagja $a_n = a_1 + (n-1)d$, az első n tag összege $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Így $n = a_1 + (n-1)5$ (I.)

$-56 = \frac{n(a_1 + n)}{2}$ (II.)

Az (I.) egyenletből $a_1 = 5 - 4n$, behelyettesítve a (II.) egyenletbe $3n^2 - 5n - 112 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek pozitív egész megoldása 7; így $a_1 = -23$

A sorozat első 7 tagja: -23; -18; -13; -8; -3; 2; 7, ezek összege -56; és a 7. tag 7.

1492. $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = na_1 + 0,25n(n-1) = 38$.

Hasonlóan $S_{n+4} = (n+4)a_1 + 0,25(n+4)(n+3) = 69$.

Mindkét egyenletet 4-gyel szorozva és rendezve:

$n^2 + (4a_1 - 1)n - 152 = 0$, illetve $n^2 + (4a_1 + 7)n + 16a_1 - 264 = 0$.

Egyenlővé téve a bal oldalakat egymással, számos tag kiesik, rendezés után: $n = 14 - 2a_1$.

Visszaírva ezt S_n-be, rendezés után: $-a_1^2 + 0,5a_1 + 7,5 = 0$,

amiből $a_1 = \begin{cases} -2,5 \\ 3 \end{cases}$, és így $n = \begin{cases} 19 \\ 8 \end{cases}$. Mindkét megoldáspár jó.

Másik megoldás:

A két összeg között $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}$ a különbség.

Ez $a_{n+1} + (a_{n+1} + 0,5) + (a_{n+1} + 2 \cdot 0,5) + (a_{n+1} + 3 \cdot 0,5) = 4a_{n+1} + 3$, ami $69 - 38 = 31$.

Ebből $a_{n+1} = 7$ (és másképpen felírva $a_{n+1} = a_1 + n \cdot 0,5$, amiből $a_1 = 7 - 0,5n$).

A 0,5-es differencia miatt ekkor $a_n = 6,5$.

„Visszafelé” felírva az összeg tagjait, tekinthetjük ezt kezdőtagnak, és $-0,5$-nek a differenciát: $38 = n \cdot 6,5 + \frac{n(n-1)}{2}(-0,5) = 6,5n - 0,25n(n-1)$.

Rendezve: $-0,25n^2 + 6,75n - 38 = 0$, amiből $n = \begin{cases} 19 \\ 8 \end{cases}$, és így $a_1 = \begin{cases} -2,5 \\ 3 \end{cases}$.

Mindkét megoldáspár jó.

1493. $\left.\begin{aligned} a_2 + a_8 &= 2 \\ a_9 - a_3 &= 24 \end{aligned}\right\}$

Mindent felírva a_1 és d segítségével: $\left.\begin{aligned} a_1 + d + a_1 + 7d &= 2 \\ a_1 + 8d - (a_1 + 2d) &= 24 \end{aligned}\right\}$,

rendezve: $\left.\begin{aligned} 2a_1 + 8d &= 2 \\ 6d &= 24 \end{aligned}\right\}$.

A második egyenletből $d = 4$, beírva az elsőbe: $a_1 = -15$.

Ekkor $S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \cdot 9}{2}d = -150 + 45 \cdot 4 = 30$.

1494. Tekintsük ezt az összeget egy számtani sorozat 11 szomszédos tagja összegének. Bármely egész z lehet a „kezdőtag”, és 1 a differencia. Képeznünk kell S_{11}-et: $11z + \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot 1 = 11(z + 5)$. Mivel $z + 5$ is egész, ez biztosan többszöröse 11-nek (avagy osztható 11-gyel). Viszont 12 esetén $S_{12} = 12z + \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot 1 = 12(z + 5,5)$ biztosan nem osztható 12-vel, hiszen $z + 5,5$ nem egész.

(Vagy másként átalakítva: $S_{12} = 12(z + 5) + 6$, azaz 12-vel osztva 6 a maradék.)

1495. Legyen a sorozat kezdőtagja a_1, differenciája d.

A páros indexű tagok (a_2, a_4, ..., a_{60}) tekinthetők egy olyan sorozatnak, amelynek kezdőtagja $a_1 + d$ és differenciája $2d$. E sorozat 30 tagjának összege így:

$30(a_1 + d) + \frac{30 \cdot 29}{2} \cdot 2d = 30a_1 + 900d = 2760$ (I).

A hárommal osztható indexű tagok (a_3, a_6, ..., a_{60}) tekinthetők egy olyan sorozatnak, amelynek kezdőtagja $a_1 + 2d$ és differenciája $3d$. E sorozat első 20 tagjának összege így: $20(a_1 + 2d) + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 3d = 20a_1 + 610d = 1870$ (II).

Az (I)-et 30-cal, a (II)-t 20-szal osztva: $\left.\begin{aligned} a_1 + 30d &= 92 \\ a_1 + 30,5d &= 93,5 \end{aligned}\right\}$.

A két egyenlet különbségéből $d = 3$, amit visszaírva (például) az elsőbe: $a_1 = 2$.

Ekkor $S_{60} = 60 \cdot 2 + \frac{60 \cdot 59}{2} \cdot 3 = 5430$.

1496. Számtani sorozat páratlan számú szomszédos tagjának átlaga épp a középső tag.

Vagyis $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = -4 = a_2$.

Írjuk fel a szorzatot így: $(a_2 - d)a_2(a_2 + d) = (-4 - d)(-4)(-4 + d) = 80$.

Felbontva, rendezve: $4d^2 - 144 = 0$, amiből $d = \pm 6$.

A kérdéses három tag tehát (növekvő indexek szerint) -10; -4; 2 vagy 2; -4; -10.

1497. Ha a hét egymást követő tag közül a középsőt a-val, a differenciát pedig d-vel jelöljük, akkor az egyes tagok rendre:
$a-3d;\ a-2d;\ a-d;\ a;\ a+d;\ a+2d;\ a+3d.$
E hét szám összege $7a$, ezért a szöveg alapján $7a = 700$, vagyis $a = 100$.
A megadott információkból tehát megállapítható, hogy a 100 szerepel a számtani sorozat tagjai között.

1498. Célszerű először a tört nevezőjét gyökteleníteni: $\dfrac{5}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{5(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 5(\sqrt{2}-1)$.
Az összegképlet szerint így
$$S_{20} = \frac{(2a_1+19d)\cdot 20}{2} = 20a_1 + 190d = 100(\sqrt{2}-1) + 190\sqrt{2} = 290\sqrt{2} - 100.$$
Az első húsz tag összege pontosan $290\sqrt{2}-100$.

1499. Ha egy számtani sorozat páratlan számú szomszédos (vagy a középsőre szimmetrikus sorszámú) tagjainak összege adott, akkor érdemes a középső tagot jelölni egy betűvel, legyen most $a_3 = a$. Itt az $a \in \mathbf{Z}$ és a többi tag is egész a feladat szövege szerint. Ekkor d is egész. $(a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 65$.
Ebből $a = 13$.
Felírható még: $(a-2d)(a-d)a(a+d)(a+2d) = 129\,168$.
Felhasználva, hogy $a = 13$, átírható így is: $(169-4d^2)(169-d^2) = 9936$.
A szorzás elvégzése után d-ben negyedfokú egyenletet kapunk, mely másodfokúra visszavezethető.
Legyen $x = d^2$. Ez a $4x^2 - 845x + 18\,625 = 0$ egyenletre vezet. Mi x-szel egy egész szám négyzetét jelöltük, tehát csak olyan x érték felel meg, ami egy egész szám négyzete. Az egyenlet egyik gyöke nem is egész, a másik: 25. Ebből $d_2' = 5$ és $d_2'' = -5$ adódik.
Figyelembe véve azt is, hogy $a = a_3 = 13$, meghatározható a keresett két sorozat: az első tag 3, a különbség 5, illetve az első tag 23, a különbség -5.
Ellenőrzésként felírjuk a keresett sorozatok első öt tagját: 3, 8, 13, 18, 23, illetve 23, 18, 13, 8, 3. Ezek a feltételeknek eleget tesznek.

1500. A számtani sorozat elemei:
$$\underbrace{a_4-3d}_{a_1};\ \underbrace{a_4-2d}_{a_2};\ \underbrace{a_4-d}_{a_3};\ a_4;\ \underbrace{a_4+d}_{a_5};\ \underbrace{a_4+2d}_{a_6};\ \underbrace{a_4+3d}_{a_7}.$$
Ezek összege $S_7 = 7a_4 = 7\cdot 15 = 105$.
Pl: csökkenő sorozat ($d = -3$)
24; 21; 18; 15; 12; 9; 6; $S_7 = 105$;
növekvő sorozat ($d = 2$)
9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; $S_7 = 105$.

1501. Legyenek a háromjegyű szám számjegyei: $a-d;\ a;\ a+d$
($a \in \mathbf{N}^+$; $1 \le a \le 9$; $-4 \le d \le 4$; $d \in \mathbf{Z}$).
Az eredeti szám $100(a-d) + 10a + a + d = 111a - 99d$.
A számjegyek összege $a - d + a + a + d = 3a$.
Így $\dfrac{2(111a-99d)}{3a} = 41$ (I).
A felcserélt szám számjegyei $a;\ a-d;\ a+d$.
A felcserélt szám $100a + 10(a-d) + a + d = 111a - 9d$.
Ezért $111a - 99d + 270 = 111a - 9d$ (II.)
Ebből $d = 3$, ezt behelyettesítve (I.)-be $a = 6$.
Így az eredeti háromjegyű szám 369, a felcserélt 639 (270-nel több, a szám kétszerese a számjegyek összegével osztva 41-et ad).

1502. Számtani sorozatra
$S_n = a_1 + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = -190 + 36 + 202 = 48.$
Mivel $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$, ebből $n = 8$.
Így a sorozat 8. tagja 202.
$a_8 = a_1 + 7d$, melyből $d = 56$.
A sorozat első 8 tagja: $-190;\ \underbrace{-134;\ -78;\ -22;\ 34;\ 90;\ 146}_{\text{összegük } 36};\ 202.$

1503. A 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív egész számok 2; 5; 8; ... olyan számtani sorozatot alkotnak, melyek első tagja 2, különbsége (differenciája) 3.
A 2005-nél kisebb 2004 db pozitív egész közül minden harmadik szám 3-mal osztva 2 maradékot ad, tehát $\dfrac{2004}{3} = 668$ db ilyen szám van.
$a_{668} = a_1 + 667d = 2003.$
Ezek összege: $S_{668} = \dfrac{668(2+2003)}{2} = 669\,670.$

1504. Az első n db pozitív páros szám összege
$$2 + 4 + \ldots + 2n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n\cdot(2+2n)}{2} = n(n+1) \qquad (n \in \mathbf{N}^+).$$
Az első n db pozitív páratlan szám összege
$$1 + 3 + \ldots + 2n - 1 = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2.$$
A feltétel szerint $\dfrac{n(n+1)}{n^2} = \dfrac{101}{100}$; ebből $n = 100$.
Tehát az első 100 pozitív páros szám és az első 100 pozitív páratlan szám összegének hányadosa $\dfrac{101}{100}$.

1505. Legyen az első kiválasztott természetes szám k $(k \in \mathbf{N})$

$\underbrace{k}_{a_1}$; $\underbrace{k+3}_{a_2}$; $\underbrace{k+6}_{a_3}$; …; $\underbrace{k+(n-1)3}_{a_n}$ $\quad (n \in \mathbf{N}^+$ és $n > 1)$

Ezek számtani sorozat egymást követő tagjai, összegük

$\frac{n[2k+(n-1)\cdot 3]}{2} = 493.$

Ebből $2nk = 3n - 3n^2 + 986$,

$2k = 3 - 3n + \frac{986}{n}$.

Mivel $2k$; 3, $3n$ egészek, tehát $\frac{986}{n}$-nek is egész számnak kell lennie, vagyis $n \mid 986$

986 pozitív osztói: 1; 2; 17; 29; 34; 58; 493; 986.

Ezek közül $n = 2$ esetén $k = 245$,

$n = 17$ esetén $k = 5$.

A többi n értékre k negatív lenne.

Tehát két számot választottunk ki és az első szám 245; vagy 17 számot választottunk ki és az első szám 5, az utolsó 53.

1506. A háromszög szögei fokban mérve legyenek $\alpha - d$; α; $\alpha + d$ $(\alpha \in \mathbf{N}^+$; $d \in \mathbf{N})$.
Mivel $\alpha - d + \alpha + \alpha + d = 180$, ezért $\alpha = 60°$.

1. $d = 0$. Ebben az esetben a háromszög egy 1 cm oldalú szabályos háromszög.
2. $d > 0$. Ekkor a legrövidebb, 1 cm-es oldallal szemben van a háromszög legkisebb szöge, ami $\alpha - d$. Mivel $d \in \{1; 2; 3; \ldots; 59\}$, ezért 59 ilyen háromszög van.

Összesen tehát 60-féle háromszög felel meg a feladat szövegének.

1507. A háromszög oldalainak hossza legyen $a - d$, a és $a + d$, ahol $a > 0$, $d > 0$ és $a > d$.
Mivel a háromszög kerülete 300, ezért $a = 100$, a másik két oldal pedig $100 - d$, illetve $100 + d$ hosszúságú.
A háromszög 120°-os szöge a leghosszabb oldallal, tehát a $100 + d$ hosszúságúval szemben van. Erre felírva a koszinusztételt:

$(100+d)^2 = 100^2 + (100-d)^2 - 200(100-d)\cos 120°.$

A négyzetre emeléseket elvégezve és felhasználva, hogy $\cos 120° = -\frac{1}{2}$:

$100^2 + 200d + d^2 = 3 \cdot 100^2 - 300d + d^2$. Ebből $d = 40$.

A háromszög oldalainak hossza tehát: 60, 100, illetve 140.

A 60 hosszúságú oldallal szemköztes szöget β-val jelölve, szinusztétellel:

$\frac{\sin\beta}{\sin 120°} = \frac{60}{140}$. Ebből $\sin\beta = 0{,}3712$, s mivel β hegyesszög, ezért $\beta = 21{,}79°$.

A háromszög harmadik szöge $60° - \beta = 38{,}21°$.

1508. A derékszögű háromszög hosszabb befogóját jelöljük a-val (ez ugyanis a három oldal közül a középső hosszúságú). Minthogy az oldalak csak pozitívak lehetnek, az adott $d = 3$ miatt $a > 3$. A háromszög derékszögű, felírható rá Pitagorasz tétele: $(a-3)^2 + a^2 = (a+3)^2$. Ennek pozitív gyöke $a = 12$ (> 3 teljesül), a háromszög oldalai: 9 cm, 12 cm, 15 cm. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, amiből $\alpha = 53{,}13°$; $\beta = 36{,}87°$.

1509. A konvex ötszög belső szögeinek összege 540° (az ötszög bármely csúcsából húzott átlókkal 3 háromszögre bontható). A középső nagyságú szöget jelöljük α-val, ekkor a szögösszeg:
$(\alpha + 2\delta) + (\alpha + \delta) + \alpha + (\alpha - \delta) + (\alpha - 2\delta) = 540°$, amiből $\alpha = 108°$.
Tehát megállapítható az egyik, éppen a középső nagyságú szög pontos értéke.

1510. Egy n oldalú $(n \in \mathbf{N}^+$; $n \geq 3)$ konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2)180°$.
Mivel $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, így $(n-2)180 = \frac{n(122{,}5 + 177{,}5)}{2}$, amiből $n = 12$.
A sokszög 12 oldalú, ezért $177{,}5 = 122{,}5 + 11d$; ebből $d = 5$.
A sokszög szögei 122° 30'-től 5°-onként nőnek, a legnagyobb szöge 177,5°.

1511. Mivel a terület 5000 m² nagyságú, akkor 10 000 m² lenne, ha kiegészítenénk négyzetté, azaz az oldalak 100 m hosszúak. Ha erre 75 cm-enként akarunk fát ültetni, akkor $\frac{100}{0{,}75}$ (illetve ennek egészrésze), tehát 133 fa fér el az első oszlopra. A másodikra 132 fa, és így tovább, az utolsóra már csak 1 fa, tehát szükségünk van a $133 + 132 + \ldots + 2 + 1$ összegre. Ez az első 133 szám összege, számtani sorozat összegeként adódik: $\frac{133 \cdot 134}{2} = 8911$ facsemete ültethető el.

Megjegyzés: a számolás során az első fa oszlopot a telekhatáron vettük fel. Ha a határra nem lehet ültetni, akkor természetesen kevesebb lesz a facsemeték száma.

1512.

	most (eredeti érték)	2 év múlva	4 év múlva	6 év múlva
a) szerinti érték	2 MFt	1,8 MFt	1,6 MFt	1,4 MFt
b) szerinti érték	2 MFt	1,4 MFt	0,8 MFt	0,2 MFt

1513. Az egyes polcokon levő könyvek száma egy (-3) differenciájú számtani sorozat 7 egymást követő tagja.
$S_7 = \frac{102 + 6 \cdot (-3)}{2} \cdot 7 = 294$, a könyvszekrényben tehát 294 db könyv van.
Megjegyzés: a legfelső polcon $51 - 18 = 33$ könyv van.

1514. Nem lehet minden polcán primszámnyi könyv. Ha $a_1 = 17$; és minden polcán az előzőhöz képest d-vel ($d \in \mathbf{N}^+$) nő a könyvek száma, a 18. sorban levő könyvek száma: $a_{18} = 17 + 17d = 17(1 + d)$, amely 17-nél nagyobb és 17-tel osztható, így nem prím.

1515. A naponként elolvasott oldalak száma számtani sorozat szomszédos tagjai
$S_n = \dfrac{n[2a_1 - (n-1)d]}{2}$, így $379 = \dfrac{n[38 + (n-1)18]}{2}$.
Ebből $9n^2 + 10n - 379 = 0$, az egyenlet pozitív gyöke 5,96.
Tehát 6 nap alatt (1 héten belül) sikerül elolvasni a könyvet.

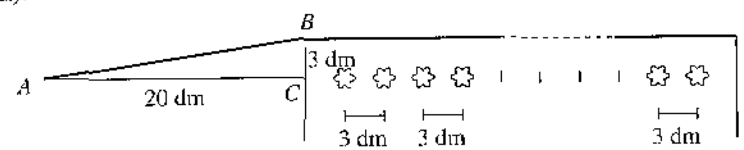
1516. A harmadik ember a db cipót kapjon, a negyedik $a + d$ darabot.
Az egyes emberek a szöveg szerint ekkor $a - 2d$; $a - d$; a; $a + d$; $a + 2d$ darab cipót kapnak. $a - 2d + a - d + a + a + d + a + 2d = 100$, amiből $a = 20$. A szöveg szerint még az is teljesül, hogy $20 + 20 + d + 20 + 2d = 7 \cdot (20 - 2d + 20 - d)$, amiből $d = 9\frac{1}{6}$.
Az első ember $1\frac{2}{3}$, a második $10\frac{5}{6}$, a harmadik 20, a negyedik $29\frac{1}{6}$, az ötödik pedig $38\frac{1}{3}$ cipót kapjon.
Ellenőrzés:
Az öt szám összege valóban 100.
$1\frac{2}{3} + 10\frac{5}{6} = \frac{25}{2}$, ezért a másik három ember $100 - \frac{25}{2} = \frac{175}{2}$ db cipót kapott összesen.
$\frac{175}{2} = 7 \cdot \frac{25}{2}$ igaz, tehát a megadott öt szám megfelel a feladat szövegének.

1517. Az egyes nyeremények egy 450 differenciájú számtani sorozat szomszédos tagjai.
A szöveg szerint: $a_n = 3600$ és $S_n = 9900 + 3600 = 13\,500$.
$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{a_n - (n-1)d + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_n - (n-1)d}{2} \cdot n$.
A megadott számokkal: $13\,500 = \dfrac{7200 - (n-1) \cdot 450}{2} \cdot n$, amit rendezve az
$n^2 - 17n + 60 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei 5 és 12. A 12 nem felel meg, hiszen ekkor a „nyeremények” között negatív összeg is szerepelne (pl. a sorozat első tagja -1350 lenne).
Tehát öten nyertek az agárversenyen rendre 3600; 3150; 2700; 2250, illetve 1800 tallért.
Ellenőrzés:
$3150 + 2700 + 2250 + 1800 = 9900$, ami a feladat szövegének megfelel.

1518. $a_1 = 3000$; $d = -200$; $S_n = 15\,000$; $n = ?$
Az $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ és $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$ képletek alkalmazásával az $n^2 - 31n + 150 = 0$ egyenlethez jutunk.
A gyökök közül csak az $n = 6$ felel meg a feladat szövegének. Az $n = 25$ ugyanis nem megoldás, mert ekkor a_n-re negatív érték adódik.
Megjegyzés:
A feladat képletek nélkül is megoldható. Erre akkor érdemes gondolni, ha n elég kis értékű, mint itt is. ($3000 + 2800 + 2600 + 2400 + 2200 + 2000 = 15\,000$).

1519. A kislány a virágágyás sarkáig az AB utat teszi meg. Ennek hosszát deciméterben az ABC derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétellel számítjuk ki.
$AB^2 = 409$, ebből $AB = 20{,}2$.

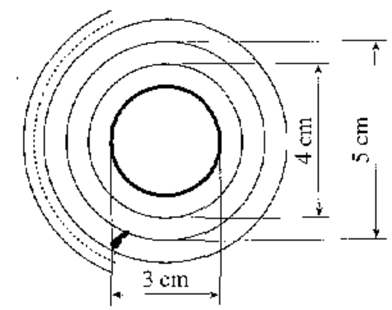
a) $S_{18} = ?$ Az oda-vissza utat egy tagnak számítva:
$a_1 = 2(20{,}2 + 3) = 46{,}4$ (dm),
$a_2 = 52{,}4$ (dm).



Ezekből megállapítható: $d = 6$; $a_{18} = 148{,}4$; $S_{18} = 1753{,}2$.
A megtett út az első alkalommal 1753,2 dm = 175,32 m.

b) $S'_6 = ?$
$b_1 = 2(20{,}2 + 9) = 58{,}4$ (dm),
$b_2 = 76{,}4$ (dm).
Ezekből megállapítható: $d' = 18$; $b_6 = 148{,}4$; $S'_6 = 620{,}4$.
A megtett út a második alkalommal 620 dm = 62,0 m.

1520. A felcsavart szőnyeg külső rétegének kerületét kell ismernünk ahhoz, hogy megállapíthassuk, milyen hosszú zsineg szükséges az átkötéséhez. A rétegek közelítőleg koncentrikus köröknek tekinthetők. Az első, legbelső réteg külső felületéhez tartozó átmérő 4 cm, a következőé 5 cm stb. számtani sorozat egymás utáni tagjai, ezért a kerületek is $a_1 = 4\pi$; $a_2 = 5\pi$.



Ezekből megállapítható, hogy $d = \pi$, $a_n = 4\pi + (n-1)\pi = 3\pi + n\pi$.
A futószőnyeg hossza a rétegek kerületének összegéből adódik: $S_n = 400$.
Az összegképletből következik:

$$(7+n)n\pi = 800, \text{ ebből: } n^2 + 7n - \frac{800}{\pi} = 0; \quad 0 < n = 13\ (\approx 12{,}8).$$

A külső réteg kerülete $a_{13} = 4\pi + 12\pi = 16\pi \approx 50{,}26$.
Ezek szerint az 50 cm hosszúságú zsineg körül sem éri a szőnyeg-hengert.

1521. A lépcsők száma pozitív egész. Kati páros számú lépcsőn halad fel is, le is. Zsófi 3-szor teszi meg az utat föl-le, tehát az általa végigjárt összes lépcső száma 3-mal osztható.
Kati által bejárt lépcsőfokok száma: $2, 2, 4, 4, 6, 6, \ldots, n, n$.
Zsófi által bejárt lépcsők száma $3 \cdot 2n$, ugyanis ő 3-szor megy a teljes lépcsősoron fel és le.
Ekkor felírhatjuk: $2(2 + 4 + 6 + \ldots + n) = 6n$.
Ebből a zárójelben lévő kifejezés számtani sorozat szomszédos tagjainak az összege:
$2\frac{(2+n)}{2}\frac{n}{2} = 6n$, azaz $n(n+2) = 12n$. Az $n \neq 0$ miatt oszthatunk n-nel: $n + 2 = 12$.
Ebből $n = 10$.

Megjegyzés: Egyenlet nélkül is megoldható a feladat. A gondolatmenet az alábbi táblázat alapján követhető. A lépcsők száma n.

n	Kati által bejárt lépcsők száma			Zsófi által bejárt lépcsők száma ($6n$)
2	$2+2$	4	<	$6 \cdot 2 = 12$
4	$2+2+4+4$	12	<	$6 \cdot 4 = 24$
6	$2+2+4+4+6+6$	24	<	$6 \cdot 6 = 36$
8	$2+2+4+4+6+6+8+8$	40	<	$6 \cdot 8 = 48$
10	$2+2+4+4+6+6+8+8+10+10$	60	=	$6 \cdot 10 = 60$ ez jó
12	$2+2+ \quad \ldots \quad +12+12$	84	>	$6 \cdot 12 = 72$

Ezek szerint 10 fokos lépcsőn járkáltak a gyerekek.

1522. a) Az első sorban 18, a következőben 21, aztán 24 hely van, a 24. sorban: $18 + (24-1) \cdot 3 = 87$ hely van. Ekkor a színház férőhelyeinek száma ezen számok összege: $18 + 21 + \ldots + 87$.
Ez az összegképlet használatával: $\frac{(18+87) \cdot 24}{2} = 1260$ hely.

b) Mivel minden sor 20 cm-rel van magasabban, mint az előző, és 24 sor van, az utolsó $23 \cdot 20 = 460$ cm-rel van magasabban, mint az első, tehát a válasz 4,6 méter.

1523. Az előzőhöz hasonló feladat, de most nem tudjuk, hogy hány sor van. Először ezt kell kiszámolni.
Minden sor 35 cm-rel van magasabban, és az utolsó 14 m = 1400 cm-rel van magasabban, mint az első. Ekkor a „lépcsők", az emelkedések száma $1400 : 35 = 40$, tehát az elsővel együtt 41 sor van. Az elsőben 80 hely van, és minden sorban 4-gyel több, akkor a 41., utolsó sorban: $80 + (41-1) \cdot 4 = 240$ hely van. Ekkor egy szektorban az ülőhelyek száma: $80 + 84 + \ldots + 240 = \frac{(80+240) \cdot 41}{2} = 160 \cdot 41 = 6560$,
8 szektorban 8-szor ennyi: 52 480.

1524. Az egyes sorok ülőhelyeinek száma egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.
$a_1 = 40$; $d = 4$; $S_n = 240$.
Az a_n és S_n-re vonatkozó képletekből meghatározható, hogy a nézők $n = 5$ sorban éppen elférnek.
Megjegyzés:
A feladat egyszerű számolással is megoldható: $40 + 44 + 48 + 52 + 56 = 240$.

1525. Az egyes sorok ülőhelyeinek száma egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.
$a_1 = 60$; $d = 8$; $a_{20} = ?$
Ezekből adódik, hogy a 20. sorban 212 embernek van helye.

1526. Legyen a legfelső sorban a_1 doboz, és lefelé minden következőben d-vel több. Ekkor $\frac{S_{10}}{S_{20} - S_{10}} = \frac{1}{2}$ és $S_{15} = 375$; kérdés a_1 és d. Az első egyenletből $3S_{10} = S_{20}$, felírva a_1-gyel és d-vel: $3\left(10a_1 + \frac{10 \cdot 9}{2}d\right) = 20a_1 + \frac{20 \cdot 19}{2}d$, rendezve: $a_1 = 5{,}5d$.
A második egyenlet: $(S_{15} =) 15a_1 + \frac{15 \cdot 14}{2}d = 15a_1 + 105d = 375$. Beírjuk az előbbi eredményt: $15 \cdot 5{,}5d + 105d = 187{,}5d = 375$. Ebből $d = 2$, és így $a_1 = 11$.

1527. A tányérok átmérői egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.
$a_1 = 12$; $d = 0{,}5$; $a_n = 30$; $30 = 12 + (n-1) \cdot 0{,}5$.
Ezekből adódik, hogy egy toronyba 37 tányér kerül.

1528. A naponta elmosott üvegek száma egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.
$a_1 = 40$; $d = 10$; $S_n = 500$.
A napok száma: n, erre felírható egyenlet: $n^2 + 7n - 100 = 0$.
Ennek pozitív megoldása $\approx 7{,}09$. Ez azt jelenti, hogy az 500. üveg a 8. napon került sorra.

1529. A soronként elhelyezett golyók száma számtani sorozatot alkot.
$a_1 = 1;\ \ d = 1;\ \ S_n = 30.$

a) Az n meghatározásához az $S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$ képletet alkalmazzuk, ebből kapjuk az $\dfrac{(1+n)n}{2} = 30$ összefüggést. Ezt átalakítva adódik az $n^2 + n - 60 = 0$ másodfokú egyenlet. Ennek pozitív gyöke vezet a megoldáshoz, ebből $n \approx 7{,}26$. Ezek szerint a 30. golyó a nyolcadik sorba kerül.
Az eredmény ellenőrizhető pl. úgy, hogy kiszámítjuk, hogy az első 7 sorba együtt hány golyó fér. $S_n = \dfrac{1+n}{2}n$, ennek megfelelően $S_7 = 28$. Ebből megállapítható, hogy a fent kapott eredmény megfelel a feladat követelményeinek.

Megjegyzés: Képletek nélkül is eredményre juthatunk, minimális matematikai ismerettel is. Összeadjuk az egyes sorokban lévő golyók számát, amíg az összeg meg nem közelíti az adott 30-as értéket. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. Ebből látható, hogy a 30. golyó a következő, a 8. sorba kerül.

b) $a_1 = 1;\ \ d = 1;\ \ a_{10} = 10;\ \ n = 10.\ \ S_{10} = \dfrac{1+10}{2}10 = 55.$
Tehát 55 golyóra van szükség.

1530. Az első változatban a naponta elszállított szénmennyiség számtani sorozat egymást követő tagjai alkotják. $a_1 = 8;\ \ d = 0{,}5;\ \ n = ?$
Ha napi 10 tonnát szállítanak el, akkor n nap alatt $10n$ tonnát. Így
$\dfrac{[16 + (n-1)0{,}5]n}{2} = 10n$, ennek a pozitív gyöke: 9.
Tehát 9 nap alatt szállították el a szénkészletet.

Megjegyzés: Képlet nélkül is megoldható a feladat, ami egyébként ellenőrzésnek is megfelel: $8 + 8{,}5 + 9 + 9{,}5 + 10 + 10{,}5 + 11 + 11{,}5 + 12 = 90 = 10 \cdot 9$.

1531. $4\frac{1}{4}$ m + 385 cm = 810 cm. Ha a leghosszabb létrafok 95 cm; 12 fokú létra esetén a legrövidebb 95 cm − 11 · 5 cm = 40 cm. Ezek összhossza: $\dfrac{12 \cdot (40 + 95)}{2} = 810$ cm.

A létrák fokai: $\underbrace{95\text{ cm};\ 90\text{ cm};\ 85\text{ cm};\ 80\text{ cm};\ 75\text{ cm}}_{425\text{ cm} = 4\frac{1}{4}\text{ m}}$

$\underbrace{70\text{ cm};\ 65\text{ cm};\ 60\text{ cm};\ 55\text{ cm};\ 50\text{ cm};\ 45\text{ cm};\ 40\text{ cm}}_{385\text{ cm}}$

hosszúak.

A létra elkészíthető 2 db 4,2 m-es lécből is.
Az egyik lécből 95 cm; 90 cm; 85 cm; 80 cm; 70 cm-est vágunk, a többit a másikból, így is marad 30 cm felesleg.

1532. a) A házszámok olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek differenciája 2.
$10\,791 = \dfrac{99[2a_1 + 98 \cdot 2]}{2}$, amiből $a_1 = 11;\ \ a_{99} = 11 + 98 \cdot 2 = 207.$
Tehát a 11-es számú ház elől indultunk és a 207-es számú ház elé értünk.

b) 12-től 208-ig a páros számok összege
$10\,791 + 99 = 10\,890$ a szemközti oldalon levő házszámok összege.

1533.

A helyezési sorrend:	I.	II.	III.	IV.
A pontok száma:	$\frac{4}{3}(x+d)$	$x+d$	x	$x-d\ \ (d>0)$

$\left(\dfrac{4}{3} + 3\right)x + \dfrac{4}{3}d = 59.$ Ebből $13x = 177 - 4d;\ \ 13x = 169 + 8 - 4d.$
A pontszámok pozitív egészek, ezért $177 - 4d$ osztható 13-mal. Az átalakításból látszik, hogy a $8 - 4d = 4(2-d)$ szorzatról kell megállapítani, hogy mely pozitív d esetén osztható 13-mal. Ez $d = 2$ esetében teljesül. Ekkor $13x = 169$. Ebből $x = 13$.
A fent említett 13-mal való oszthatóságnak $d = 15, 28\ldots$ is megfelel, de ekkor már $x - d$ negatív lenne, ami a feladat szövegének nem felel meg. A feladat egyetlen megoldása: $x = 13,\ \ d = 2$.
Az egyes csapatok pontszáma: 20, 15, 13, 11.
A megoldás a feladatban leírt feltételeknek eleget tesz.

1534. a) Mivel minden réteg 80 cm magas, és a zárókő teteje 40 m = 4000 cm magasan van, ezért 4000 : 80 = 50 rétegből áll a piramis, tehát 50 kőtömbréteg van egymás felett.

b) A piramisnak minden rétege egy kőtömbbel rövidebb oldalú négyzetet képez. Ezért, ha a legfelső réteg egy, a második $2 \cdot 2 = 4$, akkor az alsó, 50. réteg éppen $50 \cdot 50 = 2500$ kőtömbből áll.

Első megoldás:
A piramis egy oldallapján $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = 51 \cdot 25 = 1275$ kőtömböt lehet megszámolni. Mivel négy oldallap van, ezért ennek négyszeresét, 5100 kőtömböt számlálunk. A szélső kőtömböket (amik a piramis oldaléleinél vannak beépítve) azonban kétszer is megszámoljuk, ezek száma minden oldalélen 50, tehát $4 \cdot 50 = 200$ kőtömböt kétszer számolunk, ezeket le kell vonni. Ekkor azonban a legfelső egyetlen zárókövet négyszer is megszámoltuk, négyszer is kivontuk, vagyis eredményükhöz még 1-et hozzá kell adni, hogy azt is megszámoljuk. Így végül $5100 - 200 + 1 = 4901$ különböző kőtömböt látunk a felületen.

Másik megoldás:

A piramis minden rétegét négyzetszámnyi kőtömb alkotja felülről lefelé: 1, 4, 9, …, 2500. Ezek közül a felületen látható: 1, 4, $9-1=8$, $16-4=12$ stb. Hiszen egy, 2 tömbnél több oldalú négyzet esetén körben a szélső 1 sornyi kő látható kívülről, a többi nem – ezek pedig éppen az oldalhossznál 2-vel kevesebb élű négyzetet alkotnak. Vagyis általánosan: felülről az i-dik rétegből $i^2-(i-2)^2$ tömb látható kívülről ($2<i$). Ezek összege:

$1+4+(9-1)+(16-4)+\ldots+(50^2-48^2)=$

$=1^2+2^2+3^2+\ldots+50^2-(1^2+2^2+\ldots+48^2)=49^2+50^2=4901.$

1535. a) A napi veszteségek (dollárban kifejezve) egy 3 differenciájú számtani sorozat szomszédos tagjai. A sorozat első tagja 10.

Keressük azt a legnagyobb n természetes számot, amelyre igaz, hogy

$$\frac{20+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n\le 100\,000.$$

Rendezve: $3n^2+17n-200\,000\le 0$. Ennek megoldáshalmaza a valós számok halmazán a $[-261{,}048;\ 255{,}381]$ intervallum. A megoldáshalmaz legnagyobb pozitív egész eleme a 255, tehát legfeljebb 255 napig játszhatott a könnyelmű fiatalember.

b) $a_{10}=10+9\cdot 3=37$; $a_{200}=10+199\cdot 3=607$; $a_{255}=10+254\cdot 3=772$.

c) $S_{255}=\dfrac{10+772}{2}\cdot 255=997\,705$, tehát a 100 ezer dollárból még maradt 295.

1536. a) Folytatva a sorozat tagjainak felírását: $a_3=6=p\cdot a_2+q\cdot a_1=4p+2q$,

$a_4=8=p\cdot a_3+q\cdot a_2=6p+4q$.

Az első egyenletet 2-vel, a másodikat 4-gyel osztva: $\left.\begin{aligned}2p+q&=3\\1{,}5p+q&=2\end{aligned}\right\}$.

Különbségükből $p=2$, ezt visszaírva bármelyikbe, kapjuk: $q=-1$.

b) Egy számtani sorozatban bármely (nem első) tag a szomszédainak számtani közepe. Tehát $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, amiből $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$.

Ezért $p=2$ és $q=-1$.

(Természetesen ez a megoldás jó az a) ponthoz is.)

1537. $P=S_{50}=50a_1+\dfrac{50\cdot 49}{2}d=50a_1+1225d$ (amiből $a_1=\dfrac{P-1225d}{50}$, ez később kell majd);

$$Q=S_{100}-S_{50}=\left(100a_1+\frac{100\cdot 99}{2}d\right)-\left(50a_1+\frac{50\cdot 49}{2}d\right)=50a_1+3725d.$$

Ekkor $Q-P=2500d$, így $d=\dfrac{Q-P}{2500}$. Beírva ezt a_1 kifejezésébe, rendezés után: $a_1=\dfrac{149P-49Q}{5000}$.

1538. $1+2+3+\ldots+72=\dfrac{72(1+72)}{2}=2628$ $\left(S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}\right)$.

Ha bármelyik x ($x\in\mathbf{N}^+$; $1\le x\le 72$) szám előjelét ellentétesre változtatjuk, az összeg $2x$-szel, azaz páros értékkel csökken (változik).

Az eredeti összeg páros, két páros szám különbsége is páros, így a 2005-ös páratlan érték sosem érhető el.

1539. A feltétel szerint $\sin a_1=\sin(a_1+d)=\sin(a_1+2d)=\ldots=\sin(a_1+(n-1)d)$. Az első egyenlőségből egyrészt: $d=2k\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$; tehát a sorozat differenciája 0 (konstans sorozat), vagy 2π egész számú többszöröse, és ekkor a_1 tetszőleges – ez a többi egyenlőséget is kielégíti. Másrészt, ha $a_1=\pi-(a_1+d)+2m\pi$, akkor $d=(2m+1)\pi-2a_1$. Ezt beírva a második és harmadik tag egyenlőségébe, vagy $-a_1+(2m+1)\pi=-3a_1+2(2m+1)\pi+2n\pi$ következik, ahonnan $2a_1=(2m+1)\pi+2n\pi$ ($m, n\in\mathbf{Z}$); vagy $-a_1+(2m+1)\pi=\pi-(-3a_1+2(2m+1)\pi)+2n\pi$ következik, ahonnan $4a_1=-\pi+3(2m+1)\pi+2n\pi$, vagyis $2a_1=(3m+1+n)\pi$ ($m, n\in\mathbf{Z}$). Visszaírva ezeket d kifejezésébe, az első esetben $d=2n\pi$, a másodikban $d=\pi(n+m)$ adódik. Az a_1 az első esetben $\left(m+n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ alakú (bár d itt is π páros számú többszöröse, mint a másik ágon kaptuk legelőször, de ez mégsem tekinthető amaz speciális esetének, mert itt a sorozat szomszédos tagjainak *pótszögekként* egyenlő a szinuszuk; vagy csupa 1, vagy csupa -1 értékben!); a másodikban pedig $\dfrac{1}{2}(3m+n+1)\pi$ alakú (és ekkor d a π-nek páratlan számú többszöröse – mivel itt a sorozat minden tagja π többszöröse, a szinuszok mindig nullák.)

1540. Egy számtani sorozatban bármely (nem első) tag a szomszédainak számtani közepe. Tehát $\sin^2 x=\dfrac{\sin 2x+\cos 2x}{2}$, ebből $2\sin^2 x=2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$.

Mindkét oldalhoz $2\sin^2 x$-et adva a jobb oldalon teljes négyzetet állíthatunk elő: $4\sin^2 x=(\sin x+\cos x)^2$. Ebből $\pm 2\sin x=\sin x+\cos x$, amiből kettéágazás után: $\sin x=\cos x$ vagy $-3\sin x=\cos x$. Mivel egyik eset sem tud bekövetkezni, ha $\cos x=0$, ezt kizárva osztunk vele, és kapjuk, hogy $\operatorname{tg} x=1$ vagy $-\dfrac{1}{3}$. Visszakeresve a gyökök: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ vagy $-0{,}3218+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$).

1541. A keresett mértani sorozat tagjai: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7.
Az első három tag összege: $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 21$.
Az utolsó három tag összege: $a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 = 336$.
Mindkét egyenletből kiemeljük a közös tényezőt:

(I.) $a_1(1+q+q^2) = 21$

(II.) $a_1q^4(1+q+q^2) = 336$

(II. : I.) $q^4 = 16$, ebből $q = 2$ vagy $q = -2$

Ezeket behelyettesítjük I.-be: $q = 2 \Rightarrow a_1(1+2+4) = 21 \Rightarrow a_1 = 3$
$q = -2 \Rightarrow a_1(1-2+4) = 21 \Rightarrow a_1 = 7$

Két sorozatot kaptunk: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.
7, −14, 28, −56, 112, −224, 448.
A feladat feltételei teljesülnek a kapott értékekre.

1542. A második feltétel: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{a_2}{q} \cdot a_2 \cdot a_2q = a_2^3 = 729$. Ebből $a_2 = 9$.
Az első feltétel pedig: $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_2}{q} + a_2 + a_2q = a_2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 39$, beírva az iménti eredményt: $\frac{1}{q} + 1 + q = \frac{13}{3}$. Átrendezve: $q^2 - \frac{10}{3}q + 1 = 0$, amiből $q = 3$ vagy $\frac{1}{3}$. Az első esetben a mértani sorozat első három tagja 3, 9, 27; a másodikban 27, 9, 3.

1543. Egyrészt $a_6 = a_2q^4$, amiből $q = \pm\sqrt[4]{\frac{a_6}{a_2}} = \pm\sqrt[4]{\frac{12}{3}} = \pm\sqrt{2}$.

Másrészt $a_1 = \frac{a_2}{q} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Végül $S_{10} = a_1\frac{q^{10}-1}{q-1} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(\pm\sqrt{2})^{10} - 1}{\pm\sqrt{2} - 1} = \frac{3 \cdot 31}{2 \mp \sqrt{2}} = \frac{93(2 \pm \sqrt{2})}{4-2} =$

$= 46{,}5(2 \pm \sqrt{2}) \approx \begin{cases} 158{,}76 \\ 27{,}24 \end{cases}$.

1544. Egyrészt $a_9 = a_3q^6$, amiből $q = \pm\sqrt[6]{\frac{a_9}{a_3}} = \pm\sqrt[6]{\frac{24}{3}} = \pm\sqrt{2}$.

Másrészt $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 1{,}5$.

Végül $S_{12} = a_1\frac{q^{12}-1}{q-1} = 1{,}5 \cdot \frac{(\pm\sqrt{2})^{12} - 1}{\pm\sqrt{2} - 1} = \frac{1{,}5 \cdot 63}{-1 \pm \sqrt{2}} = \frac{94{,}5(-1 \mp \sqrt{2})}{1-2} =$

$= 94{,}5(1 \pm \sqrt{2}) \approx \begin{cases} 228{,}14 \\ -39{,}14 \end{cases}$.

1545. Egyrészt $a_4 - a_2 = a_1q^3 - a_1q = a_1q(q^2-1) = -6$.
Másrészt $a_2 + a_3 + a_4 = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = a_1q(1+q+q^2) = -6$.
Elosztva egymással a két egyenletet, a_1q (ami itt nem 0) kiesik, és kapjuk:
$\frac{q^2-1}{1+q+q^2} = 1$. Rendezés után $q = -2$. Ezt visszaírva bármelyik eredeti egyenletbe: $a_1 = 1$. A sorozat első négy tagja: 1, −2, 4, −8. Most valóban $-8-(-2) = -6$, valamint $-2+4+(-8) = -6$.

1546. Egy mértani sorozatban bármely (nem első) tag négyzete a szomszédainak szorzata. Tehát $a_4^2 = a_3 \cdot a_5 = 9$, amiből $a_4 = \pm 3$.
A másik feltétel: $a_2 + a_6 = -12{,}75 = \frac{a_4}{q^2} + a_4q^2 = \frac{\pm 3}{q^2} \pm 3q^2$, amiből rendezés után:
$0 = \pm q^4 + 4{,}25q^2 \pm 1$. Ennek gyökei a „+" jel esetén: $q^2 = -0{,}25$ vagy -4 (ezek lehetetlenek); a „–" jel esetén: $q^2 = 0{,}25$ vagy 4. Vagyis q lehet $\pm 0{,}5$ vagy ± 2, viszont a_4 csak −3 lehet. Ebből visszaszámolva $a_1 = \frac{a_4}{q^3}$ értéke ∓ 24 vagy $\mp 0{,}375$ lehet. Az összetartozó értékpárokat táblázatba foglalva, egyúttal az ellenőrzést is elvégezzük:

a_1	24	−24	0,375	−0,375
q	−0,5	0,5	−2	2
a_2	−12	−12	−0,75	−0,75
a_3	6	−6	1,5	−1,5
a_4	−3	−3	−3	−3
a_5	1,5	−1,5	6	−6
a_6	−0,75	−0,75	−12	−12
a_3a_5	9	9	9	9
$a_2 + a_6$	−12,75	−12,75	−12,75	−12,75

1547. A sorozat tagjai a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
$a_3 + a_4 = 80$
$a_5 - a_3 = 240$
Innen

$a_1q^2 + a_1q^3 = 80$

$a_1q^4 - a_1q^2 = 240$

Kiemeljük a közös tényezőket:

I. $\quad a_1q^2(1+q) = 80$

II. $\quad a_1q^2(q^2-1) = 240$

II : I $\quad q - 1 = 3 \Rightarrow q = 4$. Ezt behelyettesítjük az I.-be, kapjuk $a_1 = 1$.
A sorozat első öt tagja tehát: 1, 4, 16, 64, 256. A feltételek teljesülnek.

1548. $a_1 = 3$, $a_n = 729$, $S_n = 1092$. A mértani sorozat első öt tagját keressük.
Az a_n-re és S_n-re vonatkozó összefüggések szerint:

$3q^{n-1} = 729$, ezt 3-mal osztjuk $\qquad q^{n-1} = 243 \qquad$ I.

$3\dfrac{q^n-1}{q-1} = 1092$, ezt 3-mal osztjuk, $(q-1)$-gyel szorozzuk. $q^n - 1 = 364(q-1)$ II.

Ha az I.-es egyenletet q-val szorozzuk, akkor az így adódó $q^n = 243q$ értéket a II.-be helyettesítve rendezés után kapjuk, $121q = 363$, ahonnét $q = 3$.

A sorozat első öt tagja: 3, 9, 27, 81 és 243. A feladat követelményei teljesülnek, ui.: $3^{n-1} = 243$, innen $n = 6$ és $3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1092$.

1549. Ha a hét egymást követő tag közül a középsőt a-val, a hányadost pedig q-val jelöljük, akkor az egyes tagok rendre: $\dfrac{a}{q^3}$; $\dfrac{a}{q^2}$; $\dfrac{a}{q}$; a; aq; aq^2; aq^3.
E hét szám szorzata a^7, ezért a szöveg alapján $a^7 = 700$, vagyis $a = \sqrt[7]{700}$.
A megadott információkból tehát megállapítható, hogy a mértani sorozat tagjai között a $\sqrt[7]{700}$ is szerepel.

1550. Legyen a mértani sorozat három egymást követő eleme a; aq; aq^2 $(a \neq 0)$
A feltétel szerint $a + aq + aq^2 = 105 \quad$ (I.)

$\underline{aq - a = 15 \qquad\qquad (II.)}$

Emeljünk ki mindkét egyenletből „a”-t és osszuk el a két egyenletet egymással.

$\dfrac{1+q+q^2}{q-1} = 7 \qquad$ (III.)

$q \neq 1$, mert akkor a (II.) egyenlet ellentmondás lenne.
A (III.) egyenletet rendezve kapjuk:
$q^2 - 6q + 8 = 0$, melynek gyökei $q_1 = 2$; $q_2 = 4$.
A feltételeknek megfelelő két sorozat:
ha $q = 4$; $a = 5$, elemek: 5; 20; 80,
ha $q = 2$; $a = 15$, elemek: 15; 30; 60.

1551. Legyen a mértani sorozat első tagja „a”, hányadosa q.
A feltételeknek megfelelően:

I. $\quad a_6 + a_7 = 96$

II. $\quad \underline{a_8 - a_6 = 96}$

I. $\quad aq^5 + aq^6 = 96$

II. $\quad \underline{aq^7 - aq^5 = 96}$

Emeljünk ki mindkét egyenletből aq^5-t, alkalmazzuk $q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$ azonosságot!
A két egyenletet egymással elosztva $q = 2$ értéket kapjuk. ($q \neq \pm 1$, mert ebben az esetben valamelyik egyenlet ellentmondásra vezetne.)
Visszahelyettesítve bármelyik egyenletbe, $a = 1$ adódik.
Így $S_n = a\dfrac{q^n-1}{q-1}$, ha $q \neq 1$, azaz $1023 = 1 \cdot \dfrac{2^n-1}{2-1}$, ebből $n = 10$.
A sorozat tagjai: $a_6 = 2^5$; $a_7 = 2^6$; $a_8 = 2^7$; $n = 10$.
Ezekre az értékekre teljesül az eredeti feltétel.

1552. a) $3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{50} = \dfrac{3\cdot(3^{50}-1)}{3-1} = 1{,}077 \cdot 10^{24}$.

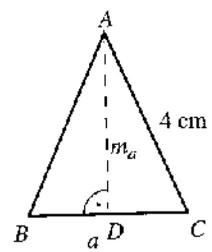
b) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{50} = 3^{1+2+3+\ldots+50} = 3^{1275} = 2{,}136 \cdot 10^{608}$.

1553. Első hajtáskor két réteg jön létre. Minden további hajtáskor a rétegek száma kétszereződik, az n-edik hajtás után a rétegek száma 2^n lesz,

a) 8 hajtás esetén $2^8 = 256$ réteget kapok.

b) $2^k = 64$, ebből $k = 6$, tehát a 6. hajtás után keletkezik 64 réteg.

1554. Mivel 4; a; m_a ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő tagja: $a^2 = 4m_a \quad$ (I.)
Egyenlő szárú háromszögben az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot. Így ADC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele szerint:

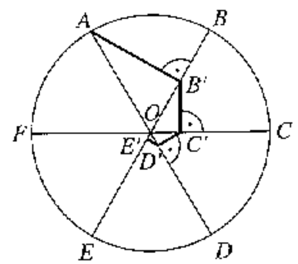


$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 = 16 \qquad$ (II.)

Az (I.) egyenletből a^2-et kifejezve, a (II.)-be behelyettesítve $m_a^2 + m_a - 16 = 0$,
melynek pozitív megoldása $m_a = \dfrac{\sqrt{65}-1}{2}$.

Így $m_a \approx 3{,}5$ cm; $a^2 = 2(\sqrt{65}-1)$, mivel $a > 0$ $\quad a = \sqrt{2\left(\sqrt{65}-1\right)} \approx 3{,}8$ cm hosszú az egyenlő szárú háromszög alapja.

1562.* Ha észrevesszük, hogy az A-ból induló átmérő azonos a D-ből indulóval, a töröttvonal három szakaszból tevődik össze.



Az ábra jelöléseit figyelembe véve az $OAB'\Delta$ egy OA oldalú szabályos háromszög fele, ezért $AB' = 3\sqrt{3}$.
(Itt felhasználtuk, hogy az a oldalú szabályos háromszög magassága $\frac{a}{2}\sqrt{3}$).

Mivel $OB'C'\Delta \sim OAB'\Delta$ és az arány $\frac{1}{2}$, ennek megfelelően $B'C' = 1{,}5\sqrt{3}$ és $C'D' = 0{,}75\sqrt{3}$.
Ezek összege: $(3 + 1{,}5 + 0{,}75)\sqrt{3} = 5{,}25\sqrt{3}$.
A töröttvonal hossza: $5{,}25\sqrt{3}$ cm $\approx 9{,}09$ cm.

Megjegyzés: A szóban forgó három szakasz hossza egy mértani sorozat egymás utáni tagjai, melynek első tagja $3\sqrt{3}$, hányadosa $\frac{1}{2}$.

Az első három tag összege: $3\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3 \cdot 7}{4}\sqrt{3} = \frac{21}{4}\sqrt{3}$.

1563. a) Az n-edik felezés után befestésre kerülő téglalap területe m²-ben mérve:

$$t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ az összesen befestett terület pedig } T_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Ha $n = 7$, akkor $T_7 = 1 - \frac{1}{2^7} = \frac{127}{128} = 0{,}9922$, azaz az 1 m oldalú négyzet területének 99,22%-a van befestve.

Ha $n = 10$, akkor $T_{10} = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024} = 0{,}9990$, azaz az 1 m oldalú négyzet területének 99,90%-a van befestve.

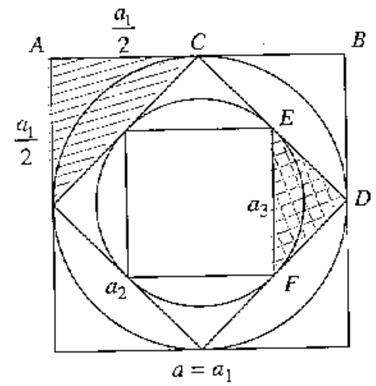
Ha $n = 20$, akkor $T_{20} = 1 - \frac{1}{2^{20}} = \frac{1\,048\,575}{1\,048\,576} = 0{,}999\,9990$, azaz az 1 m oldalú négyzet területének 99,999 90%-a van befestve (gyakorlatilag az egész négyzet).

Ha $n = 50$, akkor $T_{50} = 1 - \frac{1}{2^{50}}$. Ez matematikailag az 1-nél ($8{,}88 \cdot 10^{-16}$-nal) kisebb szám, gyakorlatilag 1 m² a befestett terület.

b) Rendre 0,0078 m², 0,0010 m² (10 cm²), 0,000 0010 m² (1 mm²), 0.

c) Rendre 19 844 s, 19 980 s, 20 000 s, 20 000 s.

1564. A négyzetek oldalai:
$a = a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$.
A négyzetek kerülete:
$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5,\ k_6$.
E kerületek összege: K.



A körök sugarai:
$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ r_5,\ r_6$.
A körök kerülete:
$k'_1,\ k'_2,\ k'_3,\ k'_4,\ k'_5,\ k'_6$.
E kerületek összege: K'.

I/1.
Az ábrán a vonalkázott háromszög egy $\frac{a}{2}$ oldalú négyzet fele, ezért $a_2 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, a kockázott háromszög oldala az előbbi mintájára $a_3 = \frac{a_2}{2}\sqrt{2} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \ \left(= \frac{1}{2}a\right)$.
A négyzetek oldalai egy olyan mértani sorozat egymás utáni tagjai, melynek első tagjai: $a = a_1$, hányadosa $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A kérdezett hatodik oldal hossza $a_6 = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = \frac{\sqrt{2}}{8}a$ ($\approx 0{,}18a$).

I/2.
Az első kör átmérője éppen az első négyzet oldalhosszával egyenlő, tehát

$r_1 = \frac{1}{2}a$ (*), a második kör sugara $r_2 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $r_3 = \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a$.

A körök sugarai mértani sorozatot alkotnak, ennek első tagja $\frac{1}{2}a$, hányadosa $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A kérdezett hatodik kör sugara $r_6 = \frac{1}{2}a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = \frac{\sqrt{2}}{16}a$.

Megjegyzés: r_6 értéke megállapítható a mértani sorozat képlete nélkül is. A *-os összefüggés alapján az $r_6 = \frac{1}{2}a_6 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{8}a = \frac{\sqrt{2}}{16}a$.

II/1.

$K = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 + 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 =$

$$= 4a\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \ldots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right) = 4a\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = 4a\frac{\frac{1}{8} - 1}{\frac{\sqrt{2}-2}{2}} = 4a\frac{-\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{2}-2}{2}} =$$

$$= 4a\frac{\frac{7}{4}}{2-\sqrt{2}} = 4a\frac{7(2+\sqrt{2})}{8}^{(**)} \qquad K = \frac{7(\sqrt{2}+2)}{2}a \quad (\approx 11{,}95a).$$

A hat négyzet kerületének összege $\approx 11{,}95a$ egység hosszú.

II/2.

$K' = k'_1 + k'_2 + k'_3 + k'_4 + k'_5 + k'_6 = 2r_1\pi + 2r_2\pi + 2r_3\pi + \ldots + 2r_6\pi =$
$= 2\pi(r_1 + r_2 + \ldots + r_6)$.

Minthogy a kör átmérője a köréírt négyzet oldalával egyenlő, kerülete $2r_1\pi = a\pi$.
A hat kör kerületének összege: $K' = 2\pi(r_1 + r_2 + \ldots + r_6) = \pi(a_1 + a_2 + \ldots + a_6)$.
Ennek a zárójeles kifejezésnek az értékét (azaz a négyzetek oldalának összegét) a II/1 **-os kifejezésben már megkaptuk.

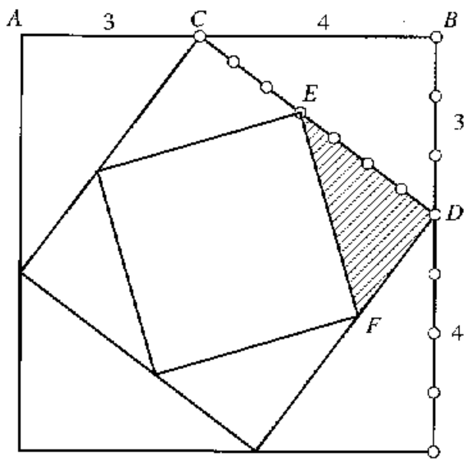
$$K' = \pi\frac{7(2+\sqrt{2})}{8}a \approx 9{,}4a.$$

Ezek szerint a körök kerületének összege: $\approx 9{,}4a$ egység hosszú.

1565. Az ábra alapján felírt Pitagorasz tételekből megállapítható, hogy ha az első négyzet oldala $AB = 7$,

a másodiké $CD = 7\cdot\frac{5}{7} = 5$,

a harmadiké $EF = 5\cdot\frac{5}{7}$, ... stb.



Ezek szerint a négyzetoldalak mértani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 7, hányadosa $\frac{5}{7}$.

a) Ennek alapján a hetedik négyzet oldala $a_7 = 7\left(\frac{5}{7}\right)^6$ (távolságegység) $\approx 0{,}93$ (távolságegység).

b) A hetedik négyzet területe $(a_7)^2 = \frac{5^{12}}{7^{10}} \approx 0{,}86$ (területegység).

c) Az első hét négyzet kerületének összege:

$$4\cdot 7\left[1 + \left(\frac{5}{7}\right) + \left(\frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \left(\frac{5}{7}\right)^5 + \left(\frac{5}{7}\right)^6\right] = 28\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^7 - 1}{\frac{5}{7} - 1} =$$

$$= 28\frac{5^7 - 7^7}{-2\cdot 7^6} \approx 88{,}70 \text{ (hosszúságegység).}$$

Megjegyzés: A feladat szövege megengedi azt az értelmezést is, hogy első négyzetnek a kiinduló négyzet után elsőként szerkesztett négyzetet tekintjük. Ekkor $a_1 = 5$, $a_7 = 5\left(\frac{5}{7}\right)^6$, a kerületek összege: $4\cdot 5\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^7 - 1}{\frac{5}{7} - 1} = 20\frac{5^7 - 7^7}{-2\cdot 7^6} \approx 63{,}36$ (hosszúságegység).

1566. Az első lépésben befesti a négyzet kilenced részét. A következő lépésben a maradék $\frac{8}{9}$ rész kilenced részét festi be, mert mind a nyolc fehér négyzetet kilenc egyenlő négyzetre bontja ezzel a harmadolási eljárással, s abból pontosan egyet fest be. A harmadik lépésben $8\cdot 8 = 64$ kis fehér négyzetet bont fel kilenc részre, s ennek egy kilenced részét festi be. Látható, hogy minden lépésben az előző lépésben befestett terület $\frac{8}{9}$ részét festi be. Tehát az öt lépésben befestett rész:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9} + \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^3 + \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^4 = \frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^5}{1-\frac{8}{9}} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^5 \approx 0{,}445, \text{ azaz}$$

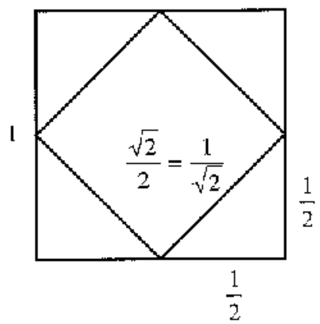
kb. 44,5%-a az eredeti négyzetnek. 1 m^2-es induló terület esetén ez kb. 0,445 m^2.

1567. a) Az első lépésben $\frac{1}{27}$ rész a lyuk. A második lépésben a maradék $\frac{26}{27}$ rész $\frac{1}{27}$ része lyuk. A következő lépésben a $\frac{26}{27}$ rész maradék $\frac{26}{27}$ részének $\frac{1}{27}$ része lyuk. A lyukak térfogata (illetve azok aránya a kiinduló térfogathoz képest) tehát egy $\frac{1}{27}$ kezdőtagú, $\frac{26}{27}$ hányadosú mértani sorozatot alkot. Tíz lépésig tehát összesen $\frac{1}{27}\cdot\frac{\left(\frac{26}{27}\right)^{10}-1}{\frac{26}{27}-1}=1-\left(\frac{26}{27}\right)^{10}\approx 0,314\,36$ rész, vagyis a szivacs térfogatának kb. 31,44%-a lyuk.

b) Ha ezt a végtelenségig folytatnánk, akkor a lyuk térfogata a teljes szivacshoz tartana, mivel 1-nél kisebb szám egyre nagyobb hatványai 0-hoz közelítenek, és így 1-ből egyre kevesebbet kell levonni, tehát közelítünk az 1-hez. Vagyis az egész szivacs lyuk lenne, ami lényegesen más eredmény az előzőhöz képest.

1568. a) Az eljárással minden lépésben az előző négyzet területét megfelezzük, tehát a területek sorozata 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, ... $\frac{1}{2^{100}}$. A területek összegére a mértani sorozat összegképletét alkalmazva $2-\frac{1}{2^{100}}$ adódik, ami kb. 2 egység.

b) A kerületek minden lépésben $\frac{1}{\sqrt2}$-ed részre csökkennek, mivel minden sarokban az ábra szerint $\frac{1}{2}$ egység hosszú két háromszög-oldalból $\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{\sqrt2}$ hosszú négyzet-oldal lesz. Ekkor is egy mértani sorozatot kell összegezni, csak a hányados változott, és a kezdőtag 4 egység kerületű. Azaz az összeg:



$$4+\frac{4}{\sqrt2}+\frac{4}{(\sqrt2)^2}+\frac{4}{(\sqrt2)^3}+\ldots+\frac{4}{(\sqrt2)^{100}}=4\cdot\frac{\frac{1}{(\sqrt2)^{101}}-1}{\frac{1}{\sqrt2}-1}=\frac{4\sqrt2}{\sqrt2-1}\cdot\left(1-\frac{\sqrt2}{2^{51}}\right)\approx$$

$\approx 13,657.$

c) A terület minden lépés után, igaz egyre kevesebbel, de kisebb, mint 2 egységnégyzet területe: az a)-beli eredmény szerint k lépés után $2-\frac{1}{2^k}$. Azaz nagyobb sohasem lehet.

Megjegyzés: Ha a feladat szövege alapján az első négyzet kerületét, illetve területét nem számolja bele a tanuló, akkor is elfogadható a megoldás, tehát a területnél 2 helyett 1 egység, illetve a kerületnél 13,657 helyett 9,657 is elfogadható.

1569. Ha a könyvek ára egy mértani sorozat egymást követő tagjai, akkor áruk: a; aq; aq^2. Ha $q>1$, akkor $a<aq<aq^2$, így

$$\left.\begin{aligned}&(\text{I.}) & a+aq+aq^2&=7280\\&(\text{II.}) & a+aq&=aq^2+1520\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&(\text{I.}) & a(1+q+q^2)&=7280\\&(\text{II.}) & a(1+q-q^2)&=1520\end{aligned}\right\}$$

Osszuk el a két egyenletet egymással:

$$\frac{1+q+q^2}{1+q-q^2}=\frac{91}{19}.$$

Rendezés után: $55q^2-36q-36=0$.
Ennek pozitív gyöke $q=1,2$, így $a=2000$.
Tehát a legolcsóbb könyv 2000 Ft, a középső 2400 Ft, a legdrágább 2880 Ft.

1570. Foglaljuk táblázatba mindkét üzem termelését a 80, illetve 100 egységes indulástól kezdve, az adott mértékű növekedéssel (egy tizedesre kerekítve), és keressük meg, mikor válnak (kb.) egyenlővé. Láthatólag ez 6 év múlva következik be.

	indulás	1. év	2. év	3. év	4. év	5. év	6. év	7. év
EM (10%)	80	88	96,8	106,5	117,1	128,8	141,7	155,9
KÜ (6%)	100	106	112,4	119,1	126,2	133,8	141,9	150,4

Másik megoldás:
Legyen a Kiváló Üzem induló évi termelése k_0, az Egyesült Műveké $e_0=0,8k_0$. Mindkét üzem évi termelése mértani sorozat szerint növekszik, n év múlva $k_0\cdot 1,06^n$, illetve $e_0\cdot 1,1^n$ lesz. Egyenletünk tehát $k_0\cdot 1,06^n=0,8k_0\cdot 1,1^n$, amiből $\left(\frac{1,06}{1,1}\right)^n=0,8$. Véve mindkét (pozitív) oldal logaritmusát: $n\cdot\lg\left(\frac{1,06}{1,1}\right)=\lg 0,8$, amiből $n\approx 6$.

1571.

	most (év végén)	2 év múlva	4 év múlva	6 év múlva
a) szerinti érték	2 MFt	1,445 MFt	1,044 MFt	0,7543 MFt
b) szerinti érték	2 MFt	1,125 MFt	0,6328 MFt	0,3560 MFt

1572. $t_0 = 200\,000$; $p = 20$, $t_4 = t_0\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)^4$ (értékcsökkenés)

$t_4 = 200\,000 \cdot 0{,}8^4 = 81\,920$. Négy év múlva 81 920 Ft a gép értéke.
A gép értéke n év múlva csökken az eredeti érték harmadára.

$$\frac{200\,000}{3} = 200\,000 \cdot 0{,}8^n.$$

200 000-rel való osztás után mindkét oldal lg-át vesszük, majd n-et kifejezzük:

$$n = \frac{-\lg 3}{\lg 0{,}8} \approx 4{,}92.$$

Az ötödik év folyamán csökken a gép értéke egyharmadára.

1573. a) Ha mértani sorozat szerint nőtt a terméshozam, akkor az első évit 100%-nak, azaz 1-nek véve, a második évben q, a harmadik évben q^2, az ötödik évben q^4 lett a terméshozam. Tudjuk, hogy ez 180%, azaz 1,8-szorosa az első évbeli termésnek, tehát: $q^4 = 1{,}8$, ahonnan $q \approx 1{,}1583$, tehát kb. 15,8% évi növekedést produkált a farmer. Így a közbülső három évben 115,8%, ($q^2 \approx 1{,}342 \Rightarrow$) 134,2% és ($q^3 \approx 1{,}554 \Rightarrow$) 155,4% volt a terméshozam.

b) Az első évi bevétel 14,2 millió Ft, utána mindig 1,1583-szoros a termés, de az ár is nő 6%-kal, tehát még 1,06-dal is kell szorozni az árnövekedés miatt. Ekkor az évenkénti árbevétel növekedési aránya ($1{,}1583 \cdot 1{,}06 \approx$) 1,2278, és van egy mértani sorozat 5 egymást követő tagja: $b_1 = 14{,}2$ (millió Ft), $q^* = 1{,}2278$. Ekkor

$$S_5 = 14{,}2 \cdot \frac{1{,}2278^5 - 1}{1{,}2278 - 1} = 62{,}338(1{,}2278^5 - 1) = 111{,}59 \text{ (millió Ft)},$$

azaz közel 111 millió 600 ezer Ft a teljes bevétel az 5 év alatt.

(Megjegyezzük, hogy a terméshozam növelése nélkül, csak az áremelkedést figyelembe véve mindössze 80,047 mFt, azaz 80 millió 47 ezer Ft körüli bevétele lett volna!)

1574. $700\,000 \cdot 1{,}0045^{50} = 876\,200$.
A városnak most kb. 876 ezer lakosa van.

1575. a) Ha mértani sorozat szerint nő a lakosság, akkor a 22. évben a kezdetinek a növekedés 21. hatványával vett szorzata adja a népesség számát:
$425\,000 \cdot q^{21} = 529\,000$, ahonnan $q^{21} \approx 1{,}2447$, vagyis $q \approx 1{,}0105$,
tehát 1,05%-kal nő évről évre a lakosság.

b) 2010-ben ezzel a növekedéssel számolva $529\,000 \cdot 1{,}0105^9 \approx 581\,030$ fő lesz a lakosok száma.

c) Minden lakost évente egyszer keresnek fel, tehát első évben, 2001-ben 529 000 lakost, aztán pedig ennek 1,0105-szörösét a 2. évben, és így tovább, akkor a látogatások száma a tíz év lakosai összege: $529\,000(1 + 1{,}0105 + \ldots + 1{,}0105^9) \approx$ $\approx 5\,547\,081$ látogatás kell.

1576. a) 8 órakor 1 lakos tudja,

8 óra 15 perckor $\quad 1 + 3$ lakos tudja $\quad$ (3 új),
8 óra 30 perckor $\quad 1 + 3 + 3 \cdot 3$ $\quad$ (9 új),
8 óra 45 perckor $\quad 1 + 3 + 3^2 + 9 \cdot 3$ $\quad$ (27 új),
n negyedóra alatt $\quad 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = 50\,000$.

Az egyenlet bal oldala egy olyan mértani sorozat $n + 1$ egymást követő tagja, melynek hányadosa $q = 3$.

$$\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = 50\,000$$

$$3^{n+1} = 100\,001$$

Mivel mindkét oldal pozitív, vehetjük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát $(n + 1)\lg 3 = \lg 100\,001$, ebből $n = 9{,}4795$, így $n = 10$ db negyedórát jelent, ez 2 és fél óra. Tehát 2 óra 30 perc alatt értesül róla 50 000 ember.

b) 8 órakor 1 lakos tudja

8 óra 15 perckor $\quad 1 + 3$,
8 óra 30 perckor $\quad 1 + 3 + (1 + 3) \cdot 3 = (1 + 3)(1 + 3) = (1 + 3)^2$,
8 óra 45 perckor
$\quad [1 + 3 + (1 + 3) \cdot 3] + [1 + 3 + (1 + 3) \cdot 3] \cdot 3 = (1 + 3)^2 \cdot (1 + 3) = (1 + 3)^3$,
$8 + n \cdot 15$ perckor $\quad (1 + 3)^n = 50\,000$
$\quad n \lg 4 = \lg 50\,000$
$\quad n = 7{,}8$,

$7{,}8 \cdot 15$ perc $= 117$ perc $= 1$ óra 57 perc, tehát 2 óra múlva tudja 50 000 ember.

1577. a) $50 \cdot 0{,}98 = 49$ (km); $50 \cdot 0{,}98^2 = 48{,}02$ (km); $50 \cdot 0{,}98^5 = 45{,}20$ (km);
$50 \cdot 0{,}98^{28} = 28{,}40$ (km).

b) Akkor juthat a legmesszebb, ha nem változtat irányt.

$$S_{28} = 50 \cdot (0{,}98 + 0{,}98^2 + 0{,}98^3 + \ldots + 0{,}98^{28}) = 50 \cdot \frac{0{,}98 \cdot (0{,}98^{28} - 1)}{0{,}98 - 1} =$$

$= 1058{,}5$, tehát legfeljebb 1058,5 km távolságra juthatott a hajó 28 óra alatt.

c) Megoldandó az $1400 = 50 \cdot \dfrac{0{,}98 \cdot (1 - 0{,}98^n)}{0{,}02}$ egyenlet.

Rendezve: $0{,}98^n = 0{,}4286$, amiből $n = \dfrac{\lg 0{,}4286}{\lg 0{,}98} = 41{,}94$,
tehát 42 óra alatt 1400 km-re is eljuthat a hajó.

d) Megoldandó a $2500 = 50 \cdot \dfrac{0{,}98 \cdot (1 - 0{,}98^n)}{0{,}02}$ egyenlet.

Rendezve: $0{,}98^n = -0{,}02$. Ez lehetetlen, hiszen a 0,98 minden hatványa pozitív. A hajó nem juthat el 2500 km távolságra.

1578. Minden kiöntés után annak a sómennyiségnek a 90%-a marad meg, ami a kiöntés előtt az oldatban volt. A víz hozzáöntésével ez a mennyiség nem változik.
Tehát a 25. kiöntés után $50 \cdot 0{,}9^{25} = 3{,}59$ gramm só marad az oldatban.

1579. a) Az oldat töménysége az első lépés után: 80%-os oldat volt 25 literben, tehát 20 liter alapanyag van 5 liter vízzel keverve. Első kiöntésnél 0,8 liter anyag, és 0,2 liter víz megy ki, de bejön 1 liter víz. Tehát $\dfrac{19{,}2}{25} = 76{,}8\%$-os a töménység.
A következő lépésben kimegy 0,768 liter alapanyag, marad tehát 18,432 liter, ami 73,728%-os töménységet jelent. A harmadik lépésben kimegy 0,737 28 liter alapanyag, marad 17,694 72 liter, ami 70,78%-nak felel meg, kis kerekítéssel.

b) Elérhető, hiszen minden lépésben, amíg 50%-nál töményebb az oldat, legalább 0,5 liter alapanyag kikerül, s így a 20 literből 15. lépésben már biztos kimegy legalább 7,5 liter, azaz legfeljebb 12,5 liter marad, ami az 50%-os töménységet jelenti. Tehát legfeljebb 15 lépésben elérhető az 50%-os oldat!

c) Erre a kérdésre csak úgy tudunk válaszolni, ha észrevesszük a szabályszerűséget a kiöntögetés és az oldat töménységének változása között. Észre kell venni, hogy a töménység egy mértani sorozat szerint csökken, minden lépésben $\dfrac{24}{25}$-del (0,96-dal) szorzódik az előtte levő töménység. Ezt onnan lehet a legkönnyebben látni, hogy ha éppen $100p\%$-os a 25 literes oldat, akkor ebből $24p$ alapanyag lesz 1 liter oldat kivételével, de mivel 1 liter tiszta víz jön be, ezért $24p$ alapanyag 25 literben lesz, tehát a töménység $\dfrac{24p}{25}$. Azaz tényleg $\dfrac{24}{25}$-del szorzódik minden lépésben az előző töménység.
Eszerint a 100. töltögetés után $0{,}8 \cdot 0{,}96^{100} \approx 0{,}0135$, azaz 1,35%-os már csak az oldat. (Végül lassan teljesen „elvizesedik", pl. 1000 lépés után már csak $1{,}49 \cdot 10^{-16}\%$-os oldatunk van, ez már nyugodtan vehető tiszta víznek. Így már a b) kérdésre is pontos választ adhatunk, hiszen annyi lépés kell, amíg $0{,}8 \cdot \left(\dfrac{24}{25}\right)^n = 0{,}5$, azaz $0{,}625 = 0{,}96^n$, ahonnan $n \approx 11{,}51$, tehát a 11. kiöntésnél még töményebb (kb. 51%-os) az oldat, míg a 12. töltés után már csak kb. 49%-os.)

1580. $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{27} = 2^{28} - 1$ fillért kellene fizetnie. Ez 2 684 355 forinttal egyenlő.

1581. 1. év vége $2500 \cdot 1{,}05$ (5% gyarapodás),
2. év vége $2500 \cdot 1{,}05^2 \cdot 0{,}97$ (5% gyarapodás, 3% vágás),
3. év vége $2500 \cdot 1{,}05^3 \cdot 0{,}97$,
4. év vége $2500 \cdot 1{,}05^4 \cdot 0{,}97^2$,
$\vdots$
12. év vége $2500 \cdot 1{,}05^{12} \cdot 0{,}97^6 = 3740$ sertés lesz 12 év múlva.

1582. a) Évente 2500 kWh a társasház villanyfogyasztása, amelynek értéke: 60 000 Ft, a gázfogyasztás 8000 m^3, amelynek ára: 288 000 Ft. Az összes költség így: 348 000 Ft. Ha a villany ára 10%-kal nőtt (és a fogyasztás változatlan marad), akkor a kiadás 60 000 Ft helyett 66 000 Ft lesz; míg a gáz 6%-kal drágul, így a számla 305 280 Ft lesz. Így a teljes költség: 371 280 Ft lett, ami 1,066 897-szeres, azaz kb. 6,7%-os növekedést jelent. Mivel a számlában a gáz szerepel nagyobb súllyal, ezért a 6 és 10%-os növekedésnek nem a számtani közepe, hanem a 6%-hoz közelebbi 6,7% lesz a költségnövekedés.

b) Ha következő két évben is 6%, illetve 10%-kal nőnek az árak, akkor a harmadik évre a gáz $1{,}06^3 = 1{,}191$-szeresre, azaz kb. 19,1%-kal drágul, míg a villany $1{,}1^3 = 1{,}331$-szeresre, azaz 33,1%-kal. Így a villanyköltség $60\,000 \cdot 1{,}331 = 79\,860$ Ft, a gázé pedig: $288\,000 \cdot 1{,}191 = 343\,013$ Ft lesz. A teljes költség pedig: 422 873 Ft, ami a három év alatt kb. 21,5%-os növekedésnek felel meg. Természetesen ez a szám most is a gáz 19,1%-os növekedéséhez van közelebb, szemben a villany 33,1%-ával.

1583. A válaszhoz egyszerűen végig kell követni a 10 év változásait. Kezdetben 100 egység volt, akkor az első két évben az 5-5%-os növekedéssel 105, illetve 110,25 egység lett. Utána háromszor 4% csökkenés (azaz 0,96-szoros változás) jött: 105,84; 101,61; 97,54. Utána jön négy év 3%-os (1,03-szoros) növekedés: 100,47; 103,48; 106,59; 109,78. Ezután következik egy 8%-os (0,92-szoros) visszaesés: 101,00 – azaz végül a 10 év alatt összességében 1%-kal nőtt a gazdaság teljesítménye. (Közvetlenül is megkaphatjuk ezt a $100 \cdot 1{,}05^2 \cdot 0{,}96^3 \cdot 1{,}03^4 \cdot 0{,}92$ szorzás révén.)

1584. a) Egy mértani sorozatot fognak alkotni az egyes évek végén felvehető összegek, a hányados 1,12 (mivel 12%-os a kamat), a kezdőérték 500 000 Ft. Első év végén 560 000 Ft-unk lesz, második év végén 627 200 Ft, s így tovább.

b) 10 év múlva $500\,000 \cdot 1{,}12^{10} = 1\,552\,924$ Ft-unk lesz.

1585. A bankba betett összeg $t_0 > 0$, n év alatt növekszik kétszeresére.
$2t_0 = t_0 \cdot 1{,}0825^n$.
t_0-lal való osztás után mindkét oldal lg-át vesszük, majd kifejezzük az n-et.
$n = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}0825} \approx 8{,}74.$
A bankba betett pénz a 9. év folyamán növekszik kétszeresére.

1586. Minden évben igaz, hogy az év elején meglévő pénzünk 1,09-szeresére növekszik év végére. Ha a kezdeti összeg n év alatt nő ötszörösére, akkor igaz, hogy $1{,}09^n = 5$. Ebből $n \cdot \lg 1{,}09 = \lg 5$, $n = \dfrac{\lg 5}{\lg 1{,}09} \approx 18{,}7$, tehát körülbelül 19 év alatt növekedne ötszörösére a betett tőke.

1587. A 10 évesnek x Ft-ot tesznek a bankba, ez 8 év múlva $x \cdot 1{,}05^8$ Ft-ot ér.
A 12 évesnek y Ft-ot tesznek a bankba, ez 6 év múlva $y \cdot 1{,}05^6$ Ft-ot ér.
A 13 évesnek $(800\,000 - x - y)$ Ft-ot tesznek a bankba,
ez 5 év után $(800\,000 - x - y) \cdot 1{,}05^5$ Ft-ot ér.
A feltételeknek megfelelően:
A két fiú egyenlő összeget kap: $x \cdot 1{,}05^8 = y \cdot 1{,}05^6$ (I.)
(II.) $(800\,000 - x - y) \cdot 1{,}05^5 = x \cdot 1{,}05^8 + y \cdot 1{,}05^6$, mert a lány annyit kap, mint a két fiú együttvéve.
Az (I.) egyenletből $y = 1{,}1025x$, ezt (II.)-be helyettesítve: $x = 181\,088$.
Tehát a 10 éves számlájára $x = 181\,088$ Ft-ot tegyenek, (ez 8 év után 267 549 Ft-ot ér), a 12 éves számlájára $y = 199\,649$ Ft-ot tegyenek (ez 6 év után 267 549 Ft-ot ér) a 13 éves számláján 419 263 Ft legyen (ez 5 év után 535 097 Ft-ot ér).

1588. Ha három évig volt bent 2 000 000 Ft-unk egy bankban, s a kamat állandó volt, és év végén tőkésítették, azaz kamatos kamatot számítunk és 2 590 058 Ft lett a végére, akkor $2\,000\,000 \cdot q^3 = 2\,590\,058$, ahonnan $q = 1{,}09$, vagyis 9%-os az éves kamat.

1589. $120 \cdot 1{,}14^{10} = 444{,}9$ ezer tallér.

1590. a) A január elején elhelyezett 10 ezer batka után év végén 12% kamat jár, a február elején elhelyezett 10 ezer batka után 11%, és így tovább. A december elején elhelyezett 10 ezer batka után 1% kamat jár az év végén.
Az első év végén a betétkönyvben lévő összeg két részből tevődik össze:
a befizetett tőke 120 ezer batka,
a kamatok összege pedig $10 \cdot (0{,}12 + 0{,}11 + 0{,}10 + \ldots + 0{,}01)$ ezer batka.

A zárójeben álló összeg a számtani sorozat összegképletével is kiszámítható: $\dfrac{0{,}12 + 0{,}01}{2} \cdot 12 = 0{,}78$, ezért a kamatból származó összeg 7,8 ezer batka.
Az első év végén 127,8 ezer batka lesz a betétkönyvben.

b) A második év végén 127,8 ezer batkánk lesz az év során havonta befizetett 10 ezer batkákból és azok kamataiból, továbbá az első év végén rendelkezésre álló 127,8 ezer batka és ennek az egész éves kamata is a szerepel a végösszegben. Összesen tehát $127{,}8 + 127{,}8 \cdot 1{,}12 = 270{,}9$ ezer batka lesz a 2. év végén a betétkönyvben.

c) A b)-ben leírt gondolatmenet ismétlésével a 3. év végén
$127{,}8 + 127{,}8 \cdot 1{,}12 + 127{,}8 \cdot 1{,}12^2 = 431{,}2$ ezer batkánk lesz,
a 4. év végén
$127{,}8 + 127{,}8 \cdot 1{,}12 + 127{,}8 \cdot 1{,}12^2 + 127{,}8 \cdot 1{,}12^3 = 610{,}8$ ezer batkánk,
a 10. év végén pedig
$127{,}8 + 127{,}8 \cdot 1{,}12 + 127{,}8 \cdot 1{,}12^2 + \ldots + 127{,}8 \cdot 1{,}12^9 =$
$= 127{,}8 \cdot (1 + 1{,}12 + 1{,}12^2 + \ldots + 1{,}12^9)$ ezer batkánk.
A zárójelben álló tíztagú összeg a mértani sorozat összegképletével is kiszámítható: $S_{10} = \dfrac{1{,}12^{10} - 1}{1{,}12 - 1} = 17{,}55.$
A 10. év végén rendelkezésünkre álló összeg tehát $127{,}8 \cdot 17{,}55 = 2242{,}9$ ezer batka. Ez kevesebb annál a 2,5 millió batkánál, amibe az autó kerül.

1591. a) n év múlva a 10 millió Ft $10 \cdot 1{,}05^n$ millió forintra növekszik. A feltétel szerint $10 \cdot 1{,}05^n \geq 12$, amiből $n \geq \dfrac{\lg 1{,}2}{\lg 1{,}05} = 3{,}74.$
Az ösztöndíj 4 év eltelte után kezdődhet.

b) 4 év alatt a kezdetben 10 millió forintos tőke $10 \cdot 1{,}05^4 = 12{,}155$ millió forintra nőtt. Ha minden évben, az év elején x forintot szánnak az 5 tanuló ösztöndíjára összesen, akkor az első év végén a megmaradó összeg $(12{,}155 - x) \cdot 1{,}05 =$ $= 12{,}155 \cdot 1{,}05 - 1{,}05x$ millió forint lesz. Ebből az összegből a második év elején ismét x forint ösztöndíjat fizetnek ki, ezért a 2. ösztöndíj kifizetése után megmaradó összeg $(12{,}155 \cdot 1{,}05 - 1{,}05x - x)$ millió forint, ami újabb egy évig kamatozik. A harmadik ösztöndíj kifizetése után $(12{,}155 \cdot 1{,}05^2 - 1{,}05^2x - 1{,}05x - x)$ millió forint lesz a számlán. A 25. ösztöndíj kifizetése után a számlán nem marad pénz, ezért a fenti gondolatmenet folytatásával azt kapjuk, hogy:
$12{,}155 \cdot 1{,}05^{24} - 1{,}05^{24}x - 1{,}05^{23}x - \ldots - 1{,}05^2x - 1{,}05x - x = 0.$
Rendezve: $39{,}20 - (1{,}05^{24} + 1{,}05^{23} + \ldots + 1{,}05^2 + 1{,}05 + 1)x = 0.$

A zárójelben álló 25 tagú összeget a mértani sorozat összegképletével is kiszámíthatjuk: $S_{25} = \dfrac{1,05^{25} - 1}{1,05 - 1} = 47,727$; tehát a $39,20 - 47,727x = 0$ egyenlet megoldása szolgáltatja a keresett éves ösztöndíj összegét, ami 0,8213 millió forintnak adódik.

Egy-egy tanuló tehát 164 260 forintos ösztöndíjban részesülhet az év elején.

1592. a) Az év végén felvehető összeg $10 \cdot 1,148 = 11,48$ millió forint.

b) Az év végén felvehető összeg $10 \cdot 1,071^2 = 11,47$ millió forint (ami 14,7%-os éves kamatnak felel meg).

c) Az év végén felvehető összeg $10 \cdot \left(1 + \dfrac{14,1}{36\,500}\right)^{365} = 11,51$ millió forint (ez 15,1%-os éves kamatnak felel meg).

A c) típusú befektetés a legelőnyösebb.

1593. Ha n hónapig minden hónap végén tőkésítik a kamat összegét, akkor a feltétel szerint: $250\,000 \cdot 1,01^n = 300\,000$, ahonnan $1,01^n = 1,2$; amiből $n \approx 18,3$, azaz legalább 19 hónap kell, hogy egyenlegünk túllépje a 300 000 Ft-ot, ami 1 év 7 hónapi lekötést jelent.

1594. Minden hónap végén 15 000 Ft-ot tesznek be a számlára, és éves szinten 7,5% a kamat, amit havonta számolnak el, tehát havonta $\sqrt[12]{1,075} \approx 1,006$, azaz 0,6%-os kamatot fizetnek. Nézzük a hároméves folyamatot, ami 36 hónapot jelent. Az első hónap végén $15\,000 \cdot 1,006 = 15\,090$ Ft-unk lesz, amihez beteszünk 15 000 Ft-ot és ez kamatozik tovább.

A második hónap végén $(15\,000 \cdot 1,006 + 15\,000) \cdot 1,006 = 30\,270$ Ft, valamint az éppen megtakarított 15 000 Ft, azaz 45 270 Ft pénzünk lesz. Kiemelve a 15 000 Ft-ot, ezt úgy is felírhatjuk, hogy $15\,000(1,006^2 + 1,006)$, s ehhez jön a megtakarított 15 000 Ft, így összesen $15\,000(1,006^2 + 1,006 + 1)$ Ft-unk van a kezdet után két hónappal hó végén. Nem nehéz látni, hogy ezt folytatva 36 hónap múlva a következő összeg adja meg a pénzünket:

$$15\,000 \cdot (1,006^{36} + 1,006^{35} + \ldots + 1,006 + 1) = 15\,000 \cdot \frac{1,006^{37} - 1}{1,006 - 1} \approx$$

$$\approx 15\,000 \cdot \frac{1,247\,74 - 1}{0,006} \approx 619\,358 \text{ Ft.}$$

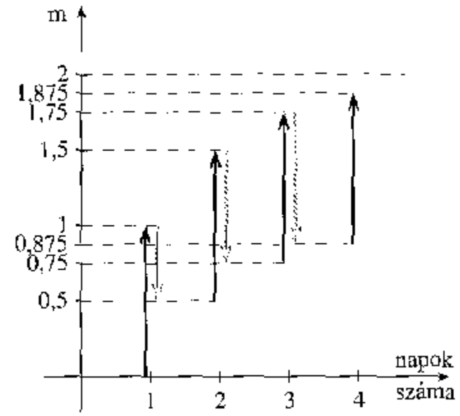
Ha otthon gyűjtenék a párnában, akkor $37 \cdot 15\,000 = 555\,000$ Ft-juk lenne. A bankban kb. 11,6%-kal több pénzük lesz.

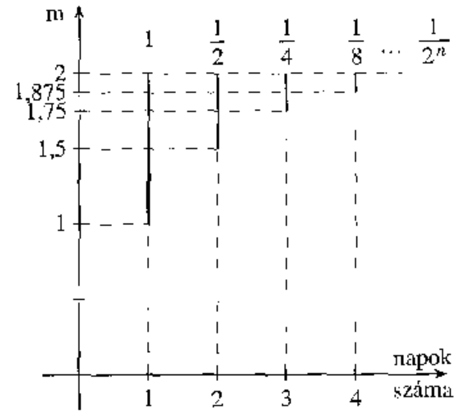
1595. Az előző feladathoz hasonlóan havi kamat elszámolás van, de most évi 7%-os kamattal, a havi kamatszorzó így: $\sqrt[12]{1,07} \approx 1,005\,654$. Ezúttal a havi megtakarítás a kérdés, ha 3 év után 645 800 Ft-ot vettek fel. A folyamat hasonló, így az egyenlet is, ahol x jelöli a havi megtakarítást:

$x(1,005\,654^{36} + 1,005\,654^{35} + \ldots + 1,005\,654 + 1) \approx 645\,800.$

Innen $x \cdot \dfrac{1,005\,654^{37} - 1}{1,005\,654 - 1} \approx x \cdot \dfrac{1,231\,97 - 1}{0,005\,654 - 1} \approx 41,028x \approx 645\,800$, amiből 15 740 Ft havi megtakarítás adódik.

1596. Az ábrán feketével jelöltük a nappal megtett 1-1 méter utat, szürkével az éjszakai lecsúszásokat méterben mérve.





$$1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{7}{8} + 1 = 4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}\right) = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Ezek szerint a csiga a negyedik nap estéjén éri el az első falevelet.

A számolás leegyszerűsíthető, ha összefogjuk páronként a nappali és aznap éjszakai „teljesítmény" végeredményét.

Ekkor a keresett részösszegek összege: $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right) + 1 = \dfrac{7}{8} + 1 = 1,875.$

Azt, hogy a 2 méter magasságot eléri-e a csiga és mikor, könnyebb úgy megállapítani, hogy azt vizsgáljuk, a naponta elért magassághoz képest még mennyi van hátra. Ez 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{16}$, ... fogyó mértani sorozat, de akárhányadik tagját nézzük, az mind pozitív. Ez azt jelenti, hogy a csiga nem jut el a bőséges lakomát kínáló faághoz.

Megjegyzés:
Ahhoz, hogy a csiga elérje a 2 méteres magasságot, olyan n-et kellene találni, amelyre $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ legyen. Ilyen n nincs. Tehát a 2 méteres magasságot nem éri el.
Ez a tény szemléltethető úgy is, hogy a csiga naponta mindig a 2 méterig fennmaradó útnak a felével jut feljebb. A fennmaradó út egyre csökken, de nem nulla.

1597. Az összegből emeljük ki a 62 400 · 1,08 szorzatot:
$62\,400 \cdot 1{,}08 \cdot (1{,}08^{43} + 1{,}08^{42} + 1{,}08^{41} + \ldots + 1{,}08 + 1)$. A zárójelben álló 44-tagú összeget a mértani sorozat összegképletével is kiszámíthatjuk:
$S_{44} = \dfrac{1{,}08^{44} - 1}{1{,}08 - 1} = 356{,}95$, tehát a megtakarítható összeg
$62\,400 \cdot 1{,}08 \cdot 356{,}95 = 24\,056\,000$ forint (több mint 24 millió forint).

1598. a) Az egy hónapos pénzhasználati díj 2,5%, ami éves szinten 30%-ot jelent.

b) A hiteldíj mutató legyen p%, azaz havi $\frac{p}{12}$%.

Az első hónapban a 100 ezer forint használatáért a hónap végén $\frac{p}{12}$ ezer forint kamatot kell fizetni, ezért a tartozás $100 + \frac{p}{12}$ ezer forintra nőtt. Ebből a hónap végén 51 250 forintot törlesztünk, tehát $48{,}75 + \frac{p}{12}$ ezer forintot további egy hónapig használunk. Ezért a hónap végén ismét $\frac{p}{12}$%-os kamatot kell fizetni. A tartozásunk a 2. hónap végén így $\left(48{,}75 + \frac{p}{12}\right)\left(1 + \frac{p}{1200}\right)$ ezer forint, ami a szöveg szerint éppen 51 250 forinttal egyenlő: $\left(48{,}75 + \frac{p}{12}\right)\left(1 + \frac{p}{1200}\right) = 51{,}25$.

Rendezve: $p^2 + 1785p - 36\,000 = 0$.

A megoldóképletből $-1804{,}9$ és $19{,}945$ adódik, de csak a pozitív gyök lehetséges. Az éves kamat ebben az esetben 19,945%-os volt (ez havi 1,662 %-os kamatot jelent).

Ellenőrzés:
Az első hónap végi egyenleg a törlesztőrészlet visszafizetése után:
$100\,000 \cdot 1{,}016\,62 - 51\,250 = 50\,412$ forint, a második hónap végén pedig
$50\,412 \cdot 1{,}016\,62 - 51\,250 = -0{,}2$ Ft az egyenleg, tehát megfelel a feladat szövegének. (A nullától különböző egyenleget a számolás során alkalmazott kerekítések okozzák.)

c)

	Tartozás (eFt)	Tartozás másképpen (eFt)
1. hónap vége	$100 \cdot 1{,}025 - x$	$102{,}5 - x$
2. hónap vége	$100 \cdot 1{,}025^2 - x \cdot 1{,}025 - x$	$105{,}063 - x \cdot (1{,}025 + 1)$
3. hónap vége	$100 \cdot 1{,}025^3 - x \cdot 1{,}025^2 - x \cdot 1{,}025 - x$	$107{,}689 - x \cdot (1{,}025^2 + 1{,}025 + 1)$
4. hónap vége	$100 \cdot 1{,}025^4 - x \cdot 1{,}025^3 - \ldots - x$	$110{,}381 - x \cdot (1{,}025^3 + 1{,}025^2 + \ldots + 1)$
5. hónap vége	$100 \cdot 1{,}025^5 - x \cdot 1{,}025^4 - \ldots - x$	$113{,}141 - x \cdot (1{,}025^4 + 1{,}025^3 + \ldots + 1)$
6. hónap vége	$100 \cdot 1{,}025^6 - x \cdot 1{,}025^5 - \ldots - x$	$115{,}969 - x \cdot (1{,}025^5 + 1{,}025^4 + \ldots + 1)$

d) A zárójelben álló 6-tagú összeget a mértani sorozat összegképletével számolva:
$S_6 = \dfrac{1{,}025^6 - 1}{1{,}025 - 1} = 6{,}388$, ezért a megoldandó egyenlet: $115{,}969 - 6{,}388x = 0$.
Ebből $x = 18{,}154$ adódik, tehát a havi törlesztőrészlet 18 154 Ft.

Ellenőrzés:
Táblázatkezelő program segítségével, ahol a képletek az alábbiak lehetnek:

	A	B
1	kölcsön	100 000
2	1. hónap végi egyenleg	= B1 · 1,025 – 18 154
3	2. hónap végi egyenleg	= B2 · 1,025 – 18 154
4	3. hónap végi egyenleg	= B3 · 1,025 – 18 154
5	4. hónap végi egyenleg	= B4 · 1,025 – 18 154
6	5. hónap végi egyenleg	= B5 · 1,025 – 18 154
7	6. hónap végi egyenleg	= B6 · 1,025 – 18 154

Az eredmény a következő:

kölcsön	100 000
1. hónap végi egyenleg	84 346
2. hónap végi egyenleg	68 301
3. hónap végi egyenleg	51 854
4. hónap végi egyenleg	34 997
5. hónap végi egyenleg	17 717
6. hónap végi egyenleg	6

Ez azt mutatja, hogy a havi törlesztőrészlet valóban megfelel a szövegnek. (A 6 forintos egyenleg a kerekítések miatt adódik, valójában 18 154,94 Ft lenne a havi törlesztőrészlet.)

1599. A nyolcadik részlet kifizetése után az adósságunk 0, ezért

$1\,600\,000 \cdot 1{,}145^8 - x \cdot 1{,}145^7 - x \cdot 1{,}145^6 - \ldots - x \cdot 1{,}145 - x = 0.$

Kiemeléssel így is írható a fenti egyenlet:

$4\,726\,764 - (1{,}145^7 + 1{,}145^6 + \ldots + 1{,}145 + 1) \cdot x = 0.$

A zárójelen belül álló 8-tagú összeget a mértani sorozat összegképletével is kiszámíthatjuk: $S_8 = \frac{1{,}145^8 - 1}{1{,}145 - 1} = 13{,}4774.$ Ezzel a megoldandó egyenlet a következő alakú lesz: $4\,726\,764 - 13{,}4774x = 0$, amiből $x = 350\,718$, tehát az év végi törlesztőrészlet 350 718 Ft.

Ellenőrzés:

Foglaljuk táblázatba (pl. táblázatkezelő program segítségével) az egyes törlesztőrészletek után fennálló egyenlegeket:

kölcsön	1 600 000
1. törlesztés után	1 481 282
2. törlesztés után	1 345 350
3. törlesztés után	1 189 708
4. törlesztés után	1 011 497
5. törlesztés után	807 446
6. törlesztés után	573 808
7. törlesztés után	306 292
8. törlesztés után	–13

A 8. törlesztés utáni egyenleg csak a kerekítések miatt különbözik 0-tól.

1600. A 10. pénzfelvétel után nem maradt pénze G. J.-nek, ezért az

$x \cdot 1{,}08^{10} - 1{,}08^9 - 1{,}08^8 - \ldots - 1{,}08 - 1 = 0$ egyenletet kell megoldani.

$x \cdot 2{,}159 - (1{,}08^9 + 1{,}08^8 + \ldots + 1{,}08 + 1) = 0,$

$2{,}159x - \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1} = 0,$

$2{,}159x - 14{,}487 = 0.$

Ebből $x = 6{,}71$ adódik, vagyis 6,71 millió peták tőkére van szüksége G. J.-nek terve megvalósításához.

Ellenőrzés:

Foglaljuk táblázatba (pl. táblázatkezelő program segítségével) az egyes pénzfelvételek után megmaradt tőke nagyságát (millió petákban).

tőke	6,71		
1. kivét után	6,2468	6. kivét után	3,3120
2. kivét után	5,7465	7. kivét után	2,5770
3. kivét után	5,2063	8. kivét után	1,7831
4. kivét után	4,6228	9. kivét után	0,9258
5. kivét után	3,9926	10. kivét után	–0,0002

A 10. kivét utáni egyenleg csak a kerekítések miatt különbözik 0-tól.

1601. a) A kölcsönadó szempontjából a következő a helyzet: „befektetett" évi p%-os kamatra 1,5 millió forintot, majd két év elteltével 1,92 millió forintot kapott. Ezért

$$1{,}5 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}92.$$

Ebből $p = 13{,}14$ adódik ($p > 0$), vagyis 13,14%-os éves kamatra adott kölcsön.

b) A 24. átutalás után a számlán lévő összeg:

$$80\,000 \cdot (1{,}01^{23} + 1{,}01^{22} + 1{,}01^{21} + \ldots + 1{,}01 + 1) = 80\,000 \cdot \frac{1{,}01^{24} - 1}{1{,}01 - 1} =$$

$= 2\,157\,900$ forint.

Az a) részben vázolt gondolatmenet szerint $1{,}5 \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right)^2 = 2{,}1579$, amiből $q = 19{,}94$, vagyis évi 19,94%-os kamatos kamatnak felel meg a kölcsönadó „befektetése".

Megjegyzés: a kölcsönt visszafizető számára a havi 80 000 Ft-os törlesztés havi 2,077%-os (évi 24,924%-os) hitelkamatnak felel meg. Táblázatkezelővel (vagy zsebszámológéppel) ez könnyen ellenőrizhető. Az 1. hónap végén fizetendő 80 000 Ft-os törlesztésből a 1,5 millió forint 1 havi használatáért 2,077% díjat kell fizetni, ami 31 155 Ft. Így a tőketartozás összege a hónap végére 80 000 – 31 155 = 48 845 Ft-tal csökken és így 1 451 155 Ft lesz. Az eljárás minden hónap végén ismétlődik (csakhogy az egy-egy hónapig használt pénz egyre kisebb lesz, így a használatáért fizetett díj csökken és egyre több marad a tőketartozás törlesztésére):

n	havi törlesztés	a havi törlesztésből az egy havi pénzhasználat díja (2,077%)	a havi törlesztésből tőketörlesztésre marad	az n. hó végén fennálló tartozás
1	80 000	31 155	48 845	1 451 155
2	80 000	30 140	49 860	1 401 295
3	80 000	29 105	50 895	1 350 400
4	80 000	28 048	51 952	1 298 448
5	80 000	26 969	53 031	1 245 416
6	80 000	25 867	54 133	1 191 284
7	80 000	24 743	55 257	1 136 027
8	80 000	23 595	56 405	1 079 622
9	80 000	22 424	57 576	1 022 045
10	80 000	21 228	58 772	963 273
11	80 000	20 007	59 993	903 280
12	80 000	18 761	61 239	842 041
13	80 000	17 489	62 511	779 530
14	80 000	16 191	63 809	715 721
15	80 000	14 866	65 135	650 587
16	80 000	13 513	66 487	584 099
17	80 000	12 132	67 868	516 231
18	80 000	10 722	69 278	446 953
19	80 000	9 283	70 717	376 236
20	80 000	7 814	72 186	304 050
21	80 000	6 315	73 685	230 365
22	80 000	4 785	75 215	155 150
23	80 000	3 222	76 778	78 372
24	80 000	1 628	78 372	0

1602. a) 15 év múlva Óperenciában $7000 \cdot 1{,}04^{15} \approx 12\,607$,
a BU-ban átlagosan $20\,000 \cdot 1{,}02^{15} \approx 26\,917$ buznyák lesz az éves GDP.

b) Megoldandó a $7000 \cdot 1{,}04^{n} = 20\,000 \cdot 1{,}02^{n}$ egyenlet. Rendezés után:
$0{,}35 = \left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right)^{n}$, amiből $\lg 0{,}35 = n \cdot \lg\left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right)$, ahonnan $n \approx 54$ (év).

c) Megoldandó $7000 \cdot \left(1 + \frac{2k}{100}\right)^{15} = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{k}{100}\right)^{15}$ egyenlet. Egyszerűsítése

sek után $0{,}35 = \left(\frac{100+k}{100+2k}\right)^{15}$, amiből $\frac{100+k}{100-2k} = \sqrt[15]{0{,}35}$ $(\approx 0{,}93)$.

Innen $k = \frac{100\left(1 - \sqrt[15]{0{,}35}\right)}{2\sqrt[15]{0{,}35} - 1} \approx 7{,}8$.

Vagyis 15 éven át 7,8%-nak kellene lennie a BU és 15,6%-nak Óperencia éves fejlődési ütemének, hogy bekövetkezzék az utolérés.

1603. a) Mértani sorozatot alkot, hiszen ha 10^{-c}-nel szorozzuk az $N_0 \cdot 10^{-ct}$ kifejezést, akkor éppen $N_0 \cdot 10^{-c(t+1)}$ adódik, ami a következő, $(t+1)$-ik időpillanatban még meglévő, el nem bomlott részecskék száma.

b) Mértani sorozatról lévén szó, a szomszédos tagok hányadosa állandó, mégpedig 10^{-c}.

1604. Az első év elején betett 500 000 Ft tíz teljes éven keresztül kamatozik, ezért a 10. év végére $500\,000 \cdot 1{,}1^{10}$ forintra növekszik a kamatos kamattal.

A második év elején betett 500 000 Ft 9 teljes éven keresztül kamatozik, ezért a 9. év végére $500\,000 \cdot 1{,}1^{9}$ forintra növekszik a kamatos kamattal.

A 3. év elején betett 500 000 Ft 8 teljes éven keresztül kamatozik, ezért a 8. év végére $500\,000 \cdot 1{,}1^{8}$ forintra növekszik a kamatos kamattal.

A gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy a 10. év végén összesen
$500\,000 \cdot 1{,}1^{10} + 500\,000 \cdot 1{,}1^{9} + 500\,000 \cdot 1{,}1^{8} + \ldots + 500\,000 \cdot 1{,}1$ forint lesz a betétkönyvben. Ezt a tíztagú összeget a mértani sorozat összegképletével is kiszámíthatjuk: $S_{10} = 500\,000 \cdot 1{,}1 \cdot \frac{1{,}1^{10} - 1}{1{,}1 - 1} = 8\,765\,584$.

Nem lesz elegendő a pénz a 9,5 milliós lakás megvásárlásához.

1605. a) Minden év végén x millió tallért veszek fel.
Az első év végén, a pénzfelvétel után $(1 \cdot 1{,}09 - x)$ millió tallér marad a bankban.
Ez az összeg egy évig kamatozik, majd újabb x millió tallérral csökken:
$1 \cdot 1{,}09^{2} - x \cdot 1{,}09 - x$ millió tallér marad meg.
A gondolatmenet folytatásával adódik, hogy a 10. pénzfelvétel után:
$1 \cdot 1{,}09^{10} - x \cdot 1{,}09^{9} - x \cdot 1{,}09^{8} - \ldots - x \cdot 1{,}09 - x = 0$.
Ezzel ekvivalens: $2{,}3674 - (1{,}09^{9} + 1{,}09^{8} + \ldots + 1{,}09 + 1) \cdot x = 0$.
A zárójelben álló tíztagú összeg a mértani sorozat összegképletével is felírható:
$2{,}3674 - \frac{1{,}09^{10} - 1}{1{,}09 - 1} x = 0$, ami a számítások elvégzése után

$2{,}3674 - 15{,}1929x = 0$ alakra hozható. Ebből $x = 0{,}1558$ adódik, tehát az évente felvehető összeg 155 800 tallér.

Ellenőrzés:

tőke	1 000 000		
1. pénzfelvétel után	934 200	6. pénzfelvétel után	504 965
2. pénzfelvétel után	862 478	7. pénzfelvétel után	394 611
3. pénzfelvétel után	784 301	8. pénzfelvétel után	274 326
4. pénzfelvétel után	699 088	9. pénzfelvétel után	143 216
5. pénzfelvétel után	606 206	10. pénzfelvétel után	305

Csak a kerekítések miatt áll 0-tól különböző érték az utolsó mezőben. (Nagyobb pontossággal számolva az évente felvehető összeg 155 820,09 tallérnak adódik.)

b) Minden év elején x millió tallért veszek fel.
Az első év végén $(1-x)\cdot 1{,}09 = 1\cdot 1{,}09 - x\cdot 1{,}09$ millió tallér marad a bankban. Ebből az összegből a következő év elején újabb x millió tallért veszek fel, tehát a második pénzfelvétel után $(1\cdot 1{,}09 - x\cdot 1{,}09 - x)$ millió tallér marad a bankban, ami újabb 1 évig kamatozik.
A gondolatmenet folytatásával adódik, hogy a 10. pénzfelvétel után:
$1\cdot 1{,}09^9 - x\cdot 1{,}09^9 - x\cdot 1{,}09^8 - \ldots - x\cdot 1{,}09 - x = 0.$
Ezzel ekvivalens: $2{,}1719 - (1{,}09^9 + 1{,}09^8 + \ldots + 1{,}09 + 1)\cdot x = 0.$
A zárójelben álló tíztagú összeg a mértani sorozat összegképletével is felírható:
$2{,}1719 - \dfrac{1{,}09^{10}-1}{1{,}09-1}x = 0$, ami a számítások elvégzése után
$2{,}1719 - 15{,}1929x = 0$ alakra hozható. Ebből $x = 0{,}142\,95$ adódik, tehát az évente felvehető összeg 142 950 tallér.

Ellenőrzés:

tőke	1 000 000		
1. pénzfelvétel után	857 050	6. pénzfelvétel után	463 163
2. pénzfelvétel után	791 235	7. pénzfelvétel után	361 868
3. pénzfelvétel után	719 496	8. pénzfelvétel után	251 519
4. pénzfelvétel után	641 300	9. pénzfelvétel után	131 205
5. pénzfelvétel után	556 067	10. pénzfelvétel után	64

Csak a kerekítések miatt áll 0-tól különböző érték az utolsó mezőben.

(Nagyobb pontossággal számolva az évente felvehető összeg 142 954,2 tallérnak adódik.)

1606. Havonta, a hónap végén x millió forintot törlesztünk.
Az 1. hónap végi egyenleg (millió forintban): $1{,}6\cdot 1{,}012 - x$,
A 2. hónap végi egyenleg: $1{,}6\cdot 1{,}012^2 - x\cdot 1{,}012 - x$,
A 3. hónap végi egyenleg: $1{,}6\cdot 1{,}012^3 - x\cdot 1{,}012^2 - x\cdot 1{,}012 - x$,
⋮
A 24. hónap végi egyenleg:

$$1{,}6\cdot 1{,}012^{24} - x\cdot 1{,}012^{23} - x\cdot 1{,}012^{22} - \ldots - x\cdot 1{,}012 - x = 0.$$

Megoldandó tehát az $1{,}6\cdot 1{,}012^{24} - (1{,}012^{23} + 1{,}012^{22} + \ldots + 1{,}012 + 1)\cdot x = 0$ egyenlet.
Ezzel ekvivalens: $2{,}1304 - \dfrac{1{,}012^{24}-1}{1{,}012-1}\cdot x = 0$, ami a számítások elvégzése után
$2{,}1304 - 27{,}6227x = 0$ alakra hozható.
Ebből $x = 0{,}077\,125$ adódik, tehát a havonta fizetendő összeg 77 125 forint.

Ellenőrzés:
Célszerű táblázatkezelő programot / programozható zsebszámológépet használni.

Hitel	1 600 000		
1. törlesztés után	1 542 075	7. törlesztés után	1 179 632
2. törlesztés után	1 483 455	8. törlesztés után	1 116 663
3. törlesztés után	1 424 131	9. törlesztés után	1 052 938
4. törlesztés után	1 364 096	10. törlesztés után	988 448
5. törlesztés után	1 303 340	11. törlesztés után	923 185
6. törlesztés után	1 241 855	12. törlesztés után	857 138
13. törlesztés után	790 298	19. törlesztés után	372 078
14. törlesztés után	722 657	20. törlesztés után	299 418
15. törlesztés után	654 204	21. törlesztés után	225 886
16. törlesztés után	584 929	22. törlesztés után	151 472
17. törlesztés után	514 824	23. törlesztés után	76 164
18. törlesztés után	443 876	24. törlesztés után	−47

Csak a kerekítések miatt áll 0-tól különböző érték az utolsó mezőben. (Nagyobb pontossággal számolva a havonta törlesztendő összeg 77 123,30 forintnak adódik.)

1607. Ha felveszünk K kölcsönt n évre, évi p%-os kamat és T törlesztőrészlet mellett, akkor tartozásunk

1 év múlva (az egyszerűbb jelölés érdekében: $q = 1 + \frac{p}{100}$): $Kq - T$;
2 év múlva: $(Kq - T)q - T = Kq^2 - T(q + 1)$;
3 év múlva: $((Kq - T)q - T)q - T = Kq^3 - T(q^2 + q + 1)$;
általánosan n év múlva pedig: $Kq^n - T(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1)$.
A zárójeles összeget a mértani sorozat összegképlete révén zárt alakban is felírhatjuk: $q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1}$.
(Persze $q \neq 1$; pedig de jó is volna, mert ekkor 0% volna a kamat!) Mire visszafizetjük a teljes kölcsönt, aktuális tartozásunk épp 0-vá válik: $Kq^n - T \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0$.
Kifejezve ebből $T = \frac{Kq^n(q-1)}{q^n - 1}$, beírva az adatokat az éves törlesztőrészlet $T \approx 22\,251$ Ft.

1608. A faállomány évente 2%-ot gyarapodott és minden év végén x m³ fát vágunk ki, így
1. év végén $30\,000 \cdot 1{,}02 - x$;
2. év végén $(30\,000 \cdot 1{,}02 - x) \cdot 1{,}02 - x = 30\,000 \cdot 1{,}02^2 - 1{,}02x - x$;
3. év végén $(30\,000 \cdot 1{,}02^2 - 1{,}02x - x) \cdot 1{,}02 - x =$
$= 30\,000 \cdot 1{,}02^3 - 1{,}02^2x - 1{,}02x - x$;
4. év végén $30\,000 \cdot 1{,}02^4 - 1{,}02^3x - 1{,}02^2x - 1{,}02x - x$;
$\vdots$
25. év végén: $30\,000 \cdot 1{,}02^{25} - 1{,}02^{24}x - 1{,}02^{23}x - \ldots - x = 35\,000$
$30\,000 \cdot 1{,}02^{25} - x(1{,}02^{24} + 1{,}02^{23} + \ldots + 1) = 35\,000.$

Számoljuk ki a zárójelben lévő összeget. Ez egy olyan mértani sorozat, melynek első eleme 1, hányadosa $q = 1{,}02$; $n = 25$.

Így $S_n = \frac{1{,}02^{25} - 1}{1{,}02 - 1} \approx 32.$
Az egyenletből $x \approx 444{,}4$.
Tehát évente 444,4 m³ fát lehet kivágni a megadott feltételek mellett.

1609. a) A bank $391\,250 - 78\,250 = 313\,000$ forintot fektetett be, és a 24 hónap alatt $24 \cdot 17\,841 = 428\,184$ forintot kapott vissza (amit nem fektetett be újra a törlesztés tartama alatt). Ha ez évi p%-os kamatos kamatnak felel meg, akkor

$313\,000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 428\,124$, amiből $p = 16{,}95$ $(p > 0)$.

Tehát ugyanekkora lenne a felnövekedett tőke, ha a 313 ezer forintot a bank 2 évre 16,95%-os kamatos kamatra helyezte volna ki.

b) A 24 tagú összegből 17 841-et kiemelve:
$17\,841 \cdot (1{,}01^{23} + 1{,}01^{22} + \ldots + 1{,}01 + 1) = 17\,841 \cdot \frac{1{,}01^{24} - 1}{1{,}01 - 1} = 481\,234.$

Az a)-beli gondolatmenet szerint $313\,000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 481\,234$, amiből $p = 24{,}0$ $(p > 0)$. A bank így évi 24%-os kamatos kamatnak megfelelő bevételhez jut a kölcsönadott pénze révén.

c) Kiemelés után az egyenlet: $313\,000 \cdot x^{24} - 17\,841 \cdot (x^{23} + x^{22} + \ldots + x + 1) = 0$.
A zárójelben álló 24 tagú összeget a mértani sorozat összegképletével is felírhatjuk ($p \neq 0$, tehát $x \neq 1$): $S_{24} = \frac{x^{24} - 1}{x - 1}$.
Ezt az egyenletbe írva, majd mindkét oldalt $(x - 1)$-gyel szorozva kapjuk:
$313\,000x^{25} - 330\,841x^{24} + 17\,841 = 0.$
Ez a szövegnek megfelelő alakú egyenlet.

d) $1 + \frac{p}{1200} = 1{,}026\,75$, tehát $p = 32{,}1$.
A kölcsönt igénybe vevőként havi 2,675%-os, azaz évi 32,1%-os hiteldíjat fizetünk a bank pénzének „használatáért".

e) A c)-beli gondolatmenetet alkalmazva és felhasználva, hogy az ottani jelölés szerint most $x = 1{,}02$, a következő egyenletet kell megoldanunk (h-val jelölve a kiszámítandó havi törlesztőrészletet):
$313\,000 \cdot 1{,}02^{24} - h \cdot 1{,}02^{23} - h \cdot 1{,}02^{22} - \ldots - h \cdot 1{,}02 - h = 0.$

Ekvivalens átalakításokkal:
$503\,441 - (1{,}02^{23} + 1{,}02^{22} + \ldots + 1{,}02 + 1) \cdot h = 0,$
$503\,441 - \frac{1{,}02^{24} - 1}{1{,}02 - 1} \cdot h = 0,$
$h = 16\,549.$
A kölcsönt felvevőként havi 16 549 forintot tartanánk elfogadhatónak.

1610. Évi öröksége 1 500 000 Ft. Ha havi lekötést választ, akkor az évi 6% havi 0,487% kamatnak felel meg ($\sqrt[12]{1{,}06} \approx 1{,}004\,87$). 60 hónapig akar havi fix N Ft-ot felvenni úgy, hogy a végére fogyjon el a pénz. Ekkor a következő igaz, hónapról hónapra számolva: $\{(1\,500\,000 \cdot 1{,}004\,867 - N) \cdot 1{,}004\,867 - N\} - \ldots - N = 0$,
ahol a folyamat 60-szor ismétlődik. Az egyenletet rendezve:
$1\,500\,000 \cdot 1{,}004\,867^{60} - N(1{,}004\,867^{59} + 1{,}004\,867^{58} + \ldots + 1) = 0.$

Ebből (felhasználva, hogy $1,004\,87^{60} = (\sqrt[12]{1,06})^{60} = 1,06^5$):

$$N = \frac{1\,500\,000\cdot 1,06^5}{\dfrac{1,06^5-1}{1,004\,867-1}} \approx \frac{2\,007\,338\cdot 0,004\,867}{0,338\,23} \approx 28\,885,$$ tehát Évi közel havi

28 900 Ft-ot vehet fel. Így összesen 1 733 100 Ft-hoz jut, ami a kamatok miatt tehát 233 100 Ft-tal több, mint ha otthon tartja a pénzt, és minden hónapban 25 000 Ft-ot vesz el belőle (így éppen elfogyna a másfél millió 5 év alatt). A kamat havi közel 3900 Ft-ot jelent számára.

1611. Tételezzük fel, hogy Péter öt évig jár egyetemre, és minden hónapban ugyanannyi pénzt szeretne felvenni. Az 1 500 000 Ft-ból egy részt, jelöljük x_1-gyel, leköt 1 évre, mert nem nyúl hozzá, s a maradék $1\,500\,000 - x_1$ összegből fedezi az első évi részleteit. Mivel havi lekötésnél csak 6% az éves kamat, ha havi N fix összeget vesz fel, akkor (lásd az előző megoldást) az

$\{(1\,500\,000 - x_1)\cdot 1,004\,867 - N\}\cdot 1,004\,867 - \ldots - N = 0$ egyenletet kapjuk, ahol N 12-szer van kivonva. Innen az előző feladatban már látott levezetéssel:

$$N = \frac{(1\,500\,000-x_1)\cdot 1,06}{\dfrac{1,06-1}{1,004\,867-1}} \approx \frac{(1\,590\,000-1,06x_1)\cdot 0,004\,867}{0,06} \approx$$

$\approx 128\,976 - 0,086x_1$.

Most persze még nem tudjuk, mennyi legyen x_1, azonban ebből fogunk tovább számolni a második évben; tudva, hogy már $1,12x_1$ az értéke az első éves lekötés miatt. Most is ugyanezt a havi N Ft-ot akarjuk felvenni. Ezen múlik majd x_2, a második évben lekötendő összeg nagysága. Most Péternek az $1,12x_1 - x_2$ összegből és kamataiból kell élnie. Ekkor N-re négy tizedes pontossággal azt kapjuk, hogy:

$N = 0,0963x_1 - 0,086x_2$.

A következő évben ugyanez az egyenlet adódik, csak most az indexek eggyel nőnek, azaz: $N = 0,0963x_2 - 0,086x_3$. A negyedik évben $N = 0,0963x_3 - 0,086x_4$, s végül az ötödik évben már nincs félretett pénz: $N = 0,0963x_4$. Innen visszafejtve az egyenleteket: $x_4 = 10,3842N$; $x_3 = 19,6545N$; $x_2 = 27,9365N$; $x_1 = 35,324N$, és végül az első egyenletből: $128\,976 - 3,0368N = N$, tehát $N = 31\,950$ Ft, adódik. Azaz ezzel a módszerrel öt éven át havi 31 950 Ft felvehető összeg adódik.

Másik megoldás:

Jelöljük X-vel az évenként felveendő egyenlő összeget. Mivel 5 éven át a havi kamat nem változik, ezért így a havonként felvevehető részletek is egyenlők lesznek, amit jelöljünk N-nel. Így a feladatot két, azonos logikával megoldható, áttekinthetőbb részre bontottuk.

$$1\,500\,000\cdot 1,12^4 = X(1+1,12+1,12^2+1,12^3+1,12^4) = X\frac{1,12^5-1}{1,12-1}$$

$$X = 1\,500\,000\frac{1,12^4\cdot 0,12}{1,12^5-1} = 371\,531$$

Tehát évente 371 531 forintot kell felvennie és havi kamatozásra áttenni. Az évi 6 százalékos kamat havi jóváírással, havi 0,4867%-nak felel meg.

Így a fenti gondolatmenetet alkalmazva: $371\,531\cdot 1,004\,867^{11} = N(1 + 1,004\,867 + 1,004\,867^2 + 1,004\,867^3 + \ldots + 1,004\,867^{11}) = N\dfrac{1,004\,867^{12}-1}{1,004\,867-1}$

$$N = 371\,531\frac{1,004\,867^{11}\cdot 0,004\,867}{1,004\,867^{12}-1} = 31\,946$$

Tehát a havonta felvehető összeg 31 946 Ft.

Másik értelmezés:

Ha Péter évről évre növeli a felvett havi pénzt. A teljes pénzből leköti a $\frac{4}{5}$-öd részét, és a lekötetlen 300 000 Ft-ból az első évben (a már mutatott módszer szerint számolva) havi 25 795 Ft-ot vehet fel. A következő évben a lekötött 1 200 000 Ft-ból a 12%-os kamattal együtt lett 1 344 000 Ft, aminek a $\frac{3}{4}$-ét Péter újra leköti, így a második évben 336 000 Ft-ból (és kamataiból) veheti fel havonta a pénzét, ami most már 28 890 Ft. Már majdnem elérte az előző felfogású megoldás összegét, de neki a következő három évben már több pénze lesz havonta, hiszen a következő évre 376 320 Ft-ja lesz (a kamatozott összeg harmada), amiből havi 32 357 Ft vehető fel; a negyedik évben 421 478 Ft-ból veheti a havi részleteket, ami most 36 240 Ft; végül 472 056 Ft után, ami havi 40 589 Ft. Ez is egy megoldás tehát, ami az inflációt figyelembe véve valószínűleg értelmesebb, mint a másik (nehezebben is számítható) módszerrel havonta 5 éven át felvett állandó havi részlet.

1612. Írjuk fel az egyes elmozdulások abszcisszáit: $1 + 0 - \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{16} + 0 - \ldots + (-1)^i\frac{1}{4^i}$.

Hasonlóan az ordináták: $0 + \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{32} - \ldots + (-1)^i\frac{1}{2\cdot 4^i}$.

Ha kivesszük a 0-kat, mindkettő egy $-\frac{1}{4}$ kvóciensű (hányadosú), 1 illetve $\frac{1}{2}$ kezdőtagú mértani sorozat első $i+1$ tagjának összege. Végtelen sok tag esetén az összeg $a_1\cdot\frac{1}{1-q}$, vagyis most 0,8 és 0,4. Tehát a bogár a (0,8; 0,4) pontot közelíti meg egyre inkább.

1613. a) Legyen az éves kamat p%-os és $x := 1 + \frac{p}{100}$. Ekkor $79\,990x^3 = 123\,840$, amiből $x = 1,1573$, tehát évi 15,73%-os kamatos kamatnak felel meg ez a befektetés.

b) A mértani sorozat összegképletével $S_{36} = 3440\cdot 1,01\cdot\dfrac{1,01^{36}-1}{1,01-1} = 149\,666$.

A 36. hónap végén 149 666 forint lenne a bankszámlánkon.

c) Legyen az éves kamat p%-os és $x := 1 + \frac{p}{100}$. Ekkor $79\,900x^3 = 149\,666$, amiből $x = 1{,}2327$, tehát évi 23,27%-os kamatos kamatnak felel meg ez a befektetés.

d) Amennyiben az összes törlesztőrészlet befizetése legkésőbb a 36. hónap végéig megtörténik („jó adós" kapta a kölcsönt), akkor a bank legalább 15,73%-os éves kamatjövedelemre tesz szert (még akkor is, ha a 36. hónap végén egy összegben kapja meg a 123 800 forintot).
Csupán a 10%-os infláció nem jelent nagy kockázatot a bank számára ebben a hitelezési ügyletben.

e) A mértani sorozat összegképletével $S_{36} = 3440 \cdot \dfrac{\left(\frac{120}{121}\right)^{36} - 1}{\frac{120}{121} - 1} = 107\,498.$

A jövőben kifizetett részletek ma összesen 107 498 forintot érnének, ezért pusztán pénzügyi szempontból nem jó befektetés egy ma 79 900 forintot érő ágyért ezt a kötelezettséget vállalni (az persze más kérdés, hogy az ágyra szükség van és más módon nem sikerülne megvenni).

1614. Ha három különböző szám egyidejűleg egy számtani és egy mértani sorozat három egymást követő tagja lenne, akkor a középső tag (jelöljük b-vel) a két mellette levőnek (jelöljük őket a-val és c-vel) egyrészt számtani, másrészt mértani közepe. Eszerint az a és a c számok számtani és mértani közepe egyenlő. Ez azonban csak $a = c$ esetén lehet, amit viszont kizártunk, mert különböző számokról volt szó. A válasz tehát: nem lehet három különböző szám egyidejűleg egy számtani és egy mértani sorozat három egymást követő tagja.

1615. a) Tamás csikója $50 + 2 \cdot 10 = 70$ kg, míg Miklós csikója: $60 \cdot 1{,}2 = 72$ kg.
b) Miklós csikója $1{,}2^2 = 1{,}44$-szeresére, azaz 44%-kal nőtt.
c)

A vásárlás óta eltelt idő hónapokban	Tamás csikójának súlya (kg)	Miklós csikójának súlya (kg)
0	50	50
1	60	60
2	70	72
3	80	86,4
4	90	103,7
5	100	124,4
6	110	149,3

d) Tamás csikója n hónap múlva $50 + 10n$ kg tömegű, míg Miklósé $50 \cdot 1{,}2^n$ kg.

1616. Számtani sorozat páratlan számú szomszédos tagjának átlaga épp a középső tag.
Vagyis $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = \dfrac{25}{5} = 5 = a_3$.
Ekkor $a_1 = a_3 - 2d = 5 - 2d$; $a_2 = a_3 - d = 5 - d$; $a_5 = a_3 + 2d = 5 + 2d$.
Egy mértani sorozatban bármely (nem első) tag négyzete a szomszédainak szorzata.
Tehát most $(5 - d)^2 = (5 - 2d) \cdot (5 + 2d)$, amiből rendezés után: $5d^2 - 10d = 0$, azaz $d = 0$ vagy 2. Az első esetben a számtani sorozat konstans, csupa 5-ös tagból áll (így persze a_1 is 5), a kiválasztott három tag pedig valóban mértani sorozatot alkot, $q = 1$ kvócienssel. A második esetben pedig a számtani sorozat első öt eleme 1, 3, 5, 7, 9 – amelyből az 1., 2., 5. valóban mértani sorozatot alkot, $q = 3$ kvócienssel.

1617. Legyen a számtani sorozat első 5 tagja $a - 2d$; $a - d$; a; $a + d$; $a + 2d$.
Ezek összege $5a = 20$, tehát $a = 4$.
Így a számtani sorozat első 5 tagja $4 - 2d$; $4 - d$; 4; $4 + d$; $4 + 2d$.
Ha a második, harmadik és ötödik tag egy mértani sorozat egymást követő tagjai:
$4^2 = (4 - d)(4 + 2d)$.
Ebből $d_1 = 0$, ekkor minden tag 4; ezek mértani sorozatot is alkotnak, melyben $q = 1$.
Ha $d_2 = 2$; az első öt tag 0; 2; 4; 6; 8, ezek közül 2; 4; 8 olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, melyben $q = 2$.

1618. Egyszerű megoldás, ha a három szám egyenlő: $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{114}{3} = 38$; ekkor $d = 0$ és $q = 1$. A továbbiakban ezt zárjuk ki. A számtani és a mértani sorozat megfelelő tagjaira vonatkozó képletek szerint $a_1 q = a_1 + 3d$ (így $a_1 = \frac{3d}{q - 1}$, a $q \neq 1$ kikötést már megtettük), és $a_1 q^2 = a_1 + 24d$ (így $a_1 = \frac{24d}{q^2 - 1}$, ehhez az előbbi kikötésen kívül még kell, hogy $q \neq -1$; de nyilván nem az, hiszen váltakozó előjelű, ellentett elemek nem alkothatnak számtani sorozatot). Összevetve a_1 két kifejezését, (a nem 0) d-vel és $q - 1$-gyel egyszerűsítve: $q + 1 = 8$, vagyis $q = 7$. Felírva még a tudott összeget: $114 = a_1(1 + q + q^2)$, kapjuk: $a_1 = 2$, és bármelyik egyenletbe visszahelyettesítve: $d = 4$. A keresett három szám tehát: 2, 14, 98 (vagy 38, 38, 38). (A második esetben az egész sorozat konstans, akárhányadik tagjai lehetnek egy számtani sorozatnak; az elsőben pedig a számtani sorozat: 2, 6, 10, 14, 18, ..., és a 25. tag valóban 98.)

1619. A számtani sorozat tagjait a középső taggal, x-szel és d-vel fejezzük ki:

	$x-d$	x	$x+d$
Ezek összege	$3x = 21$, ebből	$x = 7$.	
E szerint a mértani sorozat tagjai:	$(7-d)+6$	$7+13$	$(7+d)+30$
összevonások után:	$13-d$	20	$37+d$
a mértani közép összefüggés szerint:	$(13-d)(37+d) = 400$		

Elvégezzük a szorzásokat, majd összevonunk és rendezünk: $d^2 + 24d - 81 = 0$, ennek gyökei: $d_1 = 3$, $d_2 = -27$.

Két számtani sorozat jön létre:
ha $d = 3$, akkor a sorozat első tagja $a_1 = 4$,
ha $d = -27$, akkor az első tag $a_1 = 34$.
Ellenőrzésként a sorozatok első három tagját írjuk fel.
Az egyik számtani sorozat: 4, 7, 10,
a megfelelő mértani sorozat: 10, 20, 40, ahol a $q = 2$;
a másik számtani sorozat: 34, 7, -20,
a megfelelő mértani sorozat: 40, 20, 10, ahol $q = \frac{1}{2}$.

1620. Legyen e négy szám a, aq, aq^2, aq^3. Így a, $aq+6$, aq^2+3, aq^3-36 egy számtani sorozat szomszédos tagjai. (Ekkor az eredeti mértani sorozat bizonyosan nem konstans, hiszen a 6-os növekedést 3-as csökkenés, majd 39-es csökkenés követné a számtani sorozatban; így a későbbiek érdekében rögzíthetjük, hogy $a \neq 0$ és $q \neq 1$.) Egy számtani sorozatban bármely (nem első) tag a szomszédainak számtani közepe – vagy másképp: bármely tag kétszerese a szomszédainak összege.

Tehát most: $2(aq+6) = a + aq^2 + 3$ és $2(aq^2+3) = aq + 6 + aq^3 - 36$.

Az elsőből rendezés után: $9 = a(q^2 - 2q + 1)$, a másodikból: $36 = aq(q^2 - 2q + 1)$.

Elosztva a mostani második egyenletet az elsővel, $a(\neq 0)$ és $q^2 - 2q + 1$ (azaz $(q-1)^2$) kiesik (és ez sem 0, mert $q \neq 1$), és kapjuk: $4 = q$. Visszaírva ezt a legutóbbi egyenletek valamelyikébe, adódik: $a = 1$. Ekkor a négy kérdéses szám: 1, 4, 16, 64. (És 1, $4+6=10$, $16+3=19$, $64-36=28$ valóban számtani sorozat szomszédos tagjai.)

1621. Legyen a mértani sorozat első három tagja a, b, c.
$ac = 36$
$\frac{b}{q} bq = 36$, ebből $b^2 = 36$. Ennek pozitív gyöke $b = 6$.
A b és d ismeretében a számtani sorozat tagjai felírhatók, ameddig az összegük 70 nem lesz.
6, 10, 14, 18, 22. Ezek összege 70, tehát a szóban forgó tagok száma 5.

1622. A keresett mértani sorozat tagjai a, aq, aq^2.
A számtani sorozat tagjai a, aq, $aq^2 - 72$ $(a \neq 0)$.
Így: I. $a + aq + aq^2 = 114$

II. $aq = \dfrac{aq^2 - 72 + a}{2}$

Emeljük ki az (I.)-ből „a”-t; a (II.)-ban hozzuk az „a”-t tartalmazó tagokat egy oldalra, és emeljük ki „a”-t.

(I.) $a(1 + q + q^2) = 114$
(II.) $a(1 - 2q + q^2) = 72$

A két egyenletet egymással elosztva, rendezve

$7q^2 - 50q + 7 = 0$, melynek gyökei $\frac{1}{7}$, illetve 7.

$q = 7$ esetén $a = 2$; $q = \frac{1}{7}$ esetén $a = 98$.

Így a keresett sorozatok: 2; 14; 98, illetve 98; 14; 2.
(A megfelelő számtani sorozatok: 2; 14; 26, illetve 98; 14; -70.)

1623. A számtani sorozat tagjai $a-d$; a; $a+d$; ezek összege 15; ezért $a = 5$.
Tehát a számtani sorozat tagjai: $5-d$; 5; $5+d$.
A mértani sorozat tagjai: $(5-d)^2$; 5^2; $(5+d)^2$.
Így $5^2 = (5-d)^2(5+d)^2$.
Ebből $d^2(d^2 - 50) = 0$.
A lehetséges esetek:

d	Számtani sorozat	Mértani sorozat	q
0	5; 5; 5	25; 25; 25	1
$5\sqrt{2}$	$5-5\sqrt{2}$; 5; $5+5\sqrt{2}$	$25(1-\sqrt{2})^2$; 25; $25(1+\sqrt{2})^2$	$3+2\sqrt{2}$
$-5\sqrt{2}$	$5+5\sqrt{2}$; 5; $5-5\sqrt{2}$	$25(1+\sqrt{2})^2$; 25; $25(1-\sqrt{2})^2$	$3-2\sqrt{2}$

1624. A feltétel szerint: $a_{n+1} = 2a_n - 5$. Ekkor mivel $a_8 = 133$, és az első tag a kérdés, ezért visszafelé kell haladnunk, azaz az összefüggésből a_n-t kell kifejezni.

$a_n = \dfrac{a_{n+1} + 5}{2}$, azaz $a_7 = 69$; $a_6 = 37$; $a_5 = 21$; $a_4 = 13$;
$a_3 = 9$; $a_2 = 7$; $a_1 = 6$.

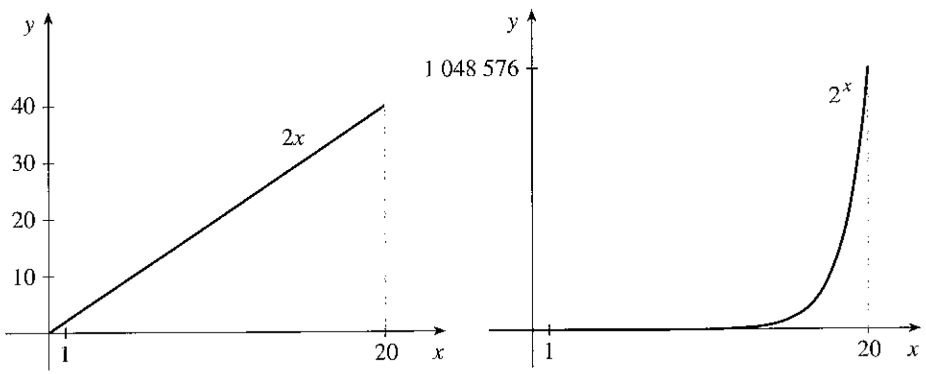
Tehát a sorozat első tagja a 6.

Megjegyzés:
Természetesen ha hosszabb sorozat lenne, akkor ez elég fáradságos módszer volna.

Jó lenne egy formulát találni a_{n+1}-ből a_1 kiszámítására. Ezt lépésről lépésre behelyettesítve a következő formulával lehet megkapni:
$a_1 = \frac{a_{n+1} + 5(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})}{2^n} = \frac{a_{n+1} + 5(2^n - 1)}{2^n}$. Esetünkben a_8 az induló tag, tehát $n = 7$, azaz $a_1 = \frac{133 + 5 \cdot 127}{128} = 6$.

1625. Legyen $a_n := \log_5 b_n$ minden pozitív egész n esetén.
Ekkor $a_{n+1} - a_n = \log_5 b_{n+1} - \log_5 b_n = \log_5 \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
Mivel (b_n) pozitív tagú mértani sorozat, ezért $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q > 0$. A mértani sorozat hányadosa állandó, ezért $a_{n+1} - a_n = \log_5 q$ is állandó. Ez pedig azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat egy számtani sorozat (amelynek differenciája $\log_5 q$-val egyenlő).

1626. a)



b) Az $f(1), f(2), \ldots, f(10)$ számtani sorozat lesz, míg a $g(1), g(2), \ldots, g(10)$ mértani sorozat, hiszen az egyiknél a növekedés (differencia) 2 az egymás utáni tagok között, míg a másiknál a szomszédos tagok hányadosa 2.

c) Az első esetben tehát egy számtani sorozat első 10 tagjának összege kell, ha az első tag és a differencia is 2. Az összeg: $10 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 2 = 110$. A mértani sorozat esetén is az első tag (és a hányados is) 2, itt az összeg: $2 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2046$.

d) Annyi mindenképpen, hogy a második (mértani) sorozat tagjainak összege sokkal nagyobb lesz, hiszen a második függvény sokkal meredekebben nő.

1627. A: 1990-ben 100 egység, 2000-ben 1000 egység, minden évben x%-kal nőtt a termelés, így

1991-ben a termelés	$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot 100$ egység,
1992-ben a termelés	$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 \cdot 100$ egység,
$\vdots$	
1999-ben a termelés	$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^9 \cdot 100$ egység,
2000-ben a termelés	$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{10} \cdot 100 = 1000$ egység,
	ebből $x = 25{,}89\%$.

B: 1990-ben 100 egység, 2000-ben 1000 egység, minden évben y egységgel nőtt a termelés, így

1991-ben a termelés	$100 + y$ egység,
1992-ben a termelés	$100 + 2y$ egység,
$\vdots$	
1999-ben a termelés	$100 + 9y$ egység,
2000-ben a termelés	$100 + 10y = 1000$ egység,
	ebből $y = 90$ egység.

A: 1999-ben a termelése $\left(1 + \frac{25{,}89}{100}\right)^9 \cdot 100 \approx 794$ egység.
B: 1999-ben a termelése $100 + 9 \cdot 90 = 910$ egység,
tehát 1999-ben B gyár 116 egységgel többet termelt, mint A gyár.

1628. a) Számtani sorozatot, hiszen minden évben 5 lakással többet építettek, azaz az egymás utáni években épített lakások számának különbsége állandó, mindig 5.

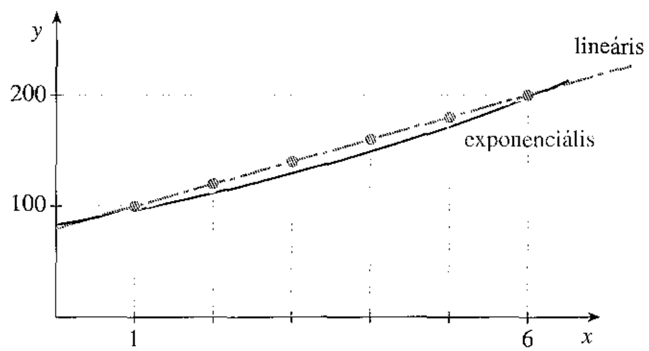
b) A számtani sorozat első tíz tagjának összegét kell venni. Ha az első évben 30 lakást, akkor a 10. évben $30 + 9 \cdot 5 = 75$ lakást építettek.
Így az összeg: $\frac{30 + 75}{2} \cdot 10 = 525$, azaz 525 lakást építettek fel 10 év alatt.

c) A másik cég is 30 lakással kezdett, de ők kb. 10%-kal növelték évente a lakásépítésüket. Tehát egy mértani sorozat első 10 tagjának összege kell, amelynek első tagja 30, a hányados pedig 1,1: $30 \cdot \frac{1{,}1^{10} - 1}{1{,}1 - 1} = 300 \cdot (1{,}1^{10} - 1) \approx 478$, azaz a cég kb. 478 lakást épített fel 10 év alatt a feltételek szerint.

1629. a) A szöveg szerint az A raktár alapterülete 100 m², a legnagyobb, F raktáré 200 m², és a közbülsők területei számtani sorozat tagjai, tehát $100 + 5d = 200$, ahonnan $d = 20$. Eszerint az összes raktárterület:
$100 + 120 + 140 + 160 + 180 + 200 = 900$ m², amit az összegképlettel is meg lehet kapni, de ilyen kevés tag esetén könnyen össze is adhatók.

b) Ha a raktárterületek egy mértani sorozat egymás utáni tagjai, akkor $100q^5 = 200$, ahonnan $q \approx 1{,}1487$, azaz a teljes terület: $100 \cdot \dfrac{q^6 - 1}{q - 1} \approx 872{,}5$ m².

c) Azt, hogy a második kevesebb lesz, meg lehetett volna mondani számolás nélkül is, csak azt nem, hogy mennyivel. Az indoklás az, hogy az első esetben a hat raktárrész területe számtani sorozat szomszédos elemei, ami lineáris növekedést jelent, míg a másik esetben hatvány szerint nőnek, azaz egy egynél nagyobb alapú exponenciális függvény 6 pontjáról van szó. Mivel ez a függvény konvex, értékei a húr alatt vannak, tehát a közbülső négy raktár kisebb területű lesz ebben az esetben, és így az összes terület is. Lásd az ábrát!



1630. a) A kopasz birka szőrét 0 mm-nek véve napi 0,5 mm növekedés mellett a 12 cm = 120 mm-t 240 nap alatt, tehát kb. 8 hónap alatt érnék el.

b) Ha a kiinduló szőr 1 mm, és az 50. napon eléri a 2,5 cm = 25 mm-t, akkor $q^{50} = 25$ miatt a napi növekedési arány: 1,0665. Azaz mondhatjuk, hogy naponta 6,65%-kal nő a birkák szőre ebben az esetben.
(*Megjegyzés:* a valósághoz közelebb áll a nagyjából állandó növekedés, talán az első napokban kicsit gyorsabb (a friss nyírás után), de nem exponenciális, ami a mértani sorozatnak – b) eset – lenne a feltétele.)

1631. a) Ha számtani sorozat szerint nő a munkás napi bére 1000 Ft-ról indulva, akkor $1000 + 21 \cdot 100 = 3100$ Ft-ra nő fel a bére a hó végére. Összesen pedig $(1000 + 3100) \cdot 11$ Ft, azaz 45 100 Ft a keresete a 22 munkanapos hónap alatt.

b) A másik munkás bére napi 1,05-szörös növekedéssel hó végére napi 2786 Ft-ra emelkedik. Az ő havi keresete: $1000 \cdot \dfrac{1{,}05^{22} - 1}{1{,}05 - 1} = 20\,000 \cdot (1{,}05^{22} - 1) \approx$
$\approx 38\,505$ Ft.

c) Az ok az, hogy a kisebb szorzó esetén is az exponenciális növekedés megelőzi a lineárist. Esetünkben két hónap (azaz 44 munkanap) alatt az első kap összesen $(1000 + 43 \cdot 100) \cdot 22 = 116\,600$ Ft bért, míg a második $1000 \cdot \dfrac{1{,}05^{44} - 1}{1{,}05 - 1} =$ $= 151\,143$ Ft-ot, tehát többet. (Ha csak a második havi béreket vetjük össze, azok – a fenti eredmények különbségeként – 71 500, illetve 112 638 Ft, tehát így is a másodiké több.)

1632. Ha a városnak kezdetben N lakosa volt, és lakóinak száma egyenletesen évi 400 fővel nőtt, akkor a 10. év végén $N + 10 \cdot 400 = N + 4000$ lakosa van. Ez évi 3%-kal öt éven át csökkenve éri el a 720 000 lakost, akkor: $(N + 4000) \cdot 0{,}97^5 = 720\,000$, ahonnan $N = 834\,444$ lakos volt kezdetben, tehát 15 évvel ezelőtt.

1633. Ha a bevételek mindig az előző évi bevétel 1,5-szereseként adódnak, akkor a 10. évben $800\,000 \cdot 1{,}5^9 \approx 30\,754\,700$ Ft lett a bevétele. Mivel kezdetben 100 Ft volt a kilónkénti sertésár, ezért 8000 kg sertéshúst kellett eladnia a 800 000 Ft bevételért. A 10. évben 76 886 kg sertést adott el, s mivel ez egyenletesen nőtt, ezért 7654 kg-mal nőtt minden évben az eladása, hiszen $8000 + 9d = 76\,886$, ahonnan $d = 7654$. Ezután készítsünk egy táblázatot, amelyben az utolsó sor mutatja a kérdésre kapott választ, az állatok húsának kilónkénti eladási árát. Az első sor adatait (bevétel 1000 Ft-ban) kell a második sorban lévő megfelelő számmal (eladott hús kg-ban) elosztani, hogy megkapjuk a harmadik sor adatát a kg-onkénti árat Ft-ban.

1. év	2. év	3. év	4. év	5. év	6. év	7. év	8. év	9. év	10. év
800	1 200	1 800	2 700	4 050	6 075	9 112,5	13 668,7	20 503	30 754,7
8000	15 654	23 308	30 962	38 616	46 270	53 924	61 578	69 232	76 886
100	77	77	87	105	131	169	222	296	400

Látható, hogy kezdeti csökkenés után a vételár lendületes növekedést produkált, és 10 év alatt megnégyszereződött.

1634. Legyenek a számtani sorozat tagjai: a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$.
Így $a + 5$, $a + d + 6$, $a + 2d + 9$, $a + 3d + 15$ mértani sorozat szomszédos tagjai. Egy mértani sorozatban bármely (nem első) tag négyzete a szomszédainak szorzata. Tehát most egyrészt $(a + d + 6)^2 = (a + 5)(a + 2d + 9)$, másrészt $(a + 2d + 9)^2 =$ $= (a + d + 6)(a + 3d + 15)$.

A (figyelmesen végzendő) rendezés után az elsőből: $d^2 + 2d - 9 = 2a$, a másodikból: $d^2 + 3d - 9 = 3a$. Ezek összevetéséből $d = a$, majd ezt visszaírva $d = \pm 3$. Első esetben a számtani sorozat tagjai: 3, 6, 9, 12; és $3 + 5 = 8$, $6 + 6 = 12$, $9 + 9 = 18$, $12 + 15 = 27$ valóban mértani sorozat szomszédos tagjai $q = 1{,}5$ quotienssel. A második esetben a számtani sorozat elemeire $-3, -6, -9, -12$ adódik; de $-3 + 5 = 2$, $-6 + 6 = 0$, $-9 + 9 = 0$, $-12 + 15 = 3$ nem mértani sorozat elemei. (Csalóka, hogy viszont a két belső tagra a „bármely tag négyzete a szomszédainak szorzata" tulajdonság érvényesül! Éppen ezért került be ez a hamis gyök!)

1635. A mértani sorozat tagjai a, aq, aq^2; a számtanié pedig $a + 1$, $aq + 6$, $aq^2 + 3$. (Ekkor az eredeti három szám alkotta mértani sorozat bizonyosan nem konstans, hiszen az 5-ös növekedést 3-as csökkenés követné a számtani sorozatban; így a későbbiek érdekében rögzíthetjük, hogy $a \neq 0$ és $q \neq 1$.) Egy számtani sorozatban bármely (nem első) tag a szomszédainak számtani közepe – vagy másképp: bármely tag kétszerese a szomszédainak összege.

Tehát most: $2(aq + 6) = a + 1 + aq^2 + 3$, rendezés után: $8 = a(q^2 - 2q + 1)$.

Az összegből pedig: $26 = a(1 + q + q^2)$. Elosztva ezt az előző egyenlettel (amit lehet, mert $a \neq 0$ és $q \neq 1$), a kiesik, és kapjuk: $\frac{26}{8} = \frac{q^2 + q + 1}{q^2 - 2q + 1}$.

Rendezés után: $18q^2 - 60q + 18 = 0$, amiből $q = 3$ vagy $\frac{1}{3}$.

Visszaírva ezt valamelyik egyenletbe: $a = 2$ vagy 18. Első esetben a mértani sorozat tagjai 2, 6, 18, a számtanié pedig 3, 12, 21 ($d = 9$); a második esetben a mértani sorozat tagjai 18, 6, 2, a számtanié pedig 19, 12, 5 ($d = -7$).

Másik megoldás:

A számtani sorozat három tagjának összege $26 + 1 + 6 + 3 = 36$ lesz, és ezért a második tag 12. Felírhatjuk tehát a számtani sorozat tagjait így: $12 - d$, 12, $12 + d$. Visszafelé számolva most a mértani sorozat tagjai pedig: $(12 - d) - 1 = 11 - d$, $12 - 6 = 6$, $(12 + d) - 3 = 9 + d$. Egy mértani sorozatban bármely (nem első) tag négyzete a szomszédainak szorzata. Tehát most $6^2 = (11 - d)(9 + d)$, azaz $d^2 - 2d - 63 = 0$, amiből $d = 9$ vagy -7. Első esetben a mértani sorozat tagjai 2, 6, 18 ($q = 3$), a számtanié pedig 3, 12, 21; a második esetben a mértani sorozat tagjai 18, 6, 2 ($q = \frac{1}{3}$), a számtanié pedig 19, 12, 5.

1636. A keresett mértani sorozat elemei a; aq; aq^2 ($a \neq 0$; $q \neq 0$).

A számtani sorozat elemei $a + 3$; aq; $aq^2 - 30$.

Így (I.) $a + aq + aq^2 = 63$

(II.) $aq = \frac{a + 3 + aq^2 - 30}{2}$

Rendezés után

(I.) $a(1 + q + q^2) = 63$

(II.) $a(q^2 - 2q + 1) = 27$

A két egyenletet egymással elosztva, rendezve: $4q^2 - 17q + 4 = 0$.

Ennek gyökei: $q_1 = 4$; $q_2 = \frac{1}{4}$.

$q_1 = 4$ esetén $a = 3$; $q_2 = \frac{1}{4}$ esetén $a = 48$.

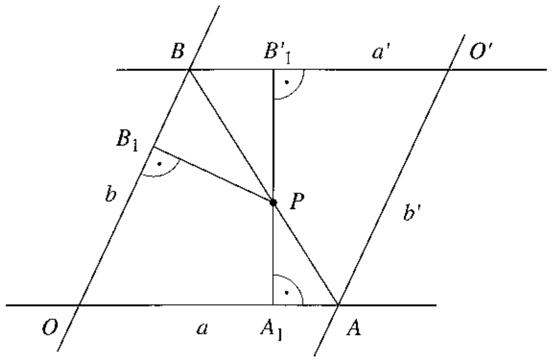
A lehetséges esetek:

q	mértani sorozat	számtani sorozat	d
4	3; 12; 48	6; 12; 18	6
$\frac{1}{4}$	48; 12; 3	51; 12; −27	−39

4. GEOMETRIA

4.1. Elemi síkgeometria

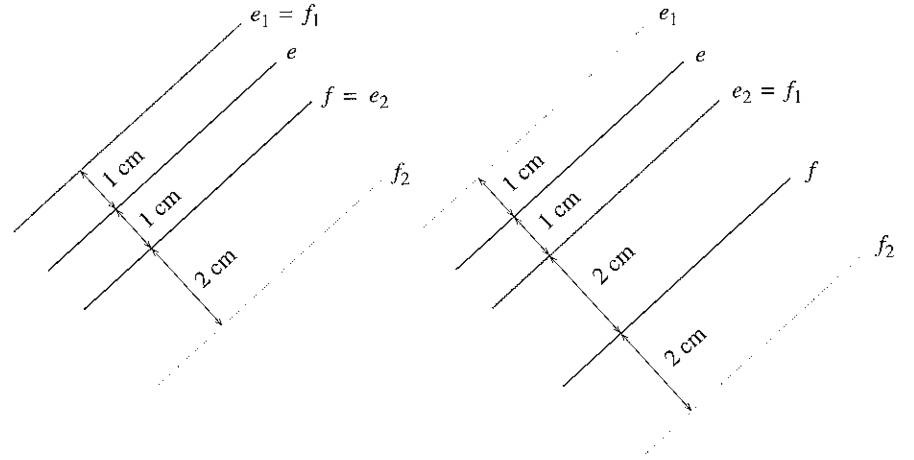
1637. Legyen a konvex szögtartomány csúcspontja O, szárai a és b. Jelöljük az a-tól 4 cm távolságra haladó, a szögtartományba is belemetsző a' egyenes b-vel való metszéspontját B-vel, a b-től 4 cm távolságra haladó, a szögtartományba is belemetsző b' egyenes a-val való metszéspontját A-val, a' és b' metszéspontját pedig O'-vel.



A és B szerkesztéséből adódik, hogy az $OAO'B$ paralelogramma egyben rombusz, melynek magassága 4 cm.
A és B nyilván olyan pontok a szögtartomány határán, amelyek a-tól és b-től mért távolságainak összege 4 cm. Megmutatjuk, hogy ez a tulajdonság az AB szakasz minden belső pontjára teljesül, azaz az ábra szerinti jelöléssel igaz, hogy ha P az AB szakasz egy tetszőlegesen választott belső pontja, akkor $PA_1 + PB_1 = 4$ cm.
Állítsunk merőlegest a-ra a P ponton keresztül. Ez a-t az A_1, a'-t pedig a B'_1 pontban metszi. Ekkor $A_1B'_1 = 4$ cm, továbbá a PB_1B derékszögű háromszög egybevágó a PB'_1B derékszögű háromszöggel, hiszen átfogójuk megegyezik és megfelelő szögeik páronként egyenlők (az AB átló felezi a rombusz OBO' szögét!).
Ezért $PB'_1 = PB_1$, így $4 \text{ cm} = A_1B'_1 = A_1P + PB'_1 = A_1P + PB_1$, tehát $PA_1 + PB_1 = 4$ cm, ahogyan állítottuk.
Könnyen belátható, hogy a szögtartomány AB-re nem illeszkedő pontjaira a távolságösszeg 4 cm-nél kisebb vagy nagyobb aszerint, hogy az OAB háromszög pontjairól, vagy a háromszögön kívüli pontokról van szó. A keresett ponthalmaz tehát az AB szakasz belső pontjainak halmaza.

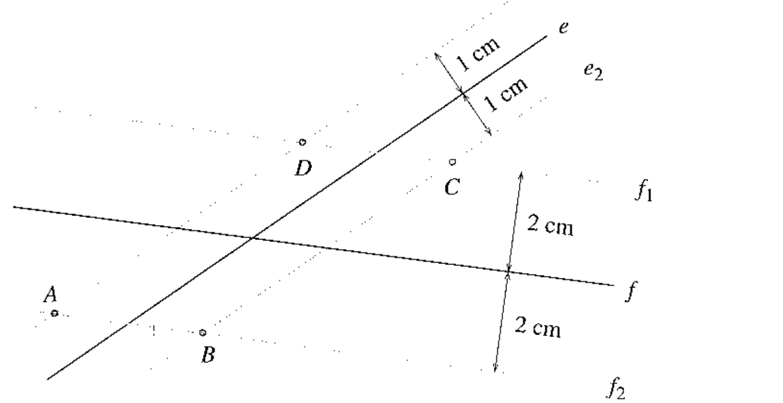
1638. Egy egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza egy az egyenesre illeszkedő síkban két párhuzamos egyenes, amelyek középpárhuzamosa az adott egyenes és távolsága az adott távolság kétszerese.
Így (az e és f egyenesek síkjában) az e egyenestől 1 cm távolságra lévő pontok az e_1 vagy az e_2 egyenesre illeszkednek, az f-től 2 cm távolságra lévő pontok az f_1 vagy az f_2 egyenesre illeszkednek.

a) A megoldás e és f távolságától függ. Csak akkor van megoldás (és ekkor végtelen sok), ha e és f távolsága 1 cm vagy 3 cm.



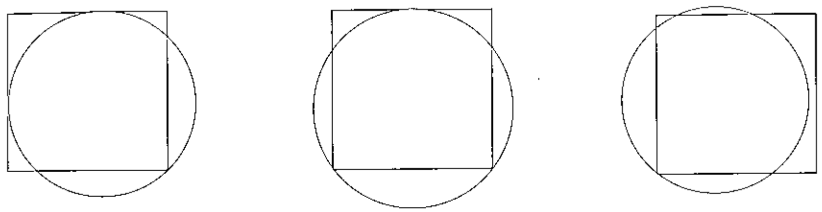
A megoldás az ábrákról leolvasható:
$d(e;f) = 1$ cm esetén $e_1 = f_1$ egyenes pontjai,
$d(e;f) = 3$ cm esetén $e_2 = f_1$ egyenes pontjai.

b) Ha e és f metszi egymást, a keresett pontok az ábráról leolvasható A, B, C, D pontok.

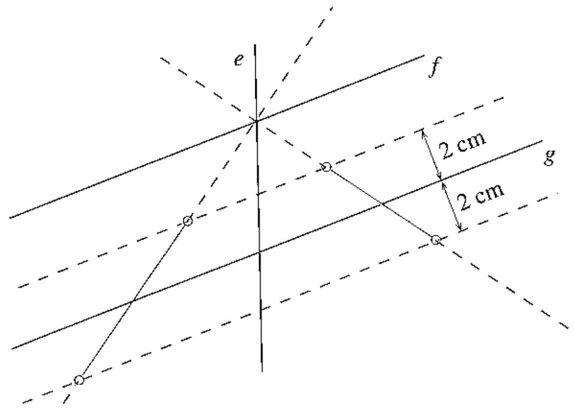


1639. $\{P \in S \mid PA = 2 \text{ cm} \wedge PB \leq 3 \text{ cm}\}$, ahol S a sík pontjainak a halmaza.

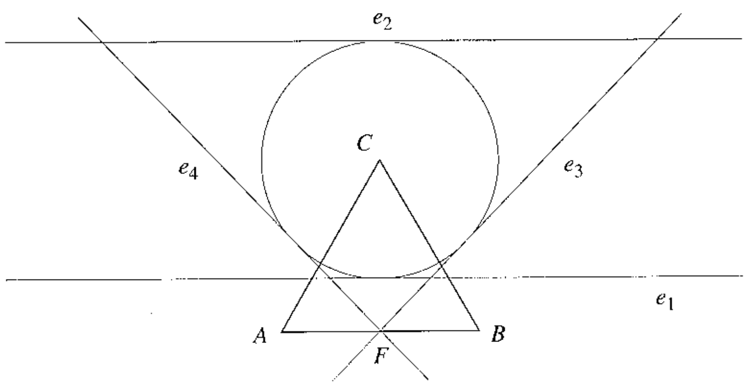
1640. Többféle megoldás is van, például:



1641. Megrajzolandók e és f szögfelező egyenesei, továbbá g mindkét oldalán a tőle 2 cm-re futó párhuzamosok. A szögfelezőknek ezen párhuzamosok közé eső pontjai adják a megoldást: két, egymásra merőleges (nyílt) szakaszt.

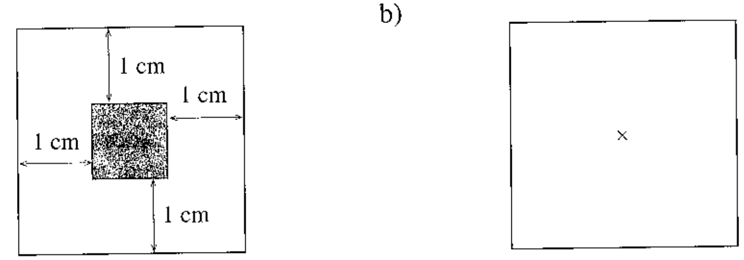


1642. Az A és B pontoktól egyenlő távolságra haladó egyenesek az AB-vel párhuzamos egyenesek és az AB szakasz F felezőpontján áthaladó egyenesek.
A C ponttól 3 cm távolságra haladó egyenesek a C középpontú 3 cm sugarú k kör érintői. A szerkesztendő egyenesek k AB-vel párhuzamos e_1, e_2 érintői, valamint k F-en áthaladó e_3, e_4 érintői. A megadott adatok esetén F k-nak külső pontja, ezért valóban 4 megoldás van. A megoldásokat az ábra szemlélteti.



1643. a) Az eredmény egy 1 cm oldalú négyzetlap.
b) Az eredmény a négyzet középpontja.
c) Ilyen pont nem létezik.

a) b)



1644. a) Jelölje a három adott egyenest: a, b és c, páronkénti metszéspontjaikat az ábrának megfelelően: A, B és C.
Egy P pont akkor és csak akkor tartozik a keresett ponthalmazhoz, ha

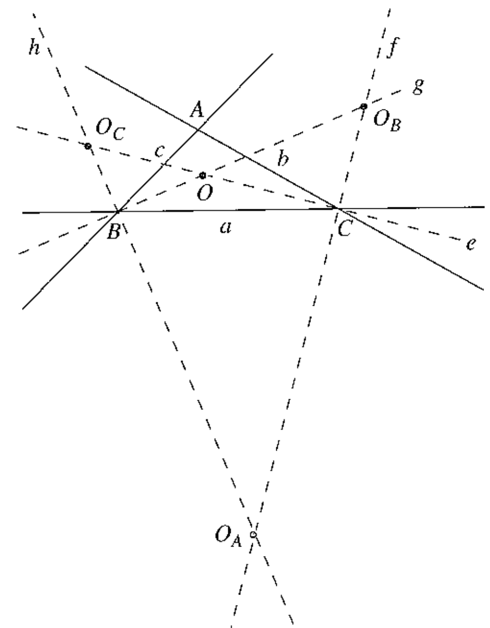
$$d(P; a) = d(P; b) = d(P; c).$$

Ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a

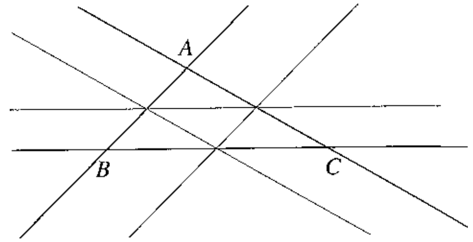
$$d(P; a) = d(P; b) \text{ és a}$$
$$d(P; a) = d(P; c)$$

feltételek egyszerre teljesülnek.

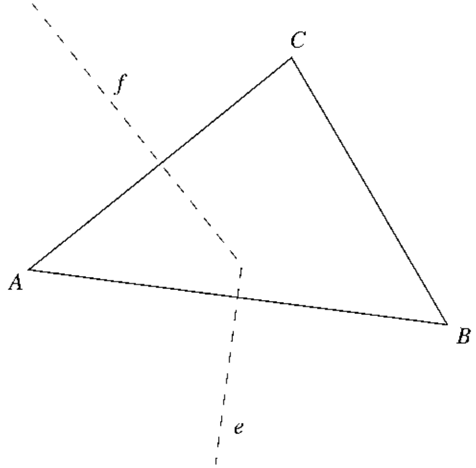
Ismeretes, hogy két metsző egyenestől egyenlő távolságra fekvő pontok halmaza az egyenesek síkjában a metsző egyenesek szögfelező egyeneseinek a pontjai.
A $d(P; a) = d(P; b)$ feltételt kielégítő G ponthalmaz pontjait az a, b egyenespár e és f szögfelező egyeneseinek a pontjai alkotják.
A $d(P; a) = d(P; c)$ feltételt kielégítő H ponthalmaz pontjait az a, c egyenespár g és h szögfelező egyeneseinek a pontjai alkotják.
Mindkét feltételt egyszerre a G és a H halmazok közös pontjai elégítik ki.
Négy ilyen pont van, az ábrán ezek a pontok az O, O_A, O_B, O_C pontok.



b) Az adott egyenesek páronkénti metszéspontjai az ABC háromszöget határozzák meg.
Az ABC háromszög középvonalainak egyenesei és csak ezek elégítik ki a feltételt. Tehát a kívánt feltételnek 3 egyenes felel meg.



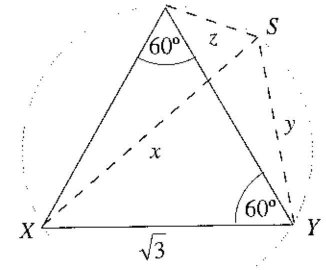
1645. Azoknak a P pontoknak a halmazát kell meghatározni az ABC háromszög síkjában, melyekre a
$d(P; A) < d(P; B)$ és a
$d(P; A) < d(P; C)$
feltételek egyszerre teljesülnek.
Ismeretes, hogy az első feltételt egy olyan félsík pontjainak a halmaza elégíti ki, mely A-t tartalmazza és határa az AB szakasz e szakaszfelező merőlegese.
Ehhez hasonlóan a második feltételt egy olyan félsík pontjainak a halmaza elégíti ki, mely A-t tartalmazza és határa az AC szakasz f szakaszfelező merőlegese.



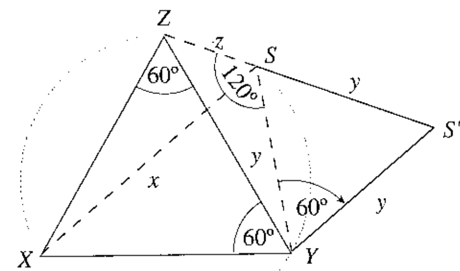
Mindkét feltételt e két félsík közös pontjainak a halmaza elégíti ki.
Tehát a keresett pontok halmaza az A-t tartalmazó e, f szögtartomány, ahol e az AB szakasz, f pedig az AC szakasz szakaszfelező merőlegese. A szögtartomány szárainak a pontjai nem tartoznak hozzá a keresett ponthalmazhoz.

1646. Jelöljük az egymástól 10 cm-re levő adott pontot A-val és B-vel. Először azokat az egyeneseket határozzuk meg, amelyek A-tól 2 cm, B-től pedig 3 cm távolságra haladnak.
Az A-tól 2 cm távolságra haladó egyenesek az A középpontú 2 cm sugarú k_1 kör, a B-től 3 cm távolságra haladó egyenesek pedig a B középpontú 3 cm sugarú k_2 kör érintői.
Mindkét feltételt kielégítő egyenesek k_1 és k_2 közös érintői lesznek. Mivel az AB szakasz hossza nagyobb, mint k_1 és k_2 sugarainak összege, ezért a k_1 és k_2 körökhöz négy közös (2 belső és 2 külső) érintő szerkeszthető. Hasonló szerkesztéssel kapjuk meg azokat az egyeneseket is, amelyek A-tól 3 cm-re, B-től pedig 2 cm-re helyezkednek el. A feladat feltételeit kielégítő egyenesek száma 8.

1647. Jelöljük a 2 km átmérőjű, kör alakú tó partján a stéget S-sel, a horgászok helyét X, Y, Z-vel. A szöveg szerint az XYZ olyan szabályos háromszög, melynek körülírt köre 1 km sugarú, ezért a háromszög magassága $\frac{3}{2}$ km, oldala $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3}$ km hosszúságú.
A horgászok stégtől való távolsága kilométerben mérve, az ábra szerinti jelöléssel x, y, z.



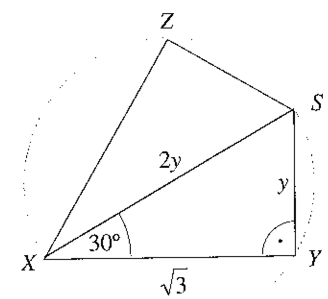
Először megmutatjuk, hogy az egyik horgász pontosan annyit evezett, mint a másik kettő együtt, azaz (az ábra jelölését használva) $x = y + z$ teljesül.
Forgassuk el Y körül negatív irányban 60°-kal az YS szakaszt. Az SYS' háromszög egy y oldalú szabályos háromszög, ezért $YSS' \sphericalangle = 60°$.
A középponti és kerületi szögek tétele miatt igaz, hogy $YSZ \sphericalangle = 120°$, ezért $ZSS' \sphericalangle = 180°$, tehát Z, S és S' egy egyenesre illeszkedő pontok. Ebből következik, hogy $ZS' = y + z$.
Ha az XYS háromszöget is elforgatjuk Y körül negatív irányban 60°-kal, akkor $X' = Z$ miatt az elforgatott háromszög éppen a ZYS' háromszög lesz.



Az XS szakasz hossza tehát megegyezik a ZS' szakasz hosszával, vagyis $x = y + z$, ahogyan állítottuk.
A feladat szövegéből adódóan tehát a következő esetek lehetségesek:

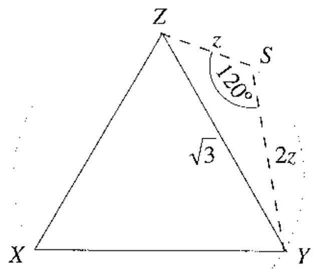
1. Az első horgász x km-t evezett, a második pedig y km-t, tehát $x = 2y$ (vagy az ettől csak betűzésben különböző eset, ha a második horgász evezett z km-t: $x = 2z$).
2. Az első horgász y km-t evezett, a második pedig z km-t, tehát $y = 2z$ (vagy az ettől csak betűzésben különböző eset, ha az első horgász z km-t evezett: $z = 2y$).

Az 1. esetben az $x = y + z$ összefüggés felhasználásával $2y = y + z$, azaz $y = z$ adódik. Az S pont ekkor tehát a rövidebbik YZ ív felezőpontja. Az XYS derékszögű háromszögből $y = 1$ adódik, tehát az első horgász 2 km-t, a második és a harmadik pedig 1-1 km-t evezett.



A 2. esetben $y = 2z$, tehát az YSZ háromszögből koszinusztétellel:
$3 = z^2 + 4z^2 - 2z \cdot 2z \cdot \cos 120°$, amiből $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ felhasználásával

$7z^2 = 3$, majd $z > 0$ miatt $z = \sqrt{\frac{3}{7}}$ adódik.

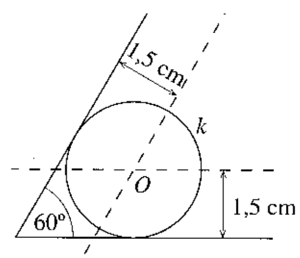


Az első horgász $2 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 1,309$ km-t,

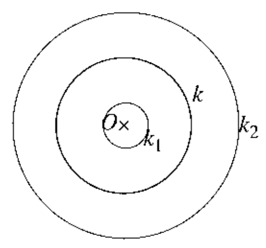
a második $\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0,655$ km-t, a harmadik pedig ($x = y + z = 3z$ miatt) $3 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 1,964$ km-t evezett.

A feladatnak tehát a fenti két, lényegesen különböző megoldása van.

1648. A k kör O középpontja mindkét szögszártól 1,5 cm távolságra van. Szerkesztése az ábráról leolvasható.



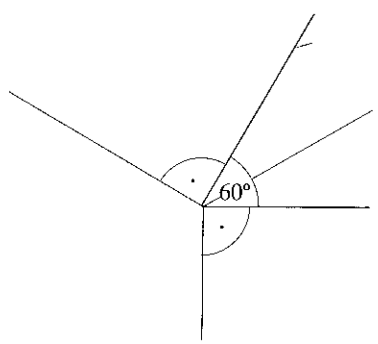
A sík azon pontjai, amelyek a k körtől 1 cm-re vannak, az O középpontú 0,5 cm vagy az O középpontú 2,5 cm sugarú körvonal pontjai. (E két körvonal mint ponthalmaz uniójának $k_1 \cup k_2$ elemei.)



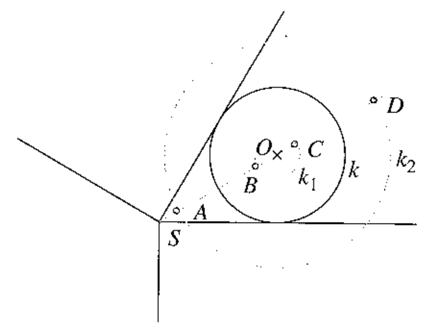
A sík azon pontjai, amelyek a szög száraitól egyenlő távolságra vannak

a) a szögtartományon belül a szögfelező félegyenes,

b) a szögtartományon kívül az ábrán látható szögtartomány.

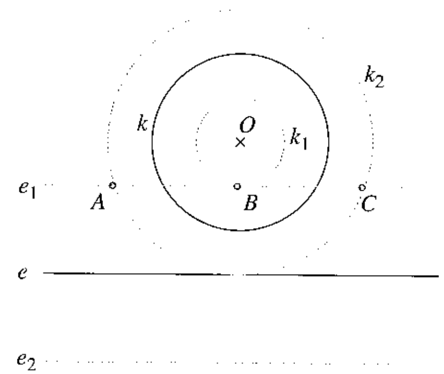


A két feltételnek egyszerre eleget tevő pontok a szögfelező félegyenes és a két körvonal közös pontjai: A, B, C, D.

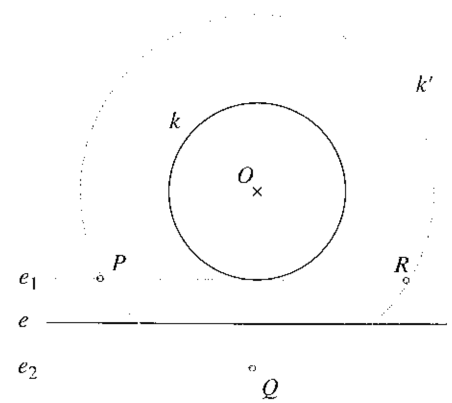


Megjegyzés:
Mivel $SO = 2 \cdot 1,5$ cm $= 3$ cm $> AO = 2,5$ cm, ezért a 60°-os szögtartományon kívül nincs olyan pont a síkban, amely k-tól 1 cm-re lenne. Ezt figyelembe véve a 60°-os szögtartományon kívül a száraktól egyenlő távolságra lévő pontok keresése elhagyható.

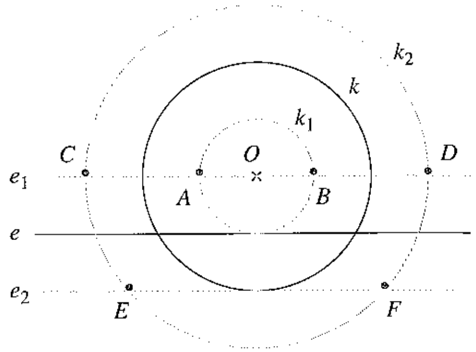
1649. a) A sík k-tól 1 cm-re lévő pontjainak halmaza az O középpontú 1 cm sugarú k_1 és az O középpontú 3 cm sugarú k_2 körvonalak uniója ($k_1 \cup k_2$). Az e egyenestől 2 cm-re lévő pontok halmaza az e egyenessel párhuzamos, tőle 2 cm távolságra fekvő e_1 és e_2 egyenesek uniója ($e_1 \cup e_2$). A keresett pontok (a fenti két ponthalmaz metszetének: $(k_1 \cup k_2) \cap (e_1 \cup e_2)$ elemei): A, B, C.



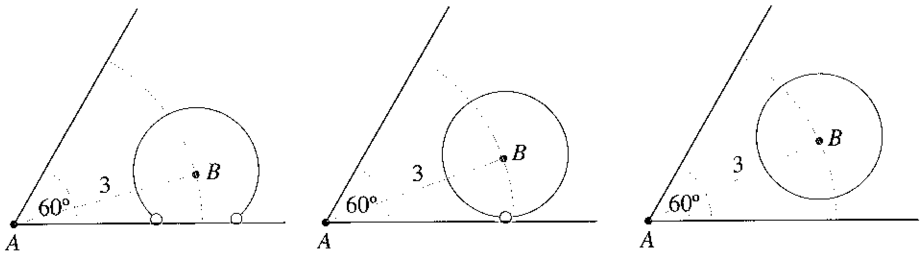
b) A k-tól 2 cm-re lévő pontok O és az O középpontú 4 cm sugarú k' körvonal pontjai:
Az e-től 1 cm-re lévő pontok halmaza az e-vel párhuzamos, tőle 1 cm-re fekvő e_1, illetve e_2 egyenes uniója.
A keresett pontok $(k' \cup \{O\}) \cap (e_1 \cup e_2)$ halmaz elemei: P, Q, R.



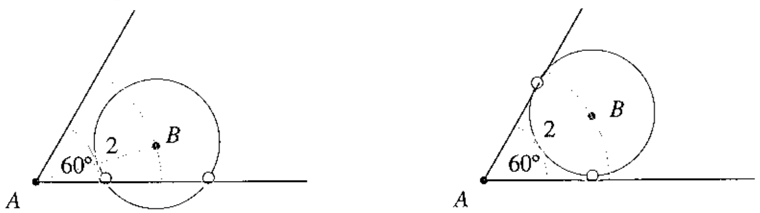
1650. A k-tól 1,5 cm-re lévő pontok két, k-val koncentrikus kört alkotnak. Ezek az O középpontú 1,5 cm, és az O középpontú 4,5 cm sugarú körök.
Az e-től 1,5 cm-re lévő pontok az e-vel párhuzamos két egyenest alkotnak, amelyeknek e a középpárhuzamosa (e_1 és e_2). A keresett ponthalmaz:
$(k_1 \cup k_2) \cap (e_1 \cup e_2) =$
$= \{A; B; C; D; E; F\}$.



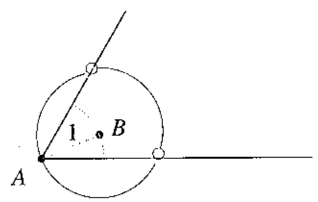
1651. a) A megoldás függ attól, hogy B a szög száraitól milyen távolságra fekszik. A keresett ponthalmaz egy nyílt körív vagy egy körvonal, amelynek középpontja B és sugara 1 cm.



b) Ha B nem illeszkedik a szögfelezőre, akkor a keresett pontok halmaza a B középpontú 1 cm sugarú nyílt körív.
Ha B a szögfelező pontja, akkor a B középpontú 1 cm sugarú kör érinti a szögszárakat. A megoldás a körvonalnak az érintési pontoktól különböző pontjai.

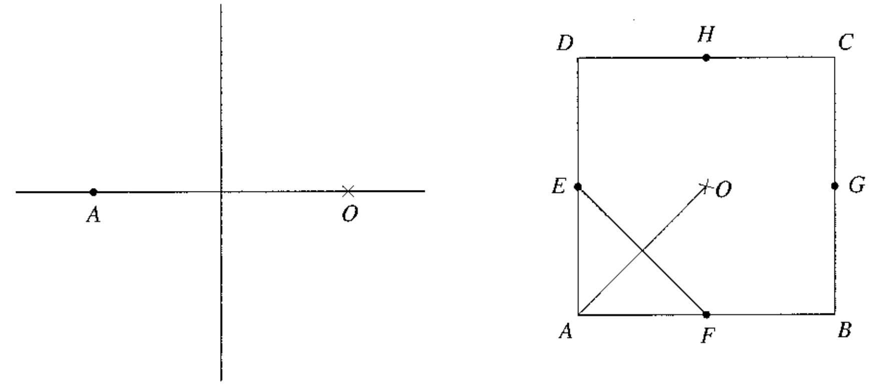


c) A keresett pontok a B középpontú 1 cm sugarú nyílt körív szögtartományba eső pontjai.



1652. A $PO < PA$ egyenlőtlenség az AO szakaszfelező merőlegese által határolt O-t tartalmazó félsík belső pontjaira teljesülnek. A négyzet belsejében a $PO < PA$ egyenlőtlenség megoldásai: a négyzet AEF háromszöglemezen kívül fekvő pontjai.

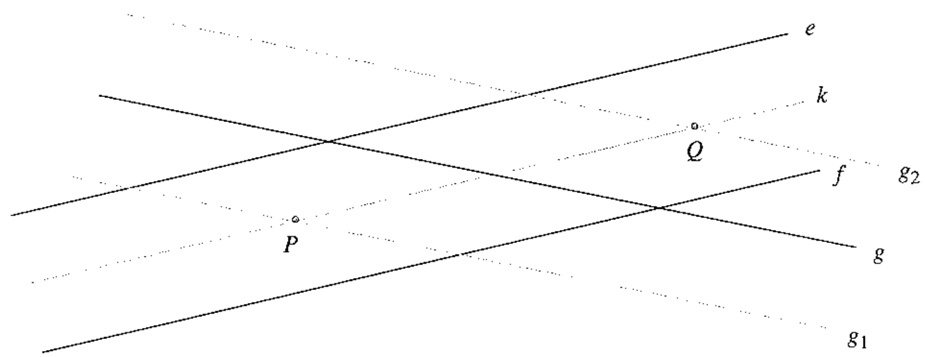
a) $PO < PA$ vagy $PO < PC$ teljesül a négyzet minden belső pontjára, így a $PO < PA$ vagy $PO < PB$ vagy $PO < PC$ vagy $PO < PD$ egyenlőtlenség-rendszer a négyzet minden belső pontjára teljesül.



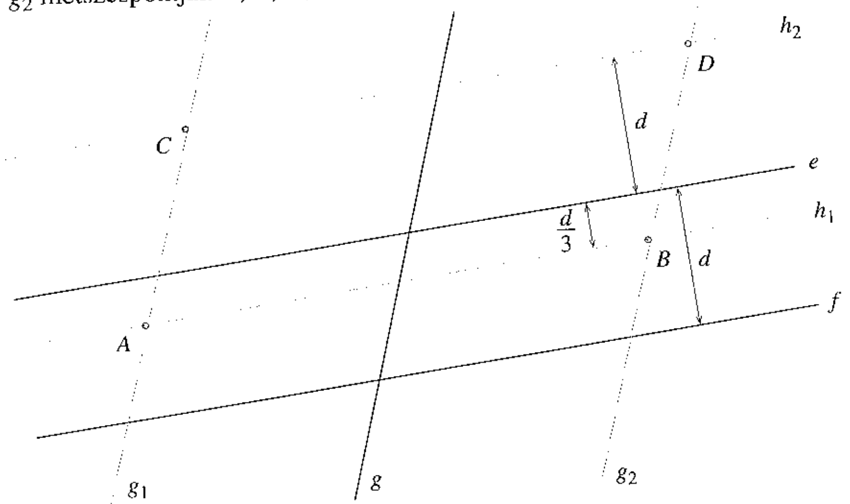
b) A $PO < PA$ és $PO < PB$ és $PO < PC$ és $PO < PD$ egyenlőtlenség-rendszer megoldásai az $EFGH$ négyzet belső pontjai.

1653. A g-től 2 cm távolságra lévő pontok a g-vel párhuzamos, attól 2 cm távolságra levő g_1 és g_2 egyenesek egyikére esnek.

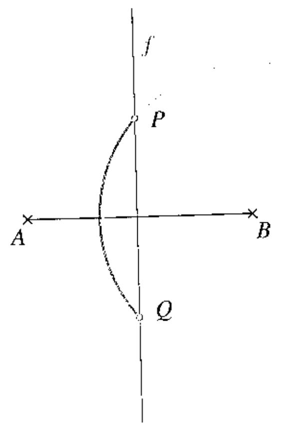
a) e-től és f-től egyenlő távol levő pontok e és f k középpárhuzamosának pontjai. A keresett pontok g_1 és k, illetve g_2 és k közös pontjai: P és Q, a keresett ponthalmaz $\{P; Q\}$.



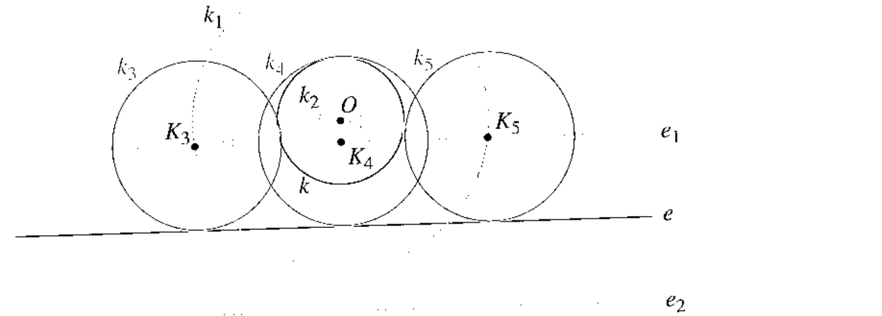
b) Jelöljük e és f távolságát d-vel. Az e és f egyenes által meghatározott sávban azok a pontok vannak fele akkora távolságra e-től, mint f-től, amelyek az e-től $\frac{1}{3}d$ (és f-től $\frac{2}{3}d$) távolságra levő h_1 egyenesre illeszkednek. A síksávon kívül csak az e egyenes oldalán vannak még ilyen tulajdonságú pontok, mégpedig az e-től d (és f-től $2d$) távolságra levő h_2 egyenes pontjai.
A két feltételt egyszerre teljesítő pontok h_1 és g_1, h_1 és g_2, h_2 és g_1, valamint h_2 és g_2 metszéspontjai: A, B, C, D. A keresett ponthalmaz tehát: $\{A; B; C; D\}$.



1654. A sík azon pontjainak halmaza, amelyekre teljesül, hogy A-tól nincsenek messzebb, mint B-től, az AB szakasz f felező merőlegese által határolt, A pontot tartalmazó félsík (f-fel együtt).
A sík azon pontjainak halmaza, amelyekre $PB = \frac{2}{3}AB$ fennáll, a B középpontú $\frac{2}{3}AB$ sugarú körvonal.
A feladat megoldása e két ponthalmaz metszete; az ábrán a zárt $\widehat{PQ}$.



1655. Adott egy O középpontú, 3 cm sugarú k kör és O-tól 5 cm távolságra egy e egyenes.
Az e egyenest érintő 4 cm sugarú körök középpontja két, az e egyenessel párhuzamos e_1, illetve e_2 egyenesen van. A k kört érintő 4 cm sugarú körök középpontja két, O-val koncentrikus k_1, illetve k_2 körön van, amelyek sugara $R = 3 + 4 = 7$ (cm), $r = |3 - 4| = 1$ (cm).
A keresett körök középpontját az e_1, illetve e_2 egyenes és a k_1, illetve k_2 kör metszéspontja adja. (K_3, K_4, K_5). A keresett megoldások a k_3, k_4, k_5 körök.

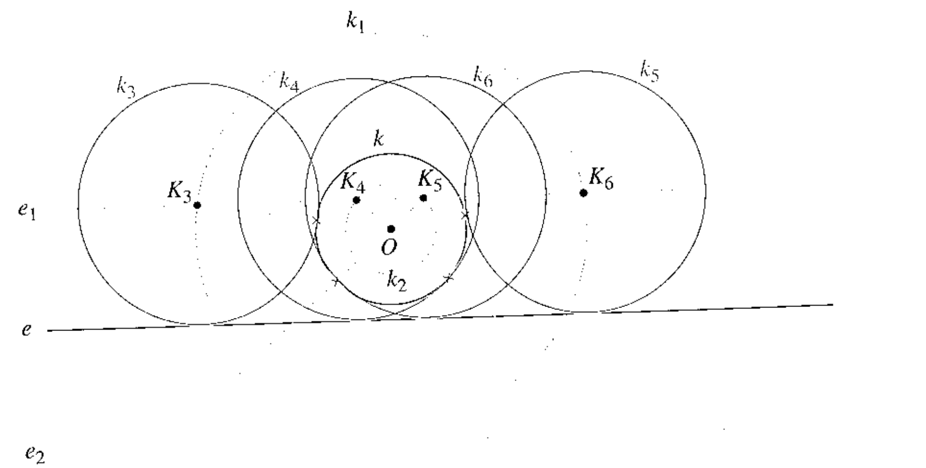


1656. Legyen a 2,5 cm sugarú k kör középpontja O.

1. feltétel: A szerkesztendő körök középpontja 4 cm távolságra van az e-től, tehát az e-vel párhuzamos, tőle 4 cm távolságra lévő e_1, vagy e_2 egyenesen kell lennie.

2. feltétel: A k-t érintő 4 cm sugarú körök középpontja 6,5 cm-re, vagy 1,5 cm-re van az O középponttól, tehát a k-val koncentrikus k_1, vagy k_2 körön lehetnek ilyen pontok.

Mindkét feltételt az $(e_1 \cup e_2) \cap (k_1 \cup k_2) = \{K_3; K_4; K_5; K_6\}$ ponthalmaz elemei teljesítik. Összesen négy, a feltételeknek megfelelő érintőkör van (k_3, k_4, k_5, k_6).



1657. Azért ismételtette meg a mérést, mert a háromszög-egyenlőtlenség nem teljesül az adatokra, valaki rosszul mért: $345{,}22 + 159{,}45 = 504{,}67 < 511{,}24$!

1658. a) A parabola pontjai egyenlő távolságra vannak a fókusztól és a vezéregyenestől. Ez csak a középső (zölddel színezett) görbére teljesül.

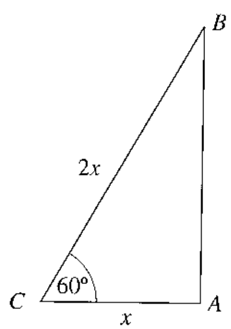
b) A fókusz és a vezéregyenes távolságát kell megszerkeszteni, majd megmérni (kb. 12,5 mm).

c) A parabola tengelypontjában húzott érintője párhuzamos a vezéregyenessel. A tengelyponttól különböző P parabolapontban a következő módon szerkeszthető érintő:

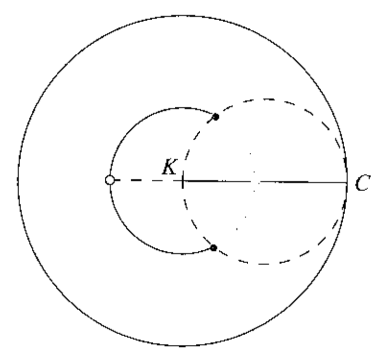
1. P kezdőpontú, PF félegyenes szerkesztése;
2. P kezdőpontú, v-re merőleges félegyenes szerkesztése;
3. A két félegyenes által meghatározott P csúcsú szög szögfelező egyenesének szerkesztése.

A megszerkesztett szögfelező egyenes a parabola P-beli érintője.

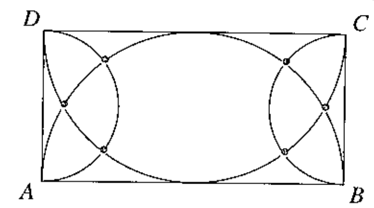
1659. Modellezve a három gyermek elhelyezkedését, egy háromszöget kapunk, amelyről azt tudjuk, hogy $BC = 2AC$ és $ACB\sphericalangle = 60°$. Kérdés a $CAB\sphericalangle$. Ezekből az adatokból egy nevezetes háromszögre ismerhetünk: a szabályos háromszög egyik felére, ebben zár közre egy 60°-os szöget két olyan oldal, amelyek aránya $1:2$. E háromszögben tudvalevőleg a másik két szög 30°, illetve derékszög, így a kérdéses $CAB\sphericalangle = 90°$.



1660. A CK szakaszra megrajzoljuk a Thalész-kört. Ennek a belső körvonallal közös két pontjából (piros „pöttyök") látszik CK derékszögben; a belső körvonalnak a Thalész-körön kívüli (fekete) ívének pontjaiból hegyesszögben, a Thalész-körön belüli (szürke) ívének pontjaiból pedig tompaszögben. A CK-ra, illetve annak meghosszabbítására eső pontok kivételt jelentenek, hiszen innen 180°-ban, illetve 0°-ban látszik a CK szakasz, és ezeket a szögeket nem szokás tompa-, illetve hegyesszögnek nevezni.



1661. Rajzoljunk a téglalap oldalai mint átmérő fölé félköröket a téglalap belsejében! Thalész tétele miatt a megrajzolt félkörök pontjaiból látszanak majd derékszögben a téglalap megfelelő oldalai. A téglalap valamely két oldala egyszerre valamely két félkör metszéspontjából fog derékszögben látszani. Ilyen metszéspont pedig 6 darab van. Tehát 6 olyan pont van a téglalap belsejében (ilyen adatok mellett), melyekből a téglalap valamely két oldala egyszerre derékszögben látszik.



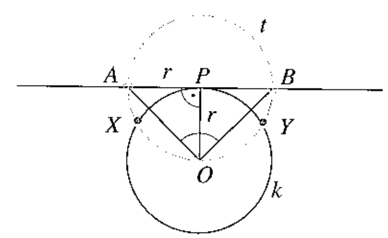
1662. Az A és B pontot a P-beli érintőn

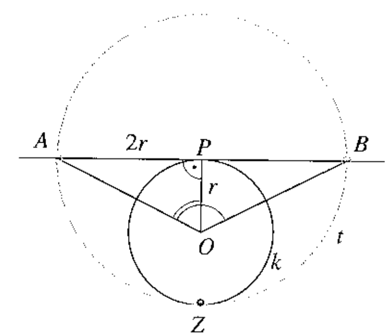
a) P-től r, b) P-től $2r$

távolságra kellett kijelölni.

Azon pontok halmaza, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik, az AB szakasz t Thalész-köre (az AB átmérőjű körvonal, kivéve az A és B pontokat). A keresett pontok t és k közös pontjai:

a) X, Y pontok; b) Z pont.





c) Az első esetben $AOB\sphericalangle = 90°$ a Thalész-tétel szerint.
A második esetben $AOB\sphericalangle = 2 \cdot AOP\sphericalangle \approx 126{,}9°$, mert az AOP derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} AOP\sphericalangle = 2$, $AOP\sphericalangle \approx 63{,}43°$.

1663. Az első három szerkesztés a hasonló háromszögek tulajdonságainak felhasználásával, vagy a párhuzamos szelők tétele, a negyedik a magasságtétel alapján történik.

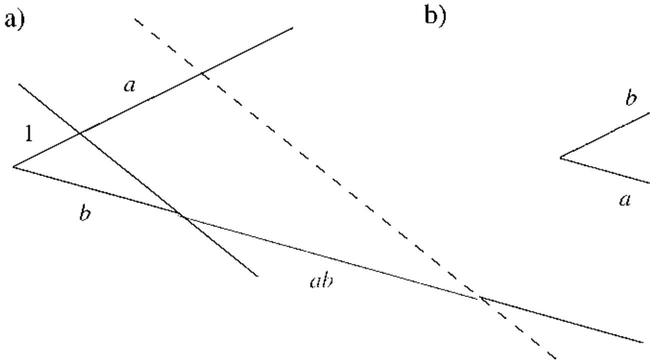
a) Egy szög egyik szárára a csúcsból indulva felmérjük egymáshoz csatlakozva az 1 és a szakaszokat, a másik szárra a b-t. Az a másik végpontjából párhuzamost húzunk az 1 és b végpontját összekötő szelővel, és ez b mellett kimetsz a másik szárból egy olyan szakaszt, amelynek aránya a-hoz megegyezik a $b:1$ aránnyal, vagyis ez az ab.

b) Egy szög egyik szárára a csúcsból indulva felmérjük egymáshoz csatlakozva a b és az 1 szakaszokat, a másik szárra az a-t. Az 1 hosszúságú szakasz másik végpontjából párhuzamost húzunk az a és b végpontját összekötő szelővel, és ez a mellett kimetsz a másik szárból egy olyan szakaszt, amelynek aránya 1-hez megegyezik az $a:b$ aránnyal, vagyis ez az $\frac{a}{b}$.

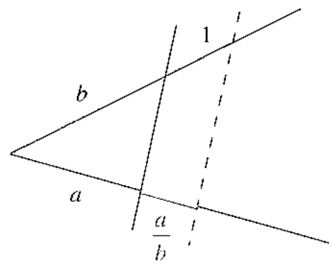
c) Megegyezik a b)-beli szerkesztéssel, csak a helyébe is az egységet kell felmérnünk.

d) Egy $a + 1$ hosszúságú szakasz fölé Thalész-(fél)kört szerkesztünk, és az a és az 1 csatlakozópontjából merőlegest állítunk az átmérőre. Ebből a körvonal egy olyan szakaszt metsz ki, amely egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság. Mint ilyen, ez mértani közepe az átfogón keletkező két darabnak, vagyis a-nak és 1-nek, tehát $\sqrt{a \cdot 1}$, azaz $\sqrt{a}$ hosszúságú.

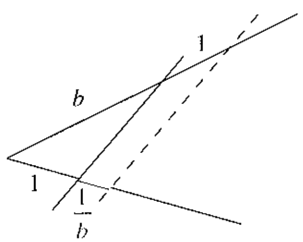
a)



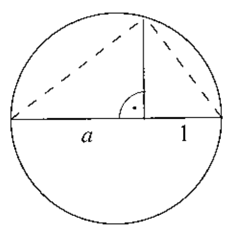
b)



c)

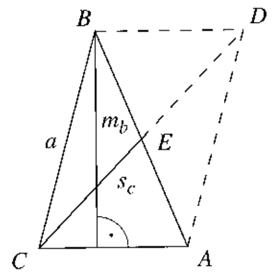


d)

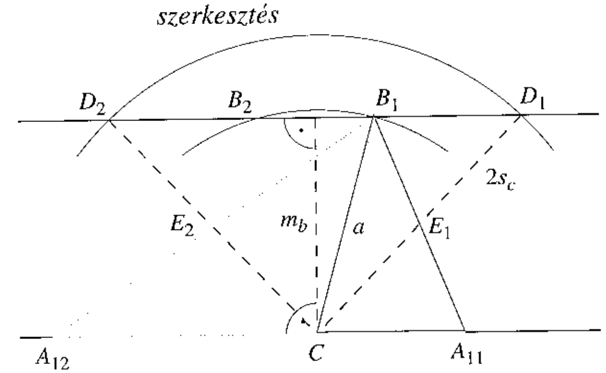


1664. Készítsünk vázlatot! Egészítsük ki az ABC háromszöget az ábra szerint paralelogrammává, s ebből már adódik a szerkesztés ötlete. Vegyünk fel két, egymástól m_b távolságban futó párhuzamos egyenest. Az egyik egyenes valamely pontjából (C) szerkesszünk a és $2s_c$ sugarú köríveket. Ezek B és D pontokban metszik a másik egyenest. (Ábránkon mindegyik metszéspontból kettő van, de ez lehet másképp is, l. a diszkussziót!) A CD felezőpontjaként adódik E, és BE meghosszabbítása metszi ki az első egyenesből A-t. (A különböző indexű B és D pontok révén ábránkon összesen 4 különböző A ponthoz juthatunk, az áttekinthetőség kedvéért nem tüntettük föl mindet. A keletkezett háromszögek közül kettő-kettő úgyis egybevágó: a párhuzamosokra C-ben állított merőlegesre tengelyesen szimmetrikusak.) Diszkusszió: ha a vagy $2s_c$ kisebb m_b-nél, nincs megoldás (mert a körívek nem metszenek ki a párhuzamosból semmilyen pontot). Ha $a = m_b$ és $2s_c > m_b$, akkor van (két, egybevágó, derékszögű) megoldás (mert ilyenkor az a sugarú kör érinti a párhuzamost); egyébként nincs. Ha $a > m_b = 2s_c$, két, egybevágó (tompaszögű) megoldás van; végül, ha a is, $2s_c$ is nagyobb m_b-nél (egy ilyen eset látható ábránkon), akkor kettő vagy négy, kettesével egybevágó megoldás van, a és $2s_c$ egymáshoz való viszonya függvényében.

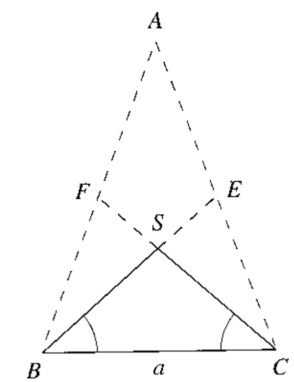
vázlat



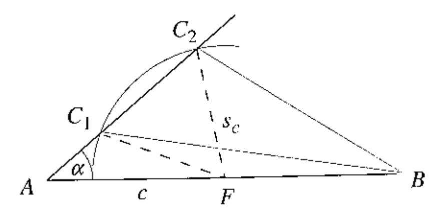
szerkesztés



1665. Természetesen az a alap a másik szárhoz tartozó súlyvonallal is ugyanekkora szöget zár be. Felmérve a két végpontjába (B és C) az adott szöget, a BCS háromszög megszerkeszthető. Mivel a súlyvonalak harmadolva metszik egymást, (az egyenlő) CS és BS S-en túli meghosszabbításába felmérve e szakaszok felét, kapjuk az F és az E oldalfelező pontot. Ekkor BF és CE metszéspontjaként kapjuk A-t. Diszkusszió: ha a megadott szög 90°-nál kisebb, mindig van (egyértelmű) megoldás; egyébként nincs.



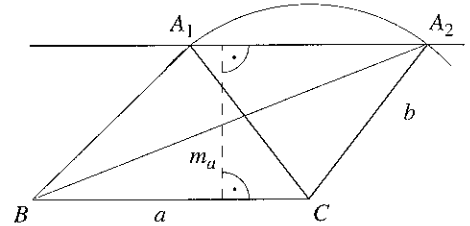
1666. Felvesszük a c oldalt, és A végpontjába felmérjük az α szöget. A c felezőpontjából, F-ből s_c sugarú kört rajzolunk. Ennek az α szög másik szárával való metszéspontja(i) a lehetséges C csúcs(ok). Ez(eke)t összekötve B-vel kapjuk a



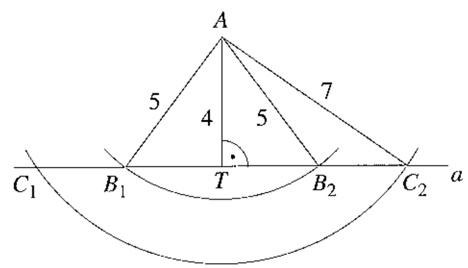
megoldás(oka)t. Diszkusszió: ha α hegyesszög, és az s_c sugarú kör nem éri el a szemközti szögszárat, nincs megoldás; ha érinti, akkor egy, tompaszögű megoldás van; ha két pontban metszi, két különböző megoldás van (mint ábránkon); végül, ha csak egy pontban metszi, akkor egy megoldás van. A fenti esetek rendre az $s_c < \frac{c}{2} \cdot \sin\alpha$, $s_c = \frac{c}{2} \cdot \sin\alpha$, $\frac{c}{2} \cdot \sin\alpha < s_c < \frac{c}{2}$, $\frac{c}{2} \le s_c$ esetben következnek be.

Ha α derék- vagy tompaszög, akkor $s_c \le \frac{c}{2}$ esetben nincs megoldás, $\frac{c}{2} < s_c$ esetben pedig egy (rendre derék- vagy tompaszögű) megoldás van.

1667. Felvesszük az a oldalt, és tőle m_a távolságban húzunk egy párhuzamost. Ezután a egyik végpontjából (C-ből) b sugarú körívet rajzolunk. Ennek a párhuzamossal való közös pontja(i) a lehetséges A csúcs(ok), amelye(ke)t összekötve B-vel kapjuk a megoldás(oka)t.
Diszkusszió: ha $b < m_a$, nincs megoldás (mert a körív nem éri el a párhuzamost); ha egyenlők, akkor egy (derékszögű) megoldás van (mert a körív érinti a párhuzamost); ha pedig a $b > m_a$, akkor két, különböző megoldás van (mint ábránkon is).



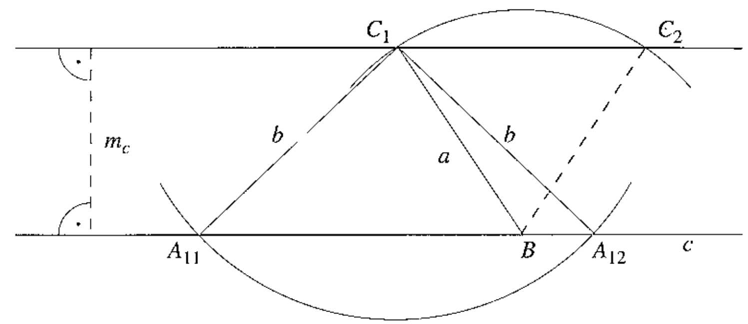
1668. Legyen $b = 7$ cm, $c = 5$ cm, $m_a = 4$ cm.
Vegyük fel az a oldalegyenest és a tőle 4 cm távolságra az A pontot. B illeszkedik az a egyenesre és mivel $c = 5$ cm, ezért az A középpontú 5 cm sugarú körre is. Ez a kör két pontban metszi az a egyenest: B_1, B_2. Hasonlóan C az a egyenes és az A középpontú 7 cm sugarú kör közös pontja: C_1, C_2.



Az adódó négy háromszög AB_1C_1, AB_1C_2, AB_2C_1, AB_2C_2 közül 2-2 egybevágó. Az adatokból két nem egybevágó háromszög szerkeszthető.

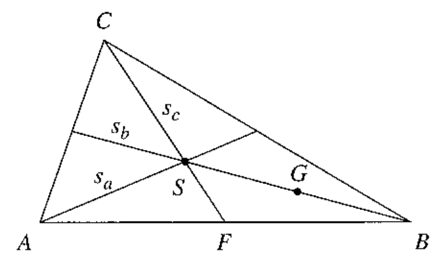
Megjegyzés:
1. A szerkesztendő háromszöget az adatok nem határozzák meg egyértelműen.
2. A szerkesztés az ABT és az ACT derékszögű háromszögek megszerkesztésével is megoldható, de gondolni kell arra, hogy a T magasságtalppont nem biztos, hogy a BC oldal belső pontja, illetve, hogy β lehet tompaszög is.

1669.



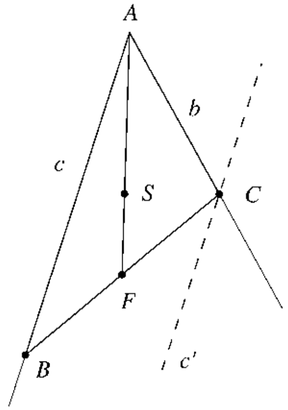
Felvesszük a c oldal egyenesét, és tőle m_c távolságban egy vele párhuzamos egyenest. Az első egyenes egy tetszőleges (B) pontja, mint középpont körül, a sugarú körívet húzunk, ennek a párhuzamossal való közös pontja(i) a lehetséges C pont(ok). Ezen középpont (vagy középpontok) körül húzott b sugarú körív kimetszi az első egyenesből az A ponto(ka)t.
Diszkusszió: ha bármelyik adott oldal kisebb az adott magasságnál, vagy mindhárom adat egyenlő, nincs megoldás (mert a körívek nem érik el a „túlsó" párhuzamost, vagy a kapott csúcsok egybeesnek). Ha az egyik oldal egyenlő a magassággal, a másik ennél nagyobb, akkor (két, egybevágó) derékszögű megoldás van. Ha mindkét oldal nagyobb a magasságnál, de egymással egyenlők, akkor (két, egybevágó) egyenlő szárú megoldás van; végül, ha mindkét oldal nagyobb a magasságnál, és egymással nem egyenlők, akkor négy (kettesével egybevágó) megoldás születik (mint az ábránkon, ahol az áttekinthetőség kedvéért nem rajzoltunk be minden lehetőséget).

1670. Vázlatunkon S-sel jelöltük a szerkesztendő háromszög súlypontját, F-fel és G-vel pedig rendre az AB és SB szakaszok felezőpontját.
Az SFG háromszög megszerkeszthető, mert oldalainak a hossza az adott súlyvonalak hosszának harmadai.
Ugyanis a súlypont ismert tulajdonsága miatt $SF = \frac{1}{3}s_c$, $SG = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{3}s_b$, továbbá FG az ASB háromszög AS-sel párhuzamos középvonala, ezért $FG = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{3}s_a$.



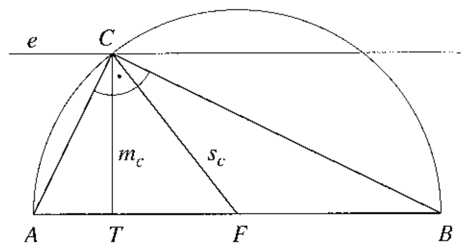
Az SFG háromszög ismeretében az ABC háromszög már könnyen megszerkeszthető.

1671. Jelöljük az adott szögtartomány csúcspontját A-val, szárait b-vel és c-vel, az adott súlypontot S-sel. Tekintsük a feladatot megoldottnak és készítsük el az ábrát.
A szerkesztendő háromszög egyik csúcspontja nyilván az A pont. Ha az A-val szemközti BC oldal felezőpontja F, akkor a súlypont ismert tulajdonsága miatt $AF = \frac{3}{2}AS$. Így AS ismeretében F megszerkeszthető.
Mivel $BF = FC$, ezért a B pont F-re való tükörképe C. Tudjuk, hogy B illeszkedik c-re, ezért C-nek illeszkednie kell c F-re vonatkozó c' tükörképére is. Tehát a keresett C pont b és c' metszéspontjaként adódik. Végül a CF egyenes kimetszi c-ből a B csúcspontot.



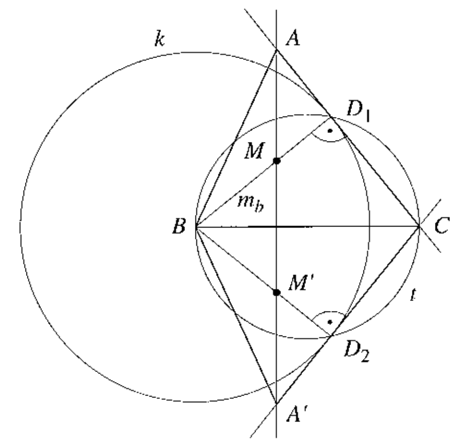
Ha a megadott szög 0° és 180° közötti, a feladatnak mindig egy megoldása van egyébként nincs megoldása.

1672. Az ABC derékszögű háromszöget kell megszerkeszteni, ha adott m_c és s_c.
Thalész tétele miatt $AB = 2s_c$, így a háromszög átfogóját fel tudjuk venni. A C pont az AB szakasz Thalész-körének és az AB egyenestől m_c távolságra haladó e egyenesnek a metszéspontjaként adódik.

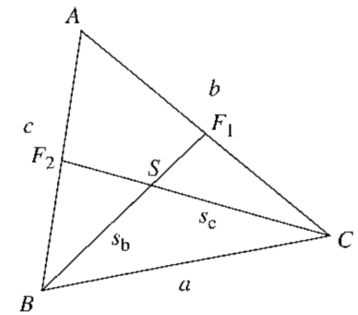


A feladatnak 2 megoldása van, ha $m_c < s_c$, 1 megoldása van, ha $m_c = s_c$ és nincs megoldása, ha $m_c > s_c$.

1673. Szerkesszük meg $BC = a$ szakasz Thalész-körét (t), majd ezt metsszük el egy B középpontú, m_b sugarú körrel (k). E két kör metszéspontja $t \cap k = \{D_1; D_2\}$ (ha van) adja az AC oldal egyik pontját (az m_b magasság talppontját). Szerkesszük meg BD_1 szakasz B-től számított $3:2$ arányú osztópontját, ez a háromszög M magasságpontja. Az M-ből a BC-re állított merőleges és CD_1 metszéspontja adja a háromszög A csúcspontját.
Diszkusszió: ha $m_b \geq a$, akkor a feladatnak nincs megoldása. Más esetekben a feladatnak egy megoldása van (a keletkezett megoldások egybevágók).



1674. Legyen adott a; s_b, s_c. A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, és az S súlypont a súlyvonalak csúcstól távolabbi harmadolópontja. Szerkesszük meg a CSB háromszöget az a; $\frac{2}{3}s_b$; $\frac{2}{3}s_c$ oldalakkal. BS illetve CS meghosszabbítására mérjük fel S-ből kiindulva a B-vel, illetve a C-vel ellentétes oldalra az $\frac{1}{3}s_b$; $\frac{1}{3}s_c$ szakaszokat, így a b, illetve a c oldal felezőpontját kapjuk, melyeket a C-vel, illetve a B-vel összekötve, ezek metszéspontjaként megkapjuk a háromszög A csúcsát.

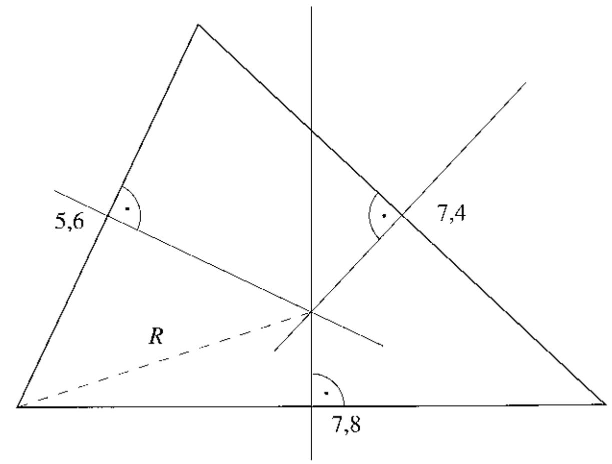


Diszkusszió: A feladatnak egy megoldása van, ha az a; $\frac{2}{3}s_b$; $\frac{2}{3}s_c$ oldalakra teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek. Ha nem, akkor a feladatnak nincs megoldása.

1675. a) A három települést a térképen pontszerűnek véve, a háromszög körülírható körének a középpontja lesz a keresett pont.

b) Lásd a mellékelt ábrát: 28 km-nek $\frac{28\ \text{km}}{500\,000} = 5{,}6$ cm felel meg, hasonlóan a másik két távolságnak: 7,4 cm, illetve 7,8 cm.

c) Az ábrán: $R \approx 4{,}1$ cm, ami átszámítva 20,5 km. (Ez „tűrhető” mérés, mert a Heron-képlettel kiszámolva a területet, majd abból $T = \frac{abc}{4R}$ módon meghatározva a sugarat, kb. 20,48 km adódik.)



1676. a) Az ABC háromszög körülírt körének középpontja van mindhárom labdától egyenlő távolságra.

b) Mindegyik csapattagnak $2r$ távolságot kell futnia, ahol r az egyenlő szárú ABC háromszög körülírt körének sugara.

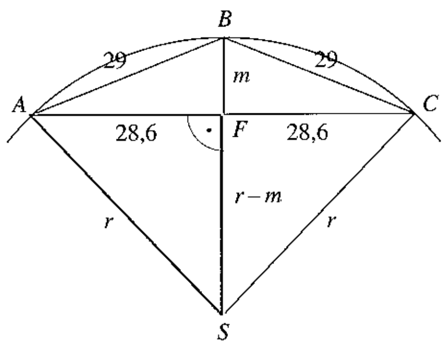
Az ABC háromszög AC alapjához tartozó magasságára:

$m^2 = 29^2 - 28{,}6^2 = 23{,}04$, ezért $m = 4{,}8$ cm ($m > 0$).

Az AFS derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel adódik:

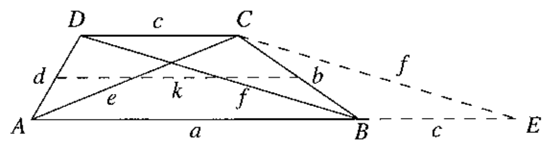
$r^2 = 28{,}6^2 + (r - 4{,}8)^2$.

Ebből $r = 87{,}6$ cm, vagyis mindegyik csapattagnak 175,2 cm-t kell futnia.

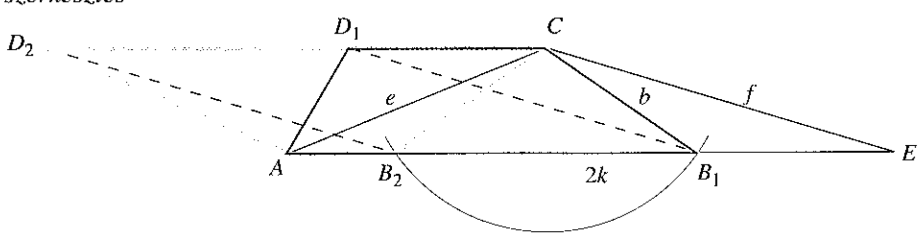


1677. Készítsünk vázlatot! Ha az f átlót c-vel eltoljuk úgy, hogy felső végpontja egybeessék e felső végpontjával (C), akkor egy e, f és $a + c$ (azaz $2k$) oldalú háromszöget hoztunk létre. A megoldás tehát ennek (az AEC háromszögnek) megszerkesztésével kezdődik. Majd a C középpontú b sugarú körívvel kimetsszük az AE szakaszból a B ponto(ka)t, ahová „visszatolva" az f átló alsó végpontját, a felső megadja D-t. Diszkusszió: az e, f, $2k$ szakaszokra teljesülniük kell a háromszög-egyenlőtlenségeknek, különben nincs megoldás. Ha b „túl rövid", azaz kisebb az AEC háromszög AE oldalához tartozó magasságánál, akkor sincs megoldás (mert a körív nem éri el az alapot). Ha b egyenlő ezzel a magassággal, akkor van (egy, derékszögű) megoldás. Ha pedig nagyobb ennél, akkor két (többnyire különböző) megoldás van (mint az ábránkon is). Ha ezen belül $e = f$, akkor a keletkező két trapéz egybevágó, és szimmetrikus is.

vázlat



szerkesztés



Megjegyzés:

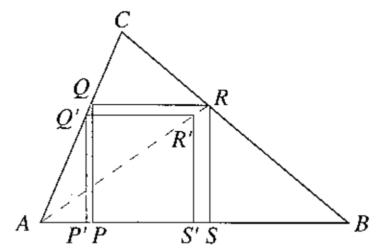
A Héron-képlettel kiszámolva az AEC háromszög területét, kifejezhetjük a szóban forgó magasságot. A háromszög fél kerülete $s = \frac{e+f}{2} + k$, így területe egyrészt $\frac{2k \cdot m}{2} = km$, másrészt $\sqrt{\left(\frac{e+f}{2}+k\right)\left(\frac{e+f}{2}-k\right)\left(\frac{-e+f}{2}+k\right)\left(\frac{e-f}{2}+k\right)}$.

Ezt elosztva k-val kapjuk annak a magasságnak az értékét, amihez képest b kisebb, egyenlő vagy nagyobb volta a megoldások számát eldönti.

1678. Szerkesszünk az ABC háromszögbe négyzetet úgy, hogy 2 csúcsa például AB oldalon, a harmadik csúcsa AC oldalon legyen ($P'Q'R'S'$). Nagyítsuk a négyzetet a háromszög A csúcsából úgy, hogy a beírt $PQRS$ négyzet R csúcsa BC oldalra essen.

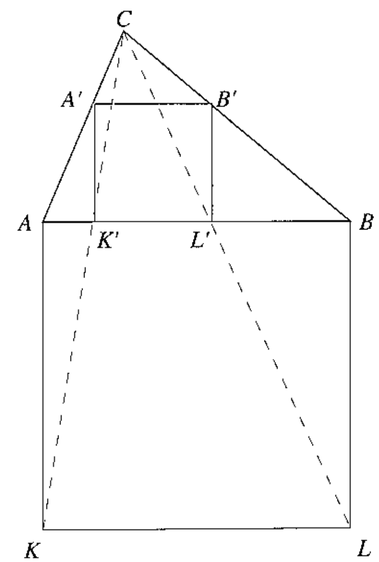
Attól függően, hogy a háromszög melyik oldala tartalmazza a négyzet két csúcsát, több megoldás lehetséges.

Ha például a háromszög hegyesszögű, három különböző megoldás van.



Másik megoldás:

Szerkesszünk pl. az AB oldalra kifelé egy $ABLK$ négyzetet! Alkalmazzuk erre azt a C középpontú hasonlóságot, amellyel a K pont képe (K') és az L pont képe (L') AB-re esik. Minden C középpontú hasonlóságnál A és B képe illeszkedik AC, illetve BC oldalra.



1679. Pitagorasz tételének megfordítása miatt a kérdéses háromszög derékszögű. A szerkesztendő négyzet kétféleképpen helyezhető el, lásd az α és β ábrát.

α) a) Szerkesszünk az ABC háromszögbe négyzetet úgy, hogy a négyzet egyik csúcsa C, másik két csúcsa egy-egy befogón legyen. Nagyítsuk a négyzetet a háromszög C csúcsából úgy, hogy a beírt négyzet E csúcsa az AB oldalra essen!

b) Legyen x a keresett $CDEG$ négyzet oldala.
$EGB\Delta \sim ACB\Delta$, mert két-két szögük egyenlő, így megfelelő oldalainak aránya is egyenlő $\frac{6-x}{x} = \frac{6}{8}$. Ebből $x = \frac{24}{7} \approx 3,4$ (cm).

β) a) Szerkesszünk ezután az ABC háromszögbe négyzetet úgy, hogy 2 csúcsa az AB oldalon (az átfogón), a harmadik csúcsa AC oldalon (az egyik befogón) legyen. Nagyítsuk a négyzetet a háromszög A csúcsából úgy, hogy a beírt négyzet M csúcsa a BC oldalra essen.

b) $AKL\Delta \sim ACB\Delta \sim MNB\Delta$, mert két-két szögük egyenlő, így megfelelő oldalainak aránya is egyenlő.
Legyen y a keresett $KLMN$ négyzet oldala.
Mivel $ACB\Delta \sim MNB\Delta$, így $\frac{MN}{NB} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{y}{NB} = \frac{8}{6}$, ebből $NB = \frac{3}{4}y$.

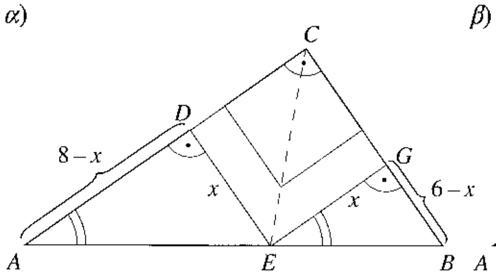
$$AK = AB - KN - NB = 10 - y - \frac{3}{4}y = 10 - \frac{7}{4}y$$

Mivel $AKL\,\Delta \sim ACB\,\Delta$, így $\frac{AK}{KL} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{10 - \frac{7}{4}y}{y} = \frac{4}{3}$.

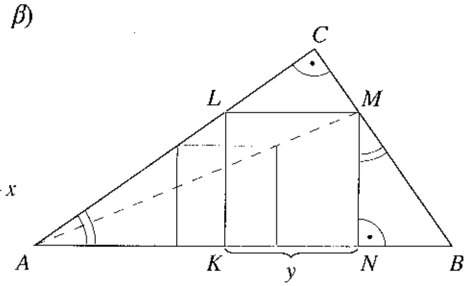
Ebből $y = \frac{120}{37} \approx 3,2$ (cm).

Tehát az adott háromszögbe két olyan négyzet szerkeszthető, melynek csúcsai a háromszög oldalaira esnek, ezek oldalhossza $\frac{24}{7}$ cm, illetve $\frac{120}{37}$ cm.

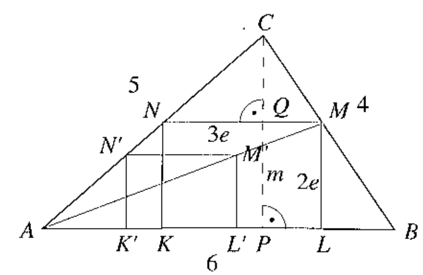
α)



β)



1680. a) Rajzoljunk az $ABC\Delta$-be olyan téglalapot, amely oldalainak aránya 2 : 3, és 3 csúcsa a Δ oldalaira illeszkedik. ($K'N'M'L'$) Nagyítsuk a téglalapot A-ból úgy, hogy M' képe a BC oldalra illeszkedjen $\Rightarrow$ $KLMN$ téglalap, melynek oldalaira teljesül: $\frac{ML}{KL} = \frac{2}{3}$.



b) Legyen $ML = 2e$, $KL = 3e$.
Számítsuk ki az $ABC\Delta$ AB oldalhoz tartozó magasságát például Pitagorasz tétele segítségével az APC, illetve CPB derékszögű háromszögekre: $AP := x \Rightarrow PB = 6 - x$; $PC := m$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + m^2 &= 5^2 \\ (6-x)^2 + m^2 &= 4^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ebből } x = 3,75;\ m = \frac{5}{4}\sqrt{7} \approx 3,3.$$

$CNM\Delta \sim CAB\Delta$ a párhuzamosság miatt 2-2 szögük egyenlő, így megfelelő szakaszaik aránya is egyenlő.

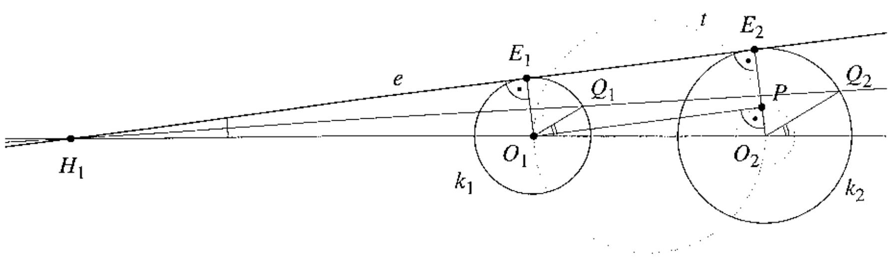
$$\frac{MN}{CQ} = \frac{AB}{PC}, \text{ azaz } \frac{3e}{m-2e} = \frac{6}{m}$$

$m \sim 3,3$ értéket behelyettesítve $e \sim 0,9$, tehát a berajzolt téglalap oldalai:
$ML = 2e \approx 1,8$ cm; $MN = 3e \approx 2,7$ cm.
(Ha az AB oldalon levő téglalap oldal a rövidebb, akkor a berajzolható téglalap oldalai 1,6 cm és 2,4 cm hosszúak.)

c) A feladatnak 6 különböző megoldása van aszerint, hogy a háromszög melyik oldalára illeszkedik a téglalap 2 csúcsa, illetve ezen az oldalon a téglalap rövidebb vagy hosszabb oldala van.

1681. a) Jelöljük e-vel a két kör egyik közös külső érintőjét! Ennek a körökkel való érintési pontjai E_1, E_2. O_1E_1 és O_2E_2 az érintési pontokhoz húzott sugarak, ezért merőlegesek e-re. Toljuk el E_1E_2 szakaszt $\overrightarrow{E_1O_1}$ vektorral. E_2 képe P lesz és $O_1PO_2\sphericalangle = 90°$. Ezért P illeszkedik O_1O_2 szakasz Thalész-körére. Másrészt $O_2P = 1$ cm, így P illeszkedik az O_2 középpontú 1 cm sugarú körre is. Így P megszerkeszthető. e-t megkapjuk, ha O_1P egyenest O_2P irányában 2 cm-re eltoljuk. H_1 az e és O_1O_2 egyenesek metszéspontja.
$H_1O_1E_1$ és $H_1O_2E_2$ háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyenlők.
Ezért a megfelelő oldalak aránya egyenlő: $\frac{H_1O_1}{H_1O_2} = \frac{E_1O_1}{E_2O_2}$.

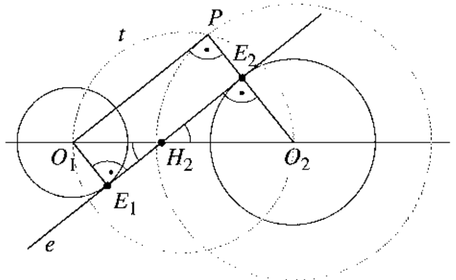
Legyen $x = H_1O_1$, ekkor $H_1O_2 = x + 8$ és az egyenlőség: $\frac{x}{x+8} = \frac{2}{3}$,
amiből $x = 16$, $O_1H_1 = 16$ cm.

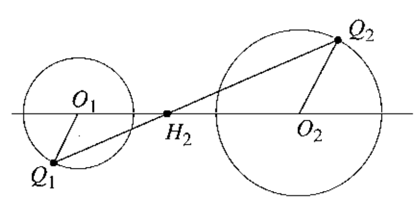


Megjegyzés:

1. H_1 megszerkeszthető a körök középpontos hasonlóságának felhasználásával is: A H_1 középpontú 3 : 2 arányú hasonlóság k_1-et k_2-be, k_1 egy tetszőleges O_1Q_1 sugarát a k_2 kör ezzel párhuzamos és egyirányú O_2Q_2 sugarába viszi. Ezért válasszuk ki a két kör egy-egy párhuzamos és egyirányú O_1Q_1 és O_2Q_2 sugarát. Q_1Q_2 egyenes átmegy a H_1 ponton. Mivel H_1 illeszkedik a körök O_1O_2 centrálisára is, H_1 a két egyenes metszéspontja.
2. A $H_1O_1E_1$ és $H_1O_2E_2$ háromszögek hasonlóságának felhasználásával is megszerkeszthető H_1. $2 \cdot O_1O_2$-t kell felmérni O_1-től O_1O_2-re.

b) H_2 szerkesztése az ábrákról leolvasható.





$H_2O_1E_1$ és $H_2O_2E_2$ háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyenlő.

Ezért a megfelelő oldalak aránya egyenlő: $\dfrac{H_2O_1}{H_2O_2} = \dfrac{E_1O_1}{E_2O_2}$.

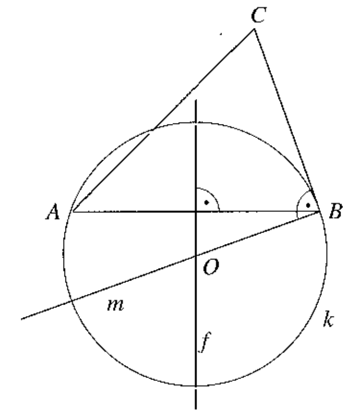
Legyen $y = O_1H_2$, ekkor $O_2H_2 = 8 - y$ és az egyenlőség: $\dfrac{y}{8-y} = \dfrac{2}{3}$,

amiből $y = 3{,}2$, $O_1H_2 = 3{,}2$ cm.

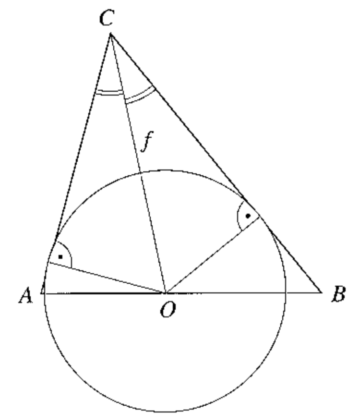
Megjegyzés:

$H_2O_1E_1 \sim H_2O_2E_2$, ezért a H_2 szerkesztésekor O_1O_2-t 2 : 3 arányban kell osztani.

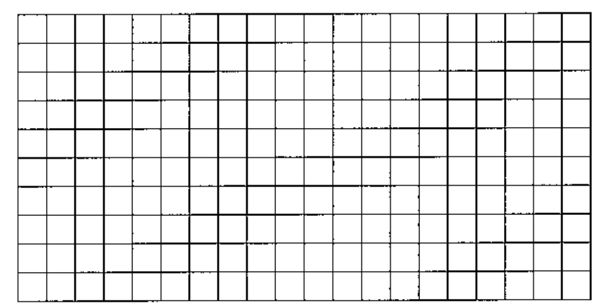
1682. Szerkesszük meg AB oldal f felezőmerőlegesét, ezen vannak azoknak a köröknek a középpontjai, melyek A-n is és B-n is áthaladnak. Állítsunk B-ben merőlegest BC-re (m), $m \cap f = \{O\}$ annak a körnek a középpontja, amely B-ben érinti BC oldalegyenest (OB sugár merőleges a BC érintőre), és áthalad A-n.
Több megoldás is lehetséges attól függően, hogy a kör a háromszög melyik két csúcspontján halad át, és melyik oldalegyenesét érinti (max. 6 db megoldás).



1683. Egy ilyen körnek az O középpontja pl. a γ szög szögfelezőjének és a γ-val szemközti AB oldalnak a metszéspontja. O-ból merőlegest állítunk a másik két oldalra, e merőlegesek adják a keresett kör sugarát.
A feladatnak 3 megoldása van aszerint, hogy melyik oldalon van a kör középpontja.

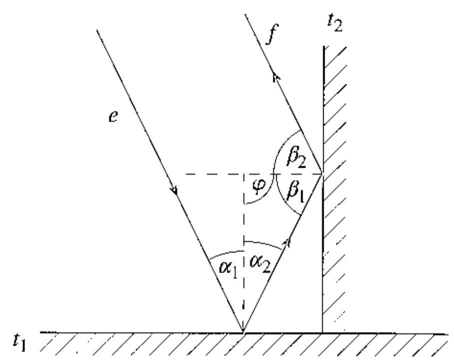


1684. A vizsgált téglalapot felbontottuk 200 darab 1 cm oldalhosszúságú négyzetre.



A téglalap belsejébe eső négyzetcsúcspontok megfelelnek az adott feltételeknek, más pontok pedig nem.
Így a keresett pontok száma $9 \cdot 19 = 171$.

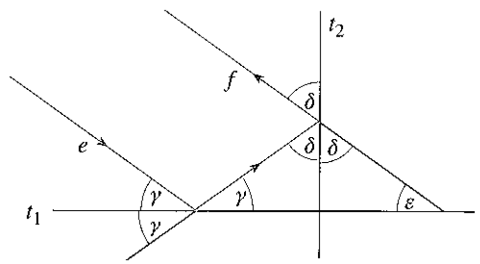
1685. Legyen a két tükör a könyvlap síkjára merőleges, így a t_1 és t_2 tükörre beeső, illetve visszavert fénysugarak ábrázolhatók a könyvlap síkjában.
Ismert, hogy a tükörre beeső és visszavert fénysugarak beesési és visszaverődési szöge egyenlő, tehát $\alpha_1 = \alpha_2$ és $\beta_1 = \beta_2$.
Az ábrán t_1, t_2 valamint a beesési merőlegesek egy téglalapot határoznak meg, így $\varphi = 90°$ és $\alpha_2 + \beta_1 = 90°$.
Ezekből $2\alpha_1 + 2\beta_1 = 180°$, tehát $e \parallel f$.



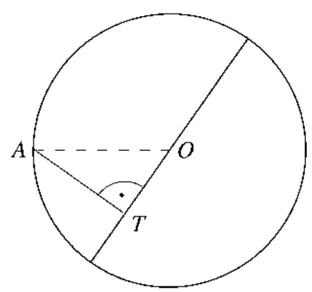
Megjegyzés:

a) A tükörről úgy verődik vissza a fénysugár, mintha a fényforrás tükörképéből indult volna. Az ábrán $\gamma + \delta = 90°$ és $\delta + \varepsilon = 90°$, ezért $\varepsilon = \gamma$, azaz $e \parallel f$.

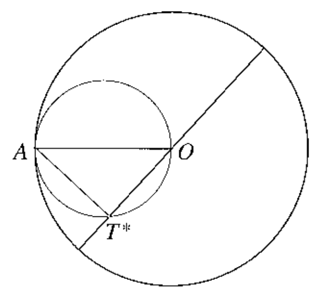
b) Ha a beeső fénysugár éppen a két tükör síkjának metszésvonalára érkezik, akkor a visszavert fénysugár és a beeső fénysugár egyenese azonos.



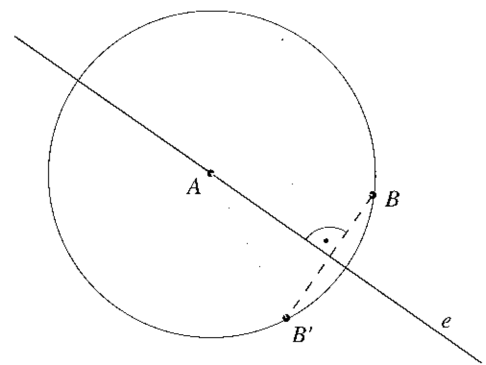
1686. Legyen A-nak az egyik átmérőre eső merőleges vetülete T. Így $ATO\sphericalangle = 90°$, azaz T pontból az AO szakasz derékszögben látszik, tehát T illeszkedik AO szakasz Thalész-körére. Az A pontot az AO átmérőre, az O pontot az AO-ra merőleges átmérőre eső merőleges vetületként kapjuk.



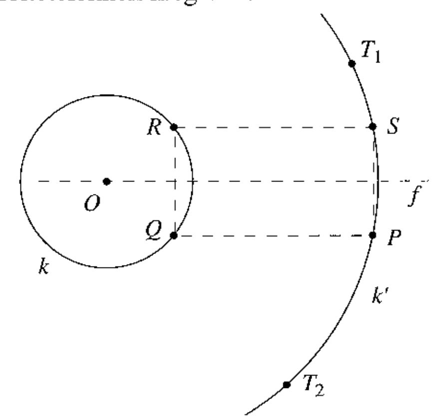
Az AO átmérőjű körvonal minden pontja A-nak valamely átmérőre eső merőleges vetülete. Legyen T^* a kör egy tetszőleges, O-tól különböző pontja. Ehhez a T^*-ot tartalmazó átmérő tartozik, mert Thalész tétele szerint $AT^*O\sphericalangle = 90°$.



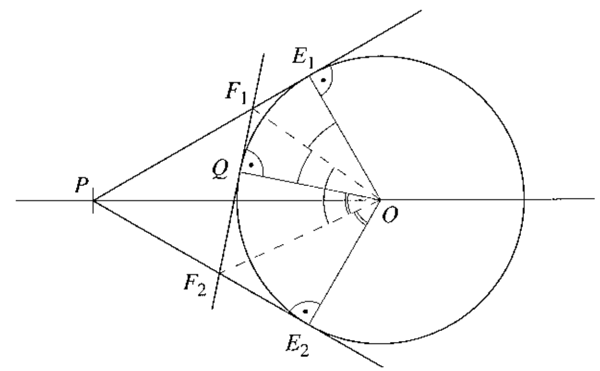
1687. A tükrözés miatt $AB' = AB$, ezért B' illeszkedik az A középpontú AB sugarú körre.
A körvonal minden pontja előáll B valamely e egyenesre vonatkozó tükörképeként: Legyen B^* a körvonal B-től különböző pontja. Az ehhez tartozó e egyenes a BB^* szakasz felező merőlegese (amely $AB = AB^*$ miatt A-ra illeszkedik). A B ponthoz tartozó e egyenes az AB egyenes.



1688. Legyen $PQRS$ egy olyan téglalap, mely a feltételeknek megfelel.
A téglalap RQ oldalának f felezőmerőlegese nyilvánvalóan felezőmerőlegese a téglalap SP oldalának is. Mivel RQ a k körnek húrja, f áthalad k O középpontján. Ebből következik, hogy $OP = OS$. Tehát az S pont az adott k körrel koncentrikus OP sugarú k' körön fekszik.
A k' kör egy tetszőleges T pontja csak akkor tartozik hozzá a keresett ponthalmazhoz, ha az PT-re P-ben állított merőleges egyenesnek van a k körrel közös pontja. Ez pedig csak akkor teljesül, ha $PT \le 2r$, ahol r a k kör sugara. Tehát a keresett ponthalmaz a k' körnek az a T_1PT_2 köríve, melyre $T_1P = T_2P = 2r$. A P pont nyilván nem tartozik hozzá a keresett ponthalmazhoz.

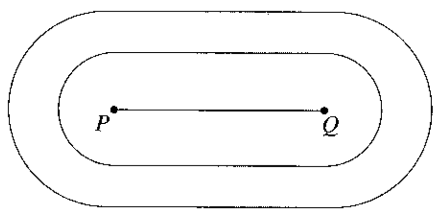


1689. Jelölje a P-hez tartozó érintők érintési pontjait E_1, E_2. $POE_1\Delta \cong POE_2\Delta$, szögeik: 30°, 60°, 90° (mert a rövidebbik befogó az átfogó fele). Ezért $E_1OE_2\sphericalangle = 120°$. A feladatban szereplő harmadik, Q pontbeli érintőnek az előzőekkel alkotott metszéspontja legyen F_1, F_2. Mivel E_1OF_1 és QOF_1, valamint E_2OF_2 és QOF_2 háromszögek – két oldal és a nagyobbikkal szem-



ben fekvő szögek egyenlősége révén – egybevágóak, ezért $F_1OQ\sphericalangle = \frac{1}{2}\cdot E_1OQ\sphericalangle$ és $F_2OQ\sphericalangle = \frac{1}{2}\cdot QOE_2\sphericalangle$. Ebből $F_1OF_2\sphericalangle = \frac{1}{2}\cdot E_1OE_2\sphericalangle = 60°$, azaz állandó, Q felvételétől függetlenül (ahol Q a kisebbik E_1E_2 ív belső pontja).

1690. Egy pontnak egy szakasztól való távolságát úgy értelmezzük, hogy a pontot gondolatban összekötjük a szakasz pontjaival; az összekötő szakaszok közül a legrövidebb hosszát nevezzük a pont szakasztól mért távolságának.
Jelöljük az adott szakasz végpontjait P-vel és Q-val. A pont és szakasz közötti távolságnak az értelmezéséből következik, hogy a PQ szakasztól pontosan 1 cm távolságra levő pontok halmaza két szakaszból és két félkörből áll. A szakaszok az adott szakasszal párhuzamosak, a félkörök középpontjai a szakasz végpontjai, sugaruk 1 cm. Hasonlóan adódik az a ponthalmaz is, melynek pontjaira az teljesül, hogy PQ-tól pontosan 2 cm távolságra vannak. Erre a két ponthalmazra és az általuk határolt tartomány pontjaira és csak azokra teljesül, hogy a PQ szakasztól legalább 1 cm, de legfeljebb 2 cm távolságra vannak.

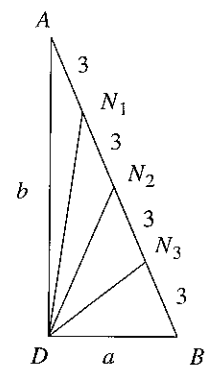


1691. Az ABD derékszögű háromszög 12 cm hosszúságú átfogójának felezőpontja N_2, tehát N_2 a háromszög körülírt körének középpontja. Ezért a DN_2 szakasz hossza 6 cm.

a) A DN_1N_2 háromszögből a háromszög egyenlőtlenség szerint $DN_1 > DN_2 - N_2N_1 = 3$ cm. Amikor az A pont a D-be érkezik, akkor a DN_1N_2 háromszög elfajulóvá válik és $DN_1 = 3$ cm teljesül. Ez tehát a keresett legkisebb távolság és ekkor $BD = 12$ cm. (Amikor az AB szakasz „függőleges" volt, a DN_1N_2 háromszög akkor is elfajuló volt, de akkor $DN_1 = 9$ cm teljesült.)

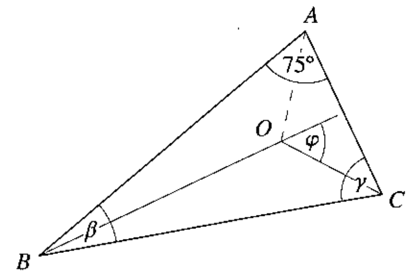
b) Az N_2 pont az AB minden helyzetében 6 cm-re van a D ponttól.

c) A DN_2N_3 háromszögből a háromszög egyenlőtlenség szerint $DN_3 > DN_2 - N_2N_3 = 3$ cm. Amikor a B pont a D-ben volt, akkor a DN_2N_3 háromszög elfajuló volt és $DN_3 = 3$ cm teljesült. Ez tehát a keresett legkisebb távolság és ekkor $BD = 0$. (Amikor az AB szakasz „vízszintes", akkor a DN_2N_3 háromszög megint elfajuló, de ebben a helyzetben $DN_3 = 9$ cm.)



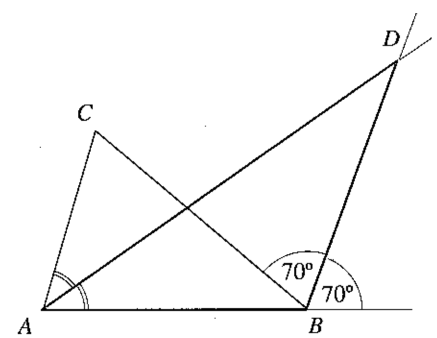
1692. Legyen $\alpha = 75°$, valamint a β és a γ szögfelezőjének metszéspontja O, hajlásszöge φ. Mivel φ a BCO háromszög külső szöge, ezért

$$\varphi = \frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = \frac{180°-\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} = $$
$$= 90° - \frac{75°}{2} = 52,5°.$$

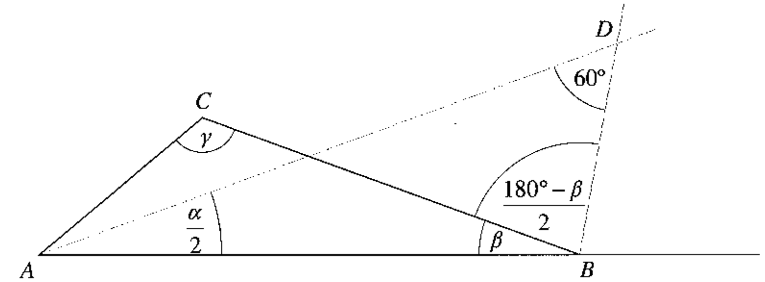


1693. a) $\beta = 40°$. Mivel $AC \parallel BD$, ezért $\alpha = \frac{140°}{2} = 70°$ és $\gamma = 70°$.

b) $DAB\sphericalangle = \frac{70°}{2} = 35°$ és
$ABD\sphericalangle = 110°$, így
$ADB\sphericalangle = 180° - 145° = 35°$, tehát az ABD háromszög egyenlő szárú.

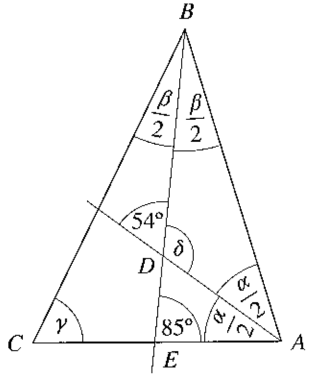


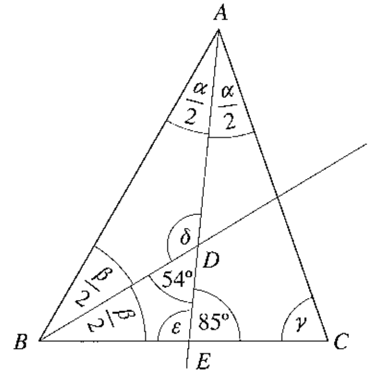
1694. Legyen e két szögfelező metszéspontja D. Az ABD háromszög A csúcsbeli szöge ekkor $\frac{\alpha}{2}$, B csúcsbeli szöge pedig $\beta + \frac{180°-\beta}{2}$, azaz $\frac{180°+\beta}{2}$. Ezek a D-beli 60°-kal együtt kiadják a 180°-os szögösszeget, vagyis $\frac{\alpha}{2}+\frac{180°+\beta}{2} = 120°$.
Ebből $\alpha + \beta = 60°$, de ekkor az ABC háromszög szögösszege miatt $\gamma = 120°$.



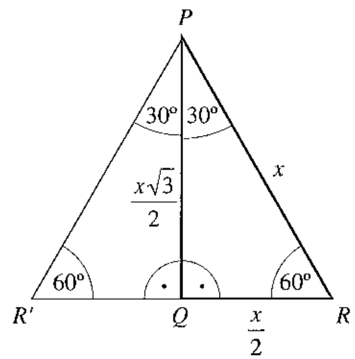
1695. Kétféle lehetőség van aszerint, hogy az említett két szög egy háromszögben van-e vagy sem. Első esetben az ADE háromszögből $\frac{\alpha}{2} = 41°$. Az 54° mellékszögeként $\delta = 126°$, emiatt az ABD háromszögben $\frac{\beta}{2} = 13°$. Az eredeti háromszög szögei ekkor $\alpha = 82°$, $\beta = 26°$ és a szögösszeg miatt $\gamma = 72°$.

A második esetben a 85° mellékszögeként $\varepsilon = 95°$, ekkor a BED háromszögben $\frac{\beta}{2} = 31°$. Ismét $\delta = 126°$, amiért az ABD háromszögben $\frac{\alpha}{2} = 23°$. Ekkor a megoldás: $\alpha = 46°$, $\beta = 62°$ és (érdekes módon ismét) $\gamma = 72°$.



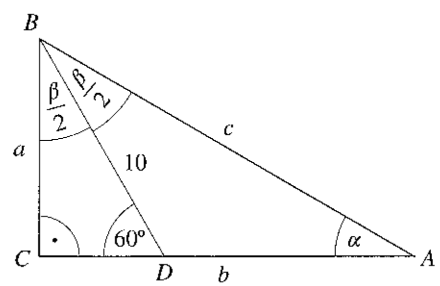


1696. A feladat megoldásánál az alábbi észrevételt használjuk fel. Ha egy 30° és 60°-os hegyesszögekkel rendelkező derékszögű háromszöget tükrözünk a hosszabbik befogójára, akkor az eredeti háromszög és a tükörkép együtt egy szabályos háromszöget határoz meg. Ezért, ha egy ilyen derékszögű háromszög átfogója x hosszúságú, akkor a rövidebbik befogó hossza $\frac{x}{2}$, a hosszabbik befogó hossza pedig $\frac{x\sqrt{3}}{2}$.



Vizsgáljuk ezek után a feladat szövegének megfelelő ábrát és használjuk a jelöléseit.

A feltételek szerint a BCD derékszögű háromszögben $BDC\sphericalangle = 60°$, így $\frac{\beta}{2} = 30°$, azaz $\beta = 60°$. Az ABC derékszögű háromszögben $\beta = 60°$, ezért $\alpha = 30°$. Tehát a BCD háromszög is és az ABC háromszög is olyan derékszögű háromszög, melynek hegyesszögei 30° és 60°.

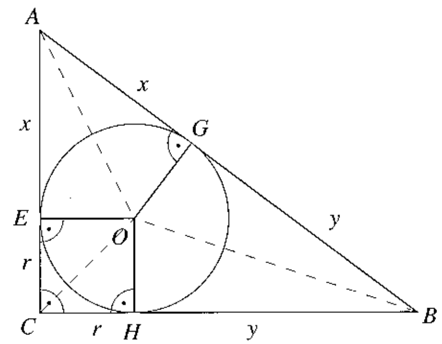


Felhasználva a feladat megoldása előtt tett észrevételt, továbbá azt, hogy $BD = 10$ cm, a BCD derékszögű háromszög hosszabbik befogója $\frac{10\sqrt{3}}{2}$, azaz $a = 5\sqrt{3}$ (cm). Az ABC derékszögű háromszög AB átfogója a rövidebbik befogó kétszerese, tehát $c = 2a = 10\sqrt{3}$ (cm). Az ABC háromszög hosszabbik befogója

$$b = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{10\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 15 \text{ (cm)}.$$

1697. a) Egy körhöz egy adott külső pontból húzott érintő szakaszok egyenlők, így $AE = AG = x$, $BG = BH = y$, $CE = CH = r$ a beírt kör sugara, mert $ECHO$ négyzet.

$$\left.\begin{aligned} x + r &= a \\ y + r &= b \\ x + y &= c \end{aligned}\right\}$$



Adjuk össze az első két egyenletet, és ebbe helyettesítsük be a harmadik egyenlet alapján, az $x + y$ helyére a c-t!

$$2r + c = a + b \Rightarrow r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Derékszögű háromszögre vonatkozó Pitagorasz-tétel miatt ha a befogók 6, illetve 8 cm, az átfogó 10 cm, akkor a háromszögbe írható kör sugara $r = 2$ cm.

Másik megoldás:

Írjuk fel a háromszög kétszeres területét kétféleképpen!

$2T = a\cdot b = ar + br + cr.$

Ebből $r = \frac{ab}{a+b+c}$.

b) Ha a két ismert oldal a két befogó, akkor a Pitagorasz-tétel révén az átfogó $c = \sqrt{6^2+7^2} = \sqrt{85} \approx 9{,}22$. A háromszög területe egyrészt a két befogó szorzatából $\frac{ab}{2} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$; másrészt a beírt kör keresett r sugara és a fél kerület (s) révén rs.

A fél kerület most $\frac{6+7+\sqrt{85}}{2} \approx 11{,}11$; így a sugár $r = \frac{T}{s} \approx \frac{21}{11{,}11} \approx 1{,}89$.

Ha viszont a két adott oldal az egyik befogó és az átfogó, akkor a másik befogó $\sqrt{7^2-6^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$. Az előbbi gondolatmenet szerint a terület a befogókból

$\frac{6\sqrt{13}}{2} \approx 10{,}82$, a fél kerület $\frac{\sqrt{13}+6+7}{2} \approx 8{,}30$, így a sugár $r \approx \frac{10{,}82}{8{,}30} \approx 1{,}30$.

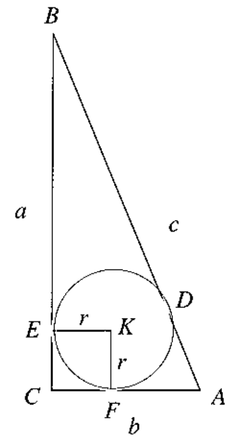
c) Legyen $AC = b = 6$ és legyenek a kör érintési pontjai az oldalakon D, E, F (lásd az 1698. feladat ábráját). Az érintés, illetve a háromszög derékszögű mivolta miatt a $CFKE$ négyszög minden szöge derékszög, két szomszédos oldala (KE, KF) sugárnyi, tehát egyenlő – vagyis e négyszög négyzet: $CE = CF = 2$. Így $AF = 4$, $BE = a - 2$, és a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $AD = 4$ és $BD = a - 2$ is igaz. Ekkor az átfogó $c = a - 2 + 4 = a + 2$.

Felírva a háromszögre a Pitagorasz-tételt: $(a + 2)^2 = a^2 + 6^2$.

Felbontva: $a^2 + 4a + 4 = a^2 + 36$, amiből $4a = 32$, azaz $a = 8$. (És $c = 10$.)

1698. a) Legyenek a kör érintési pontjai az oldalakon D, E, F. Az érintés, illetve a háromszög derékszögű mivolta miatt a $CFKE$ négyszög minden szöge derékszög, két szomszédos oldala (KE, KF) sugárnyi, tehát egyenlő – vagyis e négyszög négyzet: $CE = CF = 1$. Így $AF = b - 1$, $BE = a - 1$, és a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $AD = b - 1$ és $BD = a - 1$ is igaz. Ekkor az átfogó $c = a - 1 + b - 1 = a + b - 2$. A háromszög kerülete $a + b + c = 15$, beírva a c-re kapott eredményt: $2a + 2b - 2 = 15$, amiből $a + b = 8{,}5$. Érvényes továbbá a háromszögre a Pitagorasz-tétel:

$(a + b - 2)^2 = a^2 + b^2$.



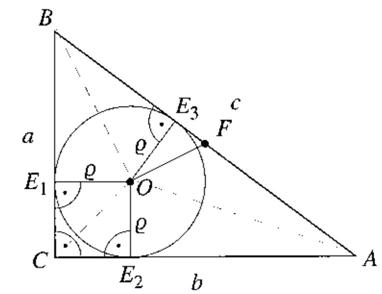
Felbontva: $a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b = a^2 + b^2$, amiből $ab = 2a + 2b - 2$.

A jobb oldal éppen a kerület, tehát értéke 15. A két befogó összegét és szorzatát ismerjük, ezt egyenletrendszerként megoldhatjuk. Elegánsabb azonban a Viète-formulák révén felismerni, hogy ekkor a két befogó az $x^2 - 8{,}5x + 15 = 0$ egyenlet két gyöke. Ezek pedig (az ábra méreteinek megfelelő sorrendben): $a = 6$ és $b = 2{,}5$. Az átfogó pedig $c = a + b - 2 = 6{,}5$.

b) A terület $\frac{ab}{2} = 100$, amiből $ab = 200$. Az előző ponthoz hasonlóan kapjuk, hogy $CFKE$ négyzet, ezért $CE = CF = 4$. Így $AF = AD = b - 4$, $BE = BD = a - 4$. Ekkor az átfogó $c = a - 4 + b - 4 = a + b - 8$. Felírva a Pitagorasz-tételt: $(a + b - 8)^2 = a^2 + b^2$, ezt felbontva: $a^2 + b^2 + 64 + 2ab - 16a - 16b = a^2 + b^2$, amiből: $ab = 8a + 8b - 32$. A bal oldalról már tudjuk, hogy 200, így $232 = 8a + 8b$, vagyis $a + b = 29$. Megint ismerjük a befogók összegét és szorzatát,

az előző pontbeli ötlet alapján ekkor ezek az $x^2 - 29x + 200 = 0$ egyenlet gyökei. Ezek pedig $\frac{29 \pm \sqrt{41}}{2}$, azaz (az ábra méreteinek megfelelő sorrendben) $a \approx 17{,}70$ és $b \approx 11{,}30$. Az átfogó pedig $c = a + b - 8 = 21$ (pontosan, hiszen a gyökös tag kiesik).

1699. Mivel az ABC derékszögű háromszög befogóiról tudjuk, hogy $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, a Pitagorasz-tételt felhasználva $c = 5$ cm.



a) A Thalész-tétel miatt a háromszög köré írt kör középpontja az átfogó F felezőpontja, sugara az átfogó fele.

Így a sugár $r = \frac{c}{2} = 2{,}5$ cm.

b) A beírt kör a háromszög oldalait az E_1, E_2, E_3 pontokban érinti, így az ide húzott sugarak merőlegesek az oldalakra. A beírt kör ϱ sugarának a meghatározásához tekintsük az ABC háromszög területét, amelyet kétféleképpen írunk fel és ezek természetesen egyenlők.

$$T_{ABC} = T_{OAB} + T_{OBC} + T_{OCA}$$
$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{2}c\varrho + \frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}b\varrho$$
$$ab = \varrho(c + a + b)$$
$$12 = \varrho(5 + 3 + 4)$$
$$\varrho = 1$$

Tehát a beírt kör sugara 1 cm.

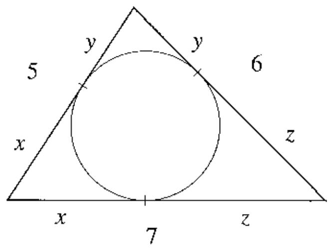
c) Tudjuk, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, ezért a CE_1OE_2 négyszögben $CE_1 = CE_2$.
Tudjuk továbbá, hogy e négyszög mindegyik szöge 90°, így a CE_1OE_2 négyszög négyzet, s ezért $CE_1 = OE_2 = \varrho = 1$ cm.
Az ábra alapján könnyen leolvasható, hogy BE_1 és a vele egyenlő hosszúságú BE_3 szakasz hossza 2 cm, az E_3F szakasz hossza pedig $\frac{1}{2}$ cm.
Így az OE_3F derékszögű háromszögben, Pitagorasz tételét alkalmazva:

$$OF^2 = OE_3^{\,2} + E_3F^2 = \varrho^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Tehát a beírt és a köré írt körök középpontjai közötti távolság:

$$OF = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12 \text{ cm}.$$

1700. A külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt az ábra szerint felírhatunk három egyenletet:

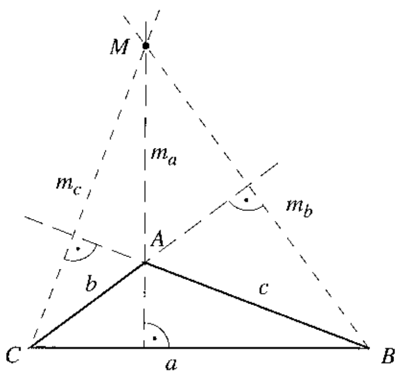


$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{I}) & x+y=5\\ (\mathrm{II}) & y+z=6\\ (\mathrm{III}) & x+z=7\end{array}\right\}.$$

Ekkor (III) – (II) révén: $x-y=1$, amit összeadva (I)-gyel: $2x=6$, vagyis $x=3$. Ekkor (I)-ből $y=2$, és (II) vagy (III) bármelyikéből $z=4$.

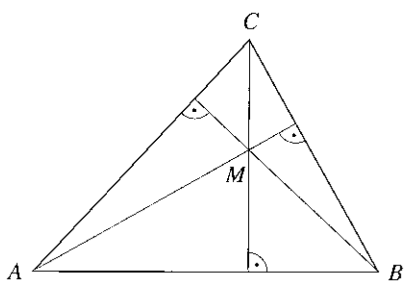
1701. a) A megadott adatokkal szerkeszthető háromszög (teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek). A háromszög tompaszögű.

b) A szerkesztés az ábráról leolvasható.



c) Az ACM háromszög magasságpontja B pont, mert $AC \perp MB$, $AM \perp BC$, $CM \perp AB$, így ACM háromszög magasságvonalai CB, AB, MB. Ezek metszéspontja B.
Általánosan is igaz, hogy hegyesszögű vagy tompaszögű háromszögnél a háromszög csúcsai és magasságpontja közül bármely három pontot kiválasztva ezek egy háromszöget alkotnak, melynek a magasságpontja a negyedik pont.

1702. Az ABM háromszöget vizsgáljuk meg részletesen. Az M-ből az AB-re bocsátott merőleges ráesik az ABC háromszög AB-hez tartozó magasságára. Az A-ból az MB-re (illetve annak meghosszabbítására) bocsátott merőleges ráesik az ABC háromszög AC oldalára; hasonlóan a B-ből az MA-ra (illetve annak meghosszabbítására) bocsátott merőleges ráesik az ABC háromszög BC oldalára. Így e három merőleges (magasságvonal) közös pontja a C, vagyis ez az ABM háromszög magasságpontja. Hasonlóan végiggondolható, hogy az AMC magasságpontja B, az MBC-é pedig A. (Vagyis a négy közül bármely három pont alkotta háromszög magasságpontja a negyedik. E speciális, kölcsönösen szimmetrikus szerep miatt ezeket ortocentrikus pontnégyesnek nevezik.)



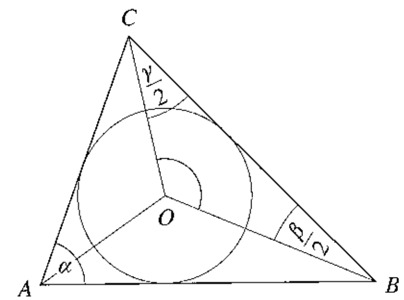
1703. A szabályos háromszög köré írt és beírt körének középpontja, súlypontja valamint a magasságpontja egybeesik. Ezért a köré írt kör R sugara és a beírt kör r sugara között $R=2r$ áll fenn, valamint az a oldalú szabályos háromszög m magassága $m=R+r=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ezekből $3r=\frac{3}{2}\cdot R=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Az $R=10$ cm sugarú körbe írt szabályos háromszög oldala
$a=R\cdot\sqrt{3}=10\sqrt{3}$ (cm);

b) az $r=10$ cm sugarú kör köré írt szabályos háromszög oldala
$a=r\cdot 2\cdot\sqrt{3}=20\sqrt{3}$ (cm).

1704. O az ABC háromszög beírt körének középpontja, a belső szögfelezők közös metszéspontja. Ezért

$$COB\sphericalangle=180°-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=$$
$$=180°-\frac{180°-\alpha}{2}=90°+\frac{\alpha}{2}=125°.$$



1705. Az 1704-es feladat gondolatmenetét felhasználva: $AOB\sphericalangle=90°+\frac{\gamma}{2}$.
Mivel $AOB\sphericalangle=145°$, ezért $\gamma=290°-180°=110°>90°$.

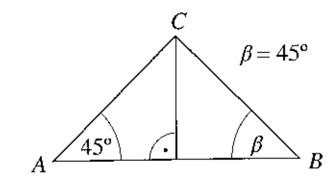
1706. Az alapon fekvő külső szög $180°-\alpha=3\gamma$. Másrészt a háromszög belső szögeinek összege: $2\alpha+\gamma=180°$. Ezekből $\gamma=36°$ és $\alpha=72°$.

1707. Jelöljük az alapon fekvő szögeket α-val. $180°-\alpha=4\alpha$. Ebből $\alpha=36°$; a háromszög szögei: 36°, 36°, 108°.

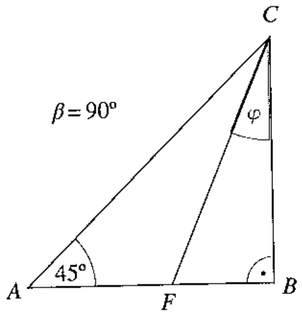
1708. Egyrészt $180°-\alpha=8\alpha$, ebből $\alpha=20°$; másrészt $180°-\beta=3\beta$, ebből $\beta=45°$. Tehát $\gamma=180°-20°-45°=115°>90°$.

1709. Jelöljük a keresett szöget φ-vel. A különböző eseteket β nagysága szerint vizsgáljuk:

a) $\beta=45°$ esetén a két egyenes egybeesik; $\varphi=0°$.



b) $\beta = 90°$ esetén $\varphi = \frac{\gamma}{2} = 22,5° \left(= \frac{\beta}{2} - 22,5°\right)$.



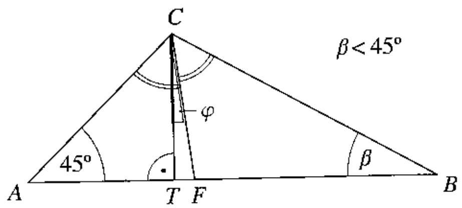
c) $\beta < 45°$ esetén BTC és ATC háromszögeket vizsgálva:

$\varphi + \frac{\gamma}{2} + \beta = 90°$ és $45° + \frac{\gamma}{2} - \varphi = 90°$.

A két egyenlet különbsége:

$2\varphi + \beta - 45° = 0°$, azaz

$\varphi = 22,5° - \frac{\beta}{2}$.

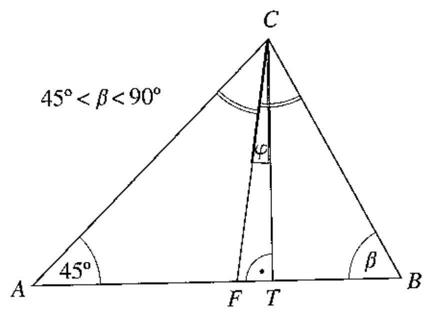


d) $45° < \beta < 90°$ esetén BTC és ATC háromszögekből:

$\beta + \frac{\gamma}{2} - \varphi = 90°$ és $45° + \frac{\gamma}{2} + \varphi = 90°$.

A második egyenletből az elsőt kivonva $2\varphi - \beta + 45° = 0°$, azaz

$\varphi = \frac{\beta}{2} - 22,5°$ adódik.

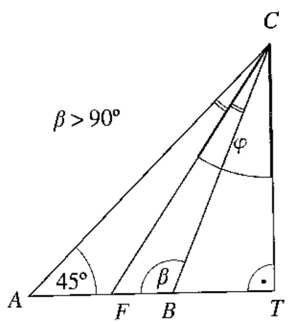


e) $\beta > 90°$ esetén β a BTC háromszög külső szöge:

$\beta = \varphi - \frac{\gamma}{2} + 90°$, így $\beta + \frac{\gamma}{2} - \varphi = 90°$; illetve az ATC háromszög hegyesszögeinek összege:

$45° + \frac{\gamma}{2} + \varphi = 90°$.

Ezekből d) mintájára a $\varphi = \frac{\beta}{2} - 22,5°$ összefüggést kapjuk.



Tehát mindegyik esetben a keresett szög:

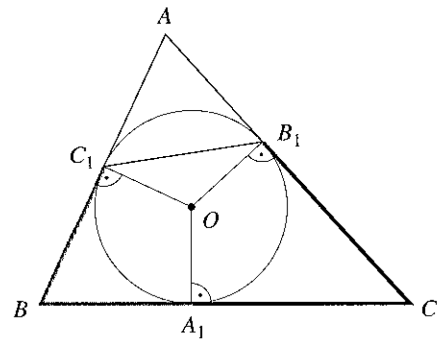
$\varphi = \left|\frac{\beta}{2} - 22,5°\right|$.

1710. A feltételek szerint $\alpha = \frac{1}{3}(\beta + \gamma)$, illetve $\beta : \gamma = 1 : 2$. Ezekből $\gamma = 2\beta$ és $\alpha = \beta$. A háromszög szögeinek összege $\alpha + \beta + \gamma = 4\beta = 180°$. Ebből $\alpha = \beta = 45°$ és $\gamma = 90°$. A háromszög derékszögű, köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontja, azaz a háromszög 'határán' fekszik.

1711. Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye egybeesik a szárak által bezárt szög szögfelezőjével és az alaphoz tartozó magasságvonallal, ez utóbbira illeszkedik a háromszög magasságpontja, ezért a) és b) igaz, c) hamis.

1712. Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye egybeesik a szárak által bezárt szög szögfelezőjével és az alaphoz tartozó magasságvonallal és súlyvonallal, ezért a súlypont is erre illeszkedik. Így a) igaz, c) hamis.
A háromszög tetszőleges csúcsához tartozó súlyvonal háromszögbe eső szakaszát a csúccsal szemközti középvonal felezi, a súlypont pedig harmadolja, ezért a súlypont nem eshet a háromszög egyik középvonalára sem, tehát b) hamis.

1713. Használjuk az ábra jelöléseit!
Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért $BA_1 = BC_1$, valamint $A_1C = B_1C$.
Így $BC = BA_1 + A_1C = BC_1 + B_1C$.



1714. a) $3^2 + 6^2 = \left(\sqrt{45}\right)^2$;
c) $2a^2 + 5a^2 = 7a^2$;
d) $a^2 + a^2b^2 = a^2(1 + b^2)$.

A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt az a), c) és d) pontokban szereplő háromszögek derékszögűek.
Mivel $4 + 6 = 10$, ezért a b) pontban szereplő szakaszokból nem szerkeszthető háromszög, tehát nem lehetnek egy derékszögű háromszög oldalai.

1715. Az állítás igaz. Ha egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója x, akkor a befogója $\frac{x}{\sqrt{2}}$; területe pedig $\frac{x^2}{4}$. Ha az eredeti háromszög befogóit a-val és b-vel, átfogóját pedig c-vel jelöljük, akkor az állítás szerint $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{c^2}{4}$.

Ez pedig a Pitagorasz-tétel szerint igaz.

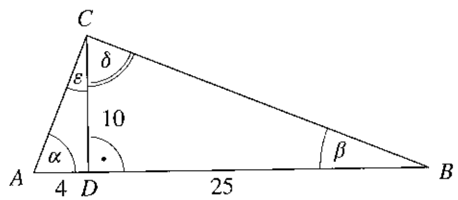
1716. A befogók: $3x$, $4x$, összegük $3x + 4x = 35$. Innen $x = 5$ egység.
A derékszögű háromszög befogói: 15 egység, illetve 20 egység,
átfogója: 25 egység,
területe $t = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20 = 150$ (terület egység).

Az átfogóhoz tartozó magasságot jelöljük m-mel! Felírhatjuk: $t = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot m$.

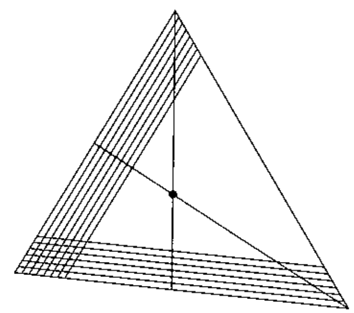
Ebből $m = 12$ egység.

1717. A háromszög derékszögű, mert $10 = \sqrt{4\cdot 25}$.
Csak a derékszögű háromszögre igaz, hogy a leghosszabb oldalhoz (átfogó) tartozó magasság két olyan szeletre bontja az oldalt, melyek mértani közepe az adott magasság. (Magasságtétel.)
$ADC\Delta \sim CDB\Delta$, mert 2-2 oldal aránya és a közbezárt szög egyenlő,
$\left(\frac{4}{10}=\frac{10}{25};\ ADC\sphericalangle = CDB\sphericalangle = 90°\right)$, így megfelelő szögeik is egyenlők.

$\alpha = \delta$; $\beta = \varepsilon$
A háromszög belső szögeinek összege 180°.
$\alpha + \beta + \varepsilon + \delta = 180°$
$\delta + \varepsilon = 90°$
Tehát a háromszög derékszögű.

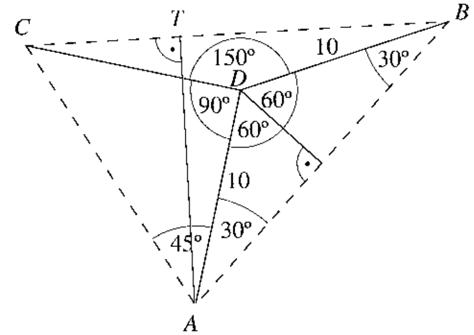


1718. a) A háromszög „klasszikus" súlypontjában, hiszen két csúcsba helyezett egyenlő tömeget a felezőpontjukba helyezett kétszeres tömeggel lehet helyettesíteni. Ezt a felezőpontot a szemközti csúccsal összekötő szakasz (súlyvonal!) azon pontja lesz a három tömeg tömegközéppontja, amely a nagyobb, kétszeres tömegtől fele olyan messze lesz, mint a szemközti csúcstól, tehát éppen a szakasz harmadoló pontja. Ez pedig a jól ismert súlypont.



b) Vékony homogén lemez esetén a helyzet ugyanez. Ha a lemezt vékony csíkokból rakjuk össze, minden csík tömegközéppontja a felezőpont, tehát rajta van a súlyvonalon. Ugyanez igaz másik irányú csíkokra, ezért a másik súlyvonalon is rajta kell lennie a tömegközéppontnak. Így ismét a súlypont adódik. Lásd az előző ábrát!

1719. A szögek meghatározásához vegyünk fel egy ábrát! Az ADC háromszög szögei: 90°, 45°, tehát a harmadik szöge is 45°, így egyenlő szárú.
Ezért $DC = 10$ km. Vagyis D az ABC háromszög köré írható körnek a középpontja. Emiatt BDC háromszög is egyenlő szárú, azaz
$DCB\sphericalangle = DBC\sphericalangle = 15°$.
Ugyanígy ADB háromszög is egyenlő szárú, azaz $DAB\sphericalangle = DBA\sphericalangle = 30°$.



a) Eszerint az ABC háromszög szögei rendre:
$\alpha = 30° + 45° = 75°$; $\beta = 30° + 15° = 45°$; $\gamma = 15° + 45° = 60°$.

b) Pitagorasz tételéből: $AC = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ (km).
Bontsuk az ABD Δ-et a D-beli szögfelezővel két nevezetes (30°-60°-os) háromszögre, ahonnan AB egyszerűen kiszámítható: $AB = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32$ (km). (Lásd az ábrát is!)

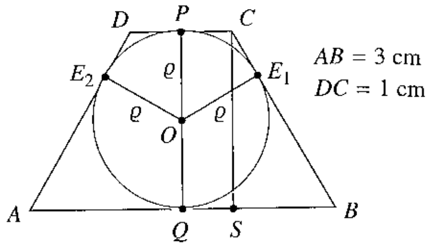
c) Húzzuk be az AT magasságot (lásd az ábrát), így két nevezetes Δ keletkezik. Az ACT 30-60 fokos, ezért $CT = \frac{AC}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$; az ATB pedig 45-45 fokos, ezért $TB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{6}$; így $BC = 5(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \approx 19{,}32$ (km).

1720. a) Az $ABCD$ téglalap K középpontjából az AB oldal látszik 120°-os szögben. Ekkor a szomszédos BC oldal a K pontból 60°-os szögben látszik. A téglalap átlói egyenlők, így a BC a két félátlóval egyenlő oldalú háromszöget alkot.

b) A téglalapot átlói két szabályos háromszögre és két olyan egyenlő szárú háromszögre bontják, amelyek szárszöge 120°.

1721. Készítsük el a feladatnak megfelelő ábrát és használjuk a jelöléseit.

a) A beírt kör O középpontjából az érintési pontokba húzott sugarak merőlegesek a trapéz megfelelő oldalaira. Így $OP \perp DC$, $OQ \perp AB$. Mivel $AB \parallel DC$ a P, Q, O pontok egy egyenesre illeszkednek, s ez az egyenes a körnek is és a trapéznak is szimmetriatengelye.



Ebből következik, hogy $CP = DP = \frac{1}{2}$, $AQ = BQ = \frac{3}{2}$.

Mivel egy külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok hossza egyenlő, ezért $CP = CE_1$ és $BQ = BE_1$, tehát $BC = BE_1 + CE_1 = CP + BQ = 2$ (cm). Természetesen $AD = 2$ cm.

Ha a C pontból az AB oldalra bocsátott merőleges szakasz talppontja S, akkor – mivel $CSQP$ téglalap – $QS = PC = \frac{1}{2}$. Így a BCS derékszögű háromszög oldalai: $BC = 2$ cm, $BS = QB - QS = 1$ (cm), $CS = 2\varrho$.

Pitagorasz tételét felhasználva $(2\varrho)^2 + 1^2 = 2^2$, melyből $\varrho = \frac{\sqrt{3}}{2}$ adódik.

Tehát a beírt kör sugara $\varrho = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$ (cm).

b) A tengelyesen szimmetrikus trapéz köré írható kör R sugarának meghatározásához vizsgáljuk az ábrát.

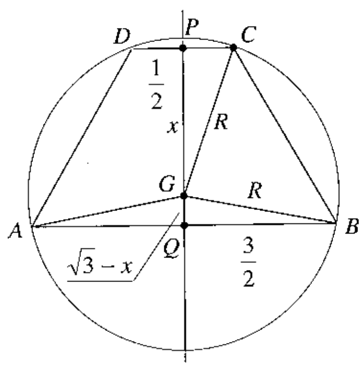
Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz köré írt kör G középpontja illeszkedik a trapéz PQ szimmetriatengelyére.

Az előbbiek miatt $PQ = 2\varrho = \sqrt{3}$ cm.

Így, ha $PG = x$, akkor $QG = \sqrt{3} - x$.

A PGC derékszögű háromszögben

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = R^2 \qquad (1).$$



A GQB derékszögű háromszögben

$$(\sqrt{3} - x)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = R^2 \qquad (2).$$

Vonjuk ki (2)-ből (1)-et

$$3 - 2\sqrt{3}x + x^2 + \frac{9}{4} - x^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

$$3 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0.$$

Az egyenletet megoldva $x = \frac{5}{2\sqrt{3}}$, vagy más alakban $x = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

x értékét visszahelyettesítve például (1)-be:

$$\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{1}{4} = R^2,$$

$$\frac{75}{36} + \frac{1}{4} = R^2,$$

$$\frac{84}{36} = R^2,$$

melyből $R = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

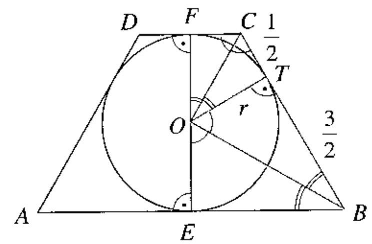
Tehát a vizsgált szimmetrikus trapéz köré írt körének a sugara: kb. 1,53 cm.

Másik megoldás:

a) A B-ből és C-ből a beírt körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők:

$BT = BE = \frac{3}{2}$, $CT = CF = \frac{1}{2}$.

Az $OEBT$ deltoid szimmetriaátlója OB és az $OTCF$ deltoid szimmetriaátlója OC egyben szögfelezők is, ezért $BOC\sphericalangle = 90°$. Alkalmazzuk a



BCO derékszögű háromszögre a magasságtételt: $r^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

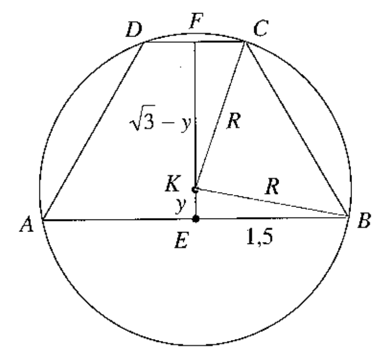
Így a trapézba írt kör sugara: $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (cm).

b) A trapéz magassága $m = 2r = \sqrt{3}$ egység. Az EBK és FKC háromszögekre felírható a Pitagorasz-tétel:

$R^2 = y^2 + \frac{9}{4}$, $\quad R^2 = (\sqrt{3} - y)^2 + \frac{1}{4}$.

Az első egyenletből a másodikat kivonva $0 = 2\sqrt{3} \cdot y - 1$, amiből

$y = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe $R^2 = \frac{1}{12} + \frac{9}{4} = \frac{7}{3}$,

a trapéz köré írt kör sugara: $R = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1{,}53$ (cm).

Megjegyzés:

Ha a körülírt kör középpontja a trapézon kívül lenne, akkor y-ra $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ adódna.

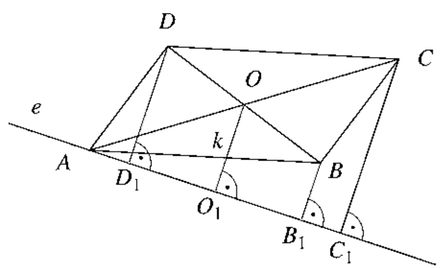
1722. A duzzasztógát trapéz keresztmetszetű, tehát területe:

$$T = \frac{a+c}{2}m = \frac{a+11}{2} \cdot 22 = 473.$$

Ebből $a = 32$, és mivel minden adatot méterben, a területet négyzetméterben ismertük, ezért a válasz: a gát alapja 32 méter széles.

1723. Ha a Thalész-kör sugara r, akkor a trapéz szára és a feltétel szerint a középvonala is $2r$, tehát egyenlők.

1724. Bocsássunk a paralelogramma B, C, D csúcsaiból merőlegeseket az e egyenesre! A merőlegesek talppontjai: B_1, C_1, D_1.



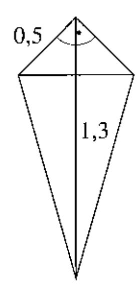
Vizsgáljuk a D_1B_1BD trapézt és az AC_1C háromszöget! Mivel a paralelogramma átlói felezve metszik egymást (azaz O pont a BD és az AC szakaszok közös felezőpontja), ezért a trapéz és a háromszög e-re merőleges k középvonala egybeesik. Fejezzük ki a középvonalat a vele párhuzamos oldalakkal:

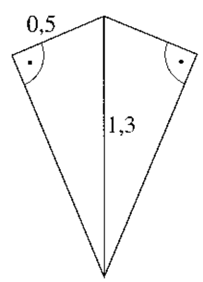
$k = \frac{BB_1 + DD_1}{2} = \frac{CC_1}{2}$, tehát $BB_1 + DD_1 = CC_1$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés:

Ha $AC \perp e$, akkor a háromszög „elfajuló".

1725. Két eset lehetséges a szöveg alapján, lásd a két ábrát. Az egyik lehetőség, hogy a szimmetriatengelyen levő egyik szöge derékszög (I. eset); a másik, hogy a két szimmetrikus szög derékszög (II. eset).





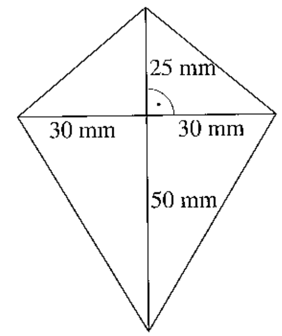
a) Az első esetben, ha az oldal 0,5 m, akkor a rövidebb átló hossza: $0{,}5\sqrt{2} \approx 0{,}707$ (m). A terület ekkor: $\frac{ef}{2} \approx \frac{1{,}3 \cdot 0{,}707}{2} \approx 0{,}46$ (m²).

A másik esetben először a Pitagorasz-tételből a másik oldalra 1,2 m adódik (az 5, 12, 13 pitagoraszi számhármas tizedrészéről van szó). Innen a terület két derékszögű háromszög területének összege, azaz $2 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 1{,}2}{2} = 0{,}6$ (m²).

b) A másik átló az első esetben, mint láttuk $0{,}5\sqrt{2} \approx 0{,}707$ (m).

A második esetben: $T = 0{,}6 = \frac{ef}{2} = \frac{1{,}3f}{2}$, ahonnan $f \approx 0{,}923$ (m).

1726. a) A feladat feltételei szerint készült az ábra, amelyről leolvasható, hogy a deltoid oldalai:



$\sqrt{25^2 + 30^2} \approx 39{,}05$ (mm) és

$\sqrt{50^2 + 30^2} \approx 58{,}31$ (mm).

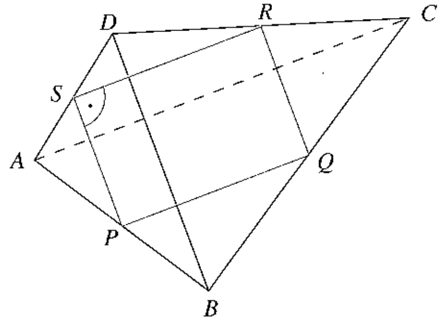
Ezzel a kerület: $2(39{,}05 + 58{,}31) = 194{,}72$ (mm).

b) A terület az ismert $\frac{ef}{2}$ képlet szerint:

2250 mm² = 22,5 cm².

c) A deltoid szerkesztési menete a következő. Felvesszük a 60 mm-es átlót. A felezőpontjában állított merőlegesre az egyik irányban 25, a másikban 50 mm-t mérünk fel. Ezzel már meg is kaptuk a deltoid négy csúcsát.

1727. Az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjait jelöljük P, Q, R, S-sel. PQ az ABC, SR az ACD háromszög AC oldalával párhuzamos középvonala, így $PQ \parallel SR$, valamint $PQ = SR = \frac{1}{2}AC$. Ezért minden négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak. E paralelogramma oldalai a négyszög átlóival párhuzamosak.



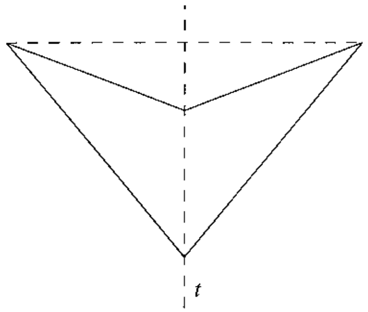
($PQ \parallel AC \parallel RS$, illetve $QR \parallel BD \parallel PS$)

Egy négyszög oldalfelező pontjai akkor és csak akkor határoznak meg téglalapot, ha a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

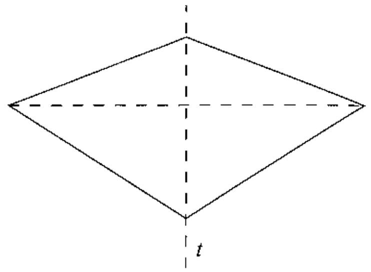
1728. Trapéz, ha, a $BC \parallel AD$ vagy az $AB \parallel CD$ feltétel teljesül. (Az utóbbi esetben rombusz.)
Paralelogramma, ha $AB \parallel CD$ vagy ha $AD = BC$ feltétel is teljesül. (Mindkét esetben egyben rombusz).
Négyzet, ha $AB \parallel CD$ és pl.: $ABC\sphericalangle = 90°$, vagy ha $AD = BC$ és pl.: $ABC\sphericalangle = 90°$, vagy ha $ABC\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 90°$.
Deltoid, ha rombusz, azaz, ha az $AB \parallel CD$, vagy ha az $AD = BC$ feltétel is teljesül.

1729. a) Igaz. Minden rombusz deltoid.

b) Igaz. Lehet konkáv is.



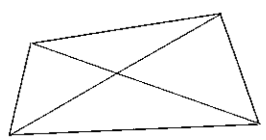
c) Hamis.



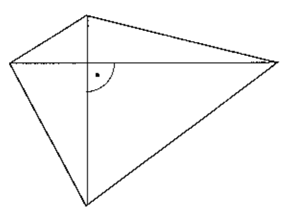
1730. a) Igaz. Pontosan két szimmetriatengelye van egy speciális deltoidnak, a rombusznak, ha az nem négyzet.

b) Hamis. A paralelogrammák közül csak a téglalapoknak és a rombuszoknak van szimmetriatengelyük.

1731. a) Hamis. Lehet pl.: tengelyesen szimmetrikus trapéz (ún. húrtrapéz) is, de rajzolhatunk más négyszöget is: két egyenlő hosszúságú, egymást metsző szakasz végpontjai ilyen négyszöget alkotnak.



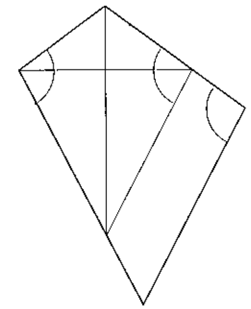
b) Hamis. A deltoid átlói is merőlegesek egymásra. Ilyen négyszöget kapunk akkor is, ha pl.: két egymásra merőleges egyenesen megjelölünk a metszéspontok által elválasztott 2-2 pontot.



c) Hamis. A deltoidra is teljesül ez a tulajdonság. Ilyen négyszöget kaphatunk akkor is, ha egy deltoid valamelyik oldalegyenesét eltoljuk.

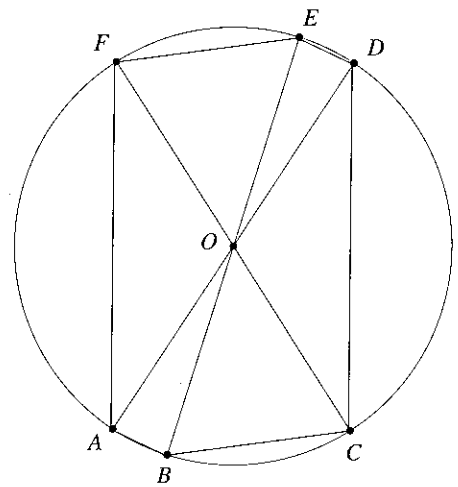
d) Igaz. A konkáv négyszögnek.

e) Hamis. Pontosan egy szimmetriatengelye van a deltoidnak, ha nem rombusz és a tengelyesen szimmetrikus trapéznak, ha nem téglalap.



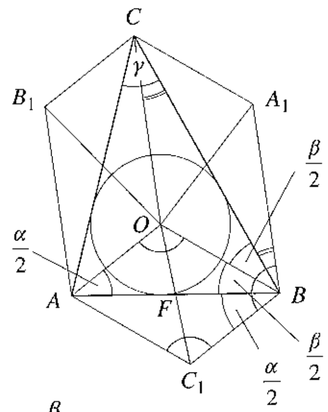
1732. Az r sugarú körbe írt szabályos hatszög középpontja és két szomszédos csúcspontja r oldalú szabályos háromszöget határoz meg.
A szabályos hatszög szemközti oldalainak távolsága két, r oldalú szabályos háromszög magasságának az összege: $2 \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = r \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}$ (cm).
Az r sugarú kör köré írt szabályos hatszög szemközti csúcspontjainak távolsága az r magasságú szabályos háromszög a oldalának a kétszerese. Az $r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$-ból a keresett távolság $2a = \frac{4r}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4 \cdot \sqrt{3}$ (cm).

1733. Igen. Az alább alkotott hatszög minden átlója egyenlő, valamint szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők. Legyen az O középpontú kör három átmérője AD, BE és CF, és a két szomszédos átmérő hajlásszöge ne legyen 60°. Ekkor $ABDE$, $BCEF$ és $CDFA$ négyszögek középpontosan szimmetrikusak, tehát paralelogrammák (sőt mivel átlóik egyenlő hosszúságúak, ezért egyben téglalapok is). A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúságúak, ezért az $ABCDEF$ hatszögre valamennyi feltétel teljesül, de nem szabályos.



Megjegyzés:
A feltételeknek eleget tevő hatszöget kaphatunk akkor is, ha az O középpontú, félkörívnél kisebb ívén felvett A, B, C pontokat tükrözzük O-ra; $D = A'$, $E = B'$ és $F = C'$.

1734. Az ABC háromszög beírt körének középpontja a belső szögfelezők O metszéspontja. Ennek az AB oldal F felezőpontjára vonatkozó tükörképét jelöljük C_1-gyel. A középpontos tükrözés miatt AC_1BO négyszög paralelogramma, s ezért $AC_1B\sphericalangle = AOB\sphericalangle$.



Az ABO háromszögben

$$AOB\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Így $AC_1B\sphericalangle = 90° + \frac{\gamma}{2}$.

Hasonlóan $BA_1C\sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2}$ és $CB_1A\sphericalangle = 90° + \frac{\beta}{2}$.

$ABC_1\sphericalangle = OAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, illetve $CBA_1\sphericalangle = OCB\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mert váltószögek, így

$$C_1BA_1\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\gamma}{2} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\beta}{2}.$$

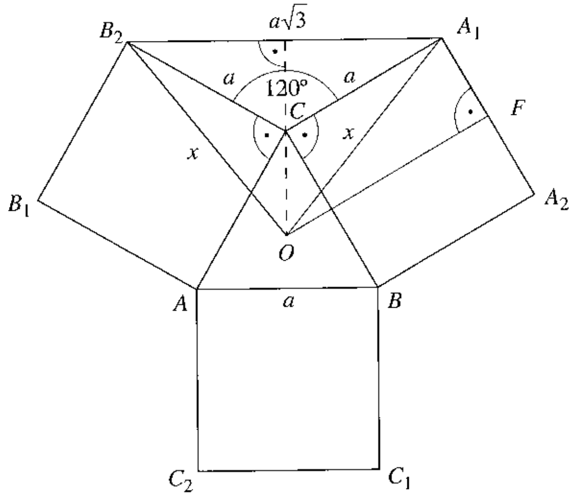
Hasonlóan $A_1CB_1\sphericalangle = 90° + \frac{\gamma}{2}$ és $B_1AC_1\sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Ezek szerint

a) $\alpha = 70°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 30°$ esetén a vizsgált hatszög szögei: 125°; 105°; 130°; 125°; 105°; 130°;

b) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 75°$ esetén a vizsgált hatszög szögei: 120°; 112,5°; 127,5°; 120°; 112,5°; 127,5°.

1735. A kapott alakzat a szabályos háromszög szimmetriatengelyeire szimmetrikus, ezért $OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2 = OC_1 = OC_2$, ahol O az $a = 6$ egység oldalú szabályos háromszög súlypontja. Tehát az A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 pontok egy O középpontú, $x = OA_1$ sugarú körön vannak.

Legyen az A_1A_2 szakasz felezőpontja F.



Az OFA_1 derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint: $x^2 = OF^2 + FA_1{}^2$, ahol $OF = a + \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $FA_1 = \frac{a}{2}$.

Innen $x = a \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{1}{4}} = a \cdot \sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{3}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{3}} = 2 \cdot \sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$ egység $\approx 8{,}294$ egység.

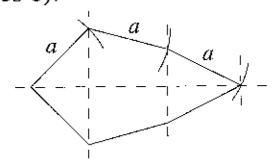
Megjegyzés:
$x = OA_1$ meghatározható másként is:

a) az $a \cdot \sqrt{3}$ alapú x szárú OA_1B_2 egyenlő szárú háromszögből is (ennek alaphoz tartozó magassága $\frac{a}{2} + \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$), vagy

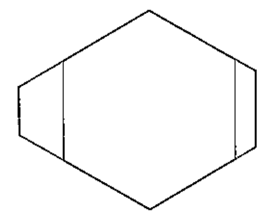
b) az OA_1C háromszögből a koszinusztétel segítségével.

1736. A szabályos sokszög definíciója miatt igaz: a), c) és e).

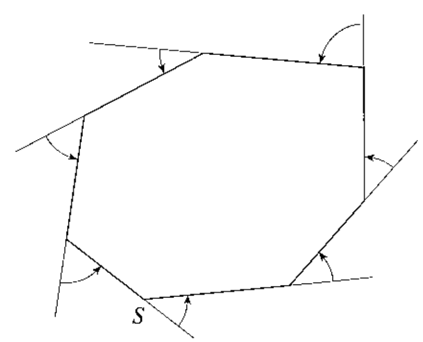
b) Hamis.



d) Hamis. (Toljuk el a szabályos hatszög oldalegyeneseit pl. az ábrának megfelelően, így szögei nem változnak, oldalai azonban igen.)



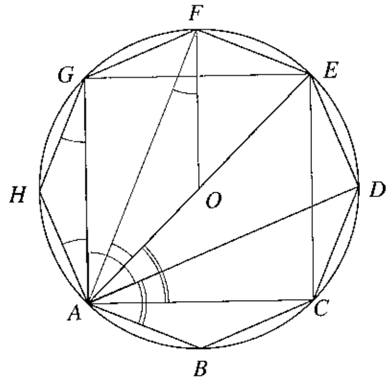
1737. a) A keresett szög, mivel az ábrán látható módon éppen egyszer fogunk körbefordulni, 360°.



b) Az $n = 7$ oldalú sokszög belső szögeinek összege:
$(n-2) \cdot 180° = 5 \cdot 180° = 900°$.

c) Egy négyszög mellett egy ötszög keletkezik a kívánt átló behúzásával. Ezek szögeinek összege 360°, illetve 540°. A hétszög szögösszege a két rész összegeként is megkapható, tehát ebből is kijön a 900°.

1738. A szabályos nyolcszög belső szöge:
$180° - \frac{360°}{8} = 135°$
(vagy másképpen $\frac{6 \cdot 180°}{8}$).



ACEG négyzet, ezért $CAE\sphericalangle = 45°$.
AOF egyenlő szárú háromszögben
$AOF\sphericalangle = 3 \cdot 45° = 135°$, így
$EAF\sphericalangle = 22{,}5°$.
Ezekből $CAF\sphericalangle = 67{,}5°$.

Másik megoldás:
Az *AHG* egyenlő szárú háromszögben
$HAG\sphericalangle = \frac{180° - 135°}{2} = 22{,}5°$, az *ABCD* tengelyesen szimmetrikus trapézban
$DAB\sphericalangle = 180° - 135° = 45°$, így $GAD\sphericalangle = 135° - 22{,}5° - 45° = 67{,}5°$.

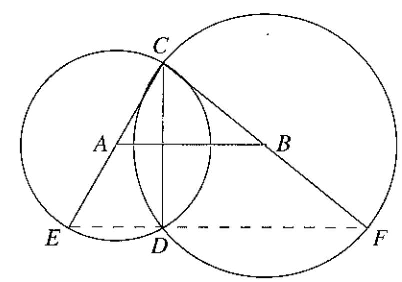
További megoldás:
A szabályos nyolcszög egy csúcsából 5 átló húzható, amelyek a szabályos nyolcszög belső szögét – a kerületi szögek tétele szerint – 6 egyenlő részre osztják. Így két szomszédos átló által bezárt szög $\frac{135°}{6} = 22{,}5°$. Ezért egy csúcsból kiinduló átlók hajlásszöge: $1 \cdot 22{,}5°$; $2 \cdot 22{,}5°$; $3 \cdot 22{,}5°$; $4 \cdot 22{,}5°$ lehet. Például az ábrán pirossal jelölt szög: 67,5°-os.

1739. Az n csúcspontú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$.
Esetünkben $\frac{n(n-3)}{2} = 54$, azaz $n^2 - 3n - 108 = 0$, melyből n-re 12 és –9 adódik.
A feltételek miatt nyilván csak $n = 12$ lehet.
A konvex n-szög belső szögeinek az összege $(n-2) \cdot 180°$.
Esetünkben $n = 12$, így a feltételt kielégítő konvex n-szög belső szögeinek az összege 1800°.

1740. Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$.
A konvex sokszög α külső szöge, a mellette fekvő belső szöget 180°-ra egészíti ki, így $(0° <)\ \alpha < 180°$.
A feladat szerint $(n-2) \cdot 180° + \alpha = 2002°$.
$2002 = 11 \cdot 180 + 22$, ezért $n = 13$ és az említett külső szög 22°.

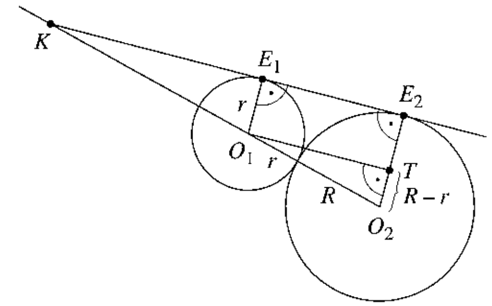
Megjegyzés:
Felhasználtuk a maradékos osztás tételét, azaz, hogy tetszőleges a, b természetes számokhoz egyértelműen létezik olyan q és r természetes szám, amelyekre
$a = b \cdot q + r$, ahol $0 \le r < b$.

1741. Mivel *AB* egyenesére a két kör szimmetrikus, $AB \perp CD$ és *AB* felezi *CD*-t. Mivel $CE = 2CA$ és $CF = 2CB$, az *AB* középvonala az *EFC* háromszögnek, ezért



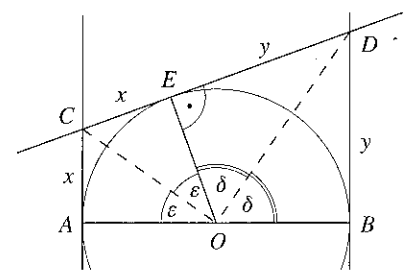
a) *CD* merőleges az *AB*-vel párhuzamos *EF*-re is;
b) (mivel *AB* felezi *CD*-t) *D* illeszkedik *EF*-re;
c) (mivel az oldal kétszerese a vele párhuzamos középvonalnak) $EF = 2AB$.

1742. a) A két érintési pontot, E_1-et és E_2-t összekötő szakasz hossza az O_1O_2T derékszögű háromszögből, mivel O_1T egyenlő a keresett szakasszal:
$\sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}$, azaz $2\sqrt{Rr}$.



b) $KE_2 = KE_1 + E_1E_2$, valamint a KO_1E_1 és a KO_2E_2 háromszögek hasonlóságából: $\frac{KE_1}{KE_2} = \frac{r}{R}$, amiből
$KE_1 = \frac{r}{R}KE_2$. Ezt és az a)-beli eredményt beírva az első egyenletbe:
$KE_2 = \frac{r}{R}KE_2 + 2\sqrt{rR}$, ahonnan $KE_2 = \frac{2R\sqrt{rR}}{R-r}$ adódik a közös külső érintő nagyobbik körön levő érintési pontjának és a külső hasonlósági pontnak a távolságára.

1743. a) Egy körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők
$AC = CE$; $BD = DE$
⇓
$OED\,\Delta \cong OBD\,\Delta$
$OEC\,\Delta \cong OAC\,\Delta$, mert 3-3 oldaluk egyenlő hosszú.



Az egybevágóságból következik, hogy minden megfelelő szögük is egyenlő ⇒
$AOC\sphericalangle = EOC\sphericalangle = \varepsilon$; $EOD\sphericalangle = BOD\sphericalangle = \delta$. Mivel $AOB\sphericalangle = 180°$;
$2\varepsilon + 2\delta = 180°$
$\varepsilon + \delta = 90° \Rightarrow COD\,\Delta$ derékszögű, mert $COD\sphericalangle = \varepsilon + \delta = 90°$.
Mivel a kör *CD* érintője merőleges az *E* érintési pontba húzott sugárra ⇒ $CD \perp OE \Rightarrow OE$ a *COD* derékszögű háromszögnek a *CD* átfogójához tartozó

magassága, így a magasságtétel szerint OE mértani közepe az átfogó 2 szeletének CE és ED-nek $\Rightarrow \sqrt{CE \cdot ED} = 5$ (cm), azaz $\sqrt{CA \cdot DB} = 5$ (cm).

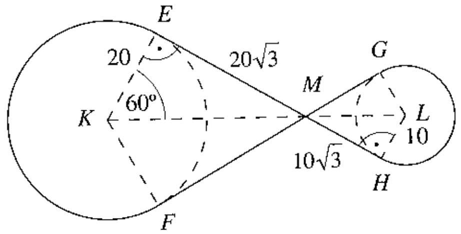
b) A bizonyítás a) része szerint $\sqrt{CE \cdot ED} = OE = r$, tehát $\sqrt{CA \cdot DB} = r$, ezzel állításunkat bizonyítottuk.

1744. Az AC átfogó hossza Pitagorasz-tétellel 13 cm-nek adódik. A Thalész-tétel szerint $ADB \sphericalangle = 90°$, tehát BD az átfogóhoz tartozó magasság. A befogótétel szerint:

$AB^2 = AD \cdot AC$, vagyis $AD = \frac{12^2}{13} = \frac{144}{13}$ (cm), $DC = 13 - \frac{144}{13} = \frac{25}{13}$ (cm).

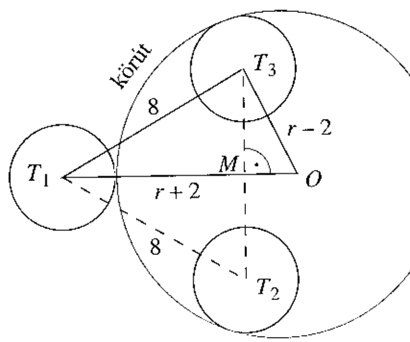
A kör az AC szakaszt $\frac{144}{13}$, illetve $\frac{25}{13}$ cm hosszú szakaszokra bontja.

1745. A pálya a két kör kerületének két harmad-két harmad részéből és a két közös belső érintőszakaszból tevődik össze. Az EM és MH szakaszok hossza a szabályos háromszög magasságáról tanul tak alapján $20\sqrt{3}$, illetve $10\sqrt{3}$ méter, a körök kerülete 40π, illetve 20π méter. A pálya hossza tehát



$\frac{2}{3}(40\pi + 20\pi) + 2(20\sqrt{3} + 10\sqrt{3}) = 40\pi + 60\sqrt{3} \approx 229{,}6$ (m).

1746. A körút sugarát jelöljük r-rel, a távolságokat km-ben adjuk meg. Vizsgáljuk a T_1OT_3 háromszöget. Ennek T_1T_3 oldala 8, OT_1, illetve OT_3 oldala a körök érintkezése miatt $r + 2$, illetve $r - 2$ hosszúságú. A $T_1T_2T_3$ szabályos háromszög T_1M magassága $4\sqrt{3}$. Ebből adódik az OM szakasz hossza: $r + 2 - 4\sqrt{3} = r - 4{,}928$.



Az OMT_3 derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt felírva:

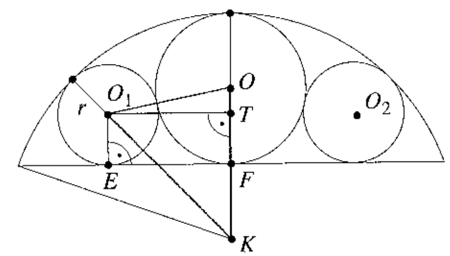
$(r-2)^2 = 16 + (r - 4{,}928)^2$. Ebből $r = 6{,}196$ adódik, tehát a nagy „körút" kerülete $2 \cdot 6{,}196 \cdot \pi \approx 38{,}93$ (km).

Megjegyzés:

Az $r = 1 + 3\sqrt{3}$, ami az elméletileg pontos érték, csupán centiméterekben különbö-

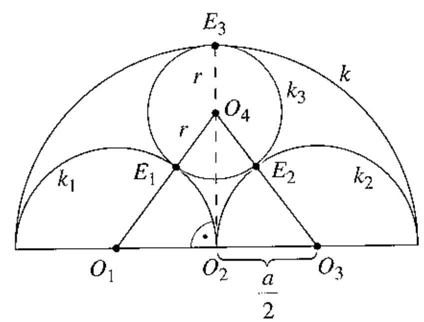
zik a három tizedes jegyre kerekített $r = 6{,}196$-tól; az elméletileg pontos értékkel számolt kerület 2 méternél kevesebbel tér el a kerekített értékekkel számolttól. A valóságban ekkora pontossággal nem számolhatunk, már csak az úttest szélessége miatt sem.)

1747. Egymást érintő körök középpontjai és az érintési pontok egy egyenesre illeszkednek. Ezért,
ha az r_1 és az r_2 sugarú körök kívülről érintik egymást, akkor középpontjaik távolsága: $c = r_1 + r_2$;
ha az r_1 sugarú kör belülről érinti az r_2 sugarú kört ($r_1 < r_2$), akkor a középpontok távolsága: $c = r_2 - r_1$.



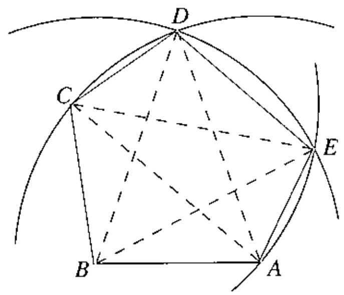
Az adott K, illetve O középpontú köröket és a húrt érintő r sugarú, O_1 és O_2 középpontú körök a szimmetria miatt egybevágóak.
A fentiek alapján $O_1O = r + 2$, $O_1K = 6 - r$ és $OK = 4$.
Az O_1KO háromszög O_1 csúcsához tartozó magasság talppontja T. $EFTO_1$ téglalap, ezért $TK = r + 2$ és $TO = 2 - r$.
Az O_1OT és a KO_1T derékszögű háromszögekre felírva a Pitagorasz-tételt, kapjuk:
$O_1T^2 = O_1O^2 - TO^2$ és $O_1T^2 = O_1K^2 - TK^2$, azaz
$(r+2)^2 - (2-r)^2 = (6-r)^2 - (r+2)^2$.
Ebből a körök keresett sugara $r = \frac{4}{3}$ cm.

1748. Érintkező körök középpontjai és érintési pontjai egy egyenesen vannak. Így O_1; E_1; O_4, illetve O_3; E_2; O_4, illetve O_2; O_4; E_3 egy egyenesen van. A szimmetria miatt O_4 illeszkedik O_1O_3 felezőmerőlegesére. $O_4O_2O_3$ derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a - r)^2 = \left(\frac{a}{2} + r\right)^2$

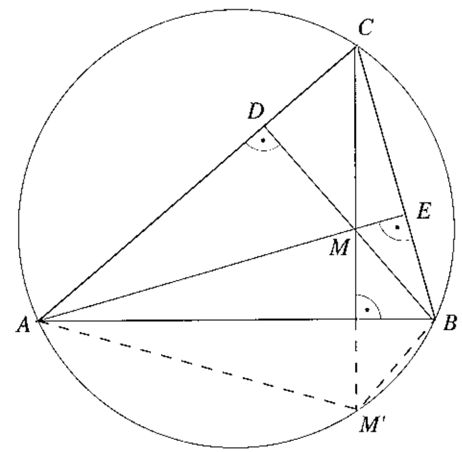


melyből $r = \frac{a}{3}$ a keresett kör sugara.

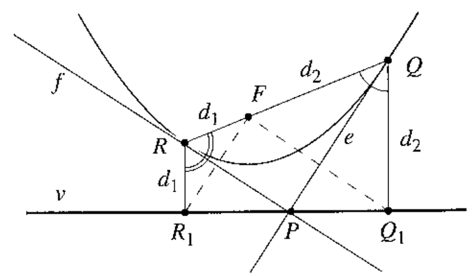
1749. Nem. Könnyen szerkeszthető csupa egyenlő átlójú, mégsem szabályos ötszög. Felvéve A-t, B-t és köréjük az átlónyi sugarú köröket, ezek metszete kiadja D-t. Ezután az egyik körön „szabálytalanul” felvéve C-t (tehát úgy, AB-hez nem 36°-os szögben hajlik CA), egy újabb körívvel már adódik E.



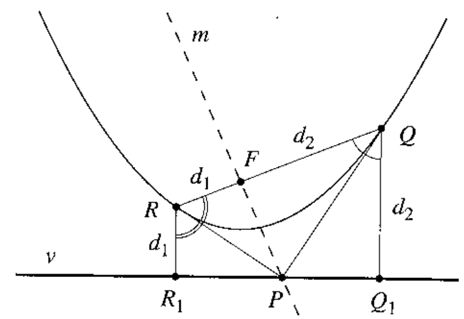
1750. Egy háromszög magasságpontjának az oldalakra, mint tengelyekre vonatkozó tükörképe a körülírt körön van, ugyanis:
a $CDME$ négyszögben
$DCE\sphericalangle + DME\sphericalangle = 180°$, hiszen a másik két szög derékszög;
$DME\sphericalangle = AMB\sphericalangle$, mert csúcsszögek;
$AMB\sphericalangle = AM'B\sphericalangle$, mert a tükrözés szögtartó;
így $AM'B\sphericalangle + ACB\sphericalangle = 180°$, vagyis $AM'BC$ húrnégyszög, tehát M' illeszkedik a körülírt körre. Ekkor persze, ha a kört tükrözzük AB-re, az fog illeszkedni M-re, és ez a kör egyben az AMB háromszög köré írt kör; aminek sugara a tükrözés közben ugyanakkora maradt. A másik két eset ugyanígy végiggondolható.



1751. Az RR_1Q_1Q derékszögű trapéz RQ szárán fekvő két szögének összege 180°, ezért e két szög felének összege 90°. Az e és f érintők tehát merőlegesek egymásra.
A parabola definíciójából következik, hogy $RR_1 = RF$ és $QQ_1 = QF$, tehát az R_1RF és a Q_1QF háromszög egyenlő szárú, ezért e és f ezeknek a háromszögeknek az alapfelező merőlegesei. Mivel $e \perp f$, ezért a rájuk merőleges R_1F és Q_1F alapok is merőlegesek egymásra: $R_1FQ_1\sphericalangle = 90°$. Mivel e és f a derékszögű R_1FQ_1 háromszög oldalfelező merőlegesei, ezért a háromszög átfogóján, tehát a parabola vezéregyenesén metszik egymást (az R_1Q_1 szakasz felezőpontjában).
(Beláttuk azt is, hogy a fókusznak a parabolaérintőkre vonatkozó tükörképei a vezéregyenesre illeszkednek.)



Másik bizonyítás:
Állítsunk merőlegest F-ben az RR_1Q_1Q derékszögű trapéz RQ szárára (m). Metssze ez az egyenes az R_1Q_1 szárat a P pontban. A parabola definíciójából következik, hogy $RR_1 = RF$ és $QQ_1 = QF$. A PR_1R és PFR derékszögű háromszögek egybevágók, mert átfogójuk közös és egy-egy befogójuk ugyanakkora. Ugyanígy belátható, hogy a PQ_1Q és PFQ derékszögű háromszögek egybevágók, tehát az R_1RFP és a Q_1QFP négyszög derékszögű deltoid. Ebből a feladat mindkét állítása következik, mert:

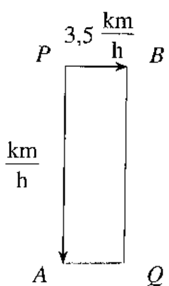


1. A deltoidok szimmetriaátlói szögfelezők, tehát a PR és PQ szakaszok egyenesei a parabola R, illetve Q pontjában húzott érintői, amelyek a vezéregyenes P pontjában metszik egymást.
2. A két deltoid P-nél fekvő belső szögei mellékszögek, ezért ezek szögfelezői valóban merőlegesek egymásra.

(Beláttuk azt is, hogy $FP = \sqrt{d_1 d_2}$, hiszen az RPQ derékszögű háromszögre alkalmazható a magasságtétel.)

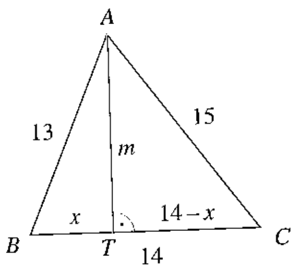
1752. Az ilyen nevezetes háromszög befogói x és $\sqrt{3}x$, átfogója $2x$.
Kerülete $x(1+\sqrt{3}+2) = x(3+\sqrt{3})$, területe pedig $\frac{x\cdot\sqrt{3}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$.
Ezek egyenlőségéből (a nyilván nem-nulla) x-szel leosztva: $3+\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, vagyis
$x = \frac{2(3+\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3}+1) \approx 5,46$. A hosszabb befogó $\sqrt{3}x = 2(3+\sqrt{3}) \approx 9,46$;
az átfogó pedig $2x = 4(\sqrt{3}+1) \approx 10,93$.
(Az azonos mérőszámú kerület és terület pedig $4(3+2\sqrt{3}) \approx 25,86$.)

1753. A csónak sebességét megkapjuk, ha a PBQ derékszögű háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt.
$\sqrt{3,5^2+12,5^2} = \sqrt{168,5} \approx 12,98$
A csónak sebessége 13 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ezért 1 h alatt 13 km utat,
3 perc alatt $\frac{13}{20}$ km $= 0,65$ km utat tesz meg.



1754. A 10-et három egész szám (s köztük két egyforma) összegére az alábbi módokon bonthatjuk fel: $1+1+8$, $2+2+6$, $3+3+4$, $4+4+2$. Az első két esetben nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ilyen háromszögek nincsenek.
A másik kettőben Pitagorasz-tétellel kiszámoljuk az alaphoz tartozó magasságot, ez $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$, illetve $\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$.
Innen a területek: $\frac{4\cdot\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}\approx 4,47$ és $\frac{2\cdot\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}\approx 3,87$.

1755. Az A-ból induló magasság T talppontjával két derékszögű háromszöget hozunk létre, amelyekben felírjuk a Pitagorasz-tételt. Az ABT háromszögben $x^2+m^2=13^2$, az ATC háromszögben $(14-x)^2+m^2=15^2$.
Kivonva ez utóbbiból az előzőt, m^2 kiesik, és azt kapjuk, hogy

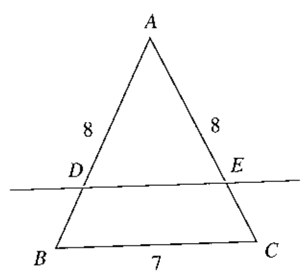


$(14-x)^2-x^2=15^2-13^2$.
Felbontva és rendezve: $196-28x=56$, amiből $x=5$. Visszaírva ezt az első egyenletbe: $m^2=13^2-5^2=144$, azaz $m=12$. Ez az A csúcs távolsága a BC oldaltól.

Másik megoldás:

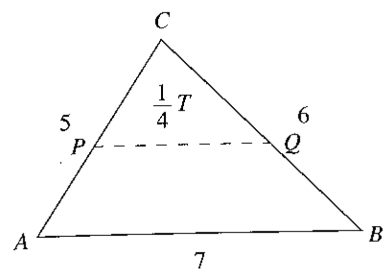
Héron-képlettel felírjuk a háromszög területét. A fél kerület: $s=\frac{13+14+15}{2}=21$,
így a terület: $\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{7056}=84$. Másrészt a terület $\frac{14m}{2}$, ezek egyenlőségéből $m=12$. Ez az A csúcs távolsága a BC oldaltól.

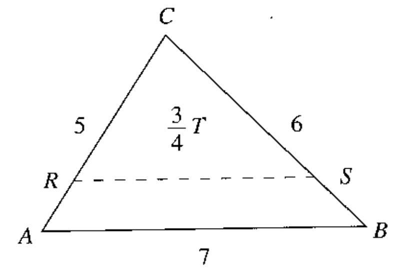
1756. Ekkor az ADE háromszög hasonló az ABC-hez, hiszen oldalaik párhuzamosak, illetve egybeesők, tehát szögeik egyenlők. Hasonló alakzatok területének aránya (ez most $\frac{1}{2}$) a hasonlósági arány négyzete, ami most tehát $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ekkor az ADE háromszög minden oldala ilyen arányban áll az ABC megfelelő oldalával, tehát: $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Ebből $DE=\frac{7}{\sqrt{2}}\approx 4,95$, $AD=AE=\frac{8}{\sqrt{2}}\approx 5,66$. A $BCED$ trapéz oldalai tehát $BC=7$ (adat volt), $DE=\frac{7}{\sqrt{2}}\approx 4,95$, $BD=CE=AB-AD=8-\frac{8}{\sqrt{2}}\approx 2,34$.

1757. a) Két ilyen párhuzamos húzható.

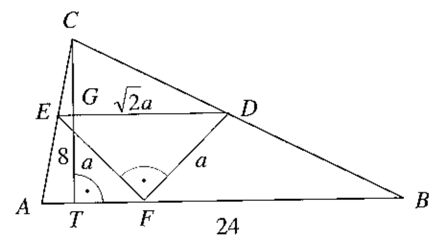




b) A PQ, illetve az RS szakasz hosszát kell meghatározni.
A hasonló síkidomok területének arányáról tanultak szerint $\left(\frac{PQ}{7}\right)^2=\frac{1}{4}$, illetve $\left(\frac{RS}{7}\right)^2=\frac{3}{4}$, ahonnan $PQ=7\cdot\frac{1}{2}=3,5$, illetve $RS=7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6,06$.

c) Az $ABQP$ trapéz PQ alapja az ABC háromszög középvonala, ezért a trapéz szárai 3, illetve 2,5 hosszúak.
Az ABC háromszög C középpontú, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ arányú kicsinyítéssel vihető az RSC háromszögbe, ezért és $CS=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ és $CR=5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2,5\cdot\sqrt{3}$.
A trapéz szárainak hossza tehát:
$BS=6-3\sqrt{3}=0,80$, illetve $AR=5-2,5\cdot\sqrt{3}=0,67$.

1758. Az EDC háromszög ekkor hasonló az ABC-hez, hiszen oldalaik párhuzamosak, illetve egybeesők, tehát szögeik egyenlők. Az FDE egyenlőszárú derékszögű (nevezetes) háromszög befogóinak (FD, FE) hosszát jelölje a, ekkor átfogója (DE) $\sqrt{2}a$, ehhez tartozó magassága (ami GT-vel azonos) $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Az említett két háromszög hasonlóságából



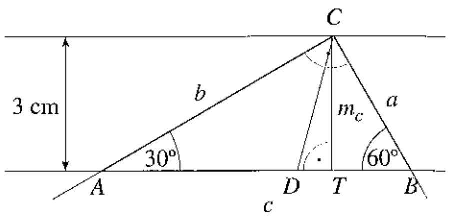
ekkor $\frac{ED}{AB}=\frac{CG}{CT}$, azaz $\frac{\sqrt{2}a}{24}=\frac{8-\frac{a}{\sqrt{2}}}{8}$.

Egyszerűsítés és keresztbeszorzás után: $\sqrt{2}a=24-\frac{3a}{\sqrt{2}}$, ebből $a\left(\sqrt{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=24$, ahonnan a beírt háromszög befogóira: $a = \dfrac{24}{\sqrt{2} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}} = 4{,}8\sqrt{2} \approx 6{,}79$;

átfogójára pedig: $\sqrt{2}a \approx 9{,}6$.

1759. Ekkor a háromszög harmadik szöge derékszög.

a) Felvesszük AB egyenesét, és tőle 3 cm-re egy vele párhuzamos egyenest. Tetszőlegesen kijelöljük a B pontot az első egyenesen, és 60°-os szöget szerkesztünk ide. Ennek szögszára kimetszi a párhuzamosból C-t, ahonnan merőlegest állítva a 60°-os szög szárára, az kimetszi az első egyenesből A-t.



Másik megoldás:
Szerkesztünk egy tetszőleges, 30°-60°-90°-os háromszöget. Ennek átfogóhoz tartozó magasságára (vagy annak meghosszabbítására) felmérjük a 3 cm távolságot, és a kapott ponton át párhuzamost húzunk az eredeti átfogóval. Ez az eredeti befogókból (vagy meghosszabbításukból) kimetszi a megfelelő háromszöget.

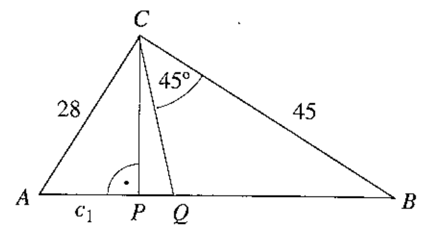
b) Éppen arról a nevezetes háromszögről van szó, amelynek oldalai x, $\sqrt{3}x$ és $2x$. Sőt, az m_c magasság két ugyanilyen háromszögre (ATC, BCT) bontja fel az ABC-t. Előbb az ATC-ben alkalmazzuk az oldalak arányára vonatkozó ismeretünket. Itt $x = m_c = 3$, vagyis $\sqrt{3}x = AT = 3\sqrt{3}$ és $2x = AC = 6$. A BCT háromszögben pedig $\sqrt{3}x = m_c = 3$, vagyis $x = TB = \sqrt{3}$ és $2x = BC = 2\sqrt{3}$. Tehát az ABC háromszög oldalai:
$a = BC = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$; $b = AC = 6$; $c = AB = AT + TB = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$.

c) Mint az előző pontban már kiszámoltuk: $AT = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$ és $TB = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

d) A szögfelező-tétel miatt a szomszédos oldalak arányában történik a metszés. Fel kell tehát osztani c-t $a : b$ arányban. Általánosságban ekkor $a + b$ „darabra" kell vágni, és venni ebből a, illetve b „darabot", az eredmény $\dfrac{ca}{a+b}$, illetve $\dfrac{cb}{a+b}$.

Konkrétan most $BD = \dfrac{ca}{a+b} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+6} = \dfrac{24}{2\sqrt{3}+6} = \dfrac{12}{\sqrt{3}+3} = \dfrac{12(3-\sqrt{3})}{9-3} =$
$= 2(3-\sqrt{3}) \approx 2{,}54$. Lehetne AD-t is $\dfrac{cb}{a+b}$ módon számolni, de egyszerűbb $AB - BD$ módon: $AD = 4\sqrt{3} - 2(3-\sqrt{3}) = 6(\sqrt{3}-1) \approx 4{,}39$.

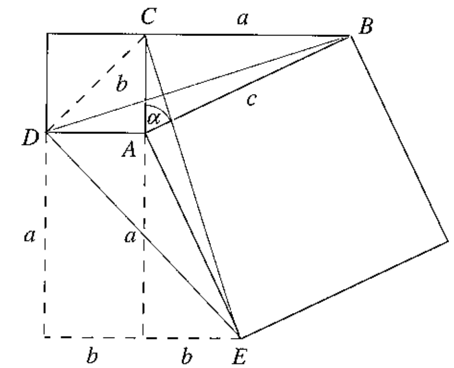
1760. a) A háromszög AB átfogója 53 cm hosszú (Pitagorasz-tétel). Az átfogóhoz tartozó magasság talppontja P. A befogótételt alkalmazva:
$28^2 = 53c_1$, amiből
$AP = c_1 = \dfrac{784}{53} = 14{,}79$ (cm),
ezért $PB = 53 - c_1 = 38{,}21$ (cm).



b) A CQ szögfelező $28 : 45$ arányban osztja az átfogót (szögfelezőtétel), ezért
$AQ = 28 \cdot \dfrac{53}{73} = 20{,}33$ (cm) és így $BQ = 32{,}67$ cm.

c) Ismert (és az 1697/a feladat megoldásában is megtalálható a bizonyítása), hogy a derékszögű háromszög beírt körének sugara kiszámítható az $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ összefüggésből (a és b a befogók, c az átfogó hosszát jelöli).
Ezzel $r = \dfrac{45+28-53}{2} = 10$ (cm).

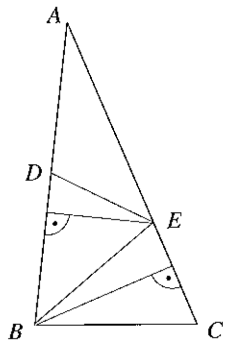
1761. $DAB\,\Delta \cong CAE\,\Delta$, hiszen $DA = CA = b$, $AB = AE = c$, $DAB\sphericalangle = CAE\sphericalangle =$
$= 90° + \alpha$.
A két háromszöget A körüli 90°-os forgatás viszi egymásba, így persze
a) $BD = CE$;
b) $BD \perp CE$.
c) Az ábrán látható, hogy ED egy a, illetve $2b$ befogójú derékszögű háromszög átfogója, így $ED = \sqrt{a^2 + 4b^2}$.



d) Mivel $CE \perp BD$ (lásd b) pont), ha felezi is, akkor a felezőmerőlegese. Ez pontosan akkor következik be, ha C azonos távolságra van D-től és B-től, vagyis ha $DC = CB$. Mivel CD a b oldalú négyzet átlója, ekkor $\sqrt{2}b = a$, azaz $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$.

1762. Legyen az egyik befogó a egység, akkor a másik, (a hosszabb) a feltétel szerint: $a + 5$ egység. Másrészt a befogóra rajzolt négyzetek területére: $(a+5)^2 - 1 = 2a^2$. Az utóbbi feltételből: $a^2 - 10a - 24 = 0$. Ennek a másodfokú egyenletnek a két gyöke: 12 és -2. A második nem lehetséges, mivel a befogó hossza pozitív szám, így az egyik befogó 12, a másik 17. Ekkor az átfogóra a Pitagorasz-tétel alapján: $c^2 = 12^2 + 17^2 = 144 + 289 = 433$, ahonnan $c \approx 20{,}81$ egység.

1763. Lévén a három kis háromszög egyenlő területű, együtt pedig kiadják az eredetit, egyenként mindegyikük területe az eredeti harmada. Az $EBC\,\Delta$ CE-hez tartozó magassága ugyanaz, mint az eredeti háromszögé, így kell, hogy alapja harmad akkora legyen: $CE = \frac{AC}{3}$, vagyis E az AC-nek C-hez közelebbi harmadolópontja. $DEB\,\Delta$-nek és $ADE\,\Delta$-nek a területe mellett E-ből induló magassága is azonos, így alapjuk is egyenlő: $BD = AD$, vagyis D az AB felezőpontja.



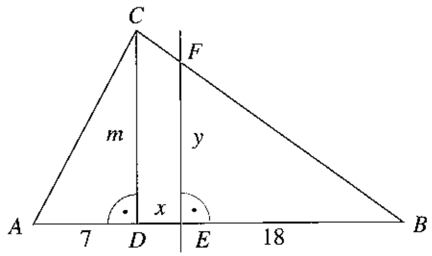
1764. $T_{ABC} = \frac{(7+18)m}{2} = 12,5m.$

$T_{BEF} = \frac{(18-x)y}{2} = \frac{T_{ABC}}{2} = 6,25m;$

amiből $\frac{m}{y} = \frac{18-x}{12,5}$.

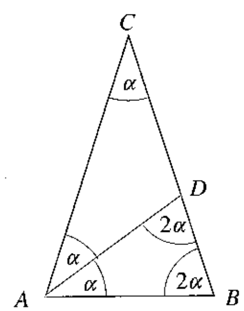
Másrészt $BDC\,\Delta \sim BEF\,\Delta$, mert oldalaik párhuzamosak, illetve egybeesők

így $\frac{m}{y} = \frac{18}{18-x}$.



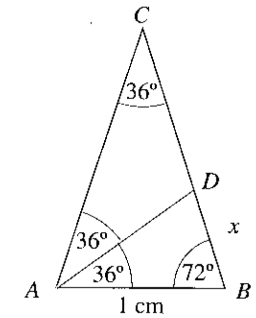
A két tört egybevetéséből $(18-x)^2 = 18 \cdot 12,5 = 225$, amiből $18-x = 15$ (a -15 nem jöhet szóba), és így $x = 3$. Így a keresett részek: $AE = 7 + x = 10$, $EB = 18 - x = 15$. (És lásd még a 3702. példát!)

1765. Jelölje a megfelezett szög felét ($CAD\sphericalangle = DAB\sphericalangle$) α. Az $ADC\,\Delta$ egyenlőszárúsága miatt a C-nél lévő szög is α. Az $ADB\sphericalangle$ külső szöge az $ADC\Delta$-nek, így a nem mellette fekvő két belső szög összege, vagyis 2α. Ekkor az $ADB\,\Delta$ egyenlőszárúsága miatt a B-nél lévő szög is ekkora. Az ABC háromszög szögösszege így 5α, vagyis $\alpha = 36°$. Az eredeti háromszög szögei tehát: 72°, 72°, 36°; az $ABD\,\Delta$-é szintén; az $ACD\,\Delta$-é: 36°, 36°, 108°. (Lásd még a 3567. példát is!)



1766. a) A BAD és az ABC háromszög szögei páronként egyenlők, ezért a két háromszög hasonló.

b) Mivel a BAD háromszög egyenlő szárú, ezért AD hossza is 1 cm. Az ADC háromszög szögeit kiszámítva láthatjuk, hogy ez is egyenlő szárú háromszög, így DC hossza is 1 cm. Az ABC háromszög szárainak hossza tehát $1 + x$ cm. Az ABC és a BAD háromszög hasonlóságából következik, hogy megfelelő oldalaik hosszának aránya egyenlő: $\frac{BD}{AB} = \frac{AD}{BC}$, vagyis $\frac{x}{1} = \frac{1}{1+x}$, amiből



$x^2 + x - 1 = 0$. A megoldóképletből adódó gyökök $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, de csak a pozitív gyök felel meg, hiszen $x > 0$. Tehát $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (cm).

Az ABC háromszög szárainak hossza $1 + x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ (cm).

1767. A súlyvonalak harmadolva metszése miatt, ha $SE = x$, akkor $AS = 2x$; ha $SF = y$, akkor $CS = 2y$.

Az $ASC\Delta$-re felírva a Pitagorasz-tételt:

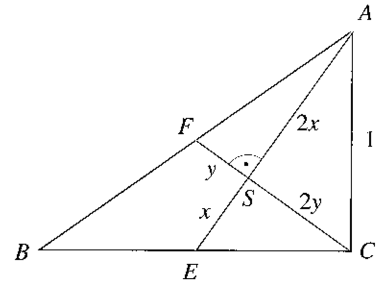
$4x^2 + 4y^2 = 1$ $\quad(*)$.

Mivel egy derékszögű háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja, ezért $AF = FC = 3y$.

Az $AFS\,\Delta$-re felírva a Pitagorasz-tételt:

$4x^2 + y^2 = 9y^2$, azaz $x^2 = 2y^2$, amit

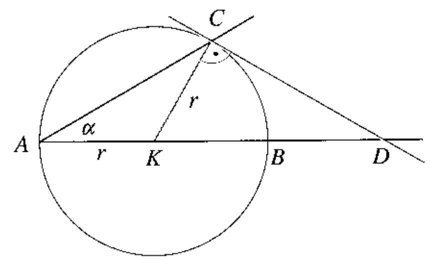
$(*)$-ba beírva: $y = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

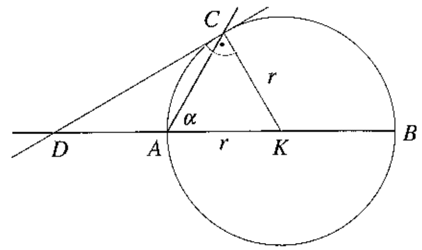


Ekkor $AF = FC = 3y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért az átfogó $AB = \sqrt{3}$.

A másik befogó pedig egy újabb Pitagorasz-tétellel: $BC = \sqrt{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \sqrt{2}$.
(Ilyen háromszöget alkot pl. egy kocka egy-egy éle, lapátlója és testátlója.)

1768. Két eset van aszerint, hogy a C pont „túl" vagy „innen" van-e az AB ív felén. Felhasználjuk, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Ekkor az első esetben az $ACD\,\Delta$ úgy egyenlő szárú, hogy $AC = CD$ (hiszen C-ben tompaszög van), így $ADC\sphericalangle$ is α. Két sugárnyi oldala miatt azonban az $AKC\,\Delta$ is egyenlő szárú, így $ACK\sphericalangle$ is α. Vagyis az $ACD\,\Delta$ szögösszege $90^\circ + 3\alpha = 180^\circ$, amiből $\alpha = 30^\circ$. A másik esetben az $ACD\,\Delta$ úgy egyenlő szárú, hogy $AC = AD$ (hiszen A-ban tompaszög van), így e háromszög külső szögeként a $CAK\sphericalangle = \alpha$ a két nem mellette fekvő (egyenlő) belső szög összege. Ezért ezek $CDA\sphericalangle = DCA\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$ nagyságúak. Két sugárnyi oldala miatt azonban az $AKC\,\Delta$ is egyenlő szárú, így $ACK\sphericalangle$ is α. Ekkor a C-nél lévő derékszögre: $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, amiből $\alpha = 60^\circ$.

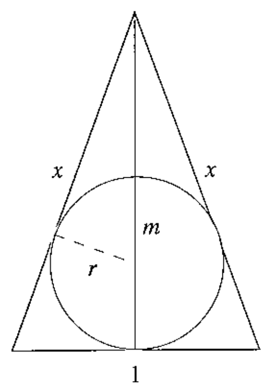




1769. A háromszög oldalai: 1, x, x $(0,5 < x)$, fél kerülete így: $s = x + 0,5$. A háromszög magassága Pitagorasz-tétellel: $m = \sqrt{x^2 - 0,25}$. Felírva a háromszög területét egyrészt e magassággal, másrészt a beírt kör sugarával: $T_\Delta = \frac{1\cdot m}{2} = \frac{\sqrt{x^2-0,25}}{2} = rs$.

Ebből $r = \frac{m}{2s} = \frac{\sqrt{x^2-0,25}}{2(x+0,5)}$.

A beírt kör területe így $T_O = r^2\pi = \frac{x^2-0,25}{4(x+0,5)^2}\pi$.



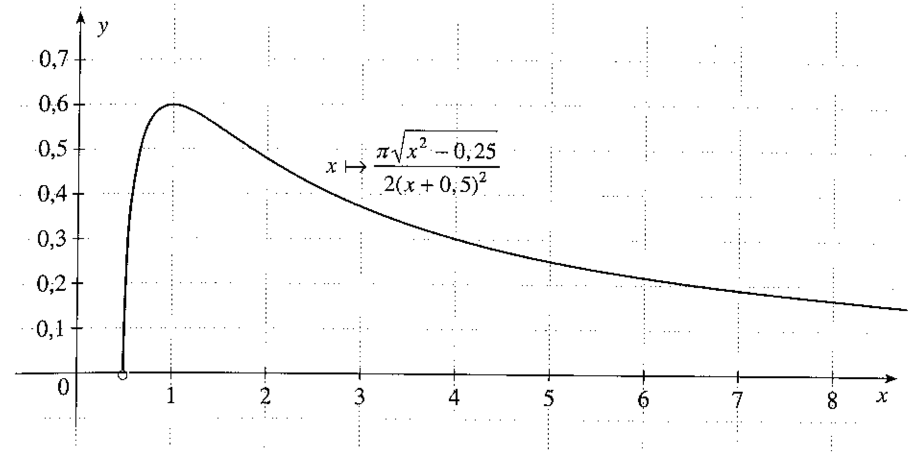
A kör és a háromszög területének aránya:

$$\frac{T_O}{T_\Delta} = \frac{\frac{x^2-0,25}{4(x+0,5)^2}\pi}{\frac{\sqrt{x^2-0,25}}{2}} = \frac{(x^2-0,25)\pi\cdot 2}{4(x+0,5)^2\sqrt{x^2-0,25}} = \frac{\pi\sqrt{x^2-0,25}}{2(x+0,5)^2}.$$

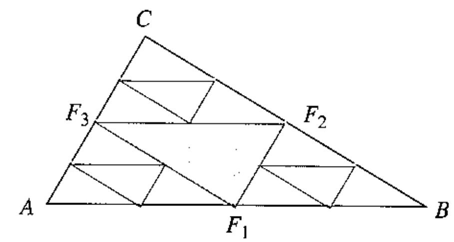
(A gyök alatti kifejezés szorzattá alakításával még formálható az eredmény, de egyszerűbb nem lesz.)

A függvény grafikonja vázlatosan a következő oldalon található.

(Például számítógéppel felvázoltatható.)



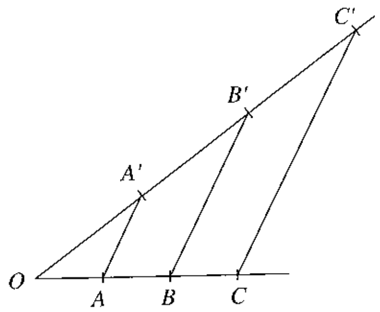
1770. Ismert, hogy a háromszög középvonalai fele akkorák, mint a velük párhuzamos háromszögoldalak. A középvonalak alkotta háromszög tehát hasonló az eredetihez és hasonlóságuk aránya $\frac{1}{2}$. A középvonalak alkotta háromszög területe ezért negyede az eredeti háromszögének.



Az első satírozás után (ekkor még csak az $F_1F_2F_3$ háromszöget satíroztuk be) a T területű ABC háromszög $\frac{3}{4}$ része marad satírozatlan. A három, nem satírozott háromszögre (AF_1F_3-ra, BF_1F_2-re és CF_2F_3-ra) megismételve az előző gondolatmenetet azt kapjuk, hogy az eddig satírozatlan $\frac{3}{4}T$ területnek ismét $\frac{3}{4}$ része marad satírozatlan. A két satírozás után is satírozatlanul maradt terület tehát $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}T = \frac{9}{16}T$.

A satírozott terület $T - \frac{9}{16}T = \frac{7}{16}T$, vagyis ez a kisebb.

1771. Mivel $OB = 2OA$ és $OB' = 2OA'$, ezért ha az OAA' háromszöget az O pontból $\lambda = 2$ arányban nagyítjuk, akkor az OBB' háromszöget kapjuk. Mivel $OC = 3OA$ és $OC' = 3OA'$, ezért ha az OAA' háromszöget az O pontból $\lambda = 3$ arányban nagyítjuk, akkor az OCC' háromszöget kapjuk.



Legyen az OAA' háromszög területe $T_{OAA'} = t$.

Felhasználjuk, hogy a hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével:

$T_{OBB'} = 4T_{OAA'} = 4t$,

$T_{OCC'} = 9T_{OAA'} = 9t$.

$T_{ABB'A'} = T_{OBB'} - T_{OAA'} = 4t - t = 3t$.

$\frac{T_{ABB'A'}}{T_{OCC'}} = \frac{3t}{9t} = \frac{1}{3}$.

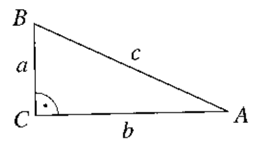
Tehát az $ABB'A'$ négyszög területe $33\frac{1}{3}$ %-a az OCC' háromszög területének.

1772. A feltételek szerint: $c = 10$ cm, $a + b = 12$ cm.

Az $a^2 + b^2 = 100$, $a + b = 12$ egyenletrendszer megoldásából adódik, hogy a háromszög befogóinak hossza $6 + \sqrt{14}$, illetve $6 - \sqrt{14}$ (cm).

A háromszög területe: $T = \frac{ab}{2} = \frac{(6-\sqrt{14})(6+\sqrt{14})}{2} = \frac{36-14}{2} = 11\ (\text{cm}^2)$.

Másik megoldás:



A feltételek szerint (a hosszúságokat cm-ben mérve):

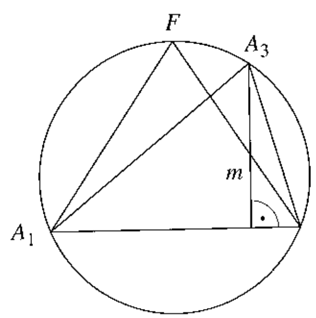
$c = 10$, $a + b = 12$.

A háromszög területe $T = \frac{ab}{2}$.

A Pitagorasz-tétel szerint $c^2 = a^2 + b^2$, másrészt $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ egy azonosság, ennek alapján most igaz, hogy $10^2 = 12^2 - 4T$. Ebből $T = 11$ cm².

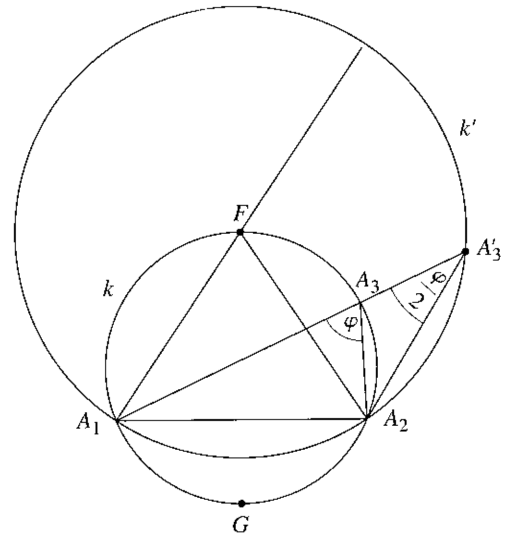
1773. a) Ha az $A_1A_2A_3$ háromszög A_1A_2 oldalához tartozó magasságát m-mel jelöljük, akkor a háromszög területe:

$t = \frac{A_1A_2 \cdot m}{2}$.



Mivel A_1A_2 rögzített, t akkor lesz a legnagyobb, amikor m a legnagyobb. Az m magasság akkor lesz a legnagyobb, ha A_3 az A_1A_2 húrhoz tartozó nem rövidebb körív F felezőpontjával azonos.

b) Mivel az $A_1A_2A_3$ háromszög A_1A_2 oldala rögzített, a kerület akkor lesz a legnagyobb, amikor a mozgás során az $A_1A_3 + A_2A_3$ összeg a legnagyobb lesz. Jelöljük az A_1A_2 húrhoz tartozó körívek felezőpontjait F-fel és G-vel.



Tegyük fel először, hogy A_3 az F-et tartalmazó köríven mozog.

Mérjük fel az A_2A_3 szakaszt az A_3 pontból az A_1A_3 félegyenes A_3 ponton túli meghosszabbítására, és jelöljük az így kapott pontot A'_3-vel.

Mivel $A_2A_3 = A_3A'_3$ ezért $A_1A_3 + A_2A_3 = A_1A_3 + A_3A'_3 = A_1A'_3$.

Tehát az A_3 pont mozgása során az $A_1A_3 + A_2A_3$ összeg akkor lesz a legnagyobb, amikor az $A_1A'_3$ szakasz hossza a legnagyobb lesz.

Most megvizsgáljuk, hogy milyen pályán mozog az A'_3 pont ha A_3 a k köríven mozog. Az A'_3 pont szerkesztése miatt az $A_2A_3A'_3$ háromszögben

$$A_2A_3 = A_3A'_3 \text{ ezért}$$

$$A_3A'_3A_2\sphericalangle = A_3A_2A'_3\sphericalangle. \qquad (1)$$

Mivel $A_1A_3A_2\sphericalangle$ az $A_2A_3A'_3$ háromszög külső szöge, ezért

$$A_1A_3A_2\sphericalangle = A_3A'_3A_2\sphericalangle + A_3A_2A'_3\sphericalangle$$

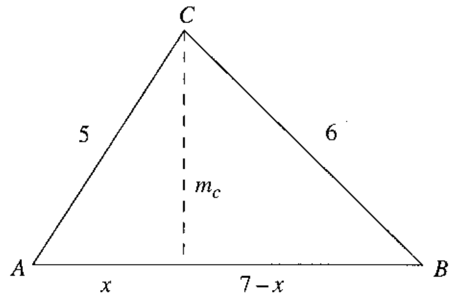
és így (1) miatt $A_1A_3A_2\sphericalangle = 2A_3A'_3A_2\sphericalangle$.

Tehát ha az $A_1A_3A_2\sphericalangle = \varphi$, akkor $A_3A'_3A_2\sphericalangle = A_1A'_3A_2\sphericalangle = \frac{\varphi}{2}$, azaz ha az A_1A_2 szakasz A_3-ból φ szög alatt látszik, akkor A'_3-ből $\frac{\varphi}{2}$ szög alatt fog látszani.

Mivel A_3 az A_1A szakasz φ szögű k látókörívén mozog, ezért A'_3 az A_1A_2 szakasz $\frac{\varphi}{2}$ szögű k' látókörívén fog mozogni. Mivel $A_1A'_3$ a k'-nek húrja, $A_1A'_3$ akkor

lesz a leghosszabb, amikor $A_1A'_3$ a k' kör átmérője. Ez akkor következik be, amikor $A_1A'_3$ áthalad a k' középpontján.
A k' kör középpontja a kerületi és középponti szögek közötti összefüggés miatt egyrészt k-ra illeszkedik, másrészt A_1-től és A_2-től egyenlő távolságra van. Ezért k' középpontja a k körív F felezőpontja.
Tehát ha A_3 a k köríven mozog, akkor az A_1A_2F egyenlő szárú háromszögnek a kerülete lesz a legnagyobb.
Hasonlóan látható be, hogy ha A_3 az A_1A_2 húrhoz tartozó G-t tartalmazó köríven mozog, akkor az A_1A_2G egyenlő szárú háromszög kerülete lesz a legnagyobb.
A két értéket összehasonlítva nyilván akkor lesz az $A_1A_2A_3$ háromszög kerülete a legnagyobb, amikor A_3 az A_1A_2 húrhoz tartozó nem rövidebb körív felező pontjában van.

1774. a) A háromszög területe:
$T = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2} = \frac{cm_c}{2}$.
Ebből látható, hogy a legrövidebb magasság a leghosszabb oldalhoz (most a c-hez) tartozik.
Két Pitagorasz-tételt felírva:
$m_c^2 = 5^2 - x^2$, illetve
$m_c^2 = 6^2 - (7-x)^2$, ahonnan
$25 - x^2 = 36 - (7-x)^2$.



Ebből $25 = 36 - 49 + 14x$, vagyis $x = \frac{38}{14} = \frac{19}{7}$.

$$m_c^2 = 25 - \left(\frac{19}{7}\right)^2 = \frac{864}{49} \Rightarrow m_c = \frac{12\sqrt{6}}{7} \approx 4{,}20 \text{ cm } (m_c > 0).$$

A háromszög legrövidebb magassága 4,20 cm hosszú.
(Kihasználtuk, hogy a háromszög legrövidebb magasságának talppontja a háromszög leghosszabb oldalának mindig belső pontja.)

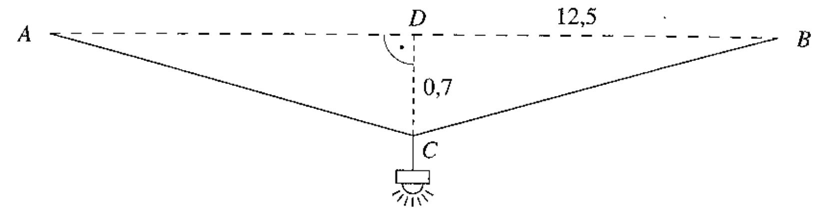
b) Az a) elején felírt összefüggésekből következik, hogy $c \cdot m_c = a \cdot m_a$, amiből

$$m_a = \frac{c \cdot m_c}{a} = \frac{7 \cdot 4{,}20}{6} = 4{,}90 \text{ cm}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $m_b = \frac{c \cdot m_c}{b} = \frac{7 \cdot 4{,}20}{5} = 5{,}88$ cm.

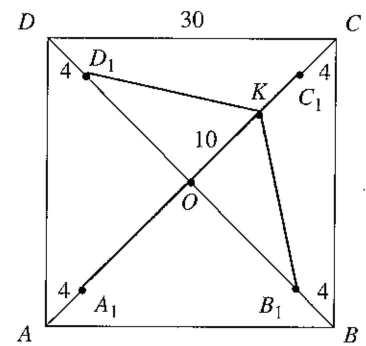
c) 14,7 cm^2.

1775. a)



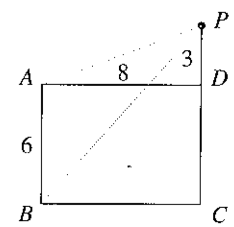
b) Mivel a tartóhuzalok mindkét oldalon ugyanolyan magasságban vannak felfüggesztve, a lámpa az utca „közepére" lóg be. A szimmetria miatt ABC háromszög egyenlőszárú, az AB alaphoz tartozó magasság felezi az alapot, így D az AB oldal felezőpontja. ADC derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva:
$12{,}5^2 + 0{,}7^2 = AC^2$ ebből $AC \approx 12{,}52$, a huzal hossza ennek kétszerese, körülbelül 25,04 m.

1776. Az ábra jelöléseit használva:
$OC = OA = OB = OD = 15 \cdot \sqrt{2}$
$KA_1 = 10 + 15 \cdot \sqrt{2} - 4 = 6 + 15 \cdot \sqrt{2}$
$KA_1 \approx 27{,}2$ m
$KC_1 = 15 \cdot \sqrt{2} - 10 - 4 = 15 \cdot \sqrt{2} - 14$
$KC_1 \approx 7{,}2$ m.
A másik két utat a $KOB_1\,\Delta \cong KOD_1\,\Delta$-re felírt Pitagorasz-tétellel számítjuk ki:
$KB_1 = KD_1 = \sqrt{10^2 + (15 \cdot \sqrt{2} - 4)^2} =$
$= \sqrt{566 - 120 \cdot \sqrt{2}} \approx 19{,}9$;

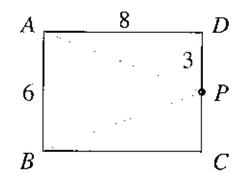


$KB_1 = KD_1 \approx 19{,}9$ m. Ezért a négy fa megöntözéséhez telt vödörrel 74,2 m utat kell megtennie a kertésznek.

1777. Az adatok P helyzetét nem egyértelműen határozzák meg.



$PD = 3$ cm
$PC = 9$ cm



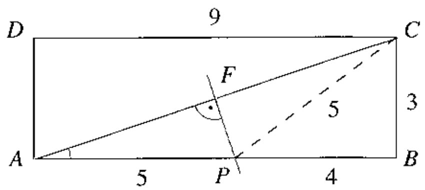
$PD = PC = 3$ cm

A többi szakaszt Pitagorasz tétele segítségével határozzuk meg:

$PA^2 = 9 + 64 = 73 \quad PA = \sqrt{73}\text{ cm} \approx 8,5\text{ cm} \qquad PA = PB = \sqrt{73}\text{ cm} \approx 8,5\text{ cm}$

$PB^2 = 81 + 64 = 145 \quad PB = \sqrt{145}\text{ cm} \approx 12\text{ cm}$

1778. A keresett pont tehát AC felezőmerőlegesén van. Az AC átló hossza Pitagorasz-tétellel:



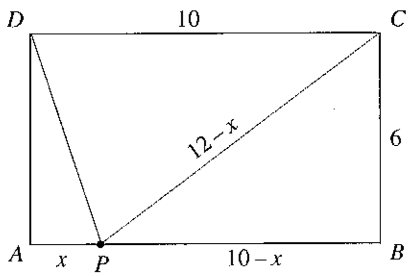
$AC = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90}$, a fele akkor:

$AF = \dfrac{\sqrt{90}}{2} = \sqrt{\dfrac{90}{4}} = \sqrt{22,5} \approx 4,74.$

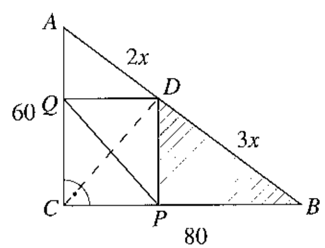
Az ABC és AFP háromszögek hasonlók, mert az A-nál lévő szögük közös, és mindkettőben van még egy derékszög, ezért $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AF}{AP}$, azaz $\dfrac{9}{\sqrt{90}} = \dfrac{\sqrt{22,5}}{AP}$, amiből

$AP = 5.$

1779. Legyen $AP = x$, ekkor $PC = 12 - x$ és $PB = 10 - x$.
A PBC Δ-re felírva a Pitagorasz-tételt:
$(10 - x)^2 + 6^2 = (12 - x)^2$, amiből
$100 - 20x + x^2 + 36 = 144 - 24x + x^2$,
vagyis $4x = 8$, tehát $x = 2$. Most
APD Δ-re felírva a Pitagorasz-tételt:
$DP = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6,32.$



1780. $AQD\ \Delta \sim ACB\ \Delta$, mert szögeik páronként egyenlők.
Ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő:



$\dfrac{QD}{CB} = \dfrac{AD}{AB}$

$\dfrac{QD}{80} = \dfrac{2x}{5x}$, innen $QD = 32$ egység.

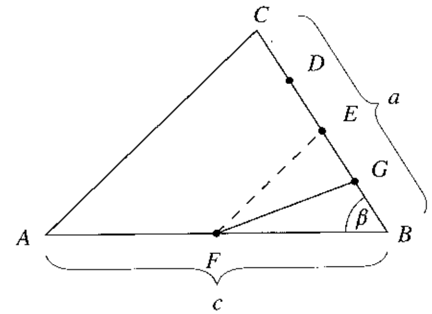
Hasonlóan $\dfrac{PD}{60} = \dfrac{3}{5}$, ebből $PD = 36$ egység.

a) $t(PQD) = \dfrac{1}{2} \cdot QD \cdot PD = \dfrac{1}{2} \cdot 32 \cdot 36 = 576$ területegység.

b) A PQD derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján:
$PQ^2 = 32^2 + 36^2 = 2320$, $PQ \approx 48,17$ egység;
a PQD háromszög kerülete: körülbelül 116,17 egység.

c) $CPDQ$ téglalap, ezért átlói egyenlők, $CD = PQ \approx 48,17$ egység.

1781. Az eredeti háromszög területe
$T = \dfrac{a \cdot c \sin\beta}{2}$. FBG háromszög két oldala $FB = \dfrac{1}{2}c$ (F felezőpont),
$GB = \dfrac{1}{4}a$ (G a B-hez közelebbi negyedelőpont), a két oldal által közbezárt szög β. Így FBG háromszög területe:



$t = \dfrac{\frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{4}a \cdot \sin\beta}{2} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{a \cdot c \sin\beta}{2} = \dfrac{1}{8}T.$

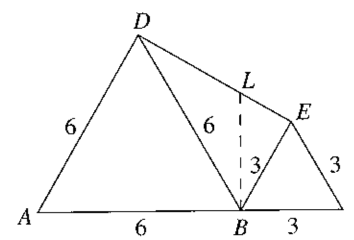
Tehát a levágott háromszög területe az eredeti háromszög területének $\dfrac{1}{8}$-a.

Másik megoldás:

Mivel F és E felezőpontok, így B középpontú $\lambda = \dfrac{1}{2}$ arányú kicsinyítés ABC háromszöget FBE háromszögbe viszi, területük aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, azaz $\dfrac{T_{EFB}}{T_{ABC}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow T_{EFB} = \dfrac{1}{4}T_{ABC}$.

Mivel G az EB szakasz felezőpontja, így FG felezi az FBE háromszög területét, azaz a levágott FGB háromszög területe az eredeti háromszög területének $\dfrac{1}{8}$-a.

1782. a) Mivel ABD és BEC szabályos háromszögek, így $BD = 6$ cm,
$BE = 3$ cm, $DBA\sphericalangle = 60°$,
$EBC\sphericalangle = 60° \Rightarrow DBE\sphericalangle = 60°$.
Így DBE háromszög területe:



$T = \dfrac{DB \cdot BE \cdot \sin 60°}{2} =$

$= \dfrac{6 \cdot 3 \cdot \sin 60°}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7,8\ (\text{cm}^2).$

b) DE szakasz hossza DBE háromszögből a koszinusztétellel számítható ki.

$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2 \cdot BD \cdot BE \cdot \cos 60°$

$DE^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos 60°$

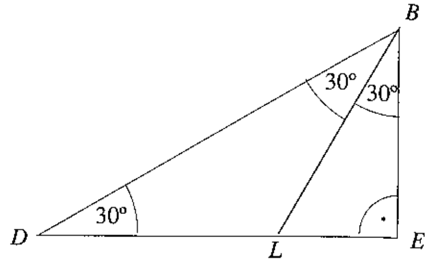
$DE^2 = 27$

$DE = 3\sqrt{3} \approx 5,2$ (cm).

c) $DB = 6$, $DE = 3\sqrt{3}$, $BE = 3$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint $DEB\sphericalangle = 90°$. Az LEB (30°-60°-os) háromszögben $BL = 2LE$.
A BLD egyenlő szárú háromszög, így $DL = BL = 2LE$.
Ezért

$$LE = \frac{1}{3}DE = \sqrt{3} \approx 1,7 \text{ (cm) és}$$

$$DL = \frac{2}{3}DE = 2\sqrt{3} \approx 3,5 \text{ (cm)}.$$

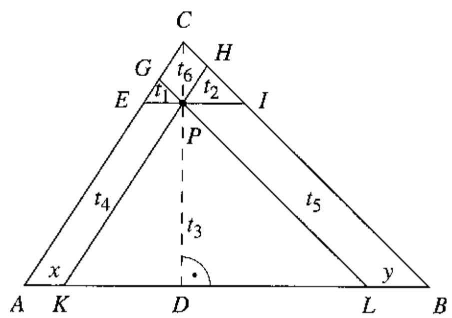


Másik megoldás:
A szögfelezőtétel szerint a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szögfelezőt közrefogó oldalak arányában osztja. Így $\frac{6}{3} = \frac{DB}{BE} = \frac{DL}{LE}$, azaz a belső szögfelező DE oldalt $2:1$ arányban osztja.

$$DL = \frac{2}{3}DE = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 3,5 \text{ (cm)},$$

$$LE = \frac{1}{3}DE = \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3} \approx 1,7 \text{ (cm)}.$$

1783. Legyen P pont az AB oldalhoz tartozó magasság C csúcshoz közelebb eső negyedelő pontja. Mivel $PK \parallel AC$, és $PL \parallel BC$, így az ADC, illetve CDB szögszárakra vonatkozó párhuzamos szelők tétele miatt $\frac{CP}{PD} = \frac{AK}{KD}$, illetve $\frac{CP}{PD} = \frac{BL}{LD}$. Mivel $\frac{CP}{PD} = \frac{1}{3}$, ezért K az AD, L a DB szakasz negyedelő pontja. AD, DB, DC hossza kiszámítható az ADC, illetve BDC derékszögű háromszögekre vonatkozó Pitagorasz-tétel alapján:



$$AD^2 + DC^2 = 5^2$$

$$(7 - AD)^2 + DC^2 = 6^2, \text{ ebből } AD = \frac{19}{7},\ DC \approx 4,2.$$

Mivel K az AD, L a DB szakasz negyedelő pontja, és a párhuzamosság miatt

$$AK = EP = x = \frac{19}{28},\quad LB = IP = y = \frac{15}{14}.$$

A párhuzamosság miatt $EPG\,\Delta \sim PIH\,\Delta \sim KLP\,\Delta \sim EIC\,\Delta \sim ALG\,\Delta \sim KBH\,\Delta \sim$ $\sim ABC\,\Delta$ (két-két szögük egyenlő), így megfelelő oldalaik aránya is egyenlő. Hasonló síkidomok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével. Használjuk az ábra jelöléseit! Legyen az ABC háromszög területe T.

$$\frac{t_1}{T} = \left(\frac{x}{7}\right)^2 \Rightarrow t_1 = \left(\frac{19}{196}\right)^2 \cdot T; \qquad \frac{t_2}{T} = \left(\frac{y}{7}\right)^2 \Rightarrow t_2 = \left(\frac{15}{98}\right)^2 \cdot T$$

$$\frac{t_3}{T} = \left(\frac{KL}{7}\right)^2 \Rightarrow t_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot T = \frac{9}{16}T; \qquad \frac{t_{CEI}}{T} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow t_{CEI} = \frac{1}{16}T$$

mivel EIC és ABC háromszög magasságainak aránya $\frac{1}{4}$.

$$AL = 7 - y = \frac{83}{14};\quad \frac{t_{ALG}}{T} = \left(\frac{AL}{7}\right)^2 \Rightarrow t_{ALG} = \left(\frac{83}{98}\right)^2 T$$

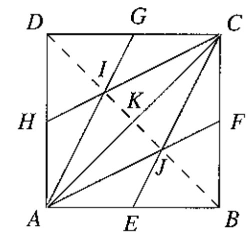
$$t_4 = t_{ALG} - t_1 - t_3 = \frac{57}{392}T$$

$$KB = 7 - x = \frac{177}{28};\quad \frac{t_{KBH}}{T} = \left(\frac{KB}{7}\right)^2 \Rightarrow t_{KBH} = \left(\frac{177}{196}\right)^2 T$$

$$t_5 = t_{KBH} - t_2 - t_3 = \frac{45}{196}T$$

$$t_6 = t_{CEI} - t_1 - t_2 = \frac{285}{9604}T$$

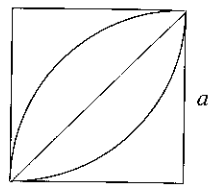
1784. A kérdéses $AJCI$ négyszög a létrehozás szabálya folytán szimmetrikus a négyzet (egymásra merőleges) AC és DB átlóira. Ez utóbbira egyúttal saját, IJ átlója is ráesik. Vagyis e négyszög átlói merőlegesek, és a négyszög mindkettőre szimmetrikus. Ekkor minden oldala egyenlő, ez egy rombusz. Területe kiszámolható például átlói szorzatának feleként is: $\frac{AC \cdot IJ}{2}$.



Az AC az $ABCD$ egységnégyzet átlója is, s mint ilyen, $\sqrt{2}$ hosszú. Mivel az E, F, G, H pontok oldalfelező pontok, ezért az AF, CE, AG, CH szakaszok súlyvonalak az ABC, illetve az ACD háromszögben. Ezért I és J ezen háromszögek súlypontjai. A BK és DK szakaszok ugyancsak súlyvonalak e háromszögekben, és a súlypont súlyvonalat harmadoló tulajdonsága miatt $IK = \frac{DK}{3}$ és $JK = \frac{BK}{3}$.
A szimmetria miatt persze $IK = JK$, és $DK = BK$, utóbbiak a négyzet átlójának két fele. Ezért az is igaz, hogy $IJ = \frac{BD}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Így a rombusz területe $\frac{AC \cdot IJ}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{1}{3}$ (a négyzet területének harmada).

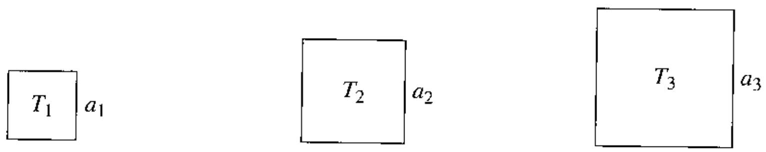
1785. E negyedkörök által közrezárt terület a négyzet átlójával felbontható két egybevágó körszeletre. Egy ilyen körszelet területe egy körcikk (most negyedkör) és egy háromszög (most egyenlő szárú, derékszögű) területének különbsége:



$$\frac{a^2\pi}{4} - \frac{a \cdot a}{2} = a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right).$$

A teljes terület ennek duplája, azaz $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 0,57a^2$ (azaz kicsit több a négyzet területének felénél).

1786. Jelöljük a négyzetek oldalait a_1, a_2, a_3-mal, a megfelelő kerületeket, illetve területeket k_1, k_2, k_3-mal, illetve T_1, T_2, T_3-mal.



$k_1 = 4 \cdot a_1$ $\quad$ $k_2 = 4 \cdot a_2$ $\quad$ $k_3 = 4 \cdot a_3$

A feltételek szerint

$T_1 : T_2 : T_3 = 4 : 9 : 16$

Mivel $T_1 = a_1^2$, $T_2 = a_2^2$, $T_3 = a_3^2$ ezért

$a_1^2 : a_2^2 : a_3^2 = 4 : 9 : 16$, s így

$a_1 : a_2 : a_3 = 2 : 3 : 4$.

Alkalmas hosszegység bevezetésével: $a_1 = 2x$, $a_2 = 3x$, $a_3 = 4x$.

Tudjuk, hogy $k_3 - k_1 = 180$, vagyis

$4a_3 - 4a_1 = 180$, s így

$a_3 - a_1 = 45$.

Mivel $a_3 = 4x$, $a_1 = 2x$ ezért $4x - 2x = 45$, melyből $x = 22,5$ (méter) adódik.

x ismeretében

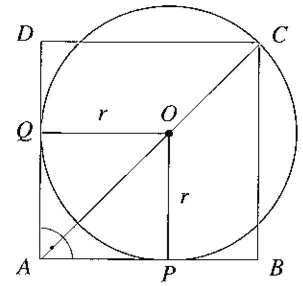
$k_1 = 4 \cdot 2x = 180$

$k_2 = 4 \cdot 3x = 270$

$k_3 = 4 \cdot 4x = 360$

Tehát a kerületek összege 810 m.

1787. Készítsük el a feladat szövegének megfelelő ábrát és használjuk a jelöléseit.



Mivel a keresett kör érinti a négyzet AB és AD oldalát, O középpontja illeszkedik a négyzet AC átlójára.

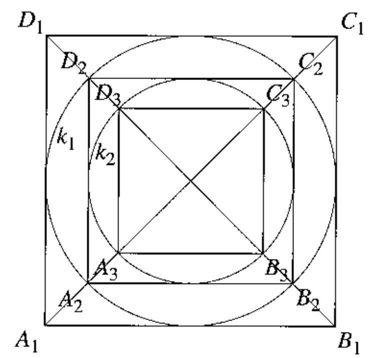
Az $APOQ$ négyszög egy négyzet, mivel mindegyik szöge derékszög, és oldalai egyenlők; r hosszúságúak.

Az r oldalú négyzetben $AO = r\sqrt{2}$. Az a oldalú négyzetben $AC = a\sqrt{2}$.

Mivel $AO + OC = AC$, ezért $r\sqrt{2} + r = a\sqrt{2}$.

Ebből a keresett sugár: $r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$, vagy más alakban $r = a(2 - \sqrt{2})$.

1788. A feltétel szerint $B_2D_2 = 5$ cm, így a k_1 kör átmérője 5 cm, és ezzel az $A_1B_1C_1D_1$ négyzet oldala is 5 cm. Az $A_2B_2D_2$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számolható:

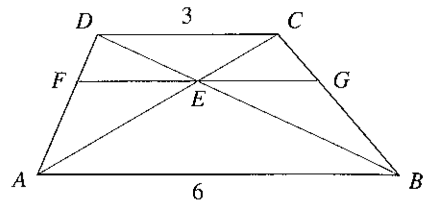


$A_2B_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm, így a k_2 kör átmérője és B_3D_3 is ugyanekkora. Az $A_3B_3C_3D_3$ négyzet oldala $A_3B_3D_3$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számolható: $A_3B_3 = \frac{5}{2}$ cm.

A keresett területek: $A_1B_1C_1D_1$ négyzeté 25 cm², $A_2B_2C_2D_2$ négyzeté 12,5 cm², $A_3B_3C_3D_3$ négyzeté 6,25 cm², k_1 köré $6,25\pi$ cm², k_2 köré $3,125\pi$ cm².

1789. A vízszintes sáv a teljes terület ötöde. Mivel szélessége azonos a teljes téglalapéval, így magassága annak szintén ötöde. A függőleges sáv a teljes terület tizede. Mivel magassága azonos a teljes téglalapéval, így szélessége annak szintén tizede. Ezért a középső kis téglalap magassága ötöde, szélessége tizede a nagyénak, így területe ötvened akkora: $\frac{1200\ \text{cm}^2}{50} = 24$ cm².

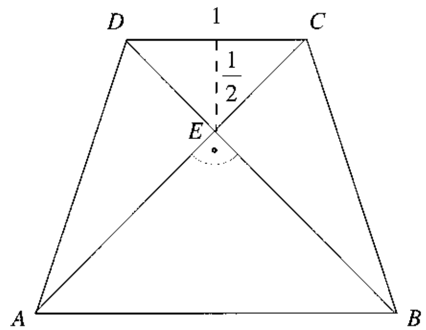
1790. Az átlók által létrehozott ABE és CDE háromszögek hasonlók, hiszen oldalegyeneseik párhuzamosak, illetve egybeesők. A hasonlóság aránya az AB és CD oldalak hossza alapján $2:1$. Akkor ugyanez az aránya az AE és EC, valamint a BE és ED oldalaknak is; vagyis az E pont harmadolja mindkét átlót. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\frac{AE}{AC}=\frac{BE}{BD}=\frac{2}{3}$.



További hasonló háromszögek is vannak az ábrában, szintén oldalegyeneseik párhuzamos, illetve egybeeső volta miatt: $AEF\,\Delta \sim ACD\,\Delta$, és $BGE\,\Delta \sim BCD\,\Delta$. Ekkor $\frac{EF}{CD}=\frac{AE}{AC}$, és $\frac{GE}{CD}=\frac{BE}{BD}$.

Mindkét arány, mint az imént láttuk, $\frac{2}{3}$; így $CD = 3$ miatt $EF = GE = 2$. Vagyis a keresett szakasz: $FG = 4$. (Ami az alapok harmonikus közepe: $\frac{2\cdot 6\cdot 3}{6+3}$.)

1791. Ekkor az átlók által létrehozott mind a négy háromszög (ABE, CDE, AED, BCE) derékszögű. Az első kettő a szimmetria miatt még egyenlő szárú is, oldalaik párhuzamossága és az átlók osztása miatt $2:1$ arányban hasonló; a második kettő pedig a szimmetria miatt egybevágó. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög nevezetes háromszög: átfogója a befogó $\sqrt{2}$-szerese.



Emiatt $ED = EC = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

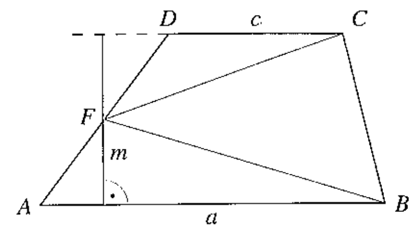
A hasonlósági arány miatt $AE = BE = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (és $AB = 2$). Derékszögű háromszögek területét a befogók szorzata révén könnyen számolhatjuk, így:

$$T_{ABE}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=1,\quad T_{BCE}=T_{AED}=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{1}{2},\quad T_{CDE}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{1}{4}.$$

A trapéz területe a háromszögek területének összege: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=2{,}25$.

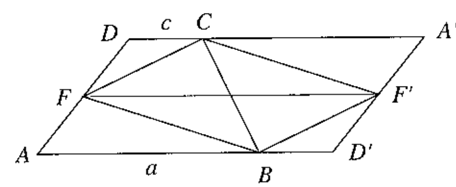
Megjegyzés:
A trapéz területe az ABC és DCA háromszögek területének összegeként is számítható.
A trapéz magassága: $M=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$, területe így: $T=\frac{1\cdot M}{2}+\frac{2\cdot M}{2}=\frac{3\cdot M}{2}=\frac{9}{4}$.

1792. A trapéz területe $\frac{a+c}{2}m$.

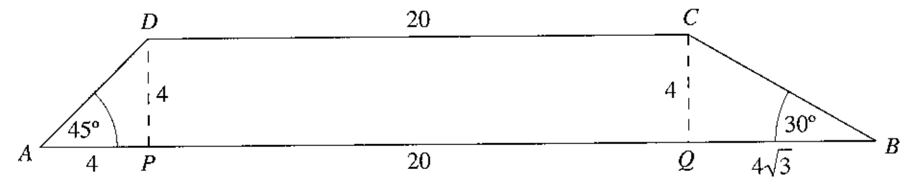


A szár F felezőpontja felezi a magasságot is, így az ABF és a CDF háromszögek magassága egyaránt $\frac{m}{2}$. E háromszögek területe így $\frac{a\frac{m}{2}}{2}=\frac{am}{4}$, illetve $\frac{c\frac{m}{2}}{2}=\frac{cm}{4}$, területük összege pedig $\frac{(a+c)m}{4}$. Ez láthatólag a trapéz területének fele, tehát a BFC háromszög területe adja a másik felét, vagyis a keresett arány $1:2$.

Másik megoldás:
Az iménti ábrát CB felezőpontjára tükrözve egy paralelogrammába ($AD'A'D$) rajzolt másik paralelogrammát ($FBF'C$) kapunk. Az FF' szakasz mindkettő területét felezi, mert egyiknek középvonala, másiknak átlója. Az $FF'C$ háromszög területe az $FF'A'D$ paralelogramma területének a fele, hiszen alapjuk és magasságuk közös. Így az $FBF'C$ paralelogramma területe az $AD'A'D$ paralelogramma területének a fele, avagy területük aránya $1:2$. A tükrözés miatt azonban az FBC háromszög és az $ABDC$ trapéz területe szintén fele az $FBF'C$, illetve az $AD'A'D$ paralelogramma területének, így ezekre is fennáll az $1:2$ arány.

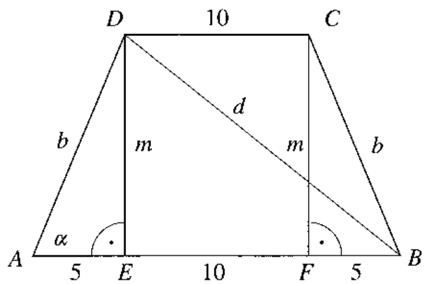


1793.



Az APD háromszög egyenlő szárú és derékszögű, a CQB háromszög pedig egy szabályos háromszög „fele". Ebből – az ábrán már feltüntetetteken kívül – következik, hogy $AD = 4\sqrt{2}$, $BC = 8$ cm hosszú. A trapéz kerülete tehát $52 + 4(\sqrt{2}+\sqrt{3}) =$ $= 64{,}59$ cm, területe $\frac{44+4\sqrt{3}}{2}\cdot 4 \approx 101{,}86$ (cm^2).

1794.



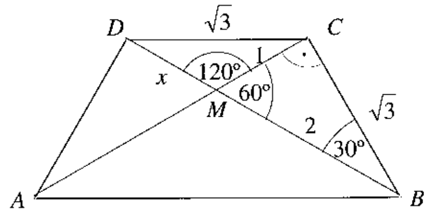
A trapéz területe: $\frac{a+c}{2}m \Rightarrow 180 = \frac{20+10}{2}m \Rightarrow m = 12$ cm.
Az AED derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint
$b^2 = 5^2 + 12^2 = 169$, melyből $b = 13$.
Tehát a trapéz szára 13 cm.
A trapéz átlói a szimmetria miatt egyenlők. Az EBD derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint
$d^2 = 225 + 144 = 369$
$d = \sqrt{369} \approx 19,2$.
Tehát a trapéz átlóinak hossza 19,2 cm. Az AED derékszögű háromszögben
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5} = 2,4 \Rightarrow \alpha \approx 67,38°$. Tehát a trapéz hegyesszöge 67,38°.

1795. a) A lap területe a trapéz területképletéből:
$T = \frac{a+c}{2}m = \frac{28+(28-8)}{2} \cdot 35 = 24 \cdot 35 = 840.$
Tehát a trapéz alakú lap területe 840 cm².

b) A téglalap területe: $28 \cdot 35 = 980$ (cm²). A levágott darab a hulladék: $980 - 840 = 140$ (cm²). Ez a téglalap területének kb. 14,3%-a. Ennyi a hulladék.

1796. A telek területe a trapéz területképletéből számítható: $\frac{30,0+39,0}{2} \cdot 28,0 = 966$ (m²).
Mivel a négyzetméterenkénti ár 10 000 Ft, ezért a telek ára: 9 660 000 Ft.

1797. a) Az ábra szerint a BCM háromszög a nevezetes 30-60 fokos, derékszögű háromszög, amelynek átfogója $BM = 2$, ezért befogói: $CM = 1$ és $BC = \sqrt{3}$. A DMC háromszögben az egyik oldal 1, a másik $\sqrt{3}$ és van egy 120°-os szög.

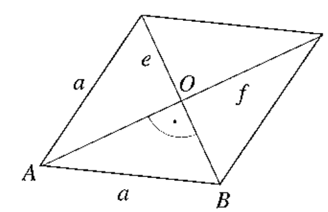


A koszinusztétel szerint: $x^2 + 1 - 2x \cdot \cos 120° = 3$.
Mivel $\cos 120° = -0,5$, ezért az egyenlet: $x^2 + 1 + x = 3$, azaz $x^2 + x - 2 = 0$, ahonnan $x = 1$ (vagy -2, de x csak pozitív lehet). Eszerint viszont egyenlő szárú a háromszög, tehát az MCD és MDC szögek egyenlők és így csak 30°-osak lehetnek. Váltószögek miatt az MAB és MBA szögek is 30°-osak, tehát az ABM háromszög egyenlő szárú. Valamint BMC és AMD egybevágó (két oldaluk 1-1 és 2-2, egyenlő, az ezek által közrezárt szögek csúcsszögek, tehát azok is egyenlők), ezért $MAD\sphericalangle$ is 30°-os. A trapéz egyenlő szárú, mert szögei: 60-60 és 120-120 fokosak.

b) Az oldalak: a hosszabbik alap a hasonlóságból $2\sqrt{3}$, míg mindkét szár hossza $\sqrt{3}$.

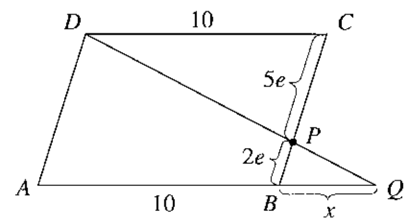
1798. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, ezért az ABO háromszögre felírt Pitagorasz-tétel a következő lesz: $\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2$ (így nem lehet $e^2 + f^2 = a^2$).

Tegyük fel, hogy létezik a feladat feltételeinek eleget tevő rombusz. Ekkor Pitagorasz tétele szerint
$f^2 = e^2 + a^2$ (ahol $f > e$). E két egyenletből
$2 \cdot f^2 = 5 \cdot a^2$, illetve $2 \cdot e^2 = 3 \cdot a^2$, tehát
$f = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot a$ és $e = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a$.



Van ilyen rombusz, ebben az átlók és az oldal aránya $f : e : a = \sqrt{5} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

1799. $PBQ\Delta \sim PCD\Delta$, mert két-két szögük egyenlő, ($DPC\sphericalangle = BPQ\sphericalangle$ csúcsszögek, $CDP\sphericalangle = PQB\sphericalangle$ váltószögek) így megfelelő oldalaik aránya is egyenlő. $\frac{BP}{PC} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 4$ cm.
Tehát $AQ = 14$ cm.



1800. A paralelogramma területe felírható két oldala és az ezek által közbezárt szög szinusza szorzataként is: $200 = 25 \cdot LM \cdot \sin 120°$, amiből $LM = \frac{16\sqrt{3}}{3} \approx 9,24$ (cm).
A paralelogramma kerülete $2 \cdot 25 + 2 \cdot 9,24 = 68,48$ (cm).
Az átlók hosszát koszinusztétellel is számolhatjuk:
$KM = \sqrt{25^2 + 9,24^2 - 2 \cdot 25 \cdot 9,24 \cdot \cos 120°} \approx 30,68$ (cm);
$LN = \sqrt{25^2 + 9,24^2 - 2 \cdot 25 \cdot 9,24 \cdot \cos 60°} \approx 21,90$ (cm).

1801. a) Az AC átló hosszát az ABC derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel kapjuk: 13. A deltoid területe kiszámítható az ABC háromszög területének kétszereseként és az átlói segítségével is: $12 \cdot 5 = \frac{13 \cdot BD}{2}$, amiből $BD = \frac{120}{13} = 9{,}23$.

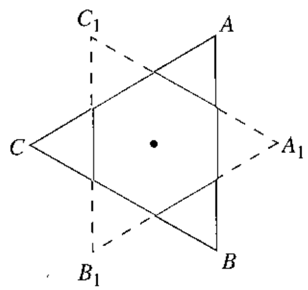
b) A $KLMN$ négyszög téglalap. Ennek bizonyításához elég felfedezni, hogy KL és MN egy-egy középvonal az ABC, illetve CDA háromszögben, LM és NK pedig egy-egy középvonal a BCD, illetve DAB háromszögben. A középvonalak tulajdonságából következik az is, hogy a téglalap szomszédos oldalainak hossza egy-egy deltoidátló felével egyenlő, ezért területe a deltoid területének negyede: 15 területegység.

c) Felhasználjuk a következő bizonyításban, hogy a háromszöget bármelyik súlyvonala két egyenlő területű háromszögre bontja fel.
Kössük össze a P pontot az $ABCD$ deltoid csúcsaival. A már megrajzolt PK, PL, PM, PN szakaszokkal együtt ezek a deltoidot 8 háromszögre bontják fel. E háromszögek között 4 olyan pár található, amelyek tagjai (a bevezető mondatban említett tétel miatt) egyenlő területűek (pl. APN és NPD háromszög, vagy CPM és MPD háromszög). A négy pár mindegyikéből pontosan egy háromszög tartozik az $AKPN$ vagy $CLPM$ négyszöghöz, e két négyszög területe együtt tehát éppen a deltoid területének felével egyenlő.

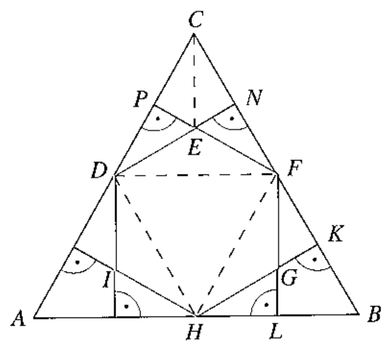
1802. A közös rész szabályos hatszög, melynek oldala a szabályos háromszög oldalának harmada, azaz 6 cm hosszú. A szabályos hatszög területe tehát

$6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \approx 93{,}53$ (cm²).

Kerülete pedig: $6 \cdot 6 = 36$ (cm).



1803. Húzzuk be a szabályos ABC háromszög DF, DH, FH középvonalait! Ezek az eredeti háromszöget 4 db egybevágó szabályos háromszögre bontják, ezek területe tehát az eredeti háromszög területének a negyede.
A DFC szabályos háromszögben DN és PF magasságok, tehát egyben súlyvonalak is, így E pont a DFC háromszög súlypontja, (be- és körülírható körének középpontja). Így a DEF, DEC, CEF háromszögek egybevágók, terüle-



tük az eredeti háromszög területének a tizenketted része (negyedének a harmada). Így a $DEFC$ négyszög területe az eredeti háromszög területének a hatoda. Három ugyanilyen, egymással egybevágó területet kell az ABC háromszög területéből levágni, hogy a $DEFGHI$ hatszög területét megkapjuk.
Legyen az eredeti háromszög területe t!

Ekkor $T_{ABC} = t$, $\quad T_{ADH} = T_{DHF} = T_{FHB} = T_{DFC} = \frac{t}{4}$,

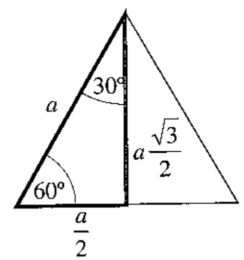
$$T_{DEF} = T_{DEC} = T_{FEC} = \frac{1}{3} T_{DFC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t}{4} = \frac{t}{12},$$

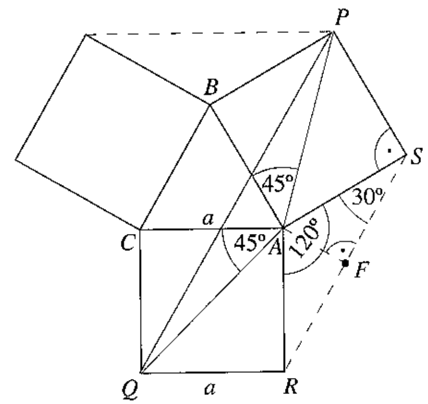
$$T_{DEFC} = T_{FGHB} = T_{DIHA} = 2 \cdot \frac{t}{12} = \frac{t}{6}, \qquad T_{DEFGHI} = t - 3 \cdot \frac{t}{6} = \frac{t}{2}.$$

Tehát a kapott szabályos hatszög területe az eredeti háromszög területének a fele.

Másik megoldás:
Húzzuk be az ABC szabályos háromszög DF, DH, FH középvonalait! Ezek az eredeti háromszöget 4 db egybevágó szabályos háromszögre bontják, ezek területe tehát az eredeti háromszög területének a negyede.
$T_{DEF} = T_{DEC} = T_{FEC} = T_{DIH} = T_{HGF}$
Így DEF, DIH és HGF háromszögek területe együttesen akkora, mint DFC háromszög területe, azaz az eredeti háromszög területének a negyede. Így a hatszög területe az eredeti háromszög területének a fele.

1804. A megoldás során többször felhasználjuk, hogy a 30° és 60° szögekkel rendelkező a átfogójú derékszögű háromszöget a hosszabbik befogójának egyenesére tükrözve szabályos háromszöget kapunk. Az a oldalú szabályos háromszög magassága $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, így a vizsgált derékszögű háromszög hosszabbik befogója $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.*





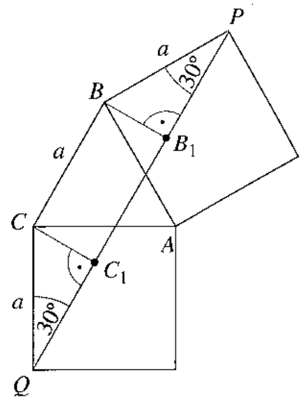
A hatszög oldalai a, illetve $a\sqrt{3}$ hosszúságúak, felváltva. (Ez utóbbi pl.: az ARS egyenlő szárú háromszögből, illetve az AFS 30°, 60°, 90° szögekkel rendelkező háromszögből kapható meg * miatt.)
A hatszög szögei 120°-osak.
A leghosszabb átló többféleképpen is meghatározható.
$AQ = AP = a\sqrt{2}$ és $PAQ\sphericalangle = 150°$.
Alkalmazzuk a PQA háromszögre a koszinusztételt!

$$PQ^2 = 4a^2 + 2\cdot a^2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4a^2 + 2\sqrt{3}a^2; \quad PQ = a\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

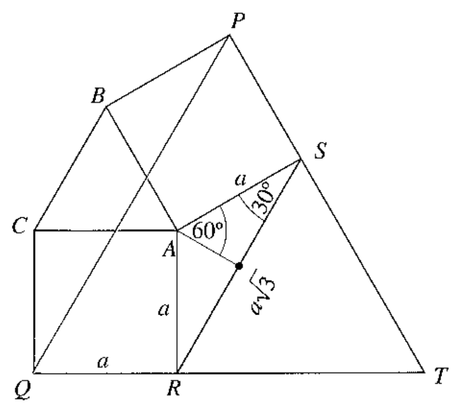
Másik megoldás:
A $QPBC$ négyszög trapéz, rövidebb alapja és szárai a hosszúságúak, szögei 150°, illetve 30°. A hosszabb alap $PQ = PB_1 + B_1C_1 + C_1Q$, ahol B_1, illetve C_1 pontok, B illetve C pontok PQ egyenesre eső merőleges vetületei. Így egyrészt $B_1C_1 = a$, másrészt BB_1P és CC_1Q derékszögű háromszögek hosszabbik befogója (* szerint) $PB_1 = C_1Q = a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Így $PQ = a + 2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = a\cdot(1+\sqrt{3})$.

A két eredmény azonos, mert $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\cdot\sqrt{3}$, s így $1+\sqrt{3} = \sqrt{4+2\cdot\sqrt{3}}$.



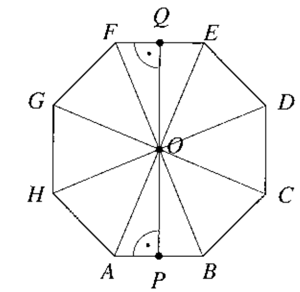
További megoldás:
Legyen a PS és QR egyenesek metszéspontja T.
$PQ \parallel BC \parallel SR$, $CA \parallel QR$ és $BA \parallel PT$, így a PQT és az SRT háromszögek szabályosak, $PQ = QT = QR + RT =$
$= QR + RS = a + a\sqrt{3} = a(1+\sqrt{3})$.



1805. A fehér sáv területe úgy adódik, hogy a nagyobb 8-szög területéből kivonjuk a kisebb 8-szög területét. Először a nagyobb 8-szög területét számoljuk ki.
A feltétel szerint ez egy olyan szabályos nyolcszög, melynek magassága, azaz az AB és az EF párhuzamos oldalai közötti távolság 60 cm. Ha összekötjük a szabályos

8-szög O középpontját a csúcspontokkal, akkor nyolc darab olyan egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontottuk fel, melynek szárszöge $\frac{360°}{8} = 45°$. Válasszuk ki közülük mondjuk az AOB háromszöget.
Ennek az AB alaphoz tartozó OP magassága az AB és az EF egyenesek közötti távolság fele, azaz 30 cm.
Mivel az OP magasság felezi az AOB szöget, ezért $AOP\sphericalangle = 22{,}5°$.
Az AOP derékszögű háromszögben

$\mathrm{tg}\,22{,}5° = \frac{AP}{OP} \Rightarrow AP = 30\cdot\mathrm{tg}\,22{,}5° \approx 12{,}43.$



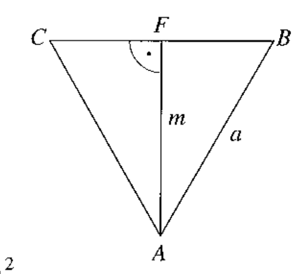
Az AOB háromszög területe:

$T_{AOB} = \frac{AB\cdot OP}{2} = AP\cdot OP \approx 372{,}9,$

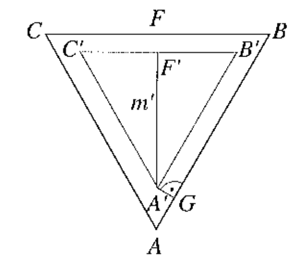
így a nagyobb szabályos 8-szög területe: $T = 8\cdot T_{AOB} \approx 2982{,}4$ (cm²).
A kisebb szabályos nyolcszög hasonló a nagyobbikhoz.
A hasonlóság aránya $\frac{56}{60} = \frac{14}{15}$, hiszen két szemközti oldal távolsága a kisebbik nyolcszögben 56 cm, a nagyobban pedig 60 cm. A hasonló sokszögek területéről tanultak szerint a kisebb nyolcszög területe $\left(\frac{14}{15}\right)^2\cdot 2982{,}4 \approx 2598{,}0$ (cm²), a fehér sáv területe tehát kb. 2982,4 – 2598,0 = 384,4 (cm²).

1806. Előbb az ABC-vel jelölt nagyobb szabályos háromszög területét határozzuk meg. Jelöljük a szabályos háromszög oldalát a-val, AF magasságát pedig m-mel.
A feltétel szerint m = 70 cm.
Ismeretes, hogy a szabályos háromszögben

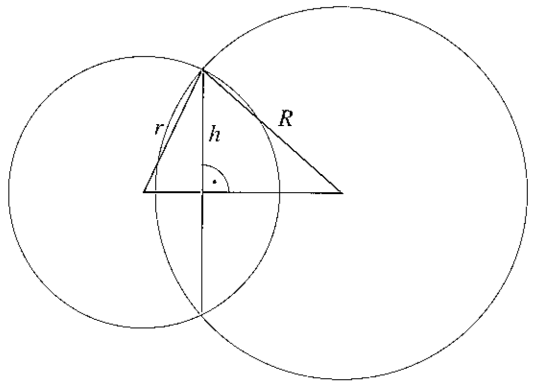
$m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, így $a = \frac{2m}{\sqrt{3}} \approx 80{,}83.$



A szabályos háromszög területe $T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx 2829\ \mathrm{cm}^2$.
Az $AA'G$ derékszögű háromszögben az $A'AG$ szög 30°, ezért
$AA' = 2\cdot 8 = 16$; $A'F' = 70 - 8 - 16 = 46$.
Az $ABC\,\Delta \sim A'B'C'\,\Delta$ (mert megfelelő oldalaik párhuzamosak), tehát területeik aránya: $\left(\frac{70}{46}\right)^2 = 2{,}316.$
Tehát a piros sáv területe a belső fehér területnek a 131,56%-a.

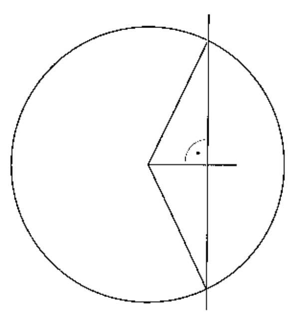


1807. A szimmetria miatt a közös húr merőleges a körök középpontját összekötő szakaszra (a centrálisra), és az felezi azt. Így két derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt, a keresett távolság: $\sqrt{R^2-h^2}+\sqrt{r^2-h^2}$.



1808. Legyen a körcikkhez tartozó középponti szög α. A körgyűrűcikk területe a nagy és a kis körcikk területének különbsége: $\frac{9^2\pi}{360}\cdot\alpha-\frac{3^2\pi}{360}\cdot\alpha=18\pi\Rightarrow\alpha=90°$.

1809. A húr felezőmerőlegese egyúttal felezi a húrhoz tartozó középponti szöget is, hiszen a húr a végpontjaiba vezető sugárral egyenlő szárú háromszöget alkot. A létrejövő derékszögű háromszögben e középponti szög felének szinusza: $\sin\frac{\widehat{\alpha}}{2}=\frac{4,33}{5}=0,866$, amiből $\frac{\widehat{\alpha}}{2}\approx\frac{\pi}{3}$. A középponti szög tehát $\widehat{\alpha}\approx\frac{2\pi}{3}$.

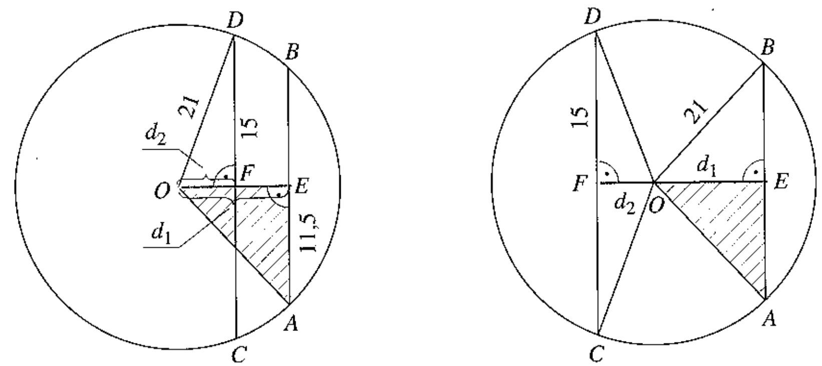


A kisebbik körszelet területe az $\widehat{\alpha}$ középponti szögű körcikk és a sugarak meg a húr alkotta háromszög területének különbsége: $\frac{r^2\cdot\widehat{\alpha}}{2}-\frac{r^2\cdot\sin\widehat{\alpha}}{2}$, a konkrét adatokkal:

$$12,5\cdot\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 15,35\ (\text{cm}^2).$$

A nagyobbik körszelet területét megkapjuk a kör területéből kivonva az iménti eredményt: $5^2\cdot\pi-12,5\cdot\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{50\pi}{3}+6,25\sqrt{3}\approx 63,19\ (\text{cm}^2)$.

1810. (Az ábrázolás átláthatósága miatt az ábrák nem méretarányosak!)



AB húr felezőpontja E, CD húr felezőpontja F. Pitagorasz tétele szerint

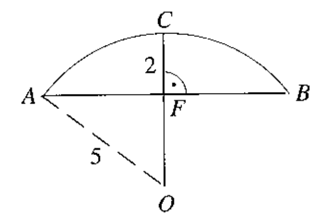
az AEO derékszögű háromszögben $d_1^2=21^2-11,5^2=308,75$ $\quad d_1\approx 17,6$;

a DFO derékszögű háromszögben $d_2^2=21^2-15^2=216$ $\quad d_2\approx 14,7$.

a) A két húr távolsága: $d_1+d_2\approx 32,3$ cm;

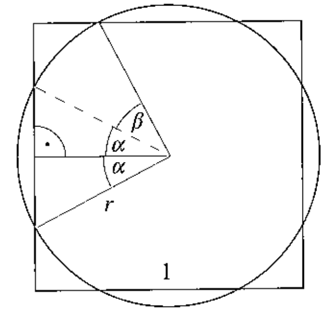
b) a két húr távolsága: $d_1-d_2\approx 2,9$ cm.

1811. A körszelet magassága a határoló húrra állított merőlegesek közül a leghosszabb. Ez felezi a határoló húrt is. Így $AF=FB$. Mivel $OC=5$ cm, $CF=2$ cm, $OF=3$ cm, $AO=5$ cm.
Az AFO derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva $AF^2+FO^2=AO^2$. Ebből $AF=4$ cm, így a körszeletet határoló húr hossza $AB=8$ cm.



1812. Legyen a négyzet oldala egységnyi, területe (és így a köré is) 1. A kör sugara ekkor $r=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\approx 0,564$.

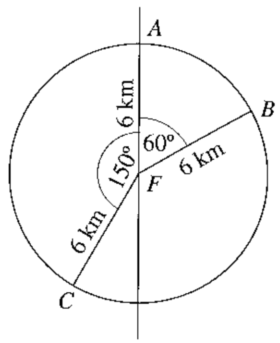
A két síkidom metszete forgásszimmetrikus alakzat, mégpedig a közös középpont körül 90°-onként elforgatva fedi önmagát, így elegendő a negyedrészét vizsgálni (ekkor az ábrán jelölt két piros sugár merőleges egymásra). A közös rész negyede két részből áll: egy egyenlő szárú háromszögből és egy körcikkből. Az egyik derékszögű háromszögből $\cos\alpha=\frac{0,5}{r}$.



Beírva r értékét és visszakeresve, a szögre $\alpha\approx 27,6°$ adódik. Az egyenlő szárú háromszög területe $\frac{r^2\cdot\sin 2\alpha}{2}\approx 0,131$.

A körcikk középponti szöge $\beta = 90° - 2\alpha \approx 34{,}8°$, vagy radiánban $\hat{\beta} \approx 0{,}607$. A körcikk területe így $\frac{r^2\hat{\beta}}{2} \approx 0{,}097$. A négyzet és a kör közös részének területe tehát: $4(0{,}131 + 0{,}097) \approx 0{,}912$. Ez a négyzet (vagy a kör) területének kb. 91%-a.

1813. a) Az ábra alapján, mivel AB út hossza a köríven 6,28 km lett a két sugárnyi hossz, 12 km helyett, ezért az $AFB\sphericalangle = 60°$. Hiszen a kör kerülete $12\pi \approx 12 \cdot 3{,}14$, ami éppen hatszorosa az AB ív hosszának, azaz 360° hatodrésze, 60° lesz az AB ívhez tartozó szög.



b) Mivel $AFC\sphericalangle = 150°$, ezért az AC út hossza az eddigi 12 km helyett az íven már hosszabb lesz: a 150° a 360°-nak $\frac{5}{12}$ része, tehát a 12π km $\frac{5}{12}$ részét kell kiszámítani, ami 5π, kb. 15,71 km. A változás tehát kb. 3,71 km-es növekedés.

c) Ha eddig keresztülment a városon a teherautó, akkor 12 km volt az útja, ami most egy félkör kerülete lesz, tehát 6π, kb. 18,85 km. Ez kb. 6,85 km-rel, 57%-kal növeli meg az út hosszát. (Most azonban nem kell a városon átmenni, tehát időben vélhetően nem lesz rosszabb a helyzet!)

1814. a) Második lépés az A kezdőpontú, AK félegyenes megszerkesztése. Ezután az M pont meghatározása, majd egy A középpontú, AM sugarú kör megszerkesztése következik. Ennek a körnek és az AB szakasznak a metszéspontja adja a keresett P pontot.

b) Jelölje az AP szakasz cm-ben mért hosszát x. A feladat szövegében felírt aránypár szerint tehát $\frac{x}{8-x} = \frac{8}{x}$, vagyis $x^2 + 8x - 64 = 0$.

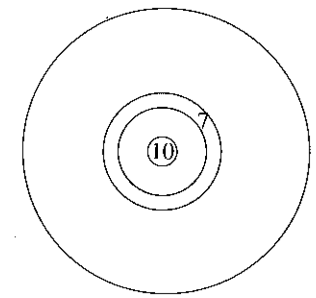
A megoldóképletből $-4(\sqrt{5}+1)$, illetve $4(\sqrt{5}-1)$ adódik, de csak a pozitív gyök lehet a feladat megoldása. (x közelítő értéke 4,94.)

c) $AK^2 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{5}{4}AB^2$, amiből $AK = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$.

$$AP = AM = AK - KM = \frac{\sqrt{5}}{2}AB - \frac{1}{2}AB = AB \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 8 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 4(\sqrt{5}-1),$$

ami valóban a b)-ben kiszámítottal egyenlő.

1815. A teljes kör területe $T = r^2\pi = 100\pi$.
A 7-es találat zónájának a területe két kör területének a különbsége, mégpedig a középtől számított 4 cm, illetve 3 cm sugarú kör területe.



$T_{\text{hetes}} = 4^2\pi - 3^2\pi = 7\pi$ (cm²).
A keresett területek aránya:
$\frac{T_{\text{hetes}}}{T} = \frac{7\pi}{100\pi} = 0{,}07$, tehát a hetes találati zóna területe a teljes kör területének 7%-a.

1816. a) $28\sqrt{2} \approx 39{,}60$ (cm).

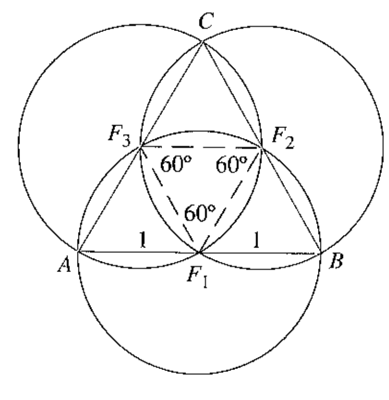
b) A középső négyzetbe négy egybevágó körszelet nyúlik be.
Ezek együttes területe egy kör és egy négyzet területének különbségével egyenlő: $28^2(\pi - 2) \approx 895{,}0$ (cm²).
Ennyi a négyzetben kétszeresen lefedett síkrész területe.
A négyzetből egyszeresen fedett terület:
$28^2 \cdot 2 - 28^2(\pi - 2) = 28^2(4 - \pi) \approx 673{,}0$ (cm²).
A négyzet területének $\frac{28^2(4-\pi)}{28^2 \cdot 2} \cdot 100 = 50(4-\pi) \approx 42{,}9$ százalékát fedi le pontosan egy körlap.

c) A legalább egyszer lefedett terület a b)-ben kiszámolt terület és négy körlap területének összege: $28^2(4-\pi) + 4 \cdot 28^2\pi = 28^2(3\pi + 4) \approx 10\,525$ (cm²).

1817. A vonalkázott síkrész C-n átmenő szimmetriatengelyét behúzva két egybevágó körszeletet kapunk. Egy körszelet területe egy negyedkör és egy 5 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területének különbsége, ezért a vonalkázott terület:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 5^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 5^2\right) = 5^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 14{,}27 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

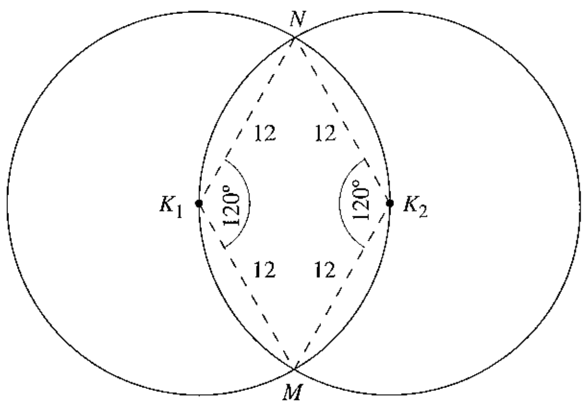
1818. Az F_1, F_2, F_3 körközéppontokból 60° középponti szögű körcikkeket fektetünk a közös részre.
A három cikk együtt lefedi a három Thalész-kör közös részét, az 1 oldalú $F_1F_2F_3$ szabályos háromszöget háromszorosan is.
A keresett terület tehát megkapható úgy is, hogy a 3 körcikk területének



összegéből kétszer levonjuk az $F_1F_2F_3$ szabályos háromszög területét:

$$T = 3\cdot\frac{1^2\cdot\pi}{6} - 2\cdot\frac{1^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi-\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}7048 \text{ (területegység)}.$$

1819. Először határozzuk meg két olyan 12 cm sugarú kör közös részének területét, amelyeknek a középpontjai is 12 cm-re vannak egymástól.



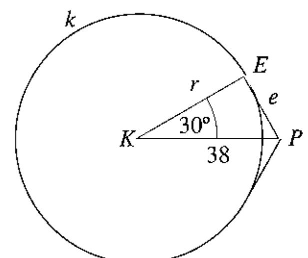
A közös részt két 120° középponti szögű, K_1, illetve K_2 középpontú körcikkel lefedve a K_1MK_2N rombusz kétszeresen fedett lesz. A közös rész területét ezért megkaphatjuk úgy is, hogy a két körcikk területének összegéből levonjuk a rombusz területét:

$$t_k = 2\cdot\frac{12^2\pi}{3} - \frac{12^2\sqrt{3}}{2} \approx 176{,}89\ \text{cm}^2.$$

Ezután figyeljük meg, hogy a (feladat ábrája szerinti jelölést követve) C középpontú CAB negyedkört hézagtalanul lefedhetjük két olyan egybevágó síkidommal, amelyek egyike az A és a C középpontú körök közös részének fele, másika pedig a B és a C középpontú körök közös részének a fele. E két síkidom együttes területe éppen az előbbiekben kiszámított t_k, másrészt ez a két síkidom a vonalkázott síkrészt kétszeresen fedi le. Ezért a vonalkázott síkrész T területére igaz, hogy $t_k - T = t_{\text{negyedkör}}$,

vagyis $176{,}89 - T = \dfrac{12^2\pi}{4} \Rightarrow T = 12(5\pi - 6\sqrt{3})$, amiből $T \approx 63{,}79\ \text{cm}^2$.

1820. a) és b) A KPE háromszög egy szabályos háromszög „fele" ezért az érintőszakasz hossza $e = 19$ cm, a kör sugara pedig $r = 19\sqrt{3} \approx 32{,}91$ (cm).

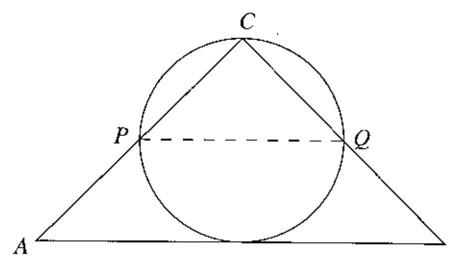


c) A KPE háromszög körön kívüli részének területe a háromszög területének és egy 30° középponti szögű körcikk területének a különbsége

$$t_1 = \frac{19^2\sqrt{3}}{2} - \frac{19^2\cdot 3\cdot\pi}{12} = 19^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \approx 29{,}11\ (\text{cm}^2).$$

A kérdezett terület a k kör területének és a most kiszámolt t_1 kétszeresének összegével egyenlő: $T = 32{,}91^2\pi + 2\cdot 29{,}11 \approx 3402{,}56 + 58{,}22 = 3460{,}78\ (\text{cm}^2)$.

1821. Mivel az ACB szög derékszög, ezért PQ a kör átmérője (Thalész-tétel megfordítása). Emiatt a kör háromszögön kívüli részének területe a PCQ félkör és a PCQ derékszögű háromszög területének különbségével egyenlő.



A kör átmérőjének hossza 50 cm, mert ennyi az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magassága. PQ középvonal az ABC háromszögben (mert párhuzamos AB-vel és hossza annak fele), ezért a PCQ háromszög területe az ABC háromszög területének negyede.

A keresett terület tehát: $T = \dfrac{25^2\pi}{2} - \dfrac{100\cdot 50}{8} \approx 356{,}75\ (\text{cm}^2)$.

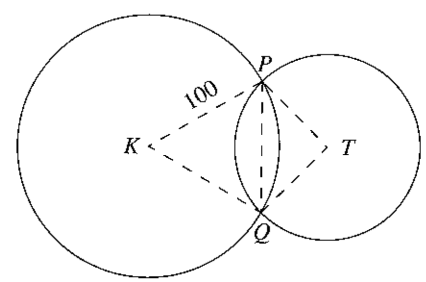
Ez a kör területének (ami $1963{,}5\ \text{cm}^2$) a 18,2%-a.

1822. Az előző (1821.) feladat megoldásában leírtak alapján megállapítható, hogy a lefedett síkrész területe egy félkör és egy derékszögű háromszög területének összegével egyenlő: $T = \dfrac{25^2\pi}{2} + \dfrac{100\cdot 50}{8} \approx 1606{,}75\ (\text{cm}^2)$.

Ez az ABC háromszög területének (ami $2500\ \text{cm}^2$) 64,3%-a.

1823. A PKQ háromszög szabályos, tehát a közös PQ húr is 100 cm hosszú. A PTQ háromszög derékszögű és egyenlő szárú, ezért $PT = PQ = \dfrac{100}{\sqrt{2}} =$

$= 50\sqrt{2} \approx 70{,}71$ (cm) hosszú.



A kétszeresen fedett tartomány két körszelet területének összegeként is felírható, az egyes körszeletek területe pedig egy körcikk és egy háromszög területének különbségeként is kiszámítható.

A 100 cm sugarú körhöz tartozó körszelet területe:

$$\frac{100^2\pi}{6} - \frac{100^2\sqrt{3}}{4} \approx 905{,}86\ (\text{cm}^2).$$

A kisebbik körhöz tartozó körszelet területe:

$$\frac{(50\sqrt{2})^2\pi}{4} - \frac{(50\sqrt{2})^2}{2} \approx 1426{,}99\ (\text{cm}^2).$$

A kétszeresen fedett tartomány területe tehát $2332{,}85\ \text{cm}^2$.

1824. A körlap területe $100\pi \approx 314{,}16$ (cm²).
Az ötszög feldarabolható két egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögre és egy szabályos háromszögre, így a területe: $2 \cdot \dfrac{10^2}{2} + \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} \approx 143{,}30$ (cm²), ami a körlap területének 45,6%-a.
Tehát a körlap területének 54,4%-a van az ötszögön kívül.

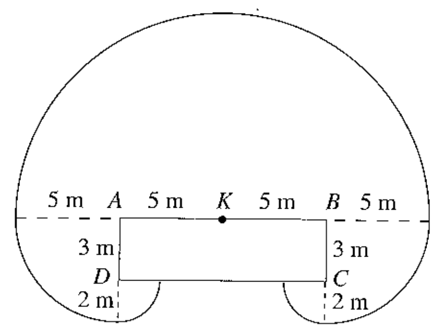
1825. a) Hamis. A körlap területe $400\pi \approx 1256{,}64$ (cm²), ezért nem fedhető le semmilyen 1255 cm² területű síkidommal, így 1255 darab egységnégyzettel sem (a lefedett síkidom területe nem lehet nagyobb a lefedő síkidom területénél).

b) Igaz. Készítsünk egy 40 cm×40 cm-es négyzetet. Ezzel lefedhető a 40 cm átmérőjű körlap, a négyzet pedig lefedhető már 1600 négyzetlappal is (ezért természetesen 1655-tel is).

1826. A szabályos háromszög körülírt köre lefedi a háromszöget, a körülírt körnél kisebb sugarú körök egyikével sem lehet a háromszöget lefedni.
Az a oldalú szabályos háromszög területe $T = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, körülírt körének sugara a háromszög magasságának kétharmad része: $R = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, a legkisebb lefedő kör területe ezért $R^2\pi = \dfrac{a^2\pi}{3}$.
A háromszög területére felírt összefüggésből $a^2 = \dfrac{4T}{\sqrt{3}}$, így a kör területe $\dfrac{4T\pi}{3\sqrt{3}} \approx$
$\approx 2{,}418$ (cm²), hiszen a feladat szövege szerint $T = 1$ cm².
A legkisebb lefedő kör 1 cm² területű része a szabályos háromszög, tehát 1,418 cm² területű része nyúlik túl a háromszögön. Ez a kör területének 58,6%-a.

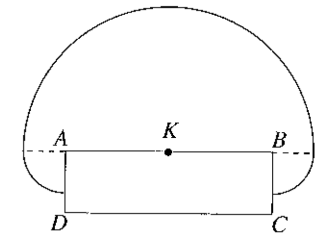
1827. Adott k kör esetén az a szabályos háromszög, amelynek k a beírt köre, lefedi a kört. A kisebb szabályos háromszögek egyikével sem lehet a k kört lefedni.
Az a oldalú szabályos háromszög beírt körének sugara a háromszög magasságának egyharmad része: $r = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, a kör területe $t = r^2\pi = \dfrac{a^2\pi}{12}$. Mivel most $t = 1$, ezért a legkisebb szabályos háromszög oldalára fennáll $a^2 = \dfrac{12}{\pi}$. Mivel a szabályos háromszög területe felírható $T = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ alakban is, ezért $T = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} \approx$
$\approx 1{,}654$ (cm²). A legkisebb szabályos háromszög területéből 1 cm² a beírt kör területe, ezért a körön kívüli terület 0,654 cm². Ez a háromszög területének 39,5%-a.

1828. a) A cölöpöt az AB felezőpontjában (K-ban) leverve az ábra szerinti, részben körívek által határolt síkidomot kapjuk.



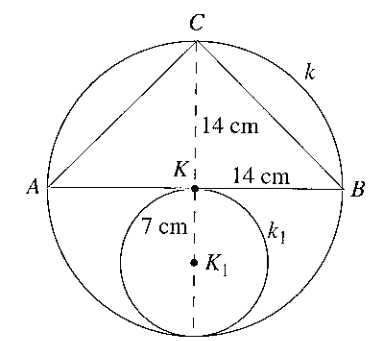
A lelegelhető területet egy 10 m sugarú félkör, két 5 m sugarú negyedkör (azaz egy 5 m sugarú félkör) és két 2 m sugarú negyedkör (azaz egy 2 m sugarú félkör) területének összegeként is kiszámíthatjuk:
$$T = \frac{(10^2 + 5^2 + 2^2)\pi}{2} = 64{,}5\pi \approx 202{,}6 \text{ (m}^2\text{)}.$$

b) Ha a kötél hossza 6 méterre rövidül, akkor a fenti ábra is módosul.

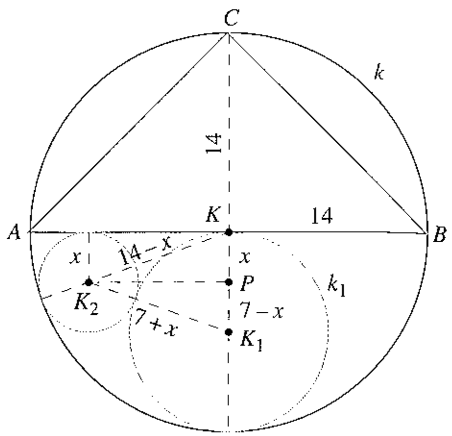


A lelegelhető terület egy 6 m sugarú félkör, és két 1 m sugarú negyedkör (vagyis egy 1 m sugarú félkör) területének összege:
$$T_1 = \frac{(6^2 + 1^2)\pi}{2} = 18{,}5\pi \approx 58{,}1 \text{ (m}^2\text{)}.$$
$\dfrac{T_1}{T} = \dfrac{18{,}5\pi}{64{,}5\pi} = \dfrac{37}{129} \approx 0{,}287$, azaz az új lelegelhető terület a korábbinak csupán 28,7%-a.

1829. a) Az egyenlő szárú derékszögű háromszög területe csak az átfogója segítségével is kifejezhető: $T = \dfrac{c^2}{4}$.

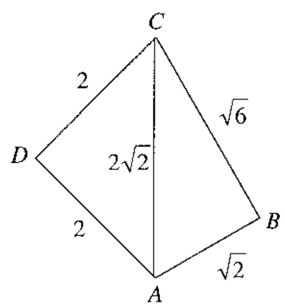


Akkor lehet tehát a legnagyobb területű háromszöget kivágni a körből, ha az átfogó a kör egyik átmérőjével azonos. Ekkor a derékszögű csúcs a körön lesz.
A háromszög kivágása után a három megmaradt körszelet közül a félkörből vágható ki a legnagyobb körlap (k_1). Ennek átmérője az eredeti kör sugara.
A kivágott részek együttes területe: $14^2 + 7^2\pi \approx 349{,}94$ (cm²), ami a teljes körlap területének (615,75 cm²-nek) az 56,8%-a.
A hulladék tehát 43,2%.



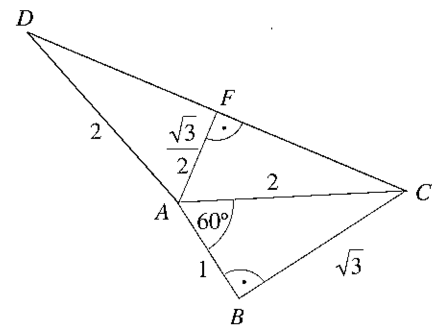
b) Számítsuk ki a két kör és a háromszög átfogója által határolt síkidomban elhelyezhető, K_2 középpontú érintőkör sugarát. Jelöljük ezt x-szel. Az érintkező körök középpontjainak távolsága a két kör sugarának összege, vagy különbsége, ezért $KK_2 = 14 - x$ és $K_1K_2 = 7 + x$.
A K_2 pont az AB egyenesétől x távolságra van, így a K_2-ből CK egyenesére állított merőleges talppontja (P) is x távolságra van AB egyenesétől. Ezért $PK_1 = 7 - x$.
A KPK_2 és a K_1PK_2 derékszögű háromszögben is felírva a Pitagorasz-tételt:
$PK_2^2 = (14 - x)^2 - x^2 = 196 - 28x$, illetve $PK_2^2 = (7 + x)^2 - (7 - x)^2 = 28x$.
Így $196 - 28x = 28x$, amiből $x = 3{,}5$ adódik. Az érintőkör átmérője 7 cm.
Igaz tehát, hogy a maradékból még két darab 7 cm átmérőjű körlap is kivágható.

1830. Az adott négyszög konvex, mert az AC átló a négyszöget két nevezetes háromszögre bontja. Az ABC-ben az oldalak $\sqrt{2}$, $\sqrt{6} = \sqrt{3}\sqrt{2}$ és $2\sqrt{2}$, vagyis az oldalak aránya $1:\sqrt{3}:2$, ez tehát a 30°-60°-90°-os háromszög. Az ACD-ben pedig az oldalak 2, 2, $2\sqrt{2}$, vagyis az oldalak aránya $1:1:\sqrt{2}$, ez pedig a 45°-45°-90°-os háromszög. Ekkor a négyszög két szemközti szöge (B-ben és D-ben) derékszög, ezek összege 180°, vagyis $ABCD$ húrnégyszög. (Ha a nevezetes háromszögeket nem is ismeri fel, egy-egy koszinusztételt felírva az ABC, illetve ADC háromszögekben a B-nél, illetve D-nél lévő szögre szintén kijön, hogy mindkettő derékszög.)



1831. Az ABC háromszögben van egy derékszög és egy 60°-os szög, ez tehát a nevezetes 30°-60°-90°-os háromszög, oldalai az adott $AB = 1$-en kívül $BC = \sqrt{3}$ és $AC = 2$. Ekkor $AD = 2$ is igaz. Mivel az ACD háromszög egyenlő szárú, az AF merőleges CD-re. Ekkor az ACF derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétellel:

$$FC = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3{,}25}. \text{ Így } CD = 2FC = 2\sqrt{3{,}25} = \sqrt{13}.$$



A négyszög szemközti oldalainak összege $AB + CD = 1 + \sqrt{13} \approx 4{,}61$, illetve $BC + DA = \sqrt{3} + 2 \approx 3{,}73$. Mivel ezek nem egyenlők, a négyszög nem érintőnégyszög.

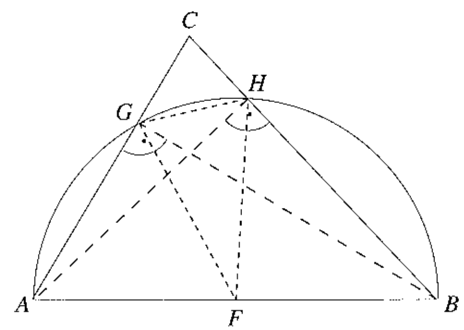
Második megoldás:
Az adatok szerint az ACD háromszög egyenlő szárú, ekkor az alaphoz tartozó súlyvonal (AF) egyúttal oldalfelező merőleges és szögfelező is. Az ACF derékszögű háromszögből így $\cos CAF\sphericalangle = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, amiből $CAF\sphericalangle \approx 64{,}34°$, így $CAD\sphericalangle$ ennek kétszerese, 128,68°, ami a 60°-os $CAB\sphericalangle$-gel együtt már 188,68°-os, tehát homorú $BAD\sphericalangle$-et jelent. Konkáv négyszög pedig nem lehet érintőnégyszög.

1832. Be kell látni, hogy a háromszög bármely oldala pl. c kisebb, mint a háromszög kerületének a fele, azaz $c < \frac{a+b+c}{2}$, ebből

$$2c < a + b + c$$
$$c < a + b.$$

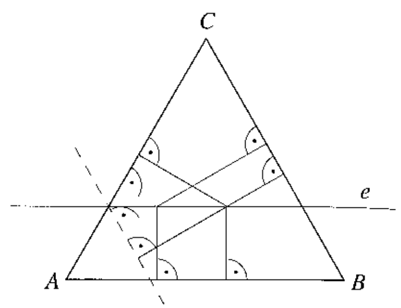
Ez pedig azt jelenti, hogy a háromszög bármely két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldal, ez a háromszög-egyenlőtlenség, amely a háromszög oldalaira teljesül. Ekvivalens lépések útján kaptunk egy igaz állítást, tehát az eredeti állítás is igaz.
A feladatban a, b és c szerepe felcserélhető, tehát a háromszög bármelyik oldala kisebb, mint a háromszög félkerülete.

1833. Mivel AH és GB magasságok, ezért $AG \perp GB$ és $AH \perp HB$. Így AGB és AHB derékszögű háromszögek közös átfogója AB, Thalész tétele miatt G, illetve H illeszkedik AB Thalész-körére, amelynek középpontja az AB szakasz felezőpontja, F. FG és FH a Thalész-kör egy-egy sugara, így egyenlők, tehát GFH háromszög egyenlőszárú.

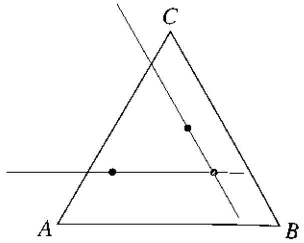


Megjegyzés:
Egy magasság talppontja az oldalnak akkor és csak akkor belső pontja, ha ezen oldalon hegyesszögek nyugszanak. Ha a háromszög nem hegyesszögű, a magasságok talppontja a háromszögön kívül eshet, de a bizonyítás hasonlóképpen elmondható.

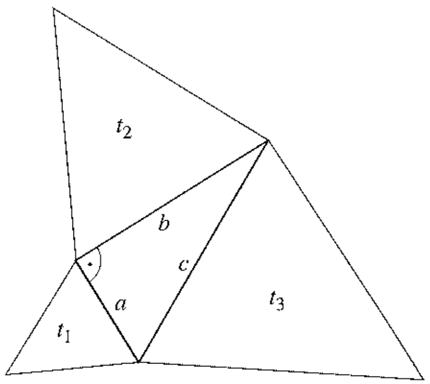
1834. Először két olyan pontra látjuk be az állítást, amelyek valamelyik oldallal párhuzamos egyenesen vannak. Ezek az egyik oldaltól azonos távolságra vannak, a másik két oldaltól való távolságaik összege pedig azért egyenlő, mert az egyforma színnel (szürke, piros) jelölt szakaszok az egyenesre való tükrözés miatt egyenlők, s így két párhuzamos egyenes távolsága adódik mindkét esetben. (Az AC oldalegyenes tükörképe e-re a szaggatott egyenes, ami párhuzamos BC-vel, mivel a háromszög szabályos.)



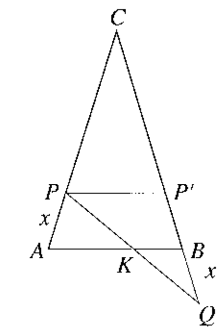
Bármely két pont egy alkalmas harmadikon keresztül a fenti helyzetbe hozható. A távolságösszeget pl. egy csúcsra megvizsgálva, ez a háromszög magassága lesz, $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, ha a az oldalhossz.



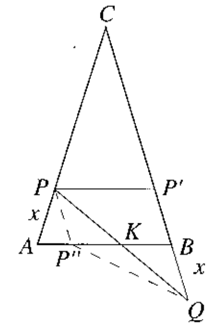
1835. Legyenek a derékszögű háromszög befogói a, b, átfogója c.
Az egyenlő szárú háromszögek területe:
$t_1 = \frac{1}{2}a^2$, $t_2 = \frac{1}{2}b^2$ és $t_3 = \frac{1}{2}c^2$.
Pitagorasz tétele szerint $a^2 + b^2 = c^2$.
Ebből (2-vel való osztással) adódik $t_1 + t_2 = t_3$, amit bizonyítani akartunk.



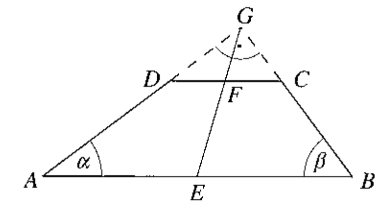
1836. Legyen az ABC háromszög AB alapjának és a PQ szakasznak a metszéspontja K.
Húzzunk párhuzamost P-n keresztül AB-vel, e párhuzamos CB szárat P'-ben metszi.
Mivel $AB \parallel PP'$ és az eredeti $ABC\,\Delta$ egyenlő szárú, ezért a keletkezett $PP'C\,\Delta$ is egyenlő szárú, $CP = CP'$ és $CA = CB \Rightarrow AP = BP' = x$. A feltétel miatt $BQ = x$. Így B felezi a $P'Q$ szakaszt, $KB \parallel PP'$, ezért KB a PQP' háromszög középvonala, tehát K felezi a PQ szakaszt. Így AB is felezi a PQ szakaszt.



Másik megoldás:
Húzzunk párhuzamost P ponton keresztül BC-vel! Ez az egyenes AB-t P''-ben metszi. Mivel $ABC\,\Delta$ egyenlő szárú és $CB \parallel PP''$, ezért $AP''P\,\Delta$ is egyenlő szárú, így $PP'' = AP = x$ és a feltétel miatt $AP = BQ = x$.
A $PP''QB$ (konvex négyszög) paralelogramma, mert két oldala PP'' és BQ párhuzamos és egyenlő. A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért K felezi PQ-t. Így AB is felezi a PQ szakaszt.



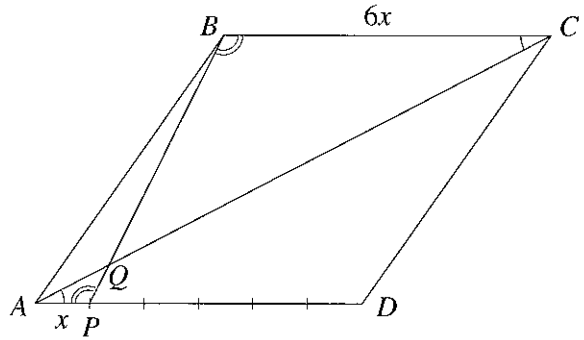
1837. Mivel $\alpha + \beta = 90°$, meghosszabbítva a trapéz szárait, azok derékszögben metszik egymást (G). Az ABG és a DCG háromszögek hasonlók (oldalaik párhuzamosak, illetve egybeesők), így az F pont ráesik az $ABG\Delta$ GE súlyvonalára.
Mivel egy derékszögű háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja, ezért most
$EA = EG = EB$ és $FD = FG = FC$.



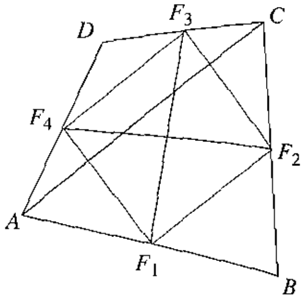
Persze $EF = EG - FG$, de ekkor $EF = EA - FD$ is igaz, így $2EF = 2EA - 2FD$ is. De ez utóbbi különbség épp $AB - CD$.

1838. Legyen AC és PB metszéspontja Q! $CAP\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, illetve $BPA\sphericalangle = PBC\sphericalangle$, mert váltószögek. Ezért $APQ\,\Delta \sim CBQ\,\Delta$, mert két-két szögük egyenlő, így megfelelő oldalaik aránya egyenlő. $\frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{QC}$. Mivel a feltétel szerint $\frac{AP}{AD} = \frac{1}{6}$ és $AD = BC$ (paralelogramma), ezért $\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{BC} = \frac{AP}{AD} = \frac{1}{6}$.

$AC = AQ + QC = 7AQ$, azaz $AQ = \frac{1}{7}AC$.

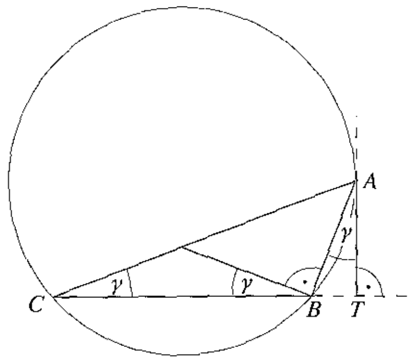


1839. Használjuk az ábra jelöléseit.

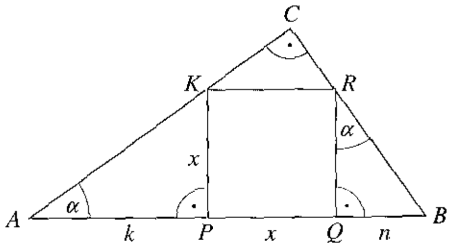


Tekintsük először a felezőpontok által alkotott $F_1F_2F_3F_4$ négyszöget. Megmutatjuk, hogy ez mindig paralelogramma.
Az ACD háromszögben F_3F_4 középvonal, ezért
$F_3F_4 \parallel AC$ és $F_3F_4 = \frac{AC}{2}$.
Ugyanígy az ABC háromszögben F_1F_2 középvonal, ezért $F_1F_2 \parallel AC$ és $F_1F_2 = \frac{AC}{2}$.
Mindezek alapján $F_1F_2 \parallel F_3F_4$ és $F_1F_2 = F_3F_4$, így az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszúságú, tehát valóban paralelogramma. Tudjuk, hogy a paralelogramma középpontosan szimmetrikus alakzat, ezért az átlói felezik egymást, így valóban igaz, hogy bármely négyszögben a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok felezik egymást.

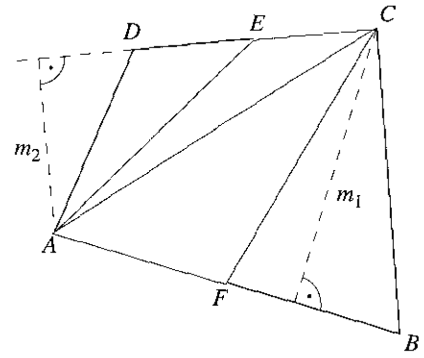
1840. A feltételt úgy is írhatjuk, hogy $\beta = ABC\sphericalangle = 90° + \gamma$. Legyen T az m_a talppontja CB meghosszabbításán, ekkor $ABT\sphericalangle = 90° - \gamma$. Mivel az $ABT\Delta$ derékszögű, ezért $BAT\sphericalangle = \gamma$. Ekkor az $ABC\Delta$ köré írható körben az AB húron nyugvó BCA kerületi szöggel megegyezik a $BAT\sphericalangle$, amelynek egyik szára maga az AB húr, másik szára, TA tehát érintő kell legyen (érintőszárú kerületi szög).



1841. Legyenek az átfogón keletkezett szakaszok $AP = k$, $PQ = x$ (a négyzet oldala), $QB = n$. Be kell látni, hogy $x = \sqrt{k \cdot n}$.
Az $APK\Delta \sim RQB\Delta$, mert két-két szöge egyenlő ($KAP\sphericalangle = QRB\sphericalangle = \alpha$, mert merőlegesszárú hegyesszögek, $KPA\sphericalangle = BQR\sphericalangle = 90°$), így megfelelő oldalaik aránya egyenlő: $\frac{x}{k} = \frac{n}{x}$, ebből $x = \sqrt{k \cdot n}$.

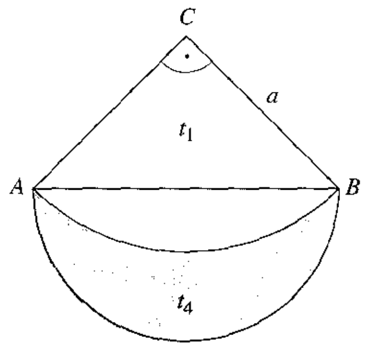


1842. Az ábra jelöléseit használva, azt kell bebizonyítani, hogy $T_{AFCE} = \frac{1}{2}T_{ABCD}$.
Az AC átló berajzolásával az $ABCD$ négyszöget is és az $AFCE$ négyszöget is két részre bontottuk.
Így $T_{AFCE} = T_{AFC} + T_{ACE}$ és $T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{ACD}$.



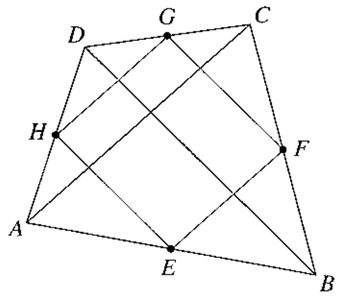
$T_{AFC} = \frac{1}{2}T_{ABC}$, mert mindkét háromszög magassága m_1, míg az m_1-hez tartozó oldalak az ABC háromszögben AB, az AFC háromszögben pedig $AF = \frac{AB}{2}$, mert F felezőpont.
Hasonlóan $T_{ACE} = \frac{1}{2}T_{ACD}$, mert mindkét háromszög magassága m_2, míg az m_2-höz tartozó oldalak az ACD háromszögben CD az ACE háromszögben pedig $EC = \frac{CD}{2}$, mert E felezőpont.
Mindezeket egybevetve: $T_{AFCE} = T_{AFC} + T_{ACE} = \frac{1}{2}T_{ABC} + \frac{1}{2}T_{ACD} = \frac{1}{2}T_{ABCD}$.

1843. Legyen az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója a, ekkor a területe $t_1 = \frac{a^2}{2}$.
A háromszög átfogója Pitagorasz tétele miatt $a\sqrt{2}$, az átfogó fölé írt félkör sugara $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, területe $t_2 = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{4}$.



Az egyenlő szárú derékszögű háromszög derékszögű C csúcsa köré írt negyedkör területe $t_3 = \frac{a^2\pi}{4}$.
A keletkezett holdacska területe $t_4 = t_1 + t_2 - t_3$. Be kell látni, hogy ez megegyezik a háromszög területével, azaz $t_4 = t_1$, ami teljesül, mert $t_2 - t_3 = 0$.

1844. Legyen az $ABCD$ négyszög területe T. Az EBF háromszög az ABC háromszög B középpontú $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyített képe, mert E a BA szakasz felezőpontja, F pedig a BC szakasz felezőpontja. Mivel λ arányú hasonlóság esetén a terület λ^2-szeresére változik, ezért



$T_{EFB} = \frac{1}{4} T_{ABC}$.

Ezen gondolatmenet alapján: $T_{FGC} = \frac{1}{4} T_{BCD}$, $T_{HGD} = \frac{1}{4} T_{ACD}$, $T_{HEA} = \frac{1}{4} T_{DBA}$.

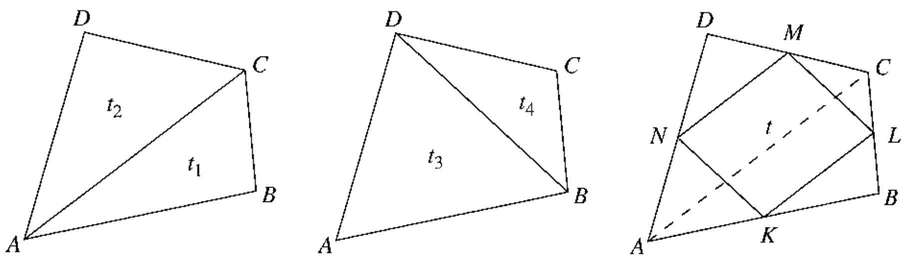
Így a kis háromszögek területösszege:

$\frac{1}{4}(T_{ABC} + T_{ACD} + T_{BDA} + T_{BDC}) = \frac{1}{4}(T + T) =$

Így az $EFGH$ négyszög területe szintén $\frac{1}{2} T$.

Mivel a feltétel szerint $\frac{1}{2} T = 180$ cm², ezért $T_{ABCD} = 360$ cm².

1845.



Vágjuk fel a négyszöget átlójával kétféleképpen és írjuk fel ennek megfelelően a területét!

$T = t_1 + t_2$, illetve $T = t_3 + t_4$, így $2T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$.

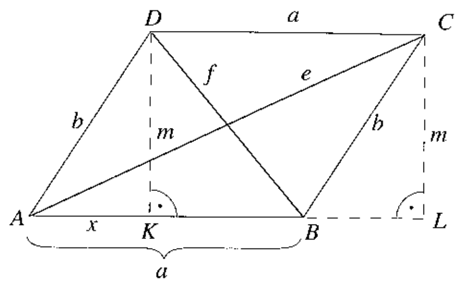
A keresett paralelogramma területét megkapjuk, ha a négyszög területéből levonjuk a háromszögek területét. Pl. a KBL háromszög területe az ABC háromszög területének a negyede (KBL háromszögből az ABC háromszög B középpontú $\lambda = 2$ arányú nagyítással kapható), s ez minden kis háromszögről belátható.

A keresett paralelogramma területe $t = T - \left(\frac{t_1}{4} + \frac{t_2}{4} + \frac{t_3}{4} + \frac{t_4}{4}\right) = T - \frac{T}{2} = \frac{T}{2}$.

Tehát a paralelogramma területe a négyszög területének a fele.

1846. Húzzuk meg a paralelogramma AB oldalához tartozó magasságát!

$AKD\,\Delta \cong BCL\,\Delta$, mert két oldal és az oldalak közül a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő (b, m és derékszög). Írjuk fel Pitagorasz tételét ALC, DKB és BLC derékszögű háromszögekre!



$e^2 = (a + x)^2 + m^2$ (I.)

$f^2 = (a - x)^2 + m^2$ (II.)

$b^2 = x^2 + m^2$ (III.)

Adjuk össze az első két egyenletet, majd 2 kiemelésével, és a III. egyenlet behelyettesítésével a bizonyítandó állítást kapjuk.

Másik megoldás:

Legyen a $BAD\sphericalangle = \alpha$. Írjuk fel az ABD és ABC háromszögre a koszinusztételt:

$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ (I.)

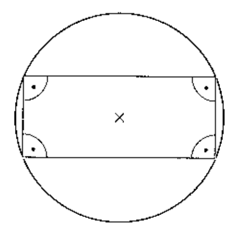
$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$ (II.)

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ azonosságot felhasználva a (II.) egyenlet

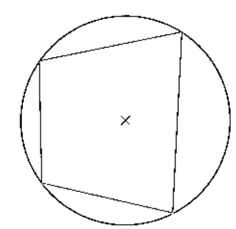
$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.

Ezt az egyenletet és az I. egyenletet összeadva az állítást kapjuk.

1847. Nem igaz. Itt két ellenpéldát mutatunk.



0 hegyesszög



2 hegyesszög

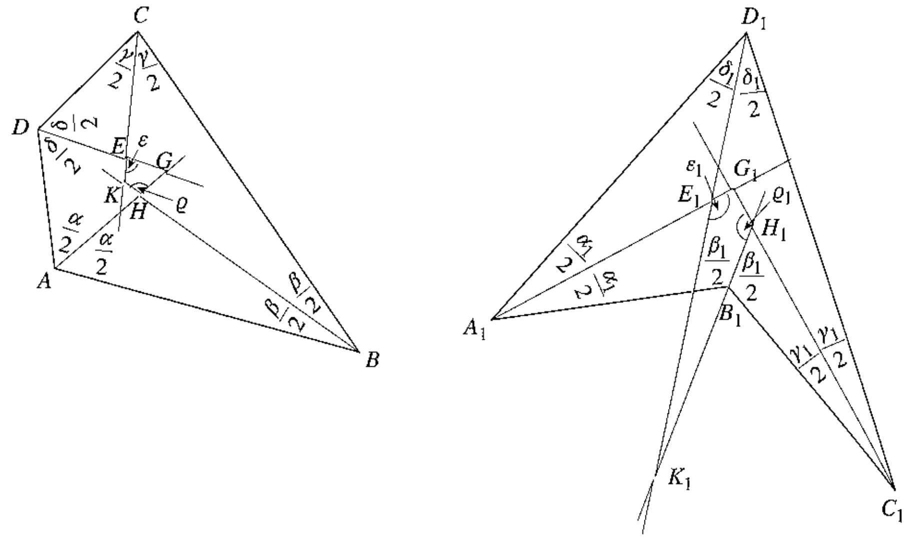
1848. Csak konvex négyszögre igaz, hogy a négyszög szögfelezői – ha négyszöget, akkor – húrnégyszöget zárnak közre. Az ábrán $EGHK$ négyszögben

$DEC\sphericalangle = KEG\sphericalangle = \varepsilon = 180° - \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right)$ $AHB\sphericalangle = KHG\sphericalangle = \varrho = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$.

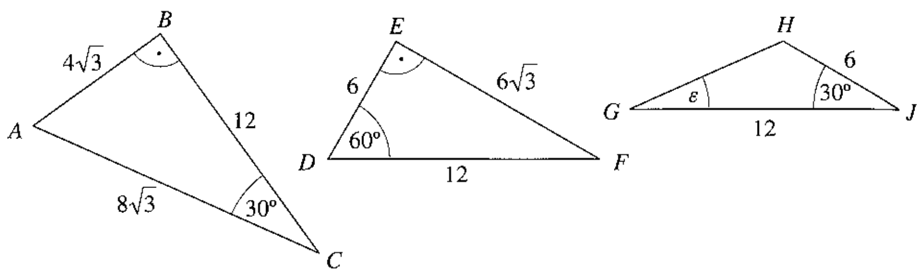
Így $EGHK$ négyszög szemközti szögeinek összege:

$\varepsilon + \varrho = 180° - \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) + 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 360° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 180°$, mert az eredeti $ABCD$ négyszög (és minden négyszög) belső szögeinek összege 360°. Így $KEGH$ négyszög szemközti szögeinek összege 180°, azaz húrnégyszög.

Az állítás konkáv négyszögre nem igaz. Pl. lásd az ábrán, $K_1E_1G_1H_1$ négyszög két szemközti szöge $K_1E_1G_1 \sphericalangle$ és $G_1H_1K_1 \sphericalangle$ is tompaszög, így összegük 180°-nál nagyobb.



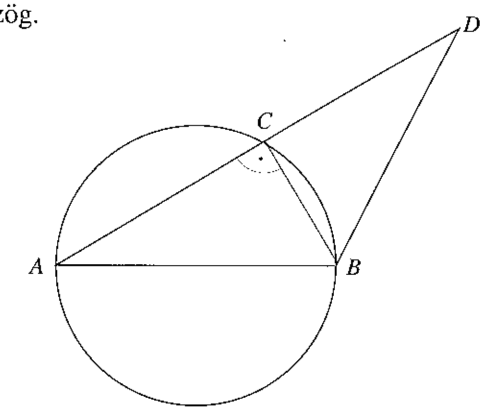
1849.



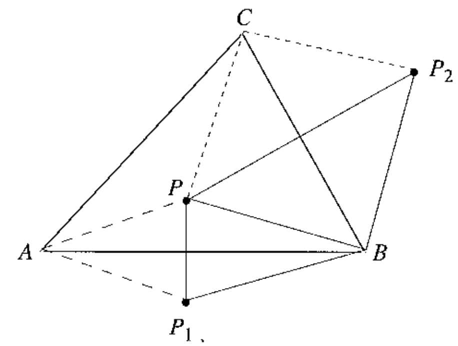
A háromszögek között nincsenek egybevágók.
Az $ABC\,\Delta$ és az $EFD\,\Delta$ mindkettő egy szabályos háromszög fele. Ebből következik, hogy az $ABC\,\Delta$ átfogója: $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 12 = 8\sqrt{3}$, az $EFD\,\Delta$ átfogója: 12. Tehát nem egybevágóak.
A $GJH\,\Delta$ nem lehet egybevágó az előzőekkel (azaz egy fél szabályos háromszöggel), mert akkor a 30° melletti két oldal aránya $\frac{\sqrt{3}}{2}$ lenne. A $\frac{6}{12} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1850. A Thalész-tétel miatt az $ACB \sphericalangle$ derékszög. Ekkor CB egyrészt felezőmerőlegese AD-nek, másrészt ehhez az oldalhoz tartozó magassága az $ABD\,\Delta$-nek. Ha ez a két nevezetes vonal egybeesik, akkor a háromszög egyenlő szárú.

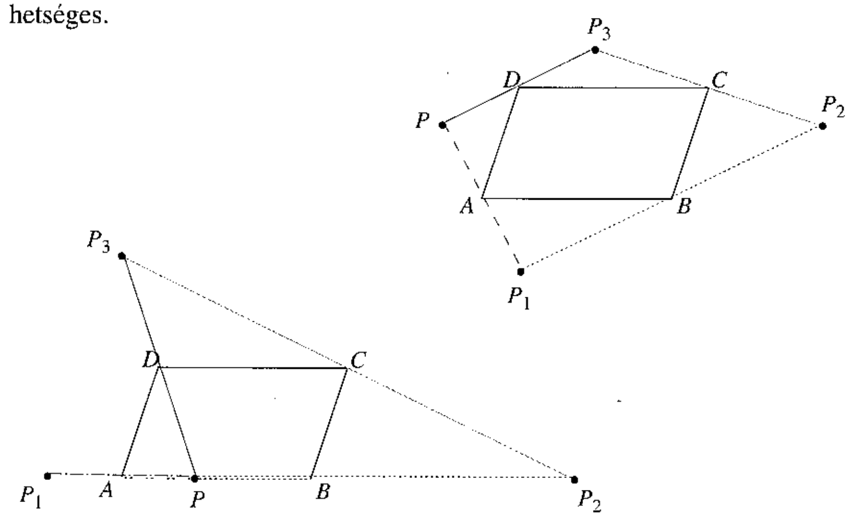
Második megoldás:
Ekkor a D nemcsak C-re mint pontra, hanem CB-re mint tengelyre is tükörképe A-nak, vagyis az egész $ABD\,\Delta$ tengelyesen szimmetrikus CB-re, tehát egyenlő szárú.

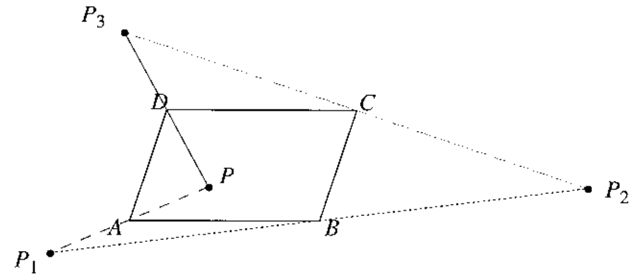


1851. A tükrözés miatt
$AP = AP_1$, $PB = P_1B$,
$PB = P_2B$, $PC = P_2C$.
A PAP_1BP_2CP töröttvonal hossza:
$PA + AP_1 + P_1B + BP_2 + P_2C + CP =$
$= 2 \cdot PA + 2 \cdot PB + 2 \cdot PC =$
$= 2 \cdot (PA + PB + PC)$.



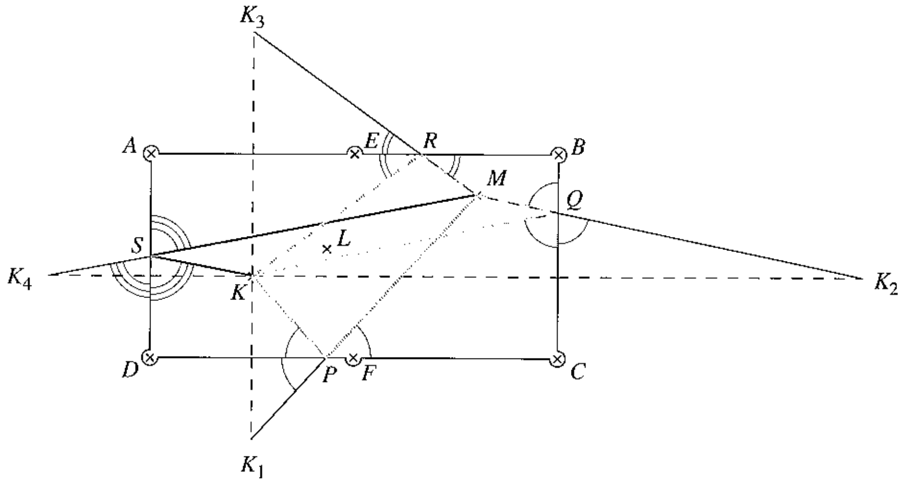
1852. A paralelogramma síkjában lévő P pont elhelyezkedésétől függően, három ábra lehetséges.





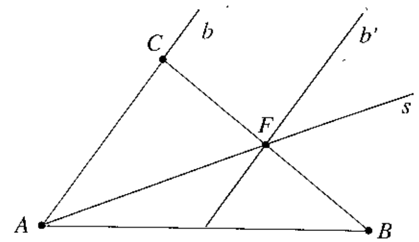
A tükrözés miatt AB a PP_2P_1 (esetleg elfajuló) háromszög középvonala, ezért $PP_2 \parallel AB$. Mivel $ABCD$ paralelogramma, ezért $AB \parallel CD$.
Ezekből $PP_2 \parallel CD$. A tükrözés miatt C felezi a P_2P_3 szakaszt. Tehát DC a PP_2P_3 háromszög középvonala és D felezi a PP_3 szakaszt. Így P_3-nak a D-re vonatkozó tükörképe P.

1853.



Tükrözzük K pontot a „biliárdasztal" oldalaira, így a K_1, K_2, K_3, K_4 pontokat kapjuk. Kössük össze ezeket rendre M ponttal! Ahol ezek az egyenesek metszik a „biliárdasztal" oldalait, arrafelé kell a golyót meglökni (ideális esetben) ahhoz, hogy L-ben álló golyót ne érintse, az M golyóval koccanjon és ne essen bele a lyukak egyikébe sem. A lehetséges utak: KPM, KQM, KRM, KSM.

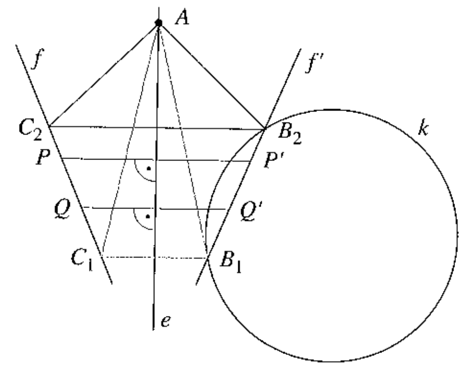
1854. Adott a szerkesztendő háromszög A, B csúcspontja, az A-ból kiinduló b oldalegyenes és az A-ból kiinduló s súlyvonalegyenes.
Mivel s áthalad a szerkesztendő háromszög A-val szemközti BC oldal F felezőpontján, ezért $BF = FC$, így $BF = \frac{1}{2}BC$.



Ez azt jelenti, hogy a C csúcs olyan tulajdonságú, hogy a B középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyített képe s-re esik.

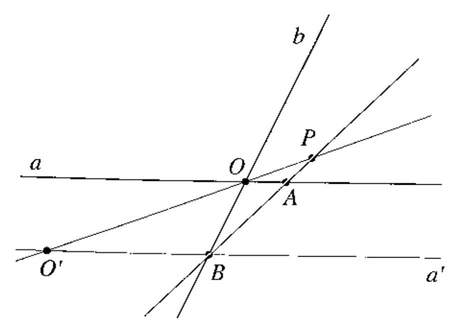
Így a szerkesztés menete: a b egyenest B középponttal $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyítjük, így kapjuk a b-vel párhuzamos b' egyenest.
Ez s-ből kimetszi az F pontot. A BF egyenese pedig b-ből kimetszi a C-pontot.

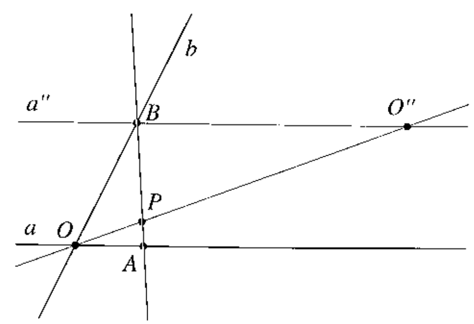
1855. A feltétel szerint az e egyenes a keresett háromszög szimmetriatengelye, tehát a szárak metszéspontja lesz az A. Tükrözzük az adott f egyenest e-re (f')! Az adott k kör és az f' egyenes metszéspontja ($f' \cap k = \{B_1; B_2\}$) – ha van ilyen – lesz az egyenlőszárú háromszög egyik csúcspontja. Ezeket e-re tükrözve kapjuk a háromszög C_1, illetve C_2 csúcspontját.



Diszkusszió:
Ha f' egyenes metszi k kört 2 pontban, akkor két különböző, nem egybevágó megoldás van.
Ha f' egyenes érinti k kört 1 pontban, akkor egy megoldás van.
Ha f'-nek és k-nak nincs közös pontja, akkor nincs megoldás.

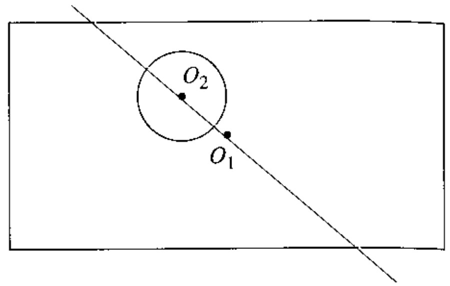
1856.





A-nak a P középpontú $\lambda = 4$, illetve $\lambda = -4$ arányú középpontos hasonlósággal nyert képe B. Ezért az a egyenesre alkalmazva a P középpontú $\lambda = 4$, illetve $\lambda = -4$ arányú középpontos hasonlóságot, olyan a', illetve a'' egyeneshez jutunk, amely a-val párhuzamos és átmegy a B ponton. B megszerkesztése után a BP és a egyenesek A metszéspontjára teljesül $PA : PB = 1 : 4$.
(a képét megkaphatjuk pl. úgy, hogy megszerkesztjük a és b egyenesek O metszéspontjának a képét O'-t, és O'-n át a-val párhuzamost húzunk. Ismert, hogy a középpontos hasonlóság középpontján át nem menő egyenes képe önmagával párhuzamos, a középpontra nem illeszkedő egyenes.)

1857. Bármely középpontosan szimmetrikus alakzatot ha elmetszünk egy, a középponton áthaladó tetszőleges egyenessel, akkor ez az egyenes az alakzatot két egybevágó részre bontja, ugyanis a középpontra tükrözve az egész alakzatot, a részek egymásba mennek át. Egybevágó részek területe pedig nyilván egyenlő.



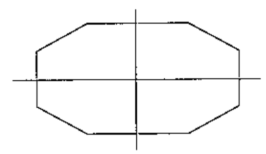
Mivel a kör is és a téglalap is középpontosan szimmetrikus, ezért a középpontjukat összekötő egyenes megoldása a feladatnak.

Megjegyzés:
A feladatnak egy megoldása van, kivéve amikor a két középpont egybeesik, ugyanis ilyenkor a feladatnak végtelen sok megoldása van.

1858. a) Igen. Pl. bármelyik, négyzettől különböző téglalap vagy rombusz is ilyen.

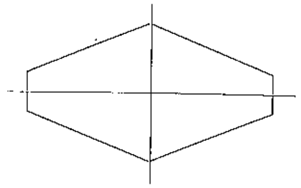
b) Nem. Ha egy ötszöget a szimmetriatengelyére tükrözünk, akkor az ötszög bármelyik csúcsának tükörképe ismét az ötszög egy csúcsa lesz. Ebből látható, hogy az ötszög bármelyik szimmetriatengelyén az ötszögnek pontosan egy csúcsa van. Két egymásra merőleges szimmetriatengely esetén azonban a tükrözésből az adódik, hogy mindkét szimmetriatengelyen két-két csúcsa lenne az ötszögnek. Ez azonban lehetetlen.

c) Igen. Egy konkrét példát mutat az ábra.



1859. Mivel középpontosan szimmetrikus a paralelogramma, ezért a szimmetriatengelynek a középponton biztosan át kell mennie. Két eset lehet: vagy az oldalpárok valamelyikére merőleges, ekkor téglalapról van szó; vagy két csúcson megy keresztül, ekkor az egyik átló a szimmetriatengely, ez a deltoid. Igaz, egy paralelogramma, ha egyben deltoid is, akkor már rombusz. Azaz téglalap vagy rombusz lehet a szóban forgó paralelogramma.

1860. a) Több különböző lehetőség van a szerkesztésre (pl. egy téglalap két szemközti oldalára, mint alapra olyan egybevágó, egyenlő szárú háromszögeket szerkesztünk, amelyeknek a szárszöge nem 120°.



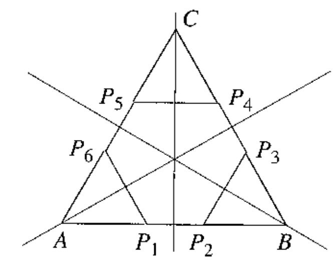
b) Ha egy sokszög szimmetriatengelyét egy másik szimmetriatengelyére tükrözzük, akkor a tükörkép is szimmetriatengelye lesz a sokszögnek. Ha pontosan két szimmetriatengelye van, akkor a szimmetriatengelyeknek önmaguk tükörképeinek kell lenniük a másik szimmetriatengelyre tükrözéskor (mert különben egy harmadik szimmetriatengelynek is kellene lennie). Ebből következik, hogy ha pontosan két szimmetriatengelye van a sokszögnek, akkor ezek egymásra merőlegesek.

c) Nem, ahogyan az a)-beli hatszög példája is mutatja.

d) Nem, hiszen c) szerint már az oldalai sem egyenlő hosszúak.

e) Igen. Igazolható (pl. az a)-beli ábra segítségével), hogy a két szimmetriatengely metszéspontjára való tükrözéskor a hatszög önmagába megy át.

1861. a) Vágjunk le egy szabályos háromszögből három kisebb, egybevágó szabályos háromszöget (de nem az eredeti háromszög harmadára kicsinyítettjeit, mert akkor szabályos hatszög adódna).



b) Az előző feladat b) pontjában vázolthoz hasonló okoskodással bizonyítható is, hogy a kérdezett szög 60°.

c) Nem.

d) Nem.

e) Igen, a hatszög harmadrendben forgásszimmetrikus. A forgatás középpontja a szimmetriatengelyek metszéspontja.

Megjegyzés:

Egy alakzatot n-ed rendben forgásszimmetrikusnak nevezünk, ha $k \cdot \dfrac{360°}{n}$ ($k \in \mathbf{N}$) szöggel elforgatva önmagával azonos helyzetbe kerül.

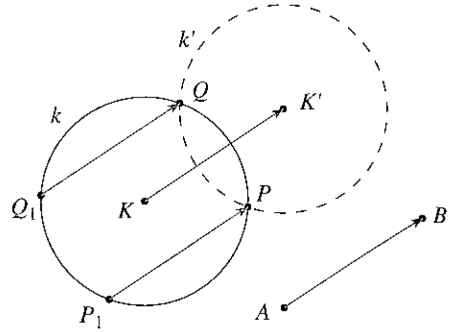
1862. a) A kör ilyen alakzat.

b) Az egyenes (minden rá merőleges egyenes szimmetriatengely).

1863. Legyen a k kör $\overrightarrow{AB}$ vektorral való eltolásakor kapott képe k'; $k \cap k' = \{P; Q\}$.
A P pont a P_1 pont eltolásnál kapott képe, a Q pont pedig a Q_1 ponté. A P_1P és a Q_1Q szakasz is megfelel a megadott feltételeknek, hiszen mindkettő a k kör egy-egy olyan húrja, amelyik párhuzamos az AB szakasszal és vele egyenlő hosszú.

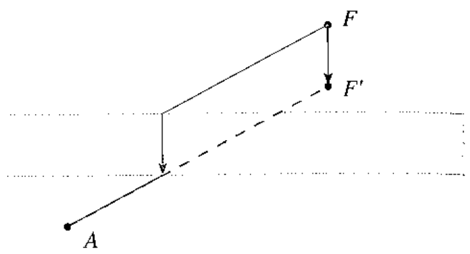
A leírtakból kiolvasható a szerkesztés menete:

1. A k kör eltolása $\overrightarrow{AB}$ vektorral
2. P; Q
3. AB-vel párhuzamos egyenes szerkesztése P-n (illetve Q-n) keresztül
4. P_1; Q_1
5. P_1P; Q_1Q

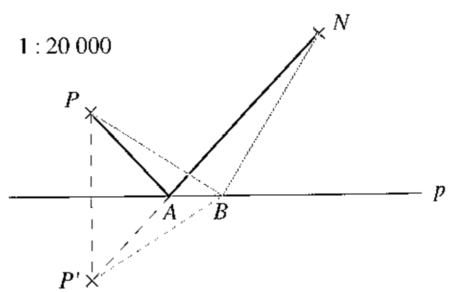


Ha AB hosszabb, mint k átmérője, akkor a feladatnak nincs megoldása; ha az átmérővel egyenlő hosszú, akkor egy, ha az átmérőnél rövidebb, akkor két megoldása van.

1864. Miután a híd hossza (folyó szélességnyi) és helyzete (merőleges a folyóra) minden lehetséges útvonalban egyforma, így az út többi részét kell minimalizálni. Iktassuk ki képzeletben a folyót, hiddal együtt az útvonalakból! Toljuk el (pl.) Felvéget a folyóra merőlegesen, a folyó szélességével Alvég felé! Így kapjuk az F' pontot, és a folyó egy (szélesség nélküli) vonallá „nyomódik össze". Ekkor A és F' között a legrövidebb út természetesen az egyenes. Ahol ez elmetszi a folyót jelző egyenest, oda kell építeni a hidat. Visszatolva F'-t az útvonalnak az ő partjára eső szakasszal együtt F-be, megkapjuk a térképen a valódi, teljes út rajzát.

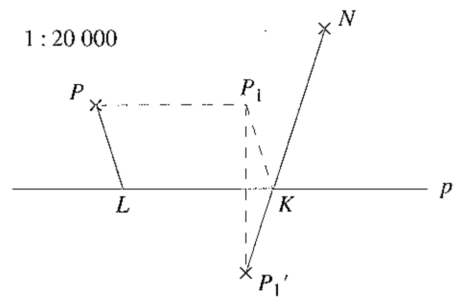


1865. a) Tükrözzük P pontot az adott p egyenesre! (P'). $P'N$ és p metszéspontja adja azt a pontot ($P'N \cap p = \{A\}$), ahol Piroskának a patakot érintenie kell, hogy a legrövidebb úton érjen a patak érintésével a nagymamához. A legrövidebb út PAN töröttvonal mentén halad.

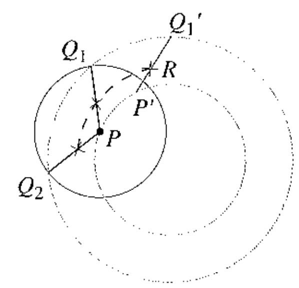


Minden más (ettől különböző), pl. PBN töröttvonal hosszabb PAN töröttvonalnál. Mivel P pontot tükröztük az adott p egyenesre, a tükrözés miatt $PA = P'A$ és $PB = P'B$. Így PAN töröttvonal helyettesíthető $P'A + AN = P'N$ szakasszal, PBN töröttvonal helyettesíthető $P'BN$ töröttvonallal. Ez utóbbi hosszabb $P'N$ szakasznál. Ez következik a $P'NB$ háromszögre alkalmazott háromszög-egyenlőtlenségből.

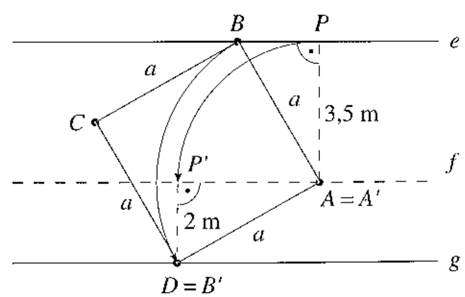
b) Mivel az ábra méretaránya 1 : 20 000, és 400 m = 40 000 cm, a valóságban 400 méternek az ábrán 40 000 cm : 20 000 = 2 cm felel meg. Toljuk el P pontot p-vel párhuzamosan N felé, $|\overrightarrow{PP_1}| = 2$ cm. Tükrözzük a kapott P_1 pontot az adott p egyenesre! (P_1'). $P_1'N$ és p metszéspontja adja azt a pontot ($P_1'N \cap p = \{K\}$), ahonnan Piroskának egyenesen el kell indulnia a nagymamához (N pont felé), hogy az adott feltétel mellett a legrövidebb úton érjen oda. PP_1KL paralelogramma, a legrövidebb út $PLKN$ töröttvonal mentén halad.



1866. Az ábrát tekintsük a valódi helyzet kicsinyített képének 1 : 800 000 arányban, azaz 1 km legyen 0,125 cm. Ekkor lesz két koncentrikus – 2, illetve 3,25 cm átmérőjű – körünk. A belső kör egy tetszőleges pontját kijelöljük, legyen ez a P pont. Innen 0,875 cm (az út hosszának képe az ábrán) sugárral egy kört rajzolunk. Ez messe a nagy kört Q_1, illetve Q_2 pontokban. Ha óriási szerencsénk van, akkor a bevásárlóközpontot jelző R pont PQ_1 és PQ_2 körül valamelyik szakaszon rajta lesz, akkor máris megvan a megoldás. Ha nem, akkor a bevásárlóközpontot a koncentrikus körök középpontja körül forgassuk el úgy, hogy PQ_1 vagy PQ_2 szakaszra kerüljön a képe. Ennek a forgatásnak az inverzét alkalmazva a PQ_1 vagy PQ_2 szakaszra, megkapjuk a keresett utat. Két megoldás lesz a feladatban megadott adatok mellett. (Más adatok esetében lehetne 1 megoldás, ha éppen érintés lépne fel – a két körút sugarának különbsége épp az építendő út hossza volna –, illetve 0 megoldás, ha a körutak alkotta gyűrű túl széles volna a tervezett út megadott hosszához képest.)

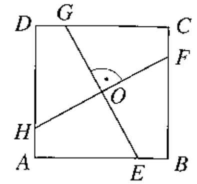


1867. Állítsunk merőlegest A-ból az e egyenesre; legyen a merőleges talppontja P. Forgassuk el A körül pozitív irányba 90°-kal az APB derékszögű háromszöget, a csúcsok képét jelöljük vesszővel. A forgatásból adódik, hogy az APB háromszög egybevágó az $AP'D$ háromszöggel, azaz mindkét derékszögű háromszög befogói 3,5 m, illetve 2 m hosszúak. Pitagorasz-tétellel ezért



$a = \sqrt{3,5^2 + 2^2} = \sqrt{16,25} = 4,03$ méter adódik a négyzet oldalhosszára.

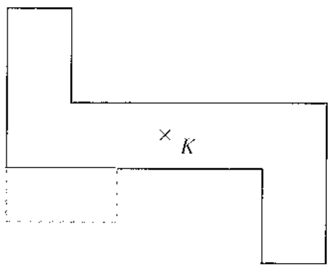
1868. A négyzet egyik tulajdonsága, hogy a középpontja körül 90°-kal elforgatva önmagába megy át.
Az $ABCD$ négyzet O középpontján áthaladó egymásra merőleges egyenesek a négyzet szemközti oldalait az E, G valamint az F, H pontokban metszik.

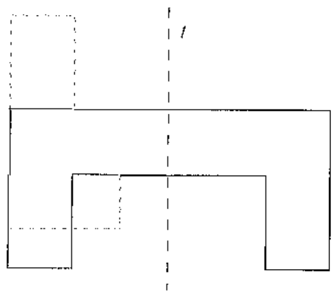


Tekintsük például az $OFCG$ négyszöget. Ezt 90°-kal elforgatva az O pont körül pozitív irányba, az O pont helyben marad, C képe D lesz. F képe rajta lesz CD egyenesén (a négyzet fenti tulajdonsága miatt). Mivel $GOF\sphericalangle = 90°$, F képe csak G lehet. Hasonló okoskodással belátható, hogy G képe pedig H lesz ennél a forgatásnál. Így a keletkező $OGDH$ négyszög egybevágó az $OFCG$ négyszöggel, így területük egyenlő. További két ilyen elforgatással eljutunk az $OHAE$, illetve az $OEBF$ négyszögekhez, így valóban négy egyenlő területű részre bomlik a négyzet.

1869. Lásd a mellékelt a), illetve b) ábrát. Nem egyedüli megoldások, de a legegyszerűbbek.

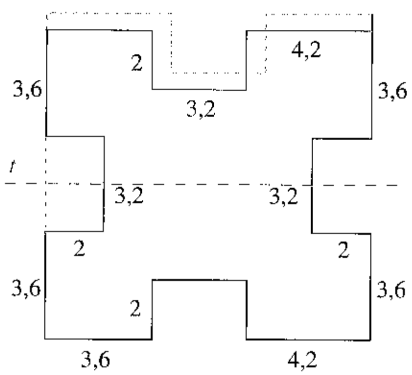
a) középpontos szimmetria b) tengelyes szimmetria
(piros a változás, szürke szaggatott a bontás)

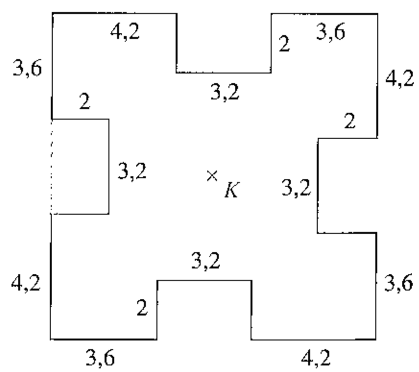




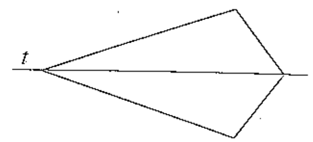
1870. Lásd a mellékelt a), illetve b) ábrát.

a) tengelyes szimmetria, b) negyedrendű forgásszimmetria
(piros a változás, szürke szaggatott a bontás)

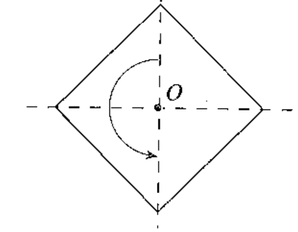




1871. a) Deltoid, amelyik nem rombusz (mert az 180 fokos forgásszimmetriát mutat!).



b) Például rombusz, tengelyei az átlók, és a középpontja körül másodrendű forgásszimmetriát mutat (azaz 180°-kal elforgatva önmagát fedi). Ugyanígy jó a téglalap, még inkább a négyzet is. (Lásd az 1861-es feladat megjegyzését!)

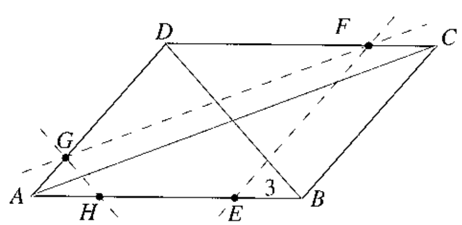


1872. a) Ha forgásszimmetrikus, akkor az másod- vagy negyedrendű lehet (180°-os vagy 90°-os elforgatással fedi önmagát a négyszög). Az első a paralelogramma, a második a négyzet. Ezek közül a paralelogramma általában nem tengelyesen szimmetrikus, tehát jó példa; a négyzet viszont tengelyesen is szimmetrikus, tehát nem jó példa.

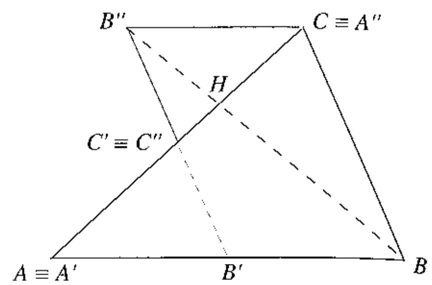
b) Ilyen nincs, mivel ha van két szimmetriatengelye, akkor az nem lehet párhuzamos, mert akkor az eltolási szimmetriát jelentene, és azt a síkon semmilyen véges alakzat nem tud felmutatni. Viszont, ha a két tengely metszi egymást, az forgási szimmetriát jelent, mert két tükrözés egymásutánja mindig forgatás, a tengelyek szögének kétszeresével!

c) Ha egy tükörtengelye van és forgásszimmetrikus, akkor a tengely keresztülmegy a forgásszimmetria középpontján. Ekkor azonban a forgatás felbontható két tengelyes tükrözésre, s azok választhatók úgy, hogy a második egybeessen a szimmetriatengellyel. Ekkor a forgatás és a tükrözés egymásutánja, ami szintén helybenhagyja a négyszöget, egy darab tükrözés lesz, de más tengellyel, azaz ekkor ismét van még egy szimmetriatengely. Emiatt ilyen négyszög sincs.

1873. A párhuzamos szelők tétele miatt $EB = FC = 3$ cm, vagyis F $3:1$ arányban osztja DC-t. Az ACD Δ-ben alkalmazva a párhuzamos szelők tételét, G is $3:1$ arányban osztja DA-t. Hasonlóan az ABD Δ-ben H is $3:1$ arányban osztja BA-t, tehát az A-hoz közelebbi negyedelő pont. (Hogy a BC oldal 9 cm, az közömbös. Általánosítva: ha AB bármely E pontjából indulunk ki, a három fenti párhuzamos berajzolása után kapott H az E tükörképe lesz AB felezőpontjára.)



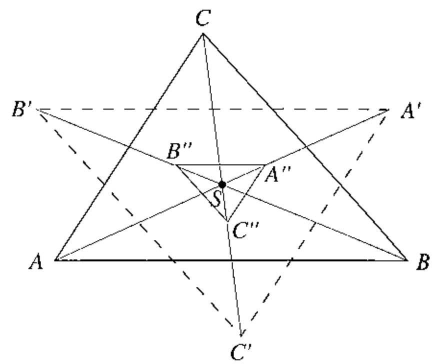
1874. a) Lásd az ábrát!



b) A 0,5 arányú kicsinyítéskor a terület negyedére csökkent, ezt a tükrözés nem változtatta meg, tehát a végső alakzat területe is negyede az eredetiének.

c) A középpontos tükrözés megfelel egy -1 arányú középpontos hasonlóságnak. Két hasonlóság egymásutánja során (még ha különböznek is a középpontok) az arányok összeszorzódnak, így az „eredő" egy $-0,5$ arányú hasonlóság lesz. Kérdés, milyen középponttal? Ez az AC oldal és a BB'' szakasz metszéspontja, H lesz – ami harmadoló pont az AC oldalon, hiszen így lesz az AH szakasz hosszának H „túloldalán" a fele a HA'', azaz a HC szakasz hossza. (Mivel C' felezi AC-t, az egyharmad oldalnyi CH szakasz hosszának H „túloldalán" a fele a HC'', azaz a HC' szakasz hossza, tehát egyhatod oldalnyi – ami az egyharmaddal együtt épp kiadja az oldal felét.)

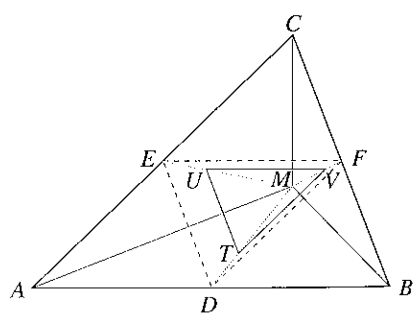
1875. a) Ha a háromszöget először tükrözzük a súlypontjára, majd ugyanebből a pontból negyedére kicsinyítjük, akkor éppen a feladatban megadott háromszöghöz jutunk. Ez igazolja a hasonlóságot.



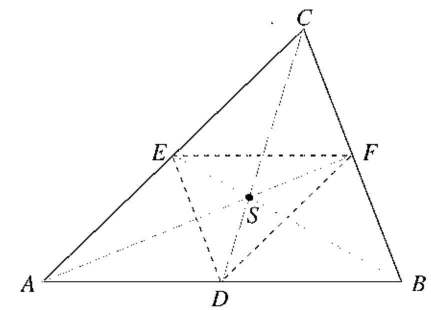
b) Hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő.

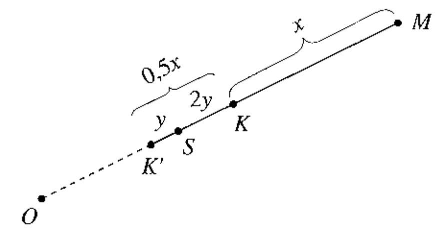
Ez most $\frac{1}{16}$ (vagy másként 1 : 16).

1876. a) Az $ABC\,\Delta$ oldalfelező pontjai (D, E, F) egyúttal oldalfelező pontok az ABM, AMC, MBC háromszögekben is; sőt, ezek T, U, V súlypontjai éppen M-et a D, E, F pontokkal összekötő súlyvonalak harmadoló pontjai. Éppen ezért a $DEF\,\Delta$ M centrumú, $\frac{2}{3}$ arányú kicsinyítése éppen a $TUV\,\Delta$-et adja eredményül – természetes ezért, hogy e két háromszög oldalai párhuzamosak.



b) Az előző pontbeli gondolatot megfordítva: a $TUV\,\Delta$-et M centrumú, 1,5 arányú nagyítás viszi át a $DEF\,\Delta$-be – azt pedig S (az $ABC\,\Delta$ súlypontja) centrumú, -2 arányú nagyítás az eredeti $CBA\,\Delta$-be. (A csúcsok egymásnak való megfeleltetése miatt ilyen furcsa e háromszög betűzése.) Az „eredő" transzformáció tehát egy $1,5 \cdot (-2) = -3$ arányú nagyítás, mégpedig az AV, BU, CT szakaszok metszéspontja centrummal. Ahhoz, hogy megtudjuk, mi is ez a pont, gondoljuk meg a következőket. Ez pont az M centrumú, 1,5 arányú és az S centrumú, -2 arányú nagyítás egymásutánja során helyben marad, tehát rajta van az MS szakaszon.





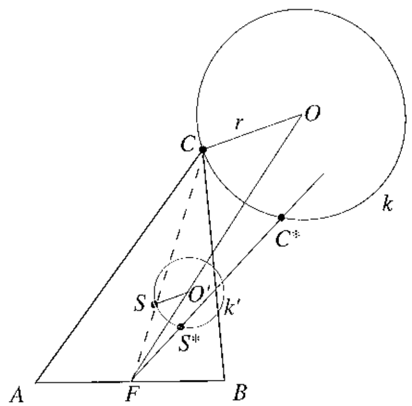
(Tehát az $ABC\,\Delta$ Euler-egyenesén, l. pl. a 2173-as megoldást.) Jelölje e pontot K, távolságát M-től pedig x. Ekkor K' $1,5x$ távolságra van M-től, az S túloldalán. Jelölje a $K'S$ távolságot y. A második transzformáció után $K'' \equiv K$, és így $SK = 2y$. Azt látjuk így, hogy $0,5x = 3y$, és $x + 2y = MS$. Vagyis $y = \frac{x}{6}$, ezért $2y = \frac{x}{3}$, vagyis K az MS szakasz S-hez közelebbi negyedelő pontja.

Megjegyzés:

Az Euler-egyenesen M-en és S-en kívül az $ABC\Delta$ köré írható kör O középpontja is rajta van. A pontok sorrendje M, S, O, és $MS = 2OS$.

Az iménti skála segítségével: $MS = x + 2y = 6y + 2y = 8y$, ezért $OS = 4y$. De így $OK = KM = 6y$, vagyis K az MO felezőpontja. Erről a pontról pedig tudható, hogy az $ABC\Delta$ kilenc pont körének – más néven Feuerbach-körének – középpontja.

1877. Tudjuk, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalnak az oldalfelezőponthoz közelebb eső harmadoló pontja. Ezért az F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság C-t S-be viszi. Ha C az O középpontú r sugarú k körvonal egy tetszőleges pontja, akkor S egy olyan k' körvonal pontja, amelynek középpontja FO szakasz F-hez közelebb eső harmadoló pontja O', és sugara $\frac{r}{3}$.



Mivel A, B, C nem eshetnek egy egyenesre (illetve A, B, S sem), ezért ha k-nak van AB egyenesre illeszkedő pontja, akkor ennek képe – amely szintén illeszkedik AB egyenesre – k' körvonalból elhagyandó.
A k' körvonal minden AB egyenesre nem illeszkedő pontja egy megfelelő ABC háromszög súlypontja. Vegyük ugyanis k' egy AB egyenesre nem illeszkedő S^* pontját! Ehhez az F középpontú 3 arányú hasonlóság olyan C^* pontot rendel, amely egyrészt illeszkedik a k körre, másrészt az ABC^* háromszög súlypontja S^* (mivel S^* az FC^* súlyvonal F-hez közelebb eső harmadoló pontja).

1878. a) Az alaphoz tartozó magasság $m = \sqrt{74^2 - 24^2} = 70$ (cm).
A háromszög területe 1680 cm², a beírt körének sugara $\frac{120}{7} = 17{,}14$ (cm).

b) A kicsinyített háromszög oldalainak hossza 9,6 cm, 14,8 cm, 14,8 cm.
A beírt kör középpontját két belső szögfelező metszéspontjaként kapjuk. Ebből a pontból az oldalakra merőlegeseket szerkesztve adódnak az érintési pontok és a kör sugara is.

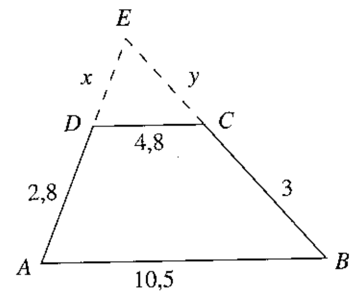
1879. A nagyobbik téglalap kerülete 84 cm, tehát a kicsinyítés aránya $\frac{52}{84} = \frac{13}{21}$.
A kicsinyített háromszög oldalai:
$24 \cdot \frac{13}{21} = \frac{104}{7} \approx 14{,}86$ (cm), illetve $18 \cdot \frac{13}{21} = \frac{78}{7} \approx 11{,}14$ (cm) hosszúak.

Másik megoldás:
Az eredeti téglalap szomszédos oldalainak aránya 4 : 3, ez az arány a hozzá hasonló téglalapok mindegyikében ugyanennyi. A megadott kisebb téglalapban két szomszédos oldal hosszának összege 26 cm, ezt kell tehát 4 : 3 arányú részekre bontani.

1880. a) Nem lehet, mert ha különbözők az oldallapok, akkor a három él hossza – a, b, c – nem lehet egyenlő hosszú. Viszont, ha mindhárom téglalap hasonló lenne, akkor fennállna az élek hosszaira, hogy: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, illetve $\frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Az elsőből a b szakaszhossz mértani közepe a és c szakasz hosszának, tehát b az a és c közé esik. A másodikból c esik a és b közé. Ez egyszerre nem lehet, illetve a három oldal egyenlősége következik ebből, de ezt kizártuk. Ha $\frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ lenne a második aránypár, abból is mindhárom oldal egyenlősége következne.

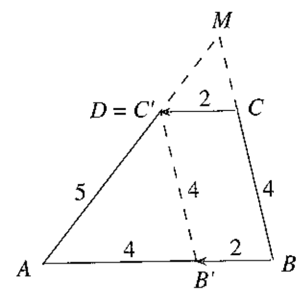
b) Ez lehet, ha az egy csúcsba futó élek közül az egyiknek a hossza mértani közepe a másik két él hosszának. Ekkor két szomszédos oldallap hasonló lesz.

1881. AEB szögszárra párhuzamos szelőszakaszok tételét (vagy hasonlóságot) alkalmazva:
$\frac{x}{x+2{,}8} = \frac{4{,}8}{10{,}5} \Rightarrow x \approx 2{,}4$ cm.
AEB szögszárra párhuzamos szelők tételét alkalmazva: $\frac{x}{y} = \frac{2{,}8}{3} \Rightarrow y \approx 2{,}6$ cm.
(A rajz nem méretarányos!)



1882. a) Toljuk el a BC szárat a $\overrightarrow{CD}$ vektorral. Az $AB'D$ háromszög egyenlő szárú és hasonló a DCM háromszöghöz. A hasonlóság aránya $1:2$, ezért $MC = 2$ és $MD = 2{,}5$ egység hosszú.

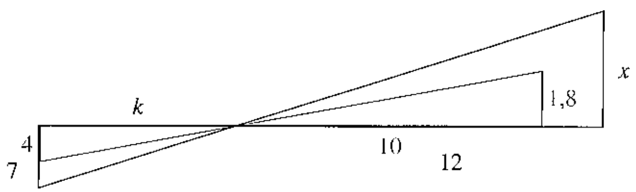
b) Az átlók az alapok hosszának arányában, azaz 1 : 3 arányban osztják egymást.



1883. Az APQ háromszöget az A csúcsából $\frac{3}{2}$-szeresére nagyítva a PQ szakasz a DB átlóba megy át. Ezért PQ párhuzamos DB-vel és DB hossza a PQ-énak $\frac{3}{2}$-szerese.
A CSR háromszöget a C csúcsából 3-szorosára nagyítva az SR szakasz a DB átlóba megy át. Ezért az SR párhuzamos a DB-vel és SR hossza a DB hosszának $\frac{1}{3}$-szorosa.
A fentiekből következik, hogy PQ párhuzamos SR-rel és $PQ : SR = 2 : 1$.

1884. Egy egyszerű hasonlósági feltevés húzódik meg a feladat mögött. A szemem és a hüvelykujjam távolsága felel meg a vasúti kocsi tőlem való távolságának, míg a két ujjam szélessége a kocsi hosszának felel meg. Eszerint a következő aránypár írható fel: $\frac{h}{0,04} = \frac{272}{0,68}$, ahol minden adatot méterbe számoltunk át, és h jelöli a kocsi keresett hosszát. Ebből $h = 16$, azaz 16 méter körül lehet a kocsi hossza. Nyilván ez elég „pontatlan mérés", ezért mondjuk azt, hogy kb. 16 méter.

1885. a) Pontszerűnek tekintve az objektívet, mögötte persze mindkét kép ugyanolyan messze keletkezik (a film adott távolságban van a lencse mögött, ez nem változik a különböző tárgyak esetén), legyen ez k. Az 1,8 m magas ember $12 - 2 = 10$ m-re van a lencsétől, és 4 cm magas a képen, tehát hasonló Δ-ekből $\frac{4 \text{ cm}}{k} = \frac{1,8 \text{ m}}{10 \text{ m}}$, amiből $k = 22,\dot{2}$ cm. A másik hasonló háromszög-párból a fa x magasságára $\frac{7 \text{ cm}}{22,\dot{2} \text{ cm}} = \frac{x}{12 \text{ m}}$, ahonnan $x = 3,78$ m.



b) A nagyítás nem távolságfüggetlen, így nem lehet a kérdésre általában válaszolni. Attól függ, hogy a tárgy milyen messze van a fényképezőgép objektívjétől. (Éppen ezért látszhatnak kis tárgyak nagyobbnak a képen a nagyobbaknál – és ez a lehetőség hétköznapi tapasztalat –, mert közelebb vannak, tehát a nagyítás – illetve kicsinyítés – nem távolságfüggetlen.) Az a) részben pl. a fa kicsinyítése: 1 : 54; míg az emberé: 1 : 45!

1886. a) Itt is hasonlóságból indulunk ki, feltételezve, hogy a Hold pontosan eltakarja a Napot, ezért a Földtől való távolságaik aránya megfelel a sugaraik arányának, ami pedig azonos a keresett átmérőaránnyal, hiszen az a sugarak kétszerese.

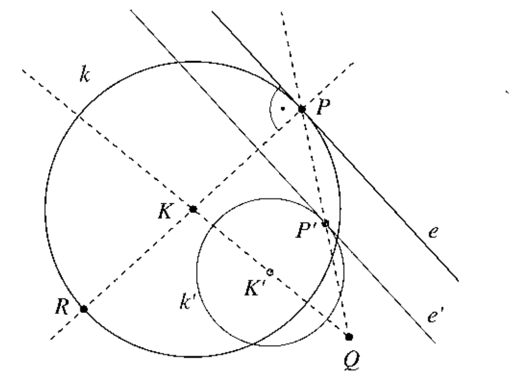
Azaz: $\frac{d_N}{d_H} = \frac{1,5 \cdot 10^8}{3,84 \cdot 10^5} \approx 390,6.$

b) Ha a sűrűségek megegyeznének, akkor a tömegek a térfogattal lennének arányosak, ami tudottan a hasonlóság arányának (lásd a) rész) a köbével számolható, tehát $\frac{m_N}{m_H} = \frac{2 \cdot 10^{30}}{m_H} \approx 390,6^3 \approx 5,96 \cdot 10^7$, ahonnan $m_H = 3,356 \cdot 10^{22}$ kg lenne.

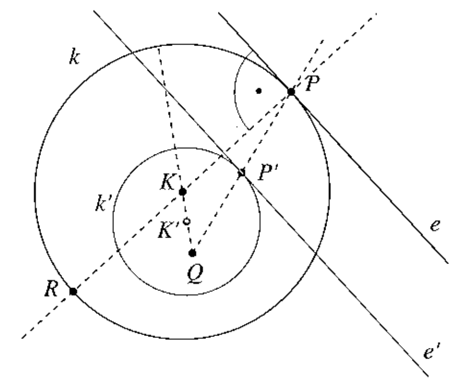
c) Mivel a Hold tömege ennek a b)-beli válasznak több, mint a kétszerese a valóságban, ezért a Hold sűrűsége is több, mint kétszerese a Napénak.

1887. Ha P-ben merőlegest állítunk az érintőre, akkor megkaphatjuk a k kör átmérőjét (PR), majd ennek felezőpontját megszerkesztve a kör K középpontját.

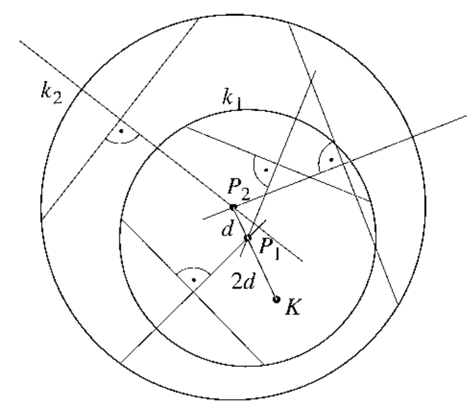
a) Kicsinyitsük felére Q-ból a K és a P pontot. K' a kicsinyített k' kör középpontja, P' a kicsinyített kör egy pontja, amelyben az e érintő e' képe érinti a k' kört.



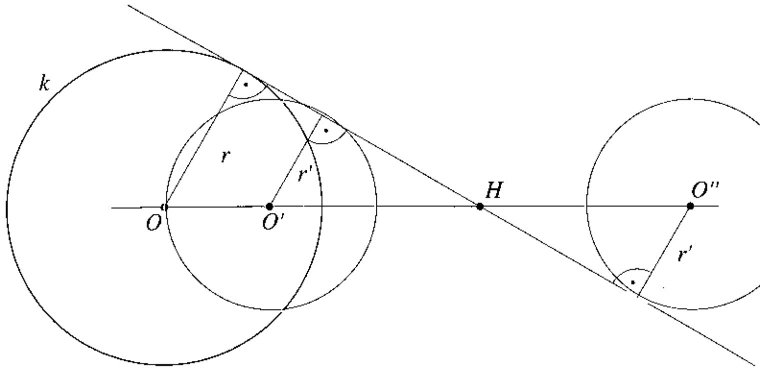
b) Az a)-ban leírt szerkesztési lépések ebben az esetben is célhoz vezetnek.



1888. Először célszerű megszerkeszteni a körök középpontját (pl. két-két húr felezőmerőlegesei segítségével). Legyen a k_1 kör középpontja P_1, a k_2 köré P_2. A feladat szövege szerint: $KP_2 = \frac{3}{2} \cdot KP_1$, ezért $KP_1 = 2 \cdot P_1P_2$. Ebből K már könnyen megszerkeszthető.



1889.



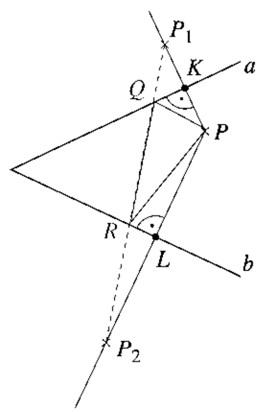
Bármely két kör hasonló. Mivel $\frac{r'}{r} = \frac{2}{3}$, ezért a hasonlóság aránya vagy $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ vagy $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$.

A feladatnak tehát két megoldása van. A keresett körök középpontját jelöljük O'-vel, illetve O''-vel. O'-t megkapjuk, ha a H középpontú $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, O''-t, ha a H középpontú $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$ arányú hasonlóságot alkalmazzuk O-ra.

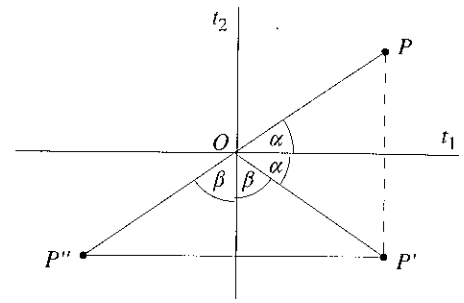
$\frac{O'H}{OH} = \frac{O''H}{OH} = \frac{2}{3}$, így $O'H = HO'' = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ (cm).

Az első esetben $OO' = OH - O'H = 6 - 4 = 2$, $\quad OO' = 2$ cm;
a második esetben $OO'' = OH + HO'' = 6 + 4 = 10$, $\quad OO''=10$ cm.

1890. Tükrözzük a P pontot a és b egyenesekre, a kapott P_1, illetve P_2 pontokat összekötve ennek az egyenesnek a-val és b-vel való metszéspontja adja az ütközési pontokat az a és a b egyenesen.

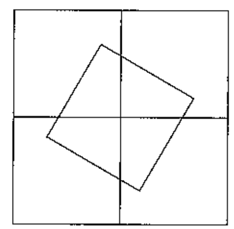


1891. Legyen t_1, illetve t_2 a két egymásra merőleges tengely, P pedig az alakzat egy tetszőleges pontja. P t_1-re való tükörképe legyen P', P' t_2-re való tükörképe pedig P''. Megmutatjuk, hogy P-nek a tengelyek O metszéspontjára való tükörképe P''.

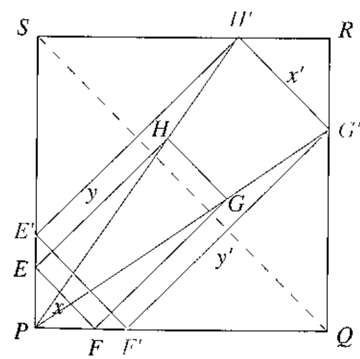


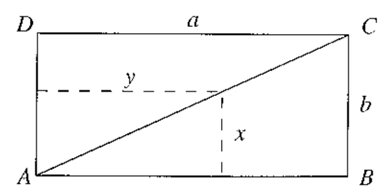
Kihasználjuk, hogy P' és P'' szintén az alakzathoz tartozik, hiszen az alakzat t_1-re is és t_2-re is szimmetrikus, másrészt a tengelyes tükrözés távolság-, illetve szögtartó.
A tükrözések miatt $OP = OP'$ és $OP' = OP''$, így $OP = OP''$.
Az ábrán azonos betűvel jelölt szögek a tükrözés miatt egyenlőek ,ezért
$POP'' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$, de $\alpha + \beta = 90°$, így $POP''\sphericalangle = 180°$.
Mivel $OP = OP''$ és $POP''\sphericalangle = 180°$, ezért P'' valóban P-nek az O-ra vonatkozó tükörképe.
Mivel P az alakzatnak egy tetszőleges pontja volt, így az egész alakzat is szimmetrikus az O pontra.

1892. Azt állítjuk, hogy a közös rész területe állandó, mindig a négyzetek negyed-területe, a helyzettől függetlenül, azaz ez egyben a maximum és a minimum is. Azt fogjuk belátni, hogy a kétszeresen fedett terület tényleg mindig egyenlő a négyzet negyedével. Ehhez a mellékelt ábra segít, hiszen ha a forgatott négyzet mellé felveszünk még három másikat, egy kétszer kettes „négyzettömböt", akkor könnyen látszik, hogy az eredeti négyzet négy egybevágó darabra bomlik, hiszen az alapnégyzet középpontja körüli 90°-os forgatással egymásba vihetők, azaz területük is egyenlő. A keresett közös rész egyetlen ilyen darab, ezért ez éppen a negyedrésze a négyzetnek.

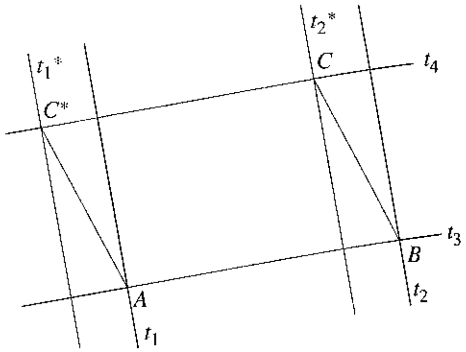


1893.





Húzzunk a négyzet SQ átlójával párhuzamost a négyzet egy tetszőleges belső pontján keresztül (EF), és szerkesszünk a négyzetbe egy EF oldalú, $ABCD$ téglalaphoz hasonló téglalapot! Két téglalap hasonló, ha megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így a felvett EF-hez megszerkesztjük a téglalap másik oldalát. ($EFGH$) – ebben az esetben is két megoldás lehetséges, attól függően, hogy EF a téglalap hosszabb vagy rövidebb oldala). Ezután P-ből nagyítjuk (vagy kicsinyítjük) $EFGH$ téglalapot, hogy H csúcsa a négyzet oldalára kerüljön. Ekkor PR-re vonatkozó tengelyes szimmetria miatt G képe is a négyzet oldalára esik.



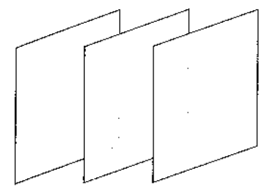
1894. A középpontos tükrözés mindig helyettesíthető két olyan, egymásra merőleges tengelyre való tükrözés egymás utáni alkalmazásával, amely tengelyek természetesen a középpontban metszik egymást. Az ábra szerint felvéve az A és B csúcs körüli középpontos tükrözések eredménye egy, az AB szakaszra merőleges, A-n átmenő t_1 és B-n átmenő t_2 tengelyre való tükrözés egymásutánjával helyettesíthető, mert az AB egyenesre kétszer kell tükrözni, így az „kiesik”. Viszont t_1t_2 is helyettesíthető (ez egy eltolás) egy olyan $t_1^*t_2^*$ tükrözés párral, ahol a második (t_2^*) tengely a C ponton megy át. Ekkor, mivel a két pár tengely távolsága azonos (az eltolás-vektor hosszának fele), és a C középpontú tükrözés is helyettesíthető t_5t_4 tükrözésekkel, ahol t_5 egybeesik t_2^*-gal a konstrukció miatt, így egy C^*-on keresztülmenő t_1^* és t_4 tükrözés eredője a végeredmény, ami egy C^* középpontú tükrözés lesz. Tehát a három középpontos tükrözés eredménye egy középpontos tükrözés, melynek C^* középpontját úgy kapjuk meg, hogy az ABC háromszöget az ábra szerint kiegészítjük paralelogrammává (pl. $\overrightarrow{BA}$ C-ből való felmérésével).

4.2. Elemi térgeometria

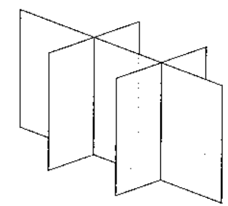
1895. a) A térben 2 sík vagy párhuzamos vagy metszi egymást. Két párhuzamos sík a teret 3 részre, a két metsző sík a teret 4 részre osztja.

b) A lehetséges eseteket az alábbi ábrák szemléltetik:

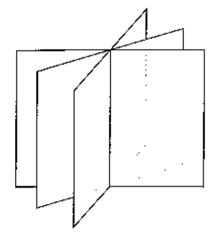
1. A három sík párhuzamos. A részek száma 4.



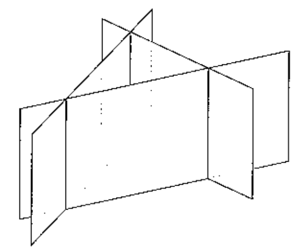
2. Két sík párhuzamos, a harmadik ezeket metszi. A részek száma 6.



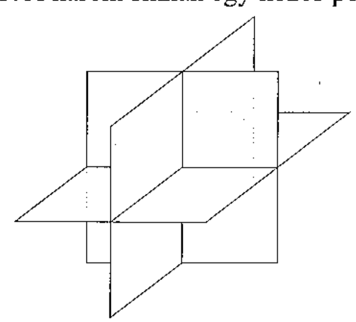
3. A három sík egy egyenesre illeszkedik. A részek száma 6.



4. A három sík páronkénti metszésvonalai párhuzamosak. A részek száma 7.



5. A három síknak egy közös pontja van. A részek száma 8.



c) A lehetséges esetek végiggondolása úgy történik, hogy a b) részben felsorolt lehetőségek mindegyikéhez hozzávesszük a logikailag lehetséges összes különböző esetben a negyedik síkot.
Így alábbi különböző lehetőségeket kapjuk:
1. Mind a négy sík párhuzamos. A részek száma 5.
2. Három sík párhuzamos a negyedik ezeket metszi. A részek száma 8.

3. Két sík párhuzamos, a másik két sík is párhuzamos és az előzőeket metszik. A részek száma 9.
4. Két sík párhuzamos, a másik két sík metszi egymást és a metszésvonal illeszkedik a párhuzamos síkok valamelyikére. A részek száma 9.
5. Két sík párhuzamos, a másik két sík metszi egymást és a metszésvonal párhuzamos a párhuzamos síkokkal. A részek száma 10.
6. Két sík párhuzamos, a másik két sík metszi egymást és a metszésvonal döfi a párhuzamos síkokat. A részek száma 12.
7. A négy sík egy egyenesre illeszkedik. A részek száma 8.
8. Három sík egy egyenesre illeszkedik, a negyedik sík pedig párhuzamos a három sík közös metszésvonalával. A részek száma 10.
9. Három sík egy egyenesre illeszkedik, a negyedik metszi ezt a közös metszésvonalat. A részek száma 12.
10. A négy sík páronként különböző egyenesben metszi egymást és ezek a metszésvonalak párhuzamosak. A részek száma 11.
11. Három sík páronként különböző egyenesben metszi egymást és ezek a metszésvonalak párhuzamosak. A negyedik sík metszi ezeket a metszésvonalakat. A részek száma 14.
12. A négy síknak pontosan egy közös pontja van. A részek száma 14.
13. A négy sík közül bármelyik háromnak pontosan egy közös pontja van és ezek a közös pontok különbözők. A részek száma 15.

1896. A 3 pont síkját a gömbök a pontok által meghatározott O középpontú körben metszik. A kör O középpontján átmenő, a síkra merőleges egyenes lesz a gömbök középpontjainak halmaza.

1897. a) Nincs ilyen pont a térben.

b) A két sík között lévő pontok halmaza (a síkok pontjai is).

c) Két sík pontjai alkotják a keresett halmazt. Ezek az adott síkok közötti tartományon kívül, az adott síkokkal párhuzamosan, a közelebbi adott síktól 2,5 cm távolságra helyezkednek el.

1898. a) Nincs ilyen pont a térben.

b) A két adott sík közötti tartományon kívül lévő pontok halmaza és a két sík pontjai alkotják ezt a halmazt.

c) A két adott sík közötti tartományban, a síkokkal párhuzamosan álló, a közelebbihez 2,5 cm-re lévő síkok pontjai alkotják ezt a halmazt.

1899. A P pont merőleges vetülete a síkon legyen P'; a sík azon pontjai, amelyek P-től 13 cm távolságra vannak, P'-től $\sqrt{13^2-12^2}=5$ cm távolságra helyezkednek el (a Pitagorasz-tétel alapján).

A P-től 15 cm távolságra lévő pontok P'-től $\sqrt{15^2-12^2}=9$ cm-re vannak. A keresett ponthalmaz tehát: a P' középpontú, 5 cm és 9 cm sugarú körök közötti pontok halmaza.

1900. Ezek azon pontjai a térnek, amelyeknek C-től való távolsága 3 és 3,5 cm közé esik, a határok is jók. Formalizálva: $\{P \in T \mid 3\text{ cm} \le d_{PC} \le 3{,}5\text{ cm}\}$.

1901. Ezek azon pontjai a térnek, amelyeknek az e-től való távolsága 2 és 2,5 cm közé esik, a határok is jók. Formalizálva: $\{P \in T \mid 2\text{ cm} \le d_{Pe} \le 2{,}5\text{ cm}\}$.

1902. a) Minden, az A, B, C pontok síkjával párhuzamos sík megfelelő.

b) Azok a merőleges síkok, amelyek az A, B, C pontok síkját az ABC háromszög középvonalainak egyenesében metszik.

c) Igen, minden olyan sík jó, amely az A, B, C pontok síkját az ABC háromszög középvonalainak egyenesében metszi.

1903. a) Adott K ponttól 2,5 cm-nél kisebb távolságra lévő pontok halmaza a K középpontú, 2,5 cm sugarú gömb belseje.

b) Adott K ponttól 2,5 cm-nél nem távolabb lévő pontok halmaza a K középpontú 2,5 cm sugarú gömb belseje és felülete.

c) Adott K ponttól 2,5 cm-nél távolabb lévő pontok halmaza az egész tér, kivéve a K középpontú, 2,5 cm sugarú gömböt (gömbtestet). Vagy: a szóban forgó gömbön kívül lévő pontok halmaza.

1904. Legyen az adott P pontnak a síkra eső merőleges vetülete P'.

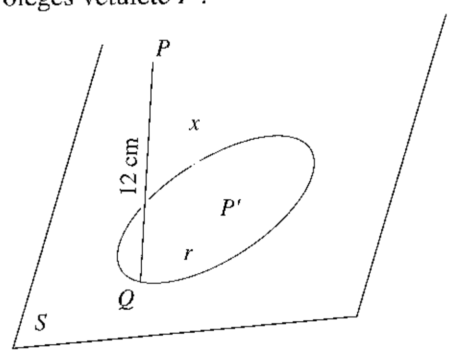
Ha $\overline{PP'} > 12$ cm, akkor a síkon nincs olyan pont, amelynek P-től való távolsága 12 cm.

Ha $\overline{PP'} = 12$ cm $\Rightarrow$ 1 ilyen pont van a síkon, ez a P'.

Ha $\overline{PP'} < 12$ cm $\Rightarrow$ A keresett pontok az S-síkbeli olyan P' középpontú körvonalat alkotnak, melynek sugara:

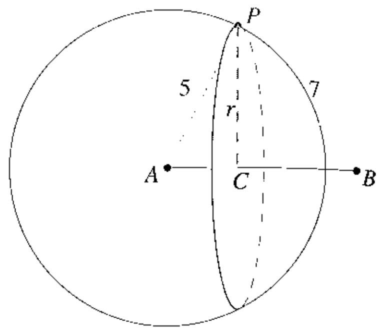
$r=\sqrt{12^2-x^2}$ $\quad (x=\overline{PP'})$.

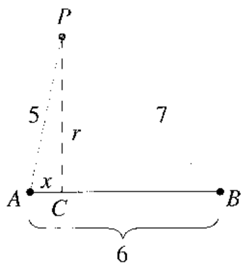
Tehát végtelen sok ilyen pont van.



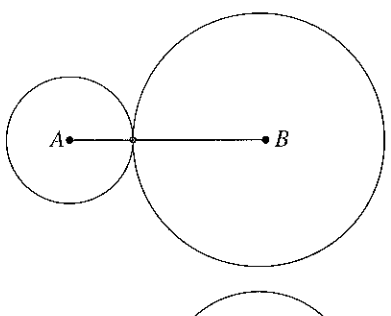
1905. Adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza az adott középpontú, adott sugarú gömb felülete. A keresett ponthalmazt két gömb felületének közös pontjai adják meg. A gömbközéppontok rögzített távolsága esetén a sugarak nagyságától függ, hogy a közös pontok halmaza körvonal, egy pont vagy üres halmaz.

a) A megoldás körvonal, melynek síkja merőleges az AB egyenesre, ha $r_A + r_B > AB$. A gömbök az AB tengelyre vonatkozóan forgásszimmetrikusak, tehát ez érvényes a közös pontjaik halmazára is. A kapott körvonal sugara meghatározható az $ABP\,\Delta$ AB oldalához tartozó magasságaként, ahol $PC = r$.
Feladatunkban
$r_A = 5,\ \ r_B = 7,\ \ AB = 6.$
Az $ABP\Delta$-et a PC két derékszögű háromszögre bontja.
Felírjuk a Pitagorasz-tételt az
$APC\,\Delta$-re: $r^2 = 25 - x^2$,
és a $BPC\,\Delta$-re: $r^2 = 49 - (6 - x)^2$.
Ezekből $49 - (6 - x)^2 = 25 - x^2$,
Ebből $x = 1$. $r^2 = 24$, minthogy
$r > 0$, ezért $r = 2\sqrt{6}$.
A ponthalmaz tehát az AB egyenesre merőleges síkban az a C középpontú kör, melynek sugara $2\sqrt{6}$.

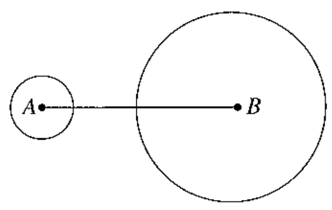




b) A megoldás egy pont, a két gömb érintési pontja. ($r_A + r_B = AB$) A két gömb kívülről érinti egymást.



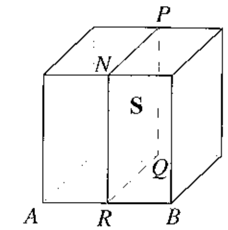
c) A megoldás üres halmaz.
($|r_A - r_B| < AB < r_A + r_B$)



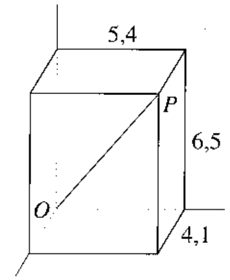
1906. Legyen a P pontnak a kocka egyik lapjától való távolsága a, ahol $a \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\} = A$, ekkor P-nek a szemközti laptól való távolsága, $(9 - a)$ is egész és eleme A-nak. A keresett pontok egy $9 - 2 = 7$ cm élű kocka belsejében és felületén lévő un. rácspontok.
Egy élen 8 pont van, a pontok száma összesen $8^3 = 512$.

1907. A két ponttól, A-tól és B-től egyenlő távol lévő pontok halmaza a pontokat összekötő szakasz felezőmerőleges síkja, **S**.

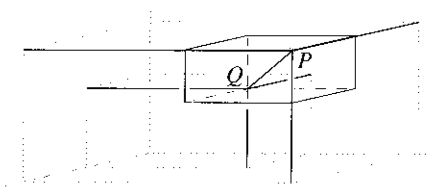
a) Az AB él **S** felezőmerőleges síkja és a kocka felületének közös pontjai, az ábrán a $PQRN$ négyzet határvonalai.
b) A kocka felülete által az **S** síkból kimetszett négyzet belső pontjai, az ábrán a $PQRN$ négyzet belső pontjai.
c) Az **S** sík.



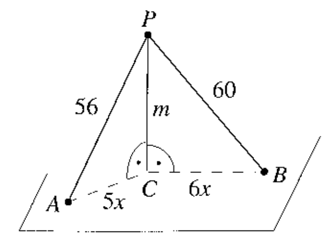
1908. Az adott távolságok tekinthetők egy téglatest P csúcspontjából induló éleinek, amelynek testátlója OP. A testátló hosszára ismert összefüggés, az ún. térbeli Pitagorasz-tétel (a téglatest testátlójának négyzete egyenlő az egy csúcsból induló élek négyzetének összegével) alapján felírható:
$OP^2 = 4{,}1^2 + 5{,}4^2 + 6{,}5^2$, ebből $OP \approx 9{,}39$.
Tehát P pont a síkok közös pontjától kb. 9,4 cm távolságra van.



1909. a) A P és Q pontokat merőlegesen vetítjük a három, páronként merőleges síkra. A vetítősugarak tekinthetők egy-egy téglatest éleinek, amelyeknek egyik csúcsa az adott P, illetve Q pont, ebből induló élek a vetítő egyenesek. PQ egy olyan újabb téglatest testátlója, melynek élei az előbbi testek párhuzamos éleinek különbségéből adódik, tehát 3, 5, 6.
b) Ezek négyzetösszege (az ún. térbeli Pitagorasz-tétel szerint) adja a PQ testátló hosszának a négyzetét.
$PQ^2 = 9 + 25 + 36 = 70$
$PQ = \sqrt{70} \approx 8{,}37$ (egység).

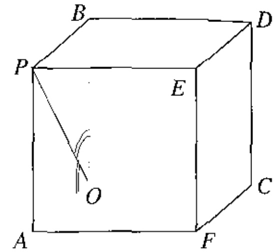


1910. P pontnak a síktól való távolsága $PC = m$, $PA = 56$, $PB = 60$. A feladat szövege értelmében $AC = 5x$, $BC = 6x$. Itt figyelembe vesszük, hogy a hosszabb szakasz vetülete hosszabb.
A $PAC\,\Delta$ és $PBC\,\Delta$ derékszögű háromszögek, ezekre felírható a Pitagorasz-tétel:
$m^2 = 56^2 - 25x^2$, $\qquad (*)$
$m^2 = 60^2 - 36x^2$.



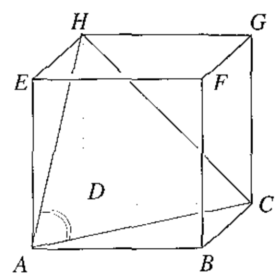
Ezekből adódik: $11x^2 = 60^2 - 56^2 = 464$, így $x^2 = \frac{464}{11}$ $(0 < x \approx 6,49)$.
Ebből már kiszámítható a keresett m értéke a *-os sor alapján.
$m^2 = 60^2 - 36 \cdot \frac{464}{11} \approx 36(100 - 42,18) = 2081,5$, ebből $m \approx 45,6$.
Tehát P pontnak a síktól való távolsága 45,6 cm.

1911. a) A kocka OP lapátlója az $AOBP$ négyzetlap átlója, ezért 45°-os szöget zár be e lap éleivel.
Ugyanekkora szöget zár be az ezekkel párhuzamos további élekkel is (CF, DE, illetve CD, EF).
A többi 4 él (AF, OC, BD, PE) merőleges az $AOBP$ síkra, tehát annak minden egyenesére, így az OP átlóra is.

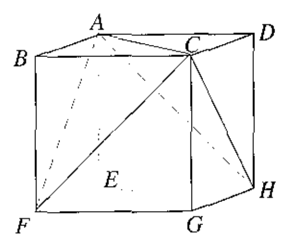


b) Egyenes és sík szögén értjük az egyenes és ennek a síkra eső merőleges vetülete által bezárt szöget.
Az OP vetülete az OP-t tartalmazó síkkal szomszédos 4 síkra az $OAPB$ négyzet egyik oldala. (pl. az OP vetülete az $[APEF]$ síkra PA). Így e négy síkkal az OP 45°-os szöget zár be.
OP az $AOBP$ síkjában van, tehát OP ezzel a síkkal és a vele párhuzamos $EFCD$ lap síkjával is 0°-os szöget zár be.

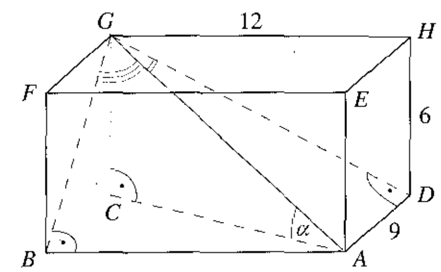
1912. A kocka egy csúcsból kiinduló lapátlói 60°-os szöget zárnak be, mivel egy szabályos háromszöget alkot három lapátló, lásd a mellékelt ábrát. ACH szabályos háromszög, mivel minden lapátló hossza egyenlő kocka esetén, tehát $AC = AH = HC$. Ezért $CAH\sphericalangle$, ami pont a két lapátló szöge, 60°.
AC és AF szöge az $ACF\Delta$, AH és AF szöge az $AHF\Delta$ miatt ugyancsak 60°.



1913. Elég megállapitani, hogy az AC lapátló mekkora szöget zár be az AF és BE, illetve AH és DE lapátlókkal, mivel az AC átlóval szomszédos lapok többi lapátlója párhuzamos ezek egyikével. Az $ACF\,\Delta$ és az $ACH\,\Delta$ szabályos, hiszen oldalaik a kocka lapátlói. Ezért AC 60°-os szöget zár be az AF-fel és CH-val, minthogy $CH \parallel BE$, azaz $(AC, AF)\sphericalangle = 60°$ és $(AC, BE)\sphericalangle = 60°$.
Ugyanezért az AC és AH, illetve AC és $CF \parallel DE$ által bezárt szög is 60°, azaz $(AC, AH)\sphericalangle = 60°$ és $(AC, DE)\sphericalangle = 60°$.
Hasonlóan $(AC, BG)\sphericalangle = (AC, AH)\sphericalangle = 60°$.



1914. a) Egyenes és sík hajlásszögén értjük az egyenes és ennek a síkra eső merőleges vetülete által bezárt szöget. Ezért meg kell határozni pl. az $\alpha = GAC\sphericalangle$-et. AG vetülete az $ABCD$ lapra AC. Az $ACG\,\Delta$ derékszögű, mert CG merőleges az $ABCD$ lapra, tehát annak minden egyenesére, így az AC-re is.



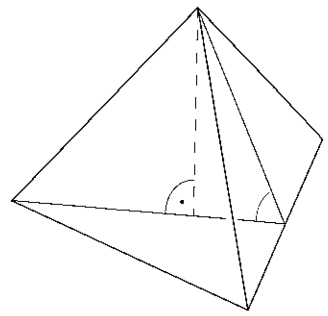
A testátló hossza az ún. térbeli Pitagorasz-tétel szerint:
$AG^2 = AB^2 + AD^2 + AE^2 = 144 + 81 + 36 = 261$, innen $AG = \sqrt{261}$.
Az ACG háromszögben az α-ra felírható: $\sin\alpha = \frac{CG}{AG} = \frac{6}{\sqrt{261}} \approx 0,3714$, ebből $\alpha \approx 21,80°$.
Ugyanígy számítható ki a testátló és a másik két lap szöge az AGB, illetve az AGD derékszögű háromszögekből
Bizonyítjuk, hogy $AB \perp BG$. Ez igaz, mert AB merőleges a $BCGF$ síkra, tehát annak minden egyenesére, így a BG-re is.
Beláthatjuk ugyanigy, hogy az $AD \perp DG$.
Ezekből a fentiek mintájára kapjuk, hogy az $AGD\sphericalangle \approx 33,85°$, $AGB\sphericalangle \approx 47,97°$.
Ezek szerint a testátló a téglatest oldallapjaival 21,8°-os, 33,9°-os, illetve 48,0°-os szöget zár be.

b) E szögek pótszögei jelentik az élekkel bezárt szögeket, tehát $CGA\sphericalangle = 68,2°$, $DAG\sphericalangle = 56,1°$, illetve $BAG\sphericalangle = 42,0°$-os.

Megjegyzés:
Megtehetjük, hogy a testátlónak az oldalélekkel bezárt szögét számítjuk ki előbb (az él és a testátló által bezárt szög koszinuszával). E szögek pótszöge jelenti a testátlónak az oldallapokkal bezárt szögét.

1915. A feladat egy 10 cm élhosszúságú szabályos tetraéderről szól. Megfelelő síkmetszetet kell találni: a két lap közös élére merőleges, azt az él felezőpontjában metsző sík a tetraéderből egy olyan egyenlő szárú háromszöget metsz ki, amelynek alapja 10 cm, szárai $10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm hosszúak, és szárszöge éppen a keresett hajlásszög. Ha a hajlásszöget α-val jelöljük, akkor $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{10}{2}}{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, innen $\alpha \approx 70,53°$.

1916. a) A két lap által bezárt szög két lapmagasság és egy oldalél által alkotott (egyenlő szárú) háromszög egyik (a szár-) szöge. Koszinusztétellel is meg lehet határozni, de egyszerűbb, ha a testmagasságot berajzolva észrevesszük, hogy az az alaplapot annak súlypontjában éri el, tehát az alaplap magasságának harmadával és az oldallap magasságával derékszögű háromszöget alkot. Ebben a keresett szög a harmad és az egész lapmagasság (mint szög melletti befogó és átfogó) között található, tehát ennek koszinusza $\frac{1}{3}$.



Visszakeresve kapjuk, hogy a szög 70,53°.

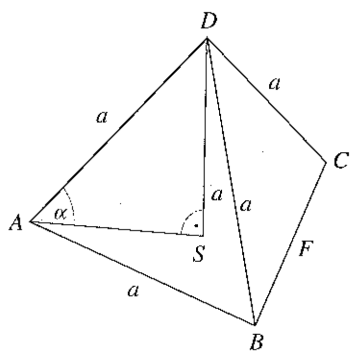
b) Bármely szemközti élpárra illeszkedő egyenesek kitérők. Az $ABCD$ szabályos tetraéder BC élének felezőpontja F.

Bizonyítás:

Az ADF háromszög síkja a tetraéder szimmetriasíkja. Ezért BC merőleges az ADF síkra, tehát annak minden egyenesére, így az AD-re is.

Más bizonyítás:

A BC él merőleges az ABC háromszög AF és a BCD háromszög DF magasságára, ezért az ADF síkra, tehát annak minden egyenesére, így az AB-re is.



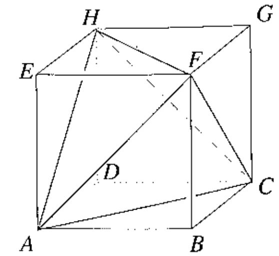
c) Az ABC alapú szabályos tetraéder AD élének az alaplappal bezárt szöge az ADS derékszögű háromszögből számítható ki, ahol S a D-nek az alaplapra eső merőleges vetülete. Szabályos tetraéderről lévén szó, az S az alaplap súlypontja is. Jelöljük F-fel a BC szakasz felezőpontját, akkor AF az ABC háromszög magassága. Jelöljük a tetraéder éleinek hosszát a-val.

Ekkor $AF = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $AS = \frac{2}{3}AF = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

Jelöljük a keresett DAS szöget α-val, ekkor $\cos\alpha = \frac{AS}{AD} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, amiből $\alpha \approx 54{,}7°$.

Megjegyzés:

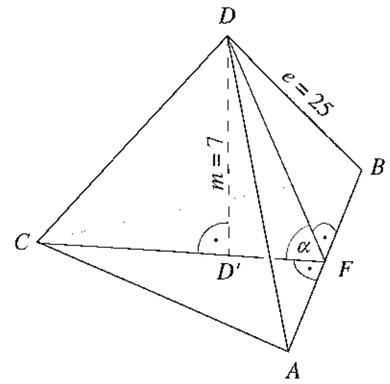
A szabályos tetraéderhez tartozik egy kocka. (A kockába írt tetraéderről van itt szó.) E kocka két-két szemközti lapjának nem párhuzamos átlói pl. AC és FH, a szabályos tetraéder egyik kitérő élpárja. Ezek az átlók merőlegesek egymásra, (ti. $AC \parallel EG$, amely merőleges FH-ra). Tehát a szabályos tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra.



1917. Állítsunk merőlegest az ABC szabályos háromszög síkjára a gúla D csúcsából; legyen a merőleges talppontja D'. Ez egyben az ABC háromszög súlypontja is, tehát $CD' = 2 \cdot FD'$, ahol F az AB oldal felezőpontja.

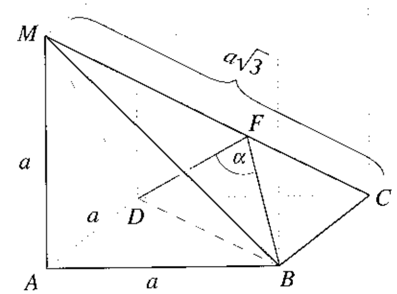
Pitagorasz-tétellel a $DD'C$ háromszögből: $CD' = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (cm), ezért $FD' = 12$ cm.

Az $FD'D$ derékszögű háromszögből $\text{tg}\alpha = \frac{7}{12} = 0{,}5833$, ezért $\alpha = 30{,}26°$.



1918. Legyen az $ABCD$ négyzet oldala a hosszúságú. Húzzuk be az egybevágó MBC és MCD háromszögek MC oldalához tartozó magasságait. A magasságok talppontja az MC élen F. A keresett hajlásszög (α) ekkor a BFD háromszög F-nél lévő szöge lesz. Kiszámítjuk a BFD háromszög oldalait:

$BD = \sqrt{2} \cdot a$, $FB = FD$, mivel a gúla szimmetrikus az AMC síkra. Az MBC derékszögű háromszög területét kétféleképpen írjuk fel: $T_{MBC\Delta} = \frac{BC \cdot BM}{2} = \frac{MC \cdot FB}{2}$, innen $FB = \frac{BC \cdot BM}{MC}$, azaz

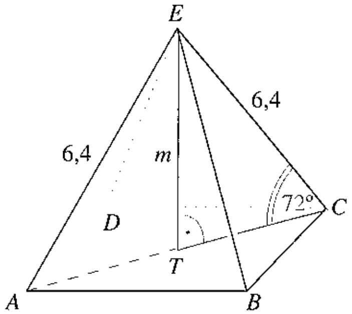


$FB = \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{3} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot a$. Tehát $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{BD}{2}}{FB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, innen $\alpha = 120°$.

Megjegyzés:

Az $ABCDM$ gúla egy a élű kockában helyezhető el a fenti ábra szerint. Ismert, hogy a kockát egy kiválasztott testátlója körül 120°-kal elforgatva a kocka önmagába megy át. Ha az MC testátló körüli 120°-os forgatásnál a kocka B csúcsa a D-be kerül, akkor az MBC háromszög síkja ugyanekkor az MCD háromszög síkjába megy át. A két sík szöge tehát valóban 120° (60°).

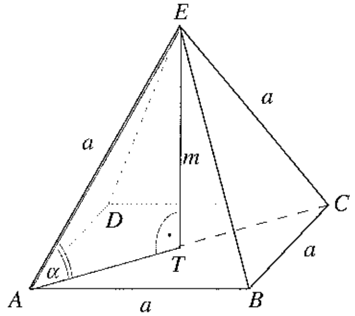
1919. Az $ABCD$ alaplapú szabályos gúla magasságának talppontja T.
Az ET magasság az ETC derékszögű háromszögből számítható ki.
$m = 6{,}4 \sin 72° \approx 6{,}1$.
A gúla magassága 6,1 cm.



1920. a) Az $ABCD$ alaplapú gúla éleit a-val jelöltük. A magasság talppontja, T, egyúttal az AC átló felezőpontja.
$AC = a\sqrt{2}$, $AT = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Az ATE derékszögű háromszögben a keresett szöget α-val jelölve

$$\cos\alpha = \frac{AT}{AE} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

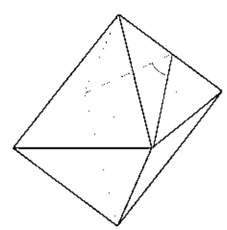
A keresett szög tehát 45°-os.

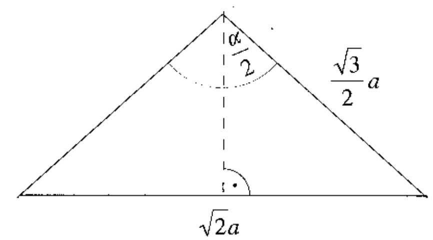


b) Az előbbiekből következik, hogy az ACE háromszög derékszögű: a két szemközti oldalél merőleges egymásra.

Megjegyzés:
Szögfüggvény alkalmazása nélkül is megoldható a feladat. Csak azt kell észre venni, hogy az $ABC\,\Delta \cong AEC\,\Delta$, hiszen 2-2 oldaluk egyenlő a-val, a harmadik pedig közös: AC. Ebből adódik, hogy az oldalél az alaplappal 45°-os szöget zár be, a két szemközti oldalél pedig merőleges egymásra.

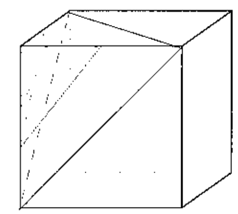
1921. A két szomszédos oldallap mint két metsző sík szögének meghatározásához a metszésvonalukra (ez a közös oldalél) mindkét síkban merőlegest állítunk (ez lehet például mindkét lapon az említett oldalélhez tartozó magasság). Lévén szabályos háromszögekről szó, e magasságok az él (jelöljük a-val) $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szeresei. E magasságoknak a közös végüktől különböző másik végük egy a élű négyzet két szemközti csúcsában található, tehát e magasságok a négyzet $\sqrt{2}a$ hosszúságú átlójával háromszöget alkotnak. E háromszög egyenlő szárú, és a szárszögét keressük. A szárszög felezője egyúttal az alap felezőmerőlegese is, ezt berajzolva két derékszögű háromszögre bonthatjuk háromszögünket, amelyben a keresett szög felét egy egyszerű visszakereséssel meghatározhatjuk:



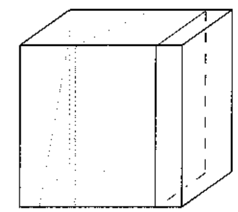


$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ amiből } \frac{\alpha}{2} = 54{,}736°, \text{ s így } \alpha = 109{,}47°.$$

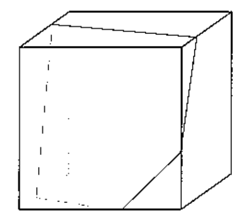
1922. a) Ha egy csúcsból induló három élet metsz a sík, háromszög-metszet keletkezik. Ha mindhárom élen a csúcstól ugyanolyan messze van a metszéspont, a háromszög szabályos is lesz. (A legnagyobb ilyet három alkalmas csúcson áthaladó síkkal tudjuk kimetszeni; ekkor lapátlók lesznek a háromszög oldalai.)



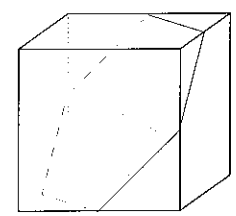
b) Természetesen lehet a metszet négyszög, de legáltalánosabban is csak trapéz, mivel a négy elmetszett oldallap közül legalább az egyik kettő párhuzamos, így egy párhuzamos oldalpár mindig keletkezik. Ha négy, egymással párhuzamos élet metsz a sík, akkor két-két párhuzamos oldalú négyszögmetszet (azaz paralelogramma) keletkezik. Ha a metsző sík merőleges ezen élekre, a metszet szabályos (azaz négyzet) lesz.



c) Ötszögben is metszhető, ebben azonban mindig lesz két-két párhuzamos oldalpár, emiatt aztán szabályos ötszögben a kocka nem metszhető el.

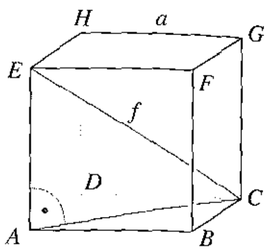


d) Szabályos hatszögben viszont igen: egy testátló felezőmerőleges síkja épp ezt teszi. (És így persze egyáltalán hatszögben is elmetszhető.)



1923. Az $ABCD$ alaplap átlója $AC = a\sqrt{2}$. A C-ből induló testátló, CE az ACE derékszögű háromszög átfogója. A Pitagorasz-tételt alkalmazva:
$CE^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2$, innen $CE = a\sqrt{3}$.

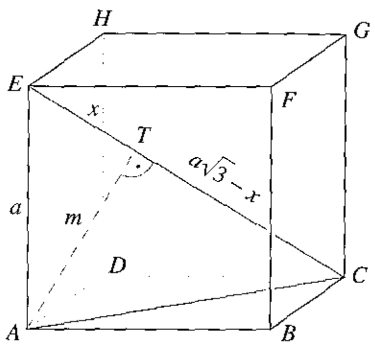
Megjegyzés:
Itt a téglatestre vonatkozó ún. térbeli Pitagorasz-tétel ($f^2 = a^2 + b^2 + c^2$) speciális esetét vezettük le.



1924. Az 1923. feladat ábráját és az ott leírt gondolatmenet alapján kapott eredményt (ún. térbeli Pitagorasz-tétel speciális esetét) használhatjuk fel. E szerint $CE = a\sqrt{3}$.
Innét kifejezzük a-t: $a = \frac{CE}{\sqrt{3}}$. Behelyettesítjük az adatot: $a = \frac{3,2}{\sqrt{3}} \approx 1,8$.
A kocka éle 1,8 dm = 18 cm.

1925. Legyen a kocka éle a. Ekkor a lapátló $d = a\sqrt{2}$, s ebből a kocka éle, $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$.
A kocka felszíne: $A = 6a^2 = 3d^2$, térfogata: $V = a^3 = \frac{d^3}{2\sqrt{2}} = \frac{d^3\sqrt{2}}{4}$.

1926. A testátlótól a két végpontja 0 távolságra van. Egyébként a testátló olyan derékszögű háromszögek átfogója, melyeknek befogói egy él és egy lapátló, a derékszögű csúcspont pedig a kocka egy-egy csúcspontja. E háromszögek tehát egybevágók. Így elég egy ilyen háromszöget vizsgálni. Az átfogóhoz tartozó $m = AT$ magasság éppen a csúcspontnak a testátlótól való távolsága.
Az m kiszámítható úgy, hogy az $ACE\,\Delta$ területét kétféleképpen írjuk fel.



Felhasználjuk, hogy a lapátló, $AC = a\sqrt{2}$, a testátló, $CE = a\sqrt{3}$.
Az $ACE\,\Delta$ területének kétszerese: $m \cdot EC = AE \cdot AC$, innen a kocka csúcsának a testátlótól mért távolsága: $m = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

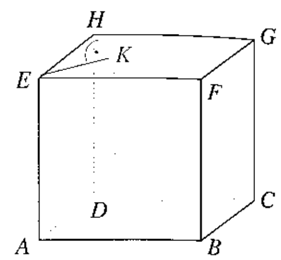
Megjegyzés:
1. Az m kiszámítható az $AEC\,\Delta$-re felírt magasságtétel és az $ATE\,\Delta$-re felírható Pitagorasz-tétel felhasználásával is.
$m^2 = x(a\sqrt{3} - x)$ és $m^2 = a^2 - x^2$ (*)
E két egyenletből kapjuk: $xa\sqrt{3} = a^2$, ahonnét $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
Ezt az értéket behelyettesítjük a *-gal jelölt egyenletbe: $m^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2$.
Ebből a keresett távolság $0 < m = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.
2. Az x értékét az AEC háromszögre felírható befogótételből közvetlenül is kiszámíthatjuk: $a^2 = xa\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

1927. a) A kocka testátlójának és egyik (a testátlóhoz csatlakozó) élének végpontjai egy derékszögű háromszöget határoznak meg, ahol a testátló az átfogó, az egyik él pedig befogó. A hajlásszög (α) ebben a háromszögben az egyik szög, így $\cos\alpha = \frac{\text{él}}{\text{testátló}}$. A testátló hossza $12 \cdot \sqrt{3}$ cm így $\cos\alpha = \frac{12}{12 \cdot \sqrt{3}}$, ahonnan $\alpha \approx 54,74°$. Ha egy olyan éllel szeretnénk meghatározni a testátló szögét, amely nem a testátló egyik végpontjából indul ki, akkor keressünk az adott éllel párhuzamos, a testátló végpontjából kiinduló kockaélt, és ezzel az éllel határozzuk meg a szöget, mely megegyezik a keresett szöggel.

b) A testátló merőleges vetülete az egyik lapra éppen a lap átlója lesz. Az átló és a testátló végpontjai egy derékszögű háromszöget határoznak meg, ahol a testátló az átfogó. Ha a hajlásszög α, akkor $\cos\alpha = \frac{\text{lapátló}}{\text{testátló}}$; a lapátló hossza $12 \cdot \sqrt{2}$ cm, a testátló hossza $12 \cdot \sqrt{3}$ cm, így $\cos\alpha = \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{12 \cdot \sqrt{3}}$, innen $\alpha \approx 35,26°$.

c) A testátló két végpontja és a csúcs által meghatározott derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságát keressük, legyen ez d. A háromszög területét kétféleképpen írjuk fel: $T = \frac{\text{testátló} \cdot d}{2} = \frac{\text{két befogó szorzata}}{2}$. A testátló $12 \cdot \sqrt{3}$ cm, a két befogó 12 cm és $12 \cdot \sqrt{2}$ cm, így $d = \frac{12 \cdot 12 \cdot \sqrt{2}}{12 \cdot \sqrt{3}} = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 9,80$ (cm).

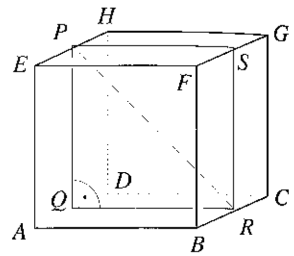
1928. Egy a élű kocka lapátlója $a\sqrt{2}$, testátlója $a\sqrt{3}$. Az EH él merőleges [$ABFE$] lapra, így HE merőleges EB lapátlóra, HEB derékszögű háromszög, melyben E csúcsnak HB testátlótól való távolsága EK. Írjuk fel az EHB háromszög területét kétféleképpen!



$$T = \frac{HE \cdot EB}{2} = \frac{HB \cdot EK}{2} \Rightarrow \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 3}{2} \Rightarrow$$

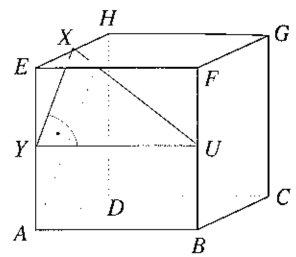
$$\Rightarrow a = \frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ cm a kocka éle.}$$

1929. a) EH-val párhuzamos él AD, BC és FG. Az élfelező pontok ilyen sorrendben: P, Q, R, S.
$PQ = a$, mert párhuzamos és egyenlő az $AE = a$ éllel, $PR = a\sqrt{2}$, mert párhuzamos és egyenlő a BE lapátlóval. Az $a = 1$ miatt $PR = \sqrt{2}$.



b) Az AE és EH metsző élek felezőpontja pl. X és Y. XY az AEH háromszögnek az AH-val párhuzamos középvonala. Minthogy $AH = a\sqrt{2}$, a felezőpontok távolsága $XY = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Az $a = 1$ miatt $XY = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

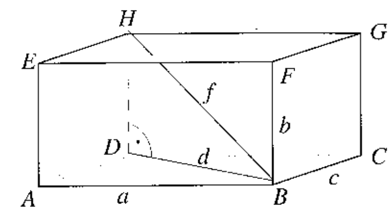


c) Kitérő élek pl. EH és BF, az utóbbi felezőpontja U. XU hossza Pitagorasz-tétellel számítható ki az XYU derékszögű háromszög átfogójaként. ($XY \perp YU$, mert YU merőleges az [$ADHE$] síkra, így annak minden egyenesére, tehát XY-ra is).
$XU^2 = XY^2 + YU^2 = \frac{1}{2}a^2 + a^2 = \frac{3}{2}a^2$, ebből a kitérő élek felezőpontjainak távolsága, $XU = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Az $a = 1$ miatt: $XU = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Megjegyzés:

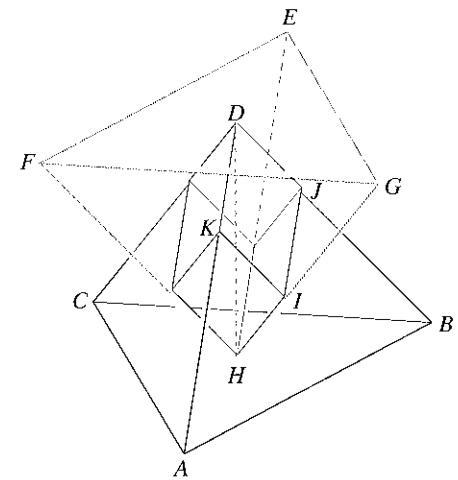
1. A kocka szimmetria-tulajdonságai miatt az élfelező pontok között másféle távolság nincs.
2. Az XU meghatározható az XEU derékszögű háromszögből is.

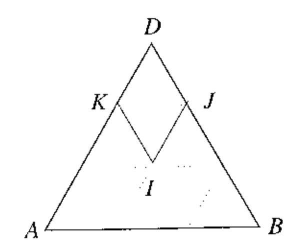
1930. Az $ABCDEFGH$ téglatest egyik testátlója BH ($= f$), az $ABCD$ alaplap átlója BD ($= d$).
A DAB Δ derékszögű, mert két oldala az $ABCD$ téglalap oldala;
HDB Δ is derékszögű, mert HD merőleges az $ABCD$ alaplapra, tehát minden egyenesére, így BD-re is.



Legyenek a B csúcsból induló oldalélek: $BA = a$, $BF = b$, $BC = c$.
Kétszer alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: DAB Δ-re: $d^2 = a^2 + c^2$ és
HDB Δ-re: $f^2 = d^2 + b^2$.
E két összefüggésből kapjuk az ún. térbeli Pitagorasz-tételt: $f^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

1931. A két tetraéder együtteséből álló összetett test középpontosan szimmetrikus a közös magasság felezőpontjára, és harmadrendű forgásszimmetriát mutat e magasság mint tengely körül. Ezért metszetükre is ugyanez igaz. Az igazi feladat a két palást metszetvonalának meghatározása. Tekintsük pl. az ábrán fekete színű tetraéder „elöl", nekünk jobbra lévő ABD lapját. Ez párhuzamos a szürke tetraéder „balra hátul" lévő EFH lapjával, ezért a másik két szürke lappal (EGH, FGH) való metszésvonala (IJ, IK) párhuzamos az EFH lap ugyanezen lapokkal való metszésvonalával. De azok a szürke tetraéder EH, FH élei! Ugyanez a gondolat mindegyik piros élre elmondható, így megállapíthatjuk, hogy a palástok metszésvonalai mind az eredeti oldalélekkel párhuzamos szakaszok. Így a metszettest lapjainak szemközti élei párhuzamosak, tehát e lapok legalábbis paralelogrammák. A már említett harmadrendű forgásszimmetria miatt azonban a metszettestnek az eredeti tetraéder csúcsaiból (D, H) induló élei egyforma hosszúak, tehát e paralelogrammák rombuszok. Vagyis a metszettest egy romboéder. (H az ABC lap súlypontja, az innen induló HI szakasz párhuzamos CD-vel, hiszen annak tükrözésével jött létre a HG él. Az egész ábra síkszimmetrikus pl. a $HGDC$ síkra. Ezért DI és CH egyaránt az őket tartalmazó lap magasságvonalára illeszkedik, ezek az AB él felezőpontjában futnak össze. Az ezen pont és a C, D alkotta háromszögben alkalmazva a párhuzamos





szelők tételét: $CH = DI$, de ekkor I az $ABD\,\Delta$ súlypontja. A többi hasonló pontra ugyanez áll, tehát az egyik tetraéder élei a másik lapjait azok súlypontjában döfik át. Egy szabályos háromszög egyik csúcsára és súlypontjára mint szemközti csúcsra illesztett rombusz éle harmada az oldalnak, mint azt néhány, oldalakkal párhuzamos szakasz berajzolásával könnyen beláthatjuk. Vagyis a metszetként kapott romboéder élhossza egyharmada a tetraéder élhosszának.)

1932. Legyen az eredeti kocka éle a, ekkor felszíne $6a^2$.
Az új kocka éle $a + 4$, felszíne $6(a + 4)^2 = 6a^2 + 480$.
Ezt 6-tal osztva: $(a + 4)^2 = a^2 + 80$, felbontva: $a^2 + 8a + 16 = a^2 + 80$, rendezve: $8a = 64$, azaz $a = 8$. Ekkor az eredeti kocka térfogata: $V = a^3 = 8^3 = 512$ (cm³).

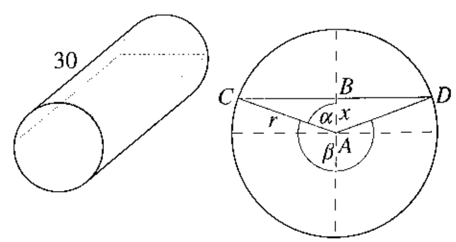
1933. A téglatest éleinek aránya: $a:b:c = 1:3:5$. Ez azt jelent, hogy $b = 3a$, $c = 5a$.
Felszíne: $2(ab + bc + ca) = 46a^2$, térfogata: $abc = 15a^3$.
A feladat szövege szerint $15a^3 = 46a^2$, amiből $a = \frac{46}{15}$ $(a > 0)$.
A fentieket felhasználva $b = \frac{46}{5}$, $c = \frac{46}{3}$.

1934. Legyen a téglatest egy csúcsból induló három éle $3x$; $4x$; $5x$.
Így térfogata $3x \cdot 4x \cdot 5x = 300$, ebből $x = \sqrt[3]{5}$.
Egy csúcsból kiinduló élei: $3\sqrt[3]{5}$ cm, $4\sqrt[3]{5}$ cm, $5\sqrt[3]{5}$ cm.

1935. Az edény térfogata $10^2\pi \cdot 17 \approx 5341$ cm³ $\approx 5{,}34$ liter, tehát megfelelő lesz.

1936. a) 3 deciliter = 300 cm³. A bögre alapterülete tehát 30 cm², amiből az átmérője 6,2 cm-nek adódik.
b) Egy bögre esetén az alját és a palástját kell kívül-belül mázzal bevonni, ez összesen $2(3{,}1^2\pi + 62\pi) \approx 450$ (cm²), amit még 8%-kal növelve 486 cm²-t kapunk. 1500 darab bögre esetén összesen 787 200 cm²-t, azaz 78,72 m²-t kell mázzal bevonni.

1937. A fekvő, forgáshenger alakú kazán vízzel töltött részének keresztmetszete körszelet. Ennek területét kell meghatároznunk a víz mennyiségének megállapításához. A körszelet területe összeadódik az A középpontú $r = 7$ dm sugarú, $\beta = 360° - 2\alpha$ középponti szögű körcikk és egy háromszög területéből.



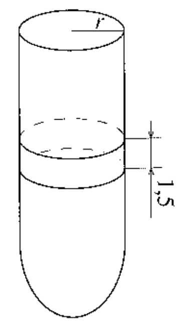
Az ábrán feltüntetett α kiszámítható az ABC derékszögű háromszögből, melynek oldalai: $r = 7$ dm és $x = \frac{7}{3}$ dm.

A $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{1}{3}$, ebből $\alpha \approx 70{,}53°$, $2\alpha \approx 141{,}06°$.

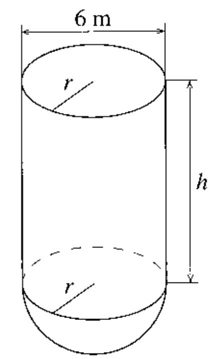
A $t(ACD) = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2} = 24{,}5 \sin 141{,}06° \approx 15{,}40$.

A körcikk t' területét megkapjuk: $\frac{t'}{r^2\pi} = \frac{\beta}{360°}$, ebből $t' = \frac{r^2\pi\beta}{360°}$,
minthogy $\beta = 360° - 2\alpha \approx 218{,}94° \Rightarrow t' = 29{,}80\pi \approx 93{,}62$.
A körszelet területe: $t(ACD) + t' \approx 15{,}40 + 93{,}62 = 109{,}02$.
A víz térfogata $V = 30 \cdot 109{,}02 \approx 3\,271$ (dm³).

1938. A kémcső két szomszédos beosztása közötti térfogata 1 cm³, ezért $r^2\pi 1{,}5 = 1$.
Innen $r^2 = \frac{1}{1{,}5\pi} \approx 0{,}21 \Rightarrow r \approx 0{,}46$.
A kémcső belső átmérője kb. 0,9 cm.



1939. A 120 m³ térfogatú tartály egy h magasságú hengerből és egy félgömbből áll. Sugaruk 3 m.
$r^2\pi h + \frac{1}{2}\frac{4r^3\pi}{3} = 120.$
Az r behelyettesítése és a közös tényezők kiemelése után:
$9\pi(h + 2) = 120$, ebből $h + 2 = \frac{120}{9\pi}$.
Ebből $h = \frac{40}{3\pi} - 2 \approx 2{,}24$.
A hengeres rész magassága: 2,24 m.



1940. 82 hl = 8200 liter = 8,2 m³. 4 óra alatt a tartályban 32,8 m³ víz lesz.
Mivel a tartály alapterülete $3{,}75^2\pi \approx 44{,}18$ (m²), ezért a víz $h = \frac{32{,}8}{44{,}18} \approx 0{,}74$ (m) magasan áll benne.

1941. $V = 15^2\pi \cdot 7 \cdot \dfrac{30}{360} \approx 412{,}3$ (cm³).

1942. Az eredeti henger adatai: r az alapkör sugara, és m a magassága. Az átalakítással az átmérő 1 cm-rel, tehát a sugár 0,5 cm-rel csökkent, míg a magasság 4,7 cm-rel nőtt. A térfogat nem változott, ez lesz az első egyenlet. A felszín növekedése is adott, ami a másik egyenlethez vezet. A kérdés az új henger méretei, de ehhez a régit is meg kell határozni. Egyenleteink, amelyekből az r-et és az m-et keressük:

(1) $r^2\pi m = (r-0{,}5)^2\,\pi(m+4{,}7)$;

(2) $2r\pi(r+m) + 27{,}3 = 2(r-0{,}5)\pi(r-0{,}5+m+4{,}7)$.

Az első egyenletet π-vel, a másodikat 2π-vel eloszthatjuk. Ekkor (2) kifejtve:

$r^2 + rm + 4{,}345 = r^2 - r + 0{,}25 + rm + 4{,}7r - 0{,}5m - 2{,}35$.

(Felhasználtuk, hogy $(r-0{,}5)[(r-0{,}5)+(m+4{,}7)] = (r-0{,}5)^2 + (r-0{,}5)(m+4{,}7)$.

Másként is számolhatunk: $(r-0{,}5)(r+m+4{,}2) =$

$= r^2 - 0{,}5r + rm - 0{,}5m + 4{,}2r - 2{,}1 = r^2 + rm + 3{,}7r - 0{,}5m - 2{,}1$.)

Mindebből: $6{,}445 = 3{,}7r - 0{,}5m$, azaz $m = 7{,}4r - 12{,}89$.

Ezt beírva a π-vel leosztott (1)-be:

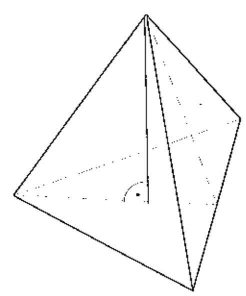
$r^2(7{,}4r - 12{,}89) = (r-0{,}5)^2(7{,}4r - 12{,}89 + 4{,}7)$, azaz

$7{,}4r^3 - 12{,}89r^2 = (r^2 - r + 0{,}25)(7{,}4r - 8{,}19) = 7{,}4r^3 - 15{,}59r^2 + 10{,}04r - 2{,}0475$.

Rendezve egy másodfokú egyenlet adódik: $2{,}7r^2 - 10{,}04r + 2{,}0475 = 0$.

Ebből $r_1 \approx 3{,}5$ (cm), illetve $r_2 \approx 0{,}22$ (cm). Behelyettesítve ezeket, a magasságra $m_1 \approx 13$ (cm) és $m_2 \approx -11{,}26$ (cm) adódik. Utóbbi nem lehetséges, de a gyakorlati feladat szövegéhez eleve nem illik ilyen keskeny henger. Azaz az eredeti üdítős doboz 3,5 cm sugarú és 13 cm magas henger, amiből 3 cm lett az új sugár, és a magasság pedig 17,7 cm. Keskenyebb és magasabb lett tehát, kisebb kézzel is átfogható.

1943. Az a élű szabályos háromszög magassága $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$, egy ilyen háromszög területe ezért $\dfrac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$, a négy ilyen lapból álló tetraéder felszíne tehát: $A = \sqrt{3}a^2$. A testmagasság az alaplapot annak súlypontjában éri el, ezért ez egy olyan derékszögű háromszög egyik befogója, amelynek átfogója egy oldallap magassága ($\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$), másik befogója pedig egy ugyanilyen magasság egyharmada ($\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$, lásd az 1916. feladat megoldását). Pitagorasz-tétellel e testmagasság:

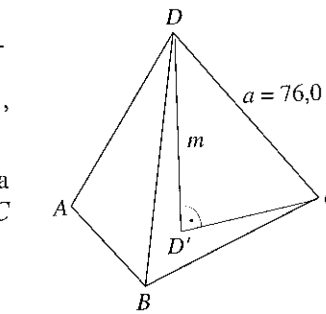


$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \sqrt{\frac{27a^2 - 3a^2}{36}} = \sqrt{\frac{24a^2}{36}} = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

A test térfogata tehát (alapterület szorozva magassággal, osztva hárommal):

$$V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}a}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

1944. A tetraéder egy lapjának területe 2500 cm². Ha a tetraéder élhosszát a-val jelöljük, akkor $2500 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, amiből $a = 76{,}0$ cm.



A tetraéder D csúcsából az ABC háromszög síkjára állított merőleges talppontja D'. Ez egyben az ABC háromszög súlypontja is, tehát

$CD' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 43{,}9$ (cm).

A tetraéder magasságát a $DD'C$ háromszögből Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

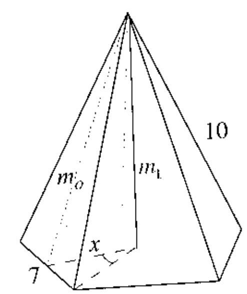
$m = \sqrt{76{,}0^2 - 43{,}9^2} = 62{,}0$ (cm).

1945. a) Az oldallap m_o magassága Pitagorasz-tétellel:

$\sqrt{10^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{87{,}75} \approx 9{,}37$.

Az alaplap mint szabályos ötszög középpontjából az egyik (alap)él felezőpontjába mutató szakasza:

$x = \dfrac{3{,}5}{\operatorname{tg} 36°} \approx 4{,}82$.



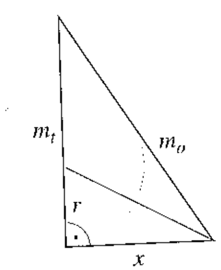
Az alaplap területe így: $T = 5\dfrac{7x}{2} \approx 84{,}30$.

A test felszíne: $A = T + 5\dfrac{7m_o}{2} \approx 248{,}23$.

Újabb Pitagorasz-tétellel a testmagasság: $m_t = \sqrt{m_o^2 - x^2} \approx 8{,}03$.

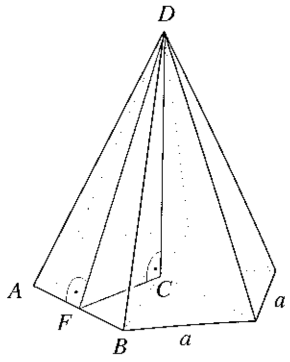
A test térfogata így: $V = \dfrac{Tm_t}{3} \approx 225{,}76$.

b) A gúlába írható gömb az alaplapot m_t talppontjában érinti, az oldallapokat pedig azok magasságvonalán. Ha a gúlát elmetsszük egy m_t-re és m_o-ra illeszkedő síkkal, akkor a gömb egy főkörét látjuk, amelynek középpontja m_t-n van, és amely érinti m_o-t és x-et, mint egy szög szárait (utóbbit épp m_t-vel közös végpontjában). Vagyis a kör középpont-



ja rajta kell legyen m_o és x szögfelezőjén. Ekkor a szögfelezőtétel miatt (lásd pl. 1759. feladat d) pontja): $r = \dfrac{m_t x}{x + m_o} \approx 2{,}73$.

1946. Az alaplap 6 db szabályos háromszögből, a palást 6 db egyenlő szárú háromszögből áll. Az egyik ilyen az ABD Δ, az alapjához tartozó magassága azonos a CDF Δ átfogójával, ahol C a testmagasság talppontja, F az AB alapél felezőpontja.



CF kiszámítható az ABC szabályos háromszög magasságaként: $CF = \dfrac{a}{2}\sqrt{3} = 0{,}6\sqrt{3}$.

A CDF derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tételből kapjuk meg DF-et.

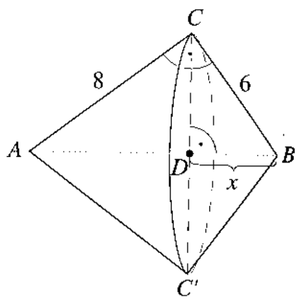
$DF^2 = CD^2 + CF^2 = 25 + 1{,}08 = 26{,}08$.

$DF \approx 5{,}107$.

A palást területe: $6 \cdot \dfrac{a \cdot DF}{2} \approx 3 \cdot 1{,}2 \cdot 5{,}107 \approx 18{,}38$.

A toronysisak befedéséhez kb. 18,4 m² rézlemez szükséges.

1947. A keletkezett forgástest egy olyan kettős kúp (ACC', BCC'), melyek alaplapjának sugara a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága.



A derékszögű háromszög átfogója Pitagorasz tétele alapján 10 cm. ABC derékszögű háromszögre a befogótételt alkalmazva $6 = \sqrt{10x}$, ebből

$DB = x = 3{,}6$ cm, $AD = 10 - x = 6{,}4$ (cm).

ABC derékszögű háromszögre a magasságtételt alkalmazva $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{6{,}4 \cdot 3{,}6} = 4{,}8$ (cm)

az átfogóhoz tartozó magasság és egyben a kettős kúp alapkörének sugara. A kettős kúp térfogata: $V = \dfrac{CD^2 \cdot \pi \cdot DB}{3} + \dfrac{CD^2 \cdot \pi \cdot AD}{3} = \dfrac{CD^2 \cdot \pi \cdot (AD + DB)}{3} =$

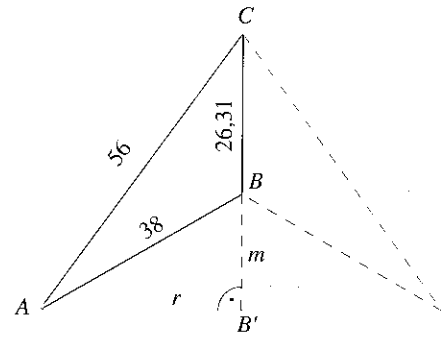
$= \dfrac{CD^2 \cdot \pi \cdot AB}{3} = \dfrac{4{,}8^2 \cdot \pi \cdot 10}{3} \approx 241{,}3$ (cm³).

Megjegyzés:

Az ABC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a háromszög területének kétféle felírásából is megkapható.

$t = \dfrac{10 \cdot m}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2}$, ebből az $m = 4{,}8$ (cm).

1948. A megadott háromszög legnagyobb oldalával szemközti szöge tompaszög! Egy-egy Pitagorasz-tételt írhatunk fel az $AB'B$, illetve az $AB'C$ derékszögű háromszögben:



$r^2 = 38^2 - m^2$, illetve

$r^2 = 56^2 - (m + 26{,}31)^2$.

Ebből a két egyenletből álló egyenletrendszert megoldjuk:

$38^2 - m^2 = 56^2 - (m + 26{,}31)^2$

$52{,}62m = 999{,}78$

$m = 19{,}00$ cm

Visszahelyettesítéssel $r^2 = 38^2 - 19^2 = 1083$, vagyis $r = 32{,}91$ cm.

A forgástest felszíne a B csúcsú, illetve a C csúcsú forgáskúpok palástterületének összege: $A = 38 \cdot 32{,}91\pi + 56 \cdot 32{,}91\pi = 9718{,}6$ (cm²).

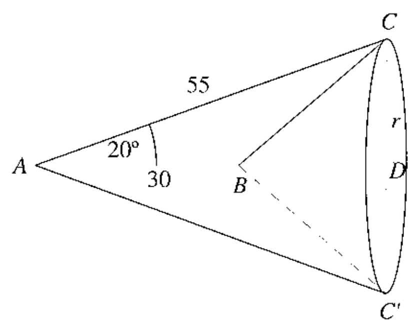
A forgástest térfogata a C csúcsú, illetve a B csúcsú forgáskúpok térfogatának különbsége: $V = \dfrac{32{,}91^2\pi \cdot (26{,}31 + 19{,}00)}{3} - \dfrac{32{,}91^2\pi \cdot 19{,}00}{3} = \dfrac{32{,}91^2\pi \cdot 26{,}31}{3} =$

$= 29\,840$ (cm³).

Másik megoldás:

Ha az ABC háromszög B-nél fekvő szögét kiszámítjuk (120°), akkor r és m értékét az $AB'B$ derékszögű háromszögből akár szögfüggvények (vagy speciálisan a szabályos háromszögre vonatkozó ismeretek) segítségével is megkaphatjuk.

1949. A keletkezett forgástest térfogata az ACC' és BCC' forgáskúpok térfogatának különbsége.



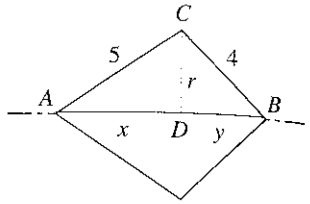
A forgáskúpok közös alapkörének sugara az ADC derékszögű háromszögből $\sin 20° = \dfrac{r}{55}$, ebből $r \approx 18{,}8$ cm.

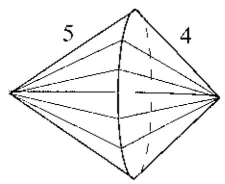
A kérdéses forgástest térfogata:

$V = \dfrac{CD^2 \cdot \pi \cdot AD}{3} - \dfrac{CD^2 \cdot \pi \cdot BD}{3} =$

$= \dfrac{CD^2 \cdot \pi \cdot (AD - BD)}{3} = \dfrac{CD^2 \cdot \pi \cdot AB}{3} = \dfrac{18{,}8^2 \cdot \pi \cdot 30}{3} \approx 11\,103{,}6$ (cm³).

1950. a) Az $ABC\,\Delta$ leghosszabb oldala legyen AB. Ha e körül forgatjuk meg a háromszöget, akkor a létrejött forgástest két, alapjával egymáshoz illesztett kúp, amelyek r sugara az ABC háromszögnek az AB-hez tartozó magassága (ennek talppontja D), a kúpok magassága x és y, ezek összege AB. Meghatározható r az ACD és BCD derékszögű háromszögekre felírt Pitagorasz-tételből.





$ACD\Delta$-re: $r^2 = 25 - x^2$.

$BCD\Delta$-re: $r^2 = 16 - (7 - x)^2$.

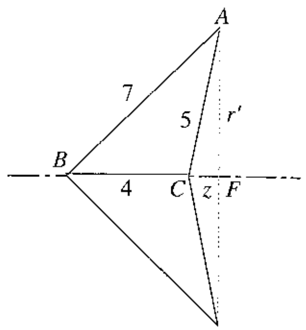
Ezen egyenletrendszerből kiküszöböljük az r-et: $x = \dfrac{29}{7}$. Ezt visszahelyettesítjük az egyik előbbi egyenletbe $r^2 = 25 - \dfrac{841}{49} = \dfrac{384}{49}$.

A forgástest térfogata a fent említett két kúp térfogatának összege:

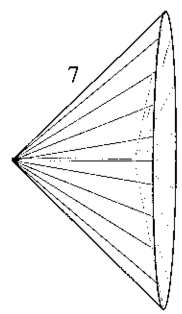
$$V = \frac{r^2\pi x}{3} + \frac{r^2\pi y}{3} = \frac{r^2\pi}{3}(x+y) = \frac{\frac{384}{49}\pi \cdot 7}{3} = \frac{128\pi}{7} \approx 57{,}45.$$

A forgástest térfogata 57,45 cm³.

b) A legrövidebb oldal a BC. E körüli forgatáskor létrejövő test alakja függ attól, hogy a háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű-e. A háromszög leghosszabb oldalára felírt koszinusztételből megállapítható, hogy a legnagyobb szög koszinusza negatív. Ez azt jelenti, hogy a háromszög tompaszögű. Ezért a forgástest térfogata két közös alapú forgáskúp térfogatának különbsége. Az alapkör sugara r', magasságuk z, illetve $z + 4$.



A forgástengely és az A-ból húzott magasság egyenesének metszéspontja F. A forgástest r' sugarát a két derékszögű háromszögre felírható Pitagorasz-tételből számítjuk ki.



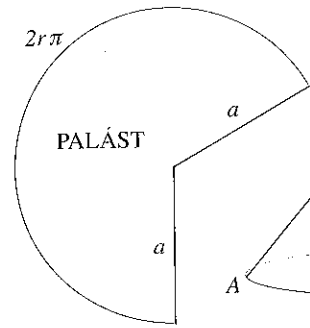
$ACF\,\Delta$-re: $r'^2 = 25 - z^2$;

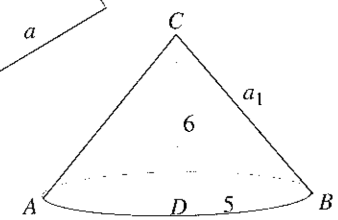
$ABF\,\Delta$-re: $r'^2 = 49 - (4 + z)^2$.

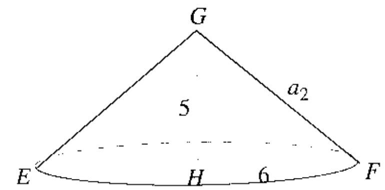
Ezen egyenletrendszerből kiküszöböljük r'^2-et: $z = 1$. Ezt visszahelyettesítjük az egyik egyenletbe, amiből adódik: $r'^2 = 24$.

$$V = \frac{r'^2\pi(z+4)}{3} - \frac{r'^2\pi \cdot 4}{3} = 32\pi \approx 100{,}5.$$ E forgástest térfogata kb. 100,5 cm³.

1951. A forgáskúp csúcsán átmenő, az alaplapra merőleges sík a forgáskúpból olyan egyenlő szárú háromszöget metsz ki, amelynek alapja a forgáskúp alapkörének átmérője, szára a forgáskúp alkotója, alaphoz tartozó magassága a forgáskúp magassága.
Az r sugarú, m magasságú, a alkotójú forgáskúp palástjának területe: $P = r \cdot \pi \cdot a$.



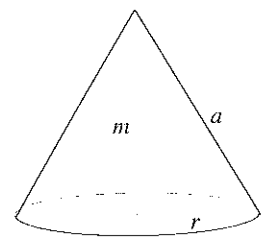


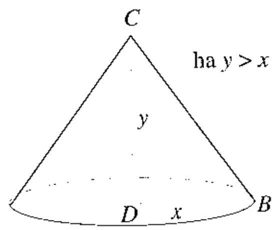


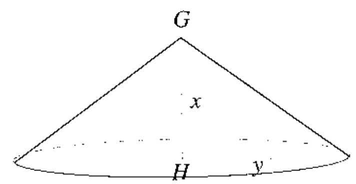
A forgáskúpok alkotója CDB, illetve GHF derékszögű háromszögekből Pitagorasz tétele alapján számolható.

$a_1 = \sqrt{5^2 + 6^2} = a_2$. Mivel a két kúp alkotója egyenlő, annak a palástja nagyobb, amelyik alapkörének a sugara nagyobb.
Tehát a 6 cm sugarú, 5 cm magasságú forgáskúp palástjának területe nagyobb, mint az 5 cm sugarú, 6 cm magasságú forgáskúp palástjának területe.

1952. A forgáskúp csúcsán átmenő, az alaplapra merőleges sík a forgáskúpból olyan egyenlő szárú háromszöget metsz ki, amelynek alapja a forgáskúp alapkörének átmérője, szára a forgáskúp alkotója, alaphoz tartozó magassága a forgáskúp magassága.
Az r sugarú, m magasságú, a alkotójú forgáskúp palástjának területe: $P = r \cdot \pi \cdot a$, ahol $a = \sqrt{r^2 + m^2}$.



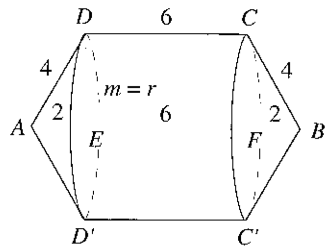




A forgáskúpok alkotója CDB, illetve GHF derékszögű háromszögekből Pitagorasz tétele alapján számolható.

$a_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = a_2$. Mivel a két kúp alkotója egyenlő, annak a palástja nagyobb, amelyik alapkörének a sugara nagyobb.

1953. A keletkezett forgástest egy 6 cm magasságú hengerből és 2 db 2 cm magasságú forgáskúpból áll. A henger és a forgáskúpok közös alaplapjának sugara a szimmetrikus trapéz m magassága, amely AED derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele értelmében:



$m = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$

Az r sugarú, a alkotójú forgáskúp palástjának területe: $P = r \cdot \pi \cdot a$ (itt $r = m$).

A keletkezett forgástest felszíne két kúppalástból és egy hengerpalástból áll.

$A = 2 \cdot P_{\text{kúp}} + P_{\text{henger}} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot a + 2r \cdot \pi \cdot DC = 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \pi \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot 6 =$

$= 40\sqrt{3} \cdot \pi \approx 217{,}7$ (cm²)

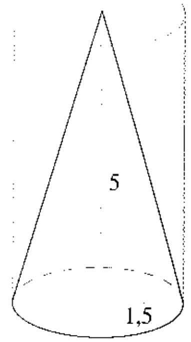
A keletkezett forgástest térfogata:

$$V = 2 \cdot V_{\text{kúp}} + V_{\text{henger}} = 2 \cdot \frac{(2\cdot\sqrt{3})^2 \cdot \pi \cdot 2}{3} + (2\sqrt{3})^2 \cdot \pi \cdot 6 = 88\pi \approx 276{,}5 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

1954. a) A kúp térfogata a henger térfogatának egy harmada, tehát 66,7% forgács keletkezik.

b) Azonos magasságú kúp, illetve gúla térfogatának aránya megegyezik az alapterületük arányával. A kúp alapterülete $1{,}5^2\pi = 7{,}07$ (cm²), az 1,5 cm sugarú körbe írt szabályos hatszög területe $6 \cdot \frac{1{,}5^2\sqrt{3}}{4} \approx 5{,}85$ (cm²).

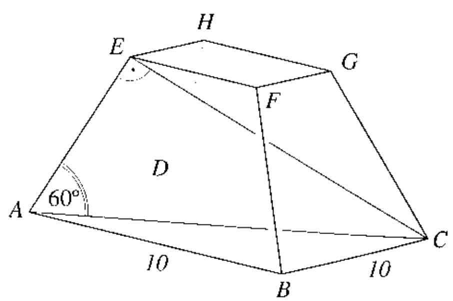
A kúpba írt szabályos hatoldalú gúla térfogata a kúp térfogatának $\frac{5{,}85}{7{,}07} = 0{,}827$ része, azaz 82,7%-a, ezért a kúp anyagának legalább 17,3%-át kell eltávolítani.



c) $0{,}666 + 0{,}333 \cdot 0{,}173 \approx 0{,}724$, tehát a henger anyagának 72,4%-át kell eltávolítani a megmunkálás során.

1955. Készítsünk ábrát! Az $ABCD$ négyzet átlója $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ (cm), az AEC derékszögű háromszög egy szabályos háromszög „fele", ezért

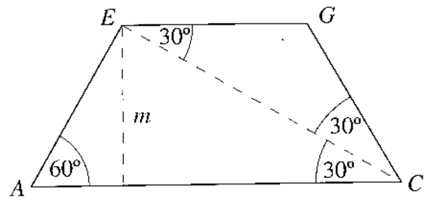
$AE = \frac{AC}{2} \approx 7{,}07$ (cm).



Vizsgáljuk az $ACGE$ trapézt!

Egyrészt a trapéz magassága (ami egyben a csonkagúla magassága is)

$m = AE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}12$ cm, másrészt a CEG háromszög egyenlő szárú, így $EG = GC \approx 7{,}07$ cm. Ebből következik, hogy az $EFGH$ négyzet oldala pontosan fele az $ABCD$ négyzetének (5 cm).



A csonkagúla térfogata: $V \approx \frac{6{,}12}{3} \cdot (100 + \sqrt{100 \cdot 25} + 25) \approx 357$ (cm³).

A test felszínének kiszámításához egy oldallapjának területét kell még meghatározni.

Vizsgáljuk az $ABFE$ trapézt!

A trapéz magassága:

$m_o \approx \sqrt{7{,}07^2 - 2{,}5^2} \approx 6{,}61$ (cm),

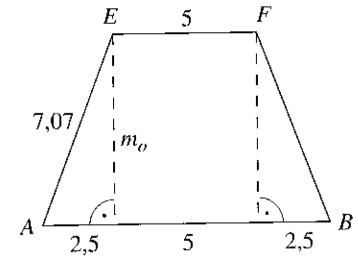
így a területe: $T_o \approx \frac{15 \cdot 6{,}61}{2}$ (cm²),

tehát a palást területe:

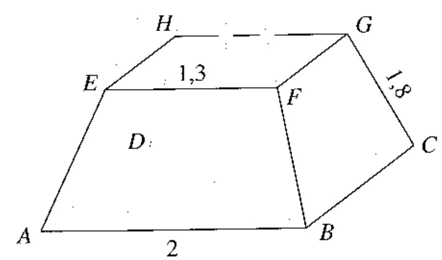
$P = 4T_o \approx 30 \cdot 6{,}61 = 198{,}3$ (cm²),

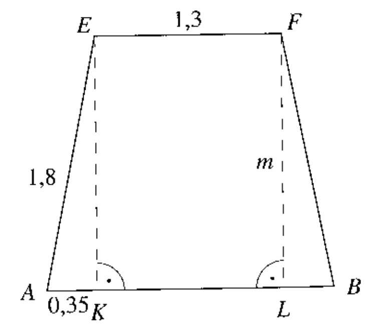
a csonkagúla felszíne pedig:

$A \approx 100 + 25 + 198{,}3 = 323{,}3$ (cm²).



1956. A csonkagúla palástja négy egybevágó szimmetrikus trapézból áll. $ABFE$ trapéz alapjai 2 m, illetve 1,3 m, szárai 1,8 m, magassága AKE derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján $0{,}35^2 + m^2 = 1{,}8^2 \Rightarrow m \approx 1{,}77$, a trapéz területe $T = \frac{(2 + 1{,}3)1{,}77}{2} \approx 2{,}92$, a csonkagúla palástja kb. 11,68 m². (Ennél többet kell számítani az összeállítás miatt).





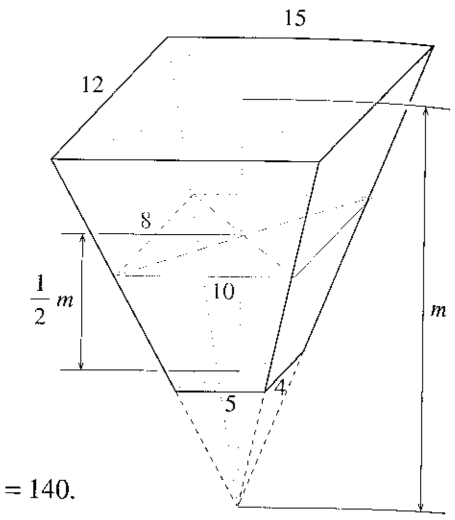
1957. A csonkagúla térfogata adott alapterületek és a testmagasság ismeretében:

$V = \frac{m}{3}(T + \sqrt{Tt} + t)$.

Minthogy $T = 180$, $t = 20$, $m = 6{,}0$.

$V = 2(180 + 60 + 20) = 520$.

Térfogat: 520 m³. A vízgyűjtő medencébe 5200 hl víz fér.



a) A félmagasságban lévő síkmetszet oldalai 10 m és 8 m, (Az oldallapok ui. trapézok, amelyeknek a középvonala a síkmetszet határoló vonalai), tehát $t_1 = 80$, $m_1 = 3$.

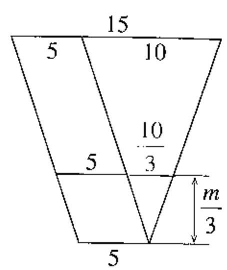
Felhasználjuk még, hogy $t = 20$.

$V_1 = \frac{m_1}{3}(t_1 + \sqrt{t_1 t} + t) = 80 + 40 + 20 = 140.$

A feléig töltött tartályban 140 m³ víz van.

b) A harmad magassághoz tartozó síkmetszet oldalainak kiszámítása lehetséges ugyancsak az oldallap-trapézok segítségével. Ezek felbonthatók egy paralelogrammára és egy háromszögre. A harmad-magasságban lévő sík az oldallapok magasságát is harmadolja. A háromszögek hasonlóságát is figyelembe véve megállapíthatók e síkmetszet oldalai:

$5 + \frac{10}{3} = \frac{25}{3}$, $4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$, ebből $t_2 = \frac{500}{9}$.



A magasság $m_2 = 2$.

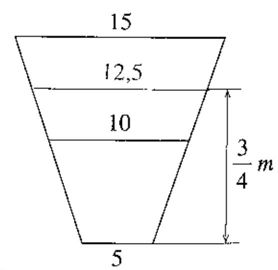
Felhasználjuk még, hogy $t = 20$.

$$V_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{500}{9} + \sqrt{\frac{500 \cdot 20}{9}} + 20\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{680}{9} + \frac{100}{3}\right) \approx 72{,}59.$$

A harmad magasságig töltött tartályban lévő vízmennyiség kb. 72,59 m³.

c) A háromnegyed magassághoz tartozó síkmetszet oldalainak kiszámítása az a)-ban közölt módon lehetséges: az oldallap-trapézok középvonalai segítségével. A síkmetszet oldalai:

$\frac{10+15}{2} = 12{,}5$ és $\frac{8+12}{2} = 10$, ebből



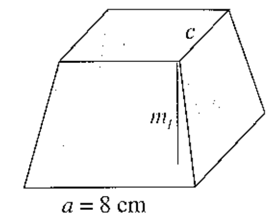
$t_3 = 125$. A magasság $m_3 = 4{,}5$.

Felhasználjuk még, hogy $t = 20$.

$V_3 = 1{,}5(125 + \sqrt{125 \cdot 20} + 20) = 1{,}5(145 + 50) = 292{,}5.$

A háromnegyedig töltött tartályban lévő vízmenynyiség: 292,5 m³.

1958. Az alaplap területe ekkor $T = 8^2 = 64$, a fedőlapé tehát $t = 32$. Mivel ez c^2, így $c = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$.



Az oldallapok területe: $64 = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{2} m_o$, amiből

$m_o = 32 - 16\sqrt{2} \approx 9{,}37$. Az alap- és fedőlapra merőleges síkmetszet egy szimmetrikus trapéz, amelynek alapjai a és c, mindkét szára m_o, és magassága megegyezik a csonkagúla m_t testmagasságával. Ez egy derékszögű háromszög befogója, amelynek átfogója az m_o, másik befogója pedig az alapok különbségének a fele.

Tehát: $m_t = \sqrt{m_o^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} \approx 9{,}30.$

A test térfogata így: $V = \frac{m_t}{3}(T + \sqrt{Tt} + t) \approx 437{,}85.$

1959. a) A csonkakúp térfogatképletével 387,5 cm³ adódik, tehát a pohárba 3,88 dl folyadék tölthető.

b) Ha 5 cm magasan áll a víz a pohárban, akkor a víz szabad felülete egy 7 cm átmérőjű kör. Ismét a csonkakúp térfogatképletével számolva 166,2 cm³ adódik. A pohárban 1,66 deciliter víz van.

1960. A fenyőfatörzs térfogata jó közelítéssel a csonkakúp térfogatképletével számítható:

$V = \frac{11{,}5\pi}{3}(0{,}27^2 + 0{,}27 \cdot 0{,}18 + 0{,}18^2) = 1{,}853$ (m³).

A fatörzs értéke 31 500 fenyőfabatka.

1961. 50 kg cement térfogata $\frac{50}{3150} = 0{,}0159$ (m³), azaz kb. 15,9 dm³.

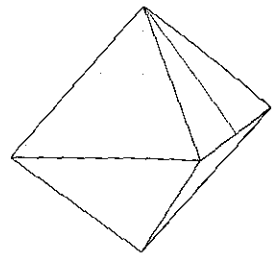
A vödör térfogata a csonkakúp térfogatképletével számítva 12,3 dm³, tehát a vödörbe nem fér bele az 50 kg cement (csak kb. 38-40 kg).

1962. A csonkakúp fedőköre megkapható úgy is, hogy az alapkörét a kúp csúcsából $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ arányban kicsinyítjük. A fedőkör sugara tehát 16 cm.

A levágott kisebb kúp palástja az eredeti palástnak $\frac{4}{9}$ része, ezért a csonkakúp palástja az eredeti kúp palástjának $\frac{5}{9}$ része.

A csonkakúp felszíne tehát: $24^2\pi + 16^2\pi + \frac{5}{9} \cdot 24 \cdot \pi \cdot \sqrt{24^2 + 36^2} \approx 4426$ cm².

1963. Az a élű szabályos háromszög magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, egy ilyen háromszög területe ezért $\frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, a nyolc ilyen lapból álló tetraéder felszíne tehát: $A=2\sqrt{3}a^2$.



A test két, alaplapjával egymásnak fordított szabályos négyoldalú gúlából is felépíthető. Egy ilyennek a magassága az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságával egyenlő: $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Egy ilyen gúla térfogata („alapterület szorozva magassággal osztva hárommal"): $\frac{a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

Az oktaéder térfogata ennek kétszerese: $V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

1964. A félgömb térfogata $\frac{2\pi}{3}R^3$, ami most 262 cm³.

A három gömb együttes térfogata $4\pi r^3$, tehát $4\pi r^3=262$ cm³.

Ebből $r=\sqrt[3]{\frac{262}{4\pi}}=2,75$ cm.

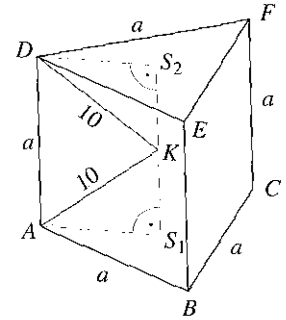
Tehát a félgömbből három, kb. 5,5 cm átmérőjű gömbgyertya önthető.

1965. A tekegolyó „egyenlítőjének" hosszát, azaz főkörének kerületét kell előbb kiszámítanunk. Ismert, hogy $\varrho=\frac{m}{V}$, amiből $V=\frac{m}{\varrho}$, ahol ϱ a sűrűség, m a tömeg, V a térfogat. $V=\frac{1,9\ \text{kg}}{900\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}\approx 0,00211$ m³ = 2,11 dm³.

Minthogy a gömb térfogata $\frac{4r^3\pi}{3}\approx 2,11$, ezért $r^3\approx\frac{6,33}{4\pi}\approx 0,5037$, $r\approx 0,7957$, $2r\pi\approx 5,00$ dm. A teke fordulatszáma: $\frac{300\ \text{dm}}{5,00\ \text{dm}}=60$.

Tehát a teke a 30 m hosszú pályán kb. 60 fordulatot tesz meg.

1966. A hasáb minden éle a hosszúságú, tehát alap-, és fedőlapja is szabályos háromszög. A hasáb élei merőlegesek az alaplapokra, tehát a hasáb egyenes.



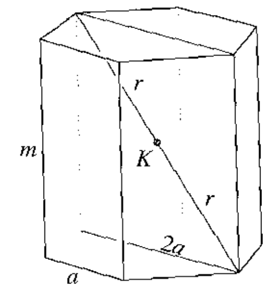
Az alaplap és a fedőlap súlypontját jelölje S_1, illetve S_2. Mivel a hasáb a fentiek szerint szabályos, ezért az AS_1S_2D négyszög téglalap, és a körülírt gömb K középpontja az S_1S_2 oldal felezőpontja. Az AS_1K derékszögű háromszög oldalainak hossza:

$AS_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $S_1K=\frac{a}{2}$ és $KA=10$ cm.

Pitagorasz-tétellel adódik: $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=10^2$, amiből $\frac{7}{12}a^2=100$ és így $a\approx 13,1$ cm. Ezzel a hasáb térfogata 973 cm³-nek adódik.

1967. Legyen a hasáb alapéle a, magassága pedig m. A hasáb felszíne:

$A=2\cdot 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+6am=3a^2\sqrt{3}+6am$, ami a feladat szövege szerint $2\cdot 20^2\pi=800\pi$ cm²-rel egyenlő: $3a^2\sqrt{3}+6am=800\pi$. (1)



Metsszük el a hasábot egy olyan síkkal, amelyik illeszkedik a forgástengelyére és egyik élére. A síkmetszet egy olyan téglalap, amelynek oldalai $2a$ és m, átlója pedig a gömb egyik átmérője, tehát 40 cm hosszú. Pitagorasz-tétellel adódik tehát, hogy

$(2a)^2+m^2=40^2$ (2).

Az (1) és (2) egyenletekből képezett alábbi másodfokú egyenletrendszert kell megoldanunk (az $0<m<40$ és $0<a<20$ alaphalmazon):

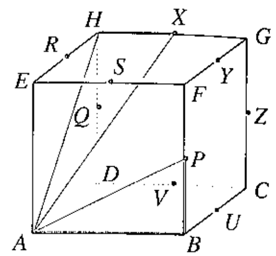
$$\left.\begin{aligned}3\sqrt{3}a^2+6am&=800\pi\\4a^2+m^2&=1600\end{aligned}\right\}\ \Leftrightarrow\ \left.\begin{aligned}m&=\frac{800\pi-3\sqrt{3}a^2}{6a}\\171a^4-(4800\pi\sqrt{3}&+57600)a^2+640\,000\pi^2=0\end{aligned}\right\}$$

A megadott alaphalmazon az egyenletrendszernek két megoldása van:
$a=19,91$ cm és $m=3,80$ cm, illetve $a=9,65$ cm és $m=35,03$ cm.
(Ellenőrzés: Az első esetben a hasáb alapterülete 1029,9 cm², palástja 453,9 cm² területű, tehát felszíne 2513,7 cm².
A második esetben a hasáb alapterülete 242,1 cm², palástja 2028,2 cm² területű, tehát felszíne 2512,4 cm².
Mivel a gömb felszíne 5026,6 cm², ennek a fele 2513,3 cm², ezért (a kerekítések adta eltéréstől eltekintve) mindkét test valóban megfelel a feltételeknek.)

A hasáb térfogata tehát az első esetben 3914 cm³, a második esetben pedig 8481 cm³.

1968. Legyen a kocka éle a, ekkor a lapátlója $a \cdot \sqrt{2}$.
A feltételt felírva: $6a^2 = a^3$, így $a = 6$ cm, tehát a lapátló $6 \cdot \sqrt{2}$ cm.

1969. A kocka A csúcspontjától egyenlő távol lévő felezőpontok: az alapéleken az U és V, az oldaléleken a P és Q, a fedő éleken az R és S. Ezek a távolságok egy-egy olyan derékszögű háromszög átfogói, melyeknek a két befogója a és $\frac{a}{2}$.



Felírható a Pitagorasz-tétel, pl. az ABP derékszögű háromszögre:

$AP^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$, így $AP = AQ = AR = $
$= AS = AU = AV = \frac{a}{2}\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Az A csúcsponttól egyenlő távol lévő további felezőpontok: az oldalélen Z, a fedő éleken X és Y. Minthogy HX merőleges az $ADHE$ síkra, ezért merőleges annak minden egyenesére, így az AH-ra is. Ennek megfelelően az AX, AY, AZ szakaszok egy-egy olyan derékszögű háromszög átfogói, melynek két befogója $\frac{a}{2}$ és $a\sqrt{2}$ (az utóbbi a lapátló hossza).

Felírható a Pitagorasz-tétel, pl. az AHX derékszögű háromszögre:

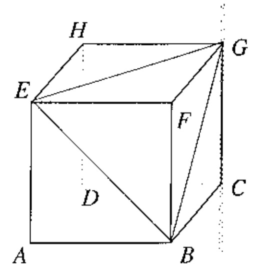
$$AX^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 = \frac{9}{4}a^2, \text{ innen } AX = AY = AZ = \frac{3}{2}a = 12.$$

A keresett távolságok 6 felezőpont esetében $4\sqrt{5}$ hosszúságegység, 3 felezőpont esetében 12 hosszúságegység.

Megjegyzés:
X, Y, Z az A-val átellenes G csúcspontból induló élek felezőpontja.

1970. Mindegy, mert a két távolság egyenlő.
Az AX és XG egy-egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelyiknek befogói a kocka éle és az él fele. Itt két oldal és a közbezárt szög egyenlő, tehát a harmadik oldaluk is egyenlő.

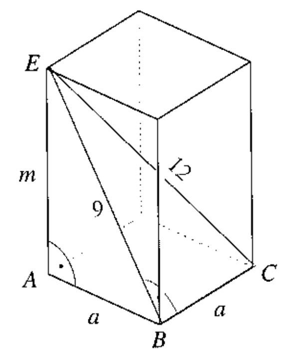
1971. A kocka két kitérő éle pl. EF és GC élek, ezek egymástól való távolsága $FG = 4$ cm éppen a kocka éle, mert $FG \perp EF$ és $FG \perp CG$. Ha a kocka egy csúcsából kiinduló éleit az adott csúcstól egyenlő távolságban metsszük, akkor a keletkezett síkmetszet szabályos háromszög. Ennek megfelelően a kocka legnagyobb szabályos háromszög síkmetszete pl. BEG háromszög, melynek oldala a kocka lapátlója, amely



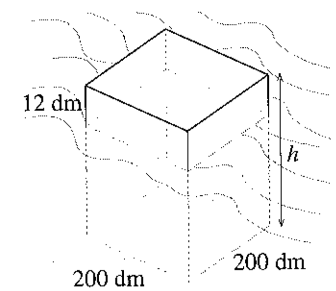
$4\sqrt{2}$ hosszúságú, ennek megfelelően a szabályos háromszög területe:

$$T = \frac{(4\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

1972. Az $BCE\ \Delta$ derékszögű, mert BC merőleges az $[ABE]$ síkra s ezért annak minden egyenesére, tehát a BE-re is. Felírjuk a Pitagorasz-tételt a $BCE\ \Delta$-re:
$a^2 + 9^2 = 12^2$, ebből $a^2 = 63$.
Ezt az értéket használjuk fel az $ABE\ \Delta$-re felírható Pitagorasz-tételben: $m^2 + a^2 = 9^2$, amiből
$m^2 = 81 - 63 = 18 \Rightarrow m = 3\sqrt{2}$.
A négyzetes oszlop alapéle $a = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ hosszúságegység, magassága $3\sqrt{2}$ hosszúságegység.



1973. A jégtömb nyugalomban van, azaz a ráható erők eredője 0. Ebből következik Arkhimédesz törvénye alapján, a folyadékba helyezett test egyensúlyi állapotában (azaz, ha a test úszik a vízen vagy lebeg benne): a testre (a jégtömbre) ható nehézségi erő számértékben megegyezik a felhajtó erő nagyságával, iránya ellentétes.



$mg = F_{\text{felhajtó}}$, $m = \varrho V$
$\varrho_{\text{jég}} V g = \varrho_{\text{víz}} V_1 g$ (*)
(V a jég térfogata, V_1 a vízbe merülő rész térfogata)
A négyzetes oszlop magassága h, a kiálló rész magassága l: $V_1 = \frac{h-l}{h}V$.

Ezt visszahelyettesítve *-ba: $\varrho_{\text{jég}} V g = \varrho_{\text{víz}} \frac{h-l}{h} V g$, ezt h-val szorozva és végigosztva Vg-vel: $h\varrho_{\text{jég}} = \varrho_{\text{víz}}(h-l)$.
A kijelölt szorzást elvégezve, majd h kiemelése céljából megfelelően rendezve:

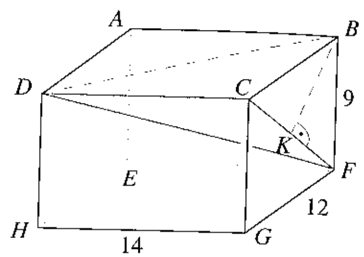
$$h(\varrho_{\text{víz}} - \varrho_{\text{jég}}) = l\varrho_{\text{víz}} \qquad \left(\varrho_{\text{víz}} = 1{,}03\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3},\ \varrho_{\text{jég}} = 0{,}88\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right) \qquad h = \frac{l\varrho_{\text{víz}}}{\varrho_{\text{víz}} - \varrho_{\text{jég}}}.$$

Az adatokat behelyettesítve: $h = \frac{12 \cdot 1{,}03}{1{,}03 - 0{,}88} = 82{,}4$ (dm).

A jégoszlop magassága 82,4 dm. T-vel jelölve az alapterületet a jégoszlop tömege: $\varrho_{\text{jég}} Th = 0{,}88 \cdot 200^2 \cdot 82{,}4 \approx 2{,}9 \cdot 10^6$ (kg).

Megjegyzés:
A feladat szövegében adott útmutatás alapján is kiszámítható a jégoszlop magassága. $\frac{\varrho_j}{\varrho_v} = 0,8544$, ahol ϱ_j a jég sűrűsége, ϱ_v a víz sűrűsége. A h magasságú jégoszlop kiálló része: $h - 0,8544h = 1,2$, ebből a jégoszlop teljes magassága $h \approx 8,24$ m.

1974. Az AB él és a hozzá képest kitérő DF testátló távolságát megadja a BK szakasz hossza, ahol K a B-ből a CF lapátlóra állított merőleges talppontja. E szakasz merőleges az AB élre és a DF-et tartalmazó $[CDF]$ síkra. Ismert: ha valamely egyenes merőleges egy sík két metsző egyenesére, akkor merőleges a síkra is.



BK merőleges az AB és CD élekre, mert e két él merőleges a BK-t tartalmazó $[BKC]$ síkra, tehát annak minden egyenesére. Minthogy BK merőleges CD-re és CF-re, ezért $BK \perp DF$, hiszen DF illeszkedik a $[CDF]$ síkra. A BK szakaszt a BCF derékszögű háromszögből úgy számítjuk ki, hogy a területét kétféle módon írjuk fel. E háromszögből előbb Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk FC-t. $FC = 15$.

$T(BCF) = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$ és $T(BCF) = BK \cdot \frac{15}{2} = 7,5BK.$

A két úton felírt terület egyenlő, ezért $BK = \frac{54}{7,5}$.

A keresett távolság: $BK = 7,2$ cm.

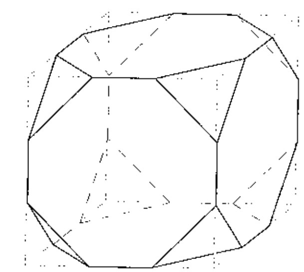
1975. a) Az élek hossza a feladat szövege szerint: $a = 3e$; $b = 4e$; $c = 5e$.
$(3e)^2 + (4e)^2 + (5e)^2 = 20^2$, amiből $e^2 = 8$. Mivel $e > 0$, ezért $e = 2\sqrt{2}$ cm, így $a = 6\sqrt{2} \approx 8,49$ (cm); $b = 8\sqrt{2} \approx 11,31$ (cm) és $c = 10\sqrt{2} \approx 14,14$ (cm).

b) $\cos\varphi = \frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\varepsilon = \frac{6\sqrt{2}}{20} \approx 0,4242$, tehát a leghosszabb éllel 45°-os, a legrövidebbel pedig 64,9°-os szöget zár be a testátló.

1976. a) A kocka felszínét csökkentettük három, 12 cm befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög területével, és növeltük egy $12\sqrt{2}$ cm oldalú szabályos háromszög területével. A kapott test felszíne tehát $6 \cdot 24^2 - 3 \cdot \frac{12^2}{2} + \frac{(12\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$
$3240 + 72\sqrt{3} = 3364,7$ (cm²).

b) A leválasztott tetraéder térfogata $\frac{12^3}{6} = 288$ (cm³), ami az eredeti kocka térfogatának $\frac{288}{13\,284} = \frac{1}{48}$ része. A tömegek aránya most megegyezik a térfogatok arányával, azaz a gránittömb tömegének $\frac{1}{48}$ részét – 2,08%-át – választották le.

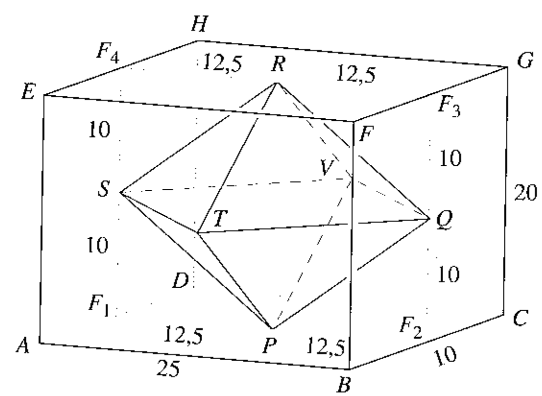
1977. a) A kocka mindegyik levágott csúcsánál három új csúcs, három új él és egy új lap keletkezik. A kocka eredeti csúcsai „elvesznek”, de mindegyik éléből, lapjából „marad” valamennyi. Tehát az új testnek $8 \cdot 3 = 24$ csúcsa, $12 + 8 \cdot 3 = 36$ éle és $6 + 8 \cdot 1 = 14$ lapja van.



b) Minden csúcsnál levágtunk 3 db, 2 cm befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszöget; viszont keletkezett egy-egy $2\sqrt{2}$ cm élű szabályos háromszög. A test felszíne tehát: $A = 6 \cdot 6^2 - 8 \cdot 3 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2})^2 =$
$= 216 - 48 + 16\sqrt{3} = 168 + 16\sqrt{3} \approx 195,7$ (cm²).
A levágott gúlák alaplapja 2 cm befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög, testmagassága 2 cm, így a test térfogata tehát:

$$V = 6^3 - 8 \cdot \frac{\frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 2}{3} = 216 - \frac{32}{3} = 205\frac{1}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

1978.



a) Három.

b) Csak az a három, amelyik a téglatestnek is szimmetriasíkja.

c) Az egyik szimmetriasíkra illeszkedő $F_1F_2F_3F_4$ téglalap oldalfelező pontjai egy rombusz csúcsai, tehát a $PQRS$ négyszög egy rombusz, amelynek oldalhossza Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{12,5^2 + 10^2} = 16,0$ (cm).

Hasonló módon adódik, hogy $STQV$ négyszög is rombusz,
amelynek oldala $\sqrt{12,5^2+5^2} \approx 13,5$ (cm) hosszú,
míg a $PTRV$ rombusz oldalainak hossza $\sqrt{10^2+5^2} = 11,2$ (cm).
Az oktaéder élei tehát 16,0 cm, 13,5 cm, illetve 11,2 cm hosszúak.

d) Az oktaéder kettős gúlaként is felfogható, ezért térfogata pl. az $STQVR$ négyoldalú gúla térfogatának kétszereseként is kiszámítható.
Az $STQV$ rombusz átlóinak hossza 25 cm és 10 cm, tehát a rombusz területe 125 cm². A gúla magassága 10 cm, így térfogata $\frac{125\cdot 10}{3} = \frac{1250}{3}$ (cm³).
Az oktaéder térfogata: $2\cdot\frac{1250}{3} = 833,3$ (cm³).

e) A feladatban szereplő oktaédert nyolc egybevágó háromszöglap határolja. Egy háromszög oldalainak hossza 16,0 cm, 13,5 cm, illetve 11,2 cm. A háromszög legnagyobb oldalához tartozó magasságát kiszámíthatjuk pl. az 1774. a) megoldásában bemutatott módon (a leghosszabb oldalhoz tartozó magasságot meghúzzuk, majd az így kapott két derékszögű háromszög mindegyikében Pitagorasz-tétellel kifejezzük a közös befogót), eredményül 9,3 cm-t, a háromszög területére pedig 74,4 cm²-t kapunk. Az oktaéder felszíne ennek nyolcszorosa: 595,2 cm².

1979. a) Igaz.

b) Az egyes lapok átlóinak hossza adja tetraéder élhosszát:
$\sqrt{12^2+18^2} = 21,6$ (cm), $\sqrt{12^2+26^2} = 28,6$ (cm) és $\sqrt{18^2+26^2} = 31,6$ (cm).

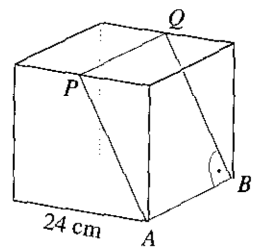
c) Igen, hiszen a lapok egymással egybevágó háromszögek (bármely két lap két olyan háromszög, amelyek mindhárom oldalukban megegyeznek).

d) Nem.

e) A vizsgált tetraéder térfogatát úgy is kiszámíthatjuk, hogy a téglatest térfogatából levonjuk annak a négy tetraédernek a térfogatát, amelyeket a téglatestből levágva végül a vizsgált tetraéder marad. Egy-egy ilyen levágott tetraéder térfogata a téglatest térfogatának hatoda, ezért a vizsgált tetraéder térfogata a téglatest térfogatának harmada, azaz 1872 cm³.

1980. a) A Q pont is élfelező pont.

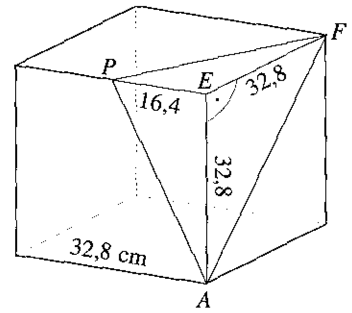
b) Az $ABQP$ négyszög téglalap, melynek AP oldala
$\sqrt{24^2+12^2} = 12\sqrt{5} \approx 26,8$ (cm) hosszú.
A téglalap területe így $24 \cdot 26,8 \approx 643,2$ (cm²).



c) A kisebbik test egy háromoldalú hasáb. Alapterülete $\frac{12\cdot 24}{2} = 144$ (cm²), magassága 24 cm. Térfogata tehát 3456 cm³. A másik rész térfogata 10 368 cm³.

1981. a) $AP = FP = \sqrt{32,8^2+16,4^2} = 16,4\cdot\sqrt{5} \approx 36,7$ (cm), tehát az APF háromszög egyenlő szárú. A háromszög alapjának hossza $AF = 32,8\cdot\sqrt{2} \approx 46,4$ (cm).
A háromszög kerülete tehát 119,8 cm.

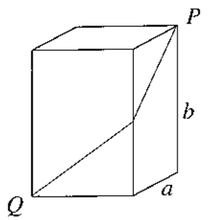
b) Legyen az $AEFP$ tetraéder alapja az AEF egyenlő szárú derékszögű háromszög. A tetraéder ehhez tartozó magassága 16,4 cm, így a térfogata:
$\frac{32,8^2\cdot 16,4}{6} \approx 2940,6$ (cm³);
a kocka másik részének térfogata
$32,8^3 - 2940,6 \approx 32\,347$ (cm³).
(A tetraéder térfogata a kocka térfogatának egy tizenkettede, tehát a két rész térfogatának aránya 1 : 11.)

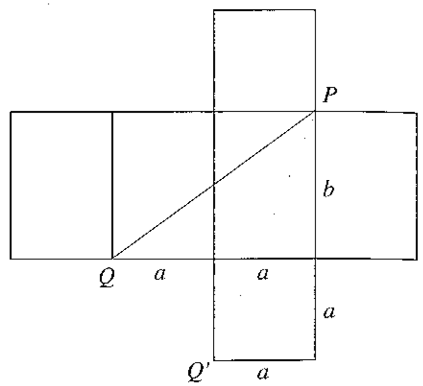


c) A tetraéder derékszögű háromszög lapjaihoz tartozó magasságai:
16,4 cm, 32,8 cm, 32,8 cm.
Az APF alaphoz tartozó m_4 magasságot a térfogat ismeretében az $m_4 = \frac{3V}{T_{APF}}$ összefüggésből is kiszámíthatjuk.
Az APF egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magasságát pl. Pitagorasz-tétellel számíthatjuk ki: 28,4 cm. A háromszög területe tehát $T_{APF} = 658,9$ cm².
Ezzel $m_4 = \frac{3\cdot 2940,6}{658,9} = 13,4$ (cm).

1982. Határozzuk meg, mennyi az átmérője annak a rönkfának amelyből készíthető 10 cm oldalélű négyzetes oszlop. A 10 cm oldalú négyzet köré írt kör átmérője éppen a négyzet átlója, ami $10\cdot\sqrt{2} \approx 14,142$ cm. Ennél kisebb átmérőjű (pl. 12 cm) rönkfából nem lehet ilyen négyzetes oszlopot készíteni.

1983. a) Természetesen a testátló a legrövidebb út.





b) Az alaplap átlója ($\sqrt{2}a$) és az oldalél derékszögű háromszöget alkot, amelynek átfogója a kérdéses testátló, aminek hossza így: $\sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + b^2} = \sqrt{2a^2 + b^2}$.

c) A test kiterített hálózatán találjuk meg a jó választ: ezen kell az átellenes pontokat összekötő egyenes szakaszt választani. Mint látható, ez egy $2a$ és b befogójú derékszögű háromszög átfogója, tehát $PQ = \sqrt{(2a)^2 + b^2} = \sqrt{4a^2 + b^2}$ hosszú, vagy egy $a + b$ és a befogójú derékszögű háromszög átfogója

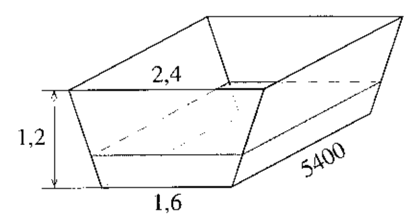
$PQ' = \sqrt{(a+b)^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}$. PQ és PQ' közül PQ a kisebb, ha $2ab > 2a^2$, vagyis $b > a$; és PQ' a kisebb, ha $b < a$. A PQ út a testen magán két szomszédos oldallapon és a köztes él felezőpontján át vezet.
(Lásd még az 1991. feladatot.)

1984. A hasáb alapéle a, magassága M.
Az alaplap (szabályos háromszög) területe $T = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ (cm²), palástja három egybevágó téglalapból áll; ezeknek az oldalai 10 cm és M cm, így palástjának területe $30M$ cm².

A feltétel miatt $30M = 5 \cdot 25\sqrt{3} \Rightarrow M = \dfrac{25\sqrt{3}}{6}$.

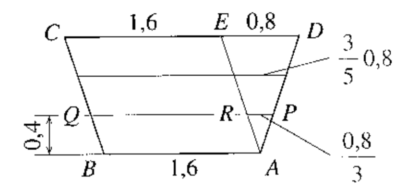
A hasáb felszíne: $A = 2 \cdot 25\sqrt{3} + 125\sqrt{3} = 175\sqrt{3} \approx 303{,}1$ (cm²).
A hasáb térfogata: $V = T \cdot M = 312{,}5$ cm³.

1985. A csatornán egy óra alatt átfolyó alatt átfolyó víz térfogata egy „fekvő helyzetű", trapéz alapú egyenes hasáb térfogatával egyenlő. Ennek magassága az $1{,}5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességű víz által egy óra alatt megtett út, $3\,600 \cdot 1{,}5 = 5\,400$ (m).



A víz a csatorna magasságának $\dfrac{1}{3}$-áig ér, ezért előbb ki kell számítani az ábrán feltüntetett PQ szakasz hosszát. $PQ = PR + RQ$. Minthogy $AE \parallel BC$, ezért $RQ = 1{,}6$. Az $ADE\,\Delta \sim APR\,\Delta$ miatt $PR = \dfrac{1}{3}DE = \dfrac{0{,}8}{3}$, tehát

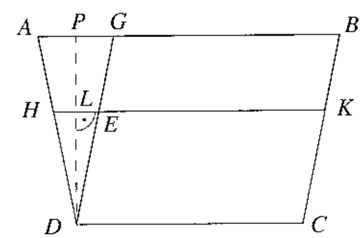
$PQ = 1{,}6 + \dfrac{0{,}8}{3} = \dfrac{5{,}6}{3}$.



$V = 0{,}4 \cdot \dfrac{1{,}6 + \dfrac{5{,}6}{3}}{2} \cdot 5400 = 3\,744$.

Az árokban egy óra alatt átfolyó víz mennyisége: 3 744 m³.

1986. Az áthaladó vízmennyiség egy fekvő, trapéz alapú egyenes hasábot tölt meg. E hasáb keresztmetszete a $DCKH$ trapéz, alapjai $DC = 3$ m, HK, magassága 1 m.
Toljuk el a BC oldalt párhuzamosan DG-be, így $GB = DC = EK = 3$, $AG = AB - GB = 1$.



AGD és HED háromszögek hasonlók (2-2 szögük egyenlő), így megfelelő szakaszaik aránya egyenlő. $\dfrac{HE}{AG} = \dfrac{DL}{DP}$, ebből $HE = \dfrac{5}{9}$ m, $HK = \dfrac{32}{9}$ m.
A csatornán 1 sec alatt áthaladó víz mennyisége megegyezik a $DCKH$ alapú, 1,5 m magasságú egyenes hasáb térfogatával, 1 óra alatt ennek 3600-szorosa halad át.

Így a kérdéses vízmennyiség: $3600 \cdot \dfrac{\left(3 + \dfrac{32}{9}\right)}{2} \cdot 1{,}5 = 17\,700$ (m³).

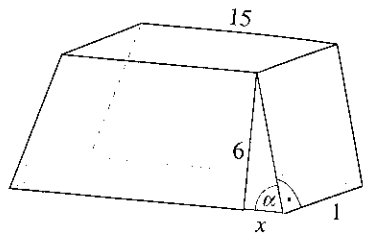
1987. A feladatban szereplő trapéz nem létezik, hiszen az egyik alap hosszabb, mint a másik alap és a két szár összege.

1988. Az ábra jelöléseit használva

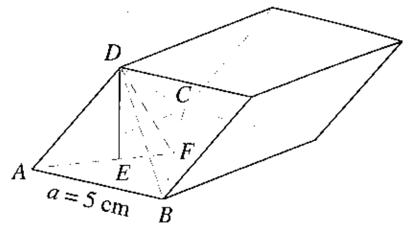
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{3} = \frac{6}{x}$, ebből $x = 9$.

Az 1 méter magasságú, trapéz alapú hasáb térfogata: $V = \frac{33+15}{2} \cdot 6 = 144$.

A vasúti töltés egy méter hosszú szakaszába 144 m^3 földet kell beépíteni.



1989. a) Rajzoljuk meg három szomszédos lap átlóit (DB, BC, CD). Ezek a lapok egybevágósága miatt egyenlő hosszúak. Legyen F a BC felezőpontja, ekkor az AFC Δ derékszögű, átfogója 5, $CAF \sphericalangle = 22{,}5°$.
Ebből $CF = 5 \cdot \sin 22{,}5° \approx 1{,}91$.
Ezért $BC = 2CF \approx 3{,}83$. Ekkor a BCD szabályos háromszög magassága $DF = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \approx 3{,}31$. Ugyancsak az AFC derékszögű háromszögből $AF = 5 \cdot \cos 22{,}5° \approx 4{,}62$. Ekkor az AFD Δ mindhárom oldalát ismerjük, és ennek DE magassága egyúttal a romboéder magassága is.



Koszinusztétellel: $\cos DAF \sphericalangle = \frac{AD^2 + AF^2 - DF^2}{2 \cdot AD \cdot AF}$, és így a $DAF \sphericalangle \approx 40°$,
amiből $DE = AD \cdot \sin DAF \sphericalangle \approx 3{,}22$.

Megjegyzés:
Elkerülhetjük a trigonometria alkalmazását, ha az AFD Δ területét a három oldalából kiszámítjuk a Héron-képlettel, és $T = \frac{AF \cdot DE}{2}$ révén kapjuk meg DE-t.

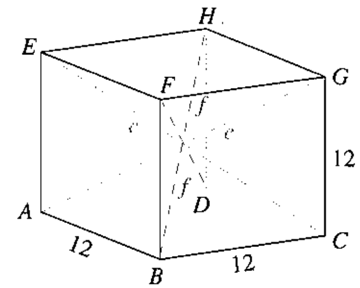
b) Rombusz területe $a^2 \cdot \sin\alpha$, a hat rombuszból álló romboéder felszíne ezért:
$6a^2 \cdot \sin\alpha = 6 \cdot 5^2 \cdot \sin 45° = 75\sqrt{2} \approx 106{,}07$ (cm^2).

c) Bármely (akár ferde) hasáb térfogata az alapterület és a magasság szorzata, tehát most: $a^2 \cdot \sin\alpha \cdot DE \approx 56{,}9$ (cm^3).

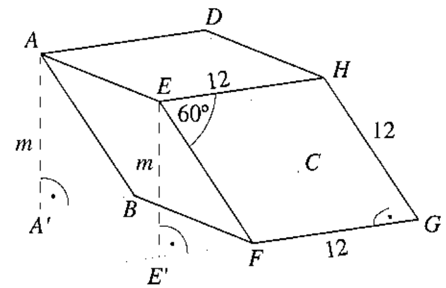
1990. Mivel a hasáb egyenes, ezért minden oldaléle 12 cm hosszú, az oldallapjai tehát négyzetek.

a) Az oldallapok területe 144 cm^2. A rombusz átlóinak hossza 12 cm, illetve $12 \cdot \sqrt{3}$ cm, tehát területe: $\frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 124{,}7$ (cm^2).
A hasáb felszíne: $A = 2 \cdot 124{,}7 + 4 \cdot 144 = 825{,}4$ (cm^2),
térfogata: $V = 124{,}7 \cdot 12 \approx 1496{,}4$ (cm^3).

b) A testátlók az $ACGE$, illetve $BDHF$ téglalap átlóival azonosak (ábra).
Mivel $AC = 12\sqrt{3}$ cm és $HF = 12$ cm, ezért a testátlók hossza
$\sqrt{12^2 + (12\sqrt{3})^2} = 24$ (cm),
illetve $12\sqrt{2} \approx 17{,}0$ (cm)
(mert a $BDHF$ téglalap négyzet).

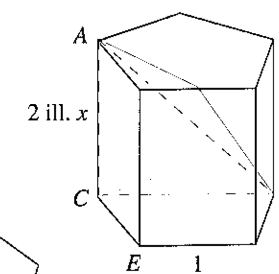


c) Az oldallapjára állított egyenes hasáb egy olyan négyoldalú ferde hasábnak fogható fel, amelynek alaplapja egy 12 cm oldalú négyzet és térfogata az a)-ban kiszámolt 1496,4 cm^3-rel egyenlő.
Ezért a ferde hasáb m magasságára fennáll: $144m = 1496{,}4$, amiből $m = 10{,}4$ cm.
Ez éppen a kérdezett távolsággal egyezik meg.

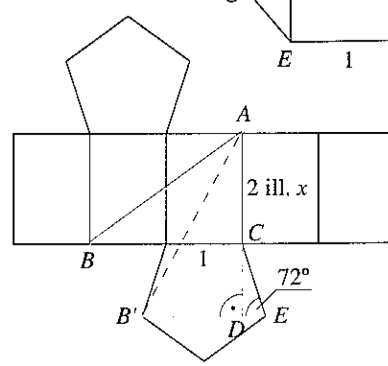


Megjegyzés:
A ferde hasáb $EFGH$ oldallap-síkja merőleges az alaplap síkjára, így a kérdezett távolság az $EFGH$ rombusz magasságával, $6\sqrt{3}$ cm-rel egyenlő.

1991. a) A légy legrövidebb útja légvonalban vezet (mondhatnánk most, hogy „légyvonalban"...). Az ACB derékszögű háromszög CB befogója a szabályos ötszög egyik átlója, így hossza koszinusztétellel:
$CB = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 108°} \approx 1{,}62$.
Pitagorasz-tétellel az átfogó:
$AB \approx \sqrt{2^2 + 1{,}62^2} \approx 2{,}57$.



A hangya legrövidebb útját a test kiterített hálózatán találjuk meg: ezen kell a megfelelő pontokat összekötő egyenes szakaszt választani. Mint látható, ez egy $2 \cdot 1$ és egy 2 befogójú derékszögű háromszög átfogója, tehát $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ hosszú.
Ez az út a testen magán két szomszédos oldallapon és a köztes él felezőpontján át vezet.



b) A légy útja mindig a közvetlen összekötő AB szakasz marad – persze hossza általánosítva kb. $\sqrt{x^2+1,62^2}$. A hangya esetében az AB út hossza általánosítva $\sqrt{x^2+2^2}$, azaz $\sqrt{x^2+4}$; de felmerülhet alternatívaként a hálózaton az AB'-vel jelölt út, amennyiben egyáltalán létezik. (Ha x „túl nagy", ez az összekötő szakasz az alaplapon kívül halad; nevezetesen akkor, ha az oldallap átlója az ötszög 108°-os szögének külső szögénél, 72°-nál nagyobb szöget zár be az alapéllel, vagyis ha tg 72° ≈ 3,08 < x.) Ha viszont létezik, előfordulhat, hogy rövidebb, mint az oldallapokon haladó AB út. AB' egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogója egyrészt $B'D = B'E - DE \approx 1,62 - 1 \cdot \cos 72° \approx 1,31$; másrészt $AD = x + 1 \cdot \sin 72° \approx x + 0,95$. Ekkor $AB' \approx \sqrt{1,31^2+(x+0,95)^2} \approx$ $\approx \sqrt{x^2+1,90x+2,62}$. Ez rövidebb AB-nél, ha $\sqrt{x^2+1,90x+2,62} < \sqrt{x^2+4}$. Négyzetre emelve x^2 kiesik, rendezés után: $x < 0,73$. Vagyis ekkora oldalél esetén a hangya legrövidebb útja részben az alaplapon vezet.

1992. Az adott test térfogatát úgy számítjuk ki, hogy a lyuk nélküli téglatest térfogatából kivonjuk a lyuk térfogatát.

$V = 12 \cdot 21 \cdot 32 - 12 \cdot 7 \cdot 18 = 6552\ (\text{cm}^3) = 0,006\,552\ (\text{m}^3)$.

A tömege: $m = 0,006\,552\ \text{m}^3 \cdot 1830\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 12$ kg.

1993. Először határozzuk meg a keresztmetszetek területeit, majd számítsuk ki a gerendák térfogatát, végül a tömegüket.

$t_1 = 25 \cdot 25 - 20 \cdot 20 = 225\ (\text{cm}^2) = 0,0225\ (\text{m}^2)$

$V_1 = 0,0225\ \text{m}^2 \cdot 5\ \text{m} = 0,1125\ \text{m}^3$

$m_1 = 0,1125\ \text{m}^3 \cdot 7800\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 877,5$ kg

$t_2 = 30 \cdot 5 + 28 \cdot 5 = 290\ (\text{cm}^2) = 0,029\ (\text{m}^2)$

$V_2 = 0,029\ \text{m}^2 \cdot 5\ \text{m} = 0,145\ \text{m}^3$

$m_2 = 0,145\ \text{m}^3 \cdot 7800\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1131$ kg

$t_3 = 30 \cdot 5 \cdot 2 + 22 \cdot 5 = 410\ (\text{cm}^2) = 0,041\ (\text{m}^2)$

$V_3 = 0,041\ \text{m}^2 \cdot 5\ \text{m} = 0,205\ \text{m}^3$

$m_3 = 0,205\ \text{m}^3 \cdot 7800\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1599$ kg

$t_4 = 30 \cdot 30 - 20 \cdot 25 = 400\ (\text{cm}^2) = 0,04\ (\text{m}^2)$

$V_4 = 0,04\ \text{m}^2 \cdot 5\ \text{m} = 0,2\ \text{m}^3$

$m_4 = 0,2\ \text{m}^3 \cdot 7800\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1560$ kg

1994. A forgáshenger alapkörének sugarát jelölje r, ekkor a magassága $3r$. A palást felszíne: $2r\pi \cdot 3r = 150\pi$, innen $r = 5$ egység.

A henger térfogata: $r^2 \cdot \pi \cdot 3r = 375\pi$ térfogategység.

1995. A két félgömb egy 0,6 méter átmérőjű gömbbé egyesíthető, a hengeres rész hossza tehát 1,4 méter.

A test térfogata: $V = \dfrac{4\pi \cdot 0,3^3}{3} + 0,3^2\pi \cdot 1,4 = 0,3^2\pi \cdot (0,4+1,4) \approx 0,509\ (\text{m}^3)$,

tömege $7200 \cdot 0,509 = 3665$ (kg).

1996. A benzin a csőben 1 sec alatt $\dfrac{1}{6}\ \text{m} = \dfrac{5}{3}$ dm-t halad.

A cső belső keresztmetszete 0,15 dm sugarú kör, területe $0,15^2\pi\ \text{dm}^2$.

1 sec alatt $V = \dfrac{0,15^2 \cdot 5}{3}\pi$ liter benzin folyik át a csövön.

A 300 literes tartály x sec alatt telik meg.

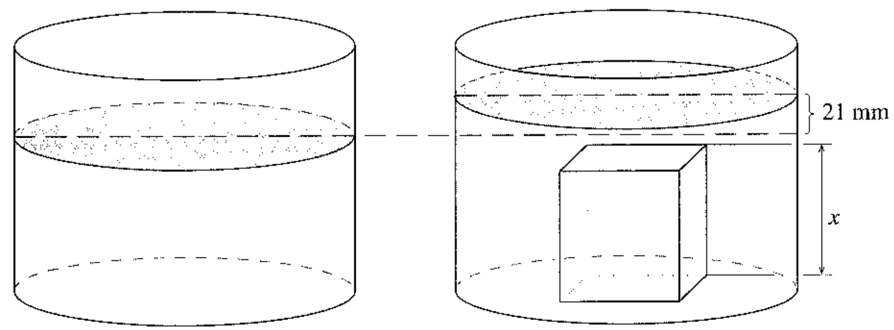
$Vx = 300$, innen $x = \dfrac{300}{V} = \dfrac{300 \cdot 3}{0,15^2 \cdot 5 \cdot \pi} = \dfrac{8000}{\pi} \approx 2546.$

Tehát a tartály kb. 2546 sec ≈ 42,4 perc alatt telik meg.

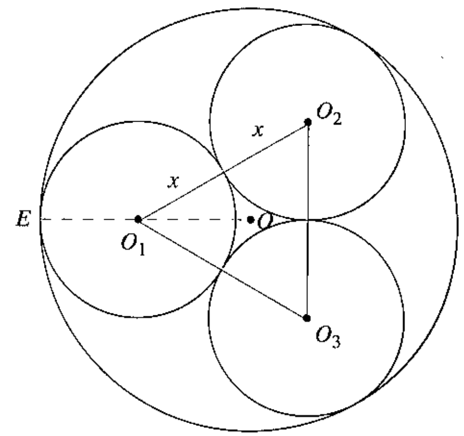
1997. A vasból készült téglatest térfogata megegyezik az általa kiszorított víz térfogatával. A téglatest térfogata $V_1 = 15 \cdot 10 \cdot x\ (\text{cm}^3)$, ahol x cm a téglatest harmadik éle.

A kiszorított víz térfogata $V_2 = r^2 \cdot \pi \cdot h = 12^2 \cdot \pi \cdot 2,1\ (\text{cm}^3)$.

$15 \cdot 10 \cdot x = 12^2 \cdot \pi \cdot 2,1 \Rightarrow x \approx 6,3$ cm



1998. a) A gyertyák alaplapjai körök. E körök páronként érintik egymást és a kör alakú papír kerületét. Két érintkező kör középpontja és érintési pontja egy egyenesen van. A szimmetria miatt O_1, O_2 és O_3 egy szabályos háromszög csúcsai, e háromszög oldala a kis körök x sugarának kétszerese. Az 5 cm sugarú kör O középpontja e szabályos háromszög súlypontja (magasságpontja stb.). Így OO_1 a szabályos háromszög magasságának $\frac{2}{3}$-a, azaz



$$OO_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2x\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{2x\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

Az érintkezés miatt O, O_1, E egy egyenesen van. (OE a körlap sugara.)
Így $OE = OO_1 + O_1E$.
Az adatokkal kifejezve:

$$5 = \frac{2x\sqrt{3}}{3} + x$$

$$5 = x\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)$$

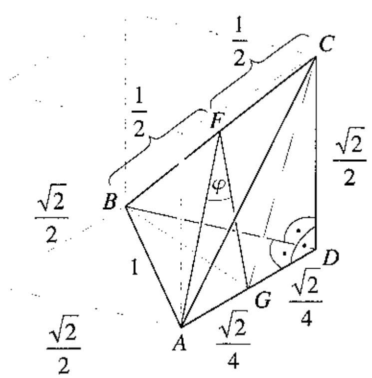
$$x = \frac{3}{2\sqrt{3}+3}\cdot 5 \approx 2{,}3 \text{ (cm)}$$

Tehát a gyertyák alaplapjának sugara kb. 2,3 cm.

b) Egy ilyen kör alakú gyertya térfogata: $V_1 = x^2\pi\cdot M = 2{,}3^2\pi\cdot 6 \approx 99{,}7$ (cm³), így három ilyen gyertya térfogata $V_2 = 299{,}1$ cm³.
Legyen a keresett 4 cm alapélű, négyzetes oszlop magassága m, térfogata:
$V = 4^2\cdot m = V_2$, ebből $m \approx 18{,}7$ cm.
Tehát kb. 19 cm magas, 4 cm alapélű négyzetes oszlop alakú tömör viaszból önthető ki a három gyertya.

1999. A tömör viaszgolyó térfogata: $V = \frac{4\cdot 5^3\pi}{3}$ (cm³), így egy henger alakú tömör gyertya térfogata ennek ötödrésze. Ha a henger átmérője d, magassága $1{,}5d$, akkor térfogata $\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi\cdot 1{,}5d = \frac{1}{5}\cdot\frac{4\cdot 5^3\pi}{3} \Rightarrow d \approx 4{,}46;\ r \approx 2{,}23.$
Tehát a gyertya sugara kb. 2,2 cm legyen.

2000. Legyen a gúla alaplapja az egység oldalú ABC szabályos háromszög, a negyedik csúcsa pedig D. Az $ABCD$ gúla az ábra szerint elhelyezhető egy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ élű kockában.
A gúla térfogatát felező sík illeszkedjen a BC alapélre. Ez a sík az AD élet annak G felezőpontjában metszi (ugyanis az ABD háromszög BG súlyvonala felezi az ABD háromszög területét, továbbá a $BDGC$ és $BAGC$ gúlák közös C csúcsából induló magassága nyilvánvalóan egyenlő, ezért a térfogatuk is megegyezik).



Állítsunk merőlegest a BC él egyenesére az A, illetve a G pontból. Mivel az ABC háromszög szabályos és BGC egyenlő szárú háromszög ($BG = CG$), ezért mindkét merőleges áthalad a BC szakasz F felezőpontján.
A kérdezett hajlásszög tehát az AFG háromszög φ-vel jelölt szöge.
Az AFG háromszögben $AG = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (a kocka élének fele) és $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (az egységnyi oldalú szabályos háromszög magassága).
Az FG szakaszt Pitagorasz-tétellel számíthatjuk
(pl. a CFG derékszögű háromszögből): $FG^2 = GC^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
A GC szakasz négyzetét szintén Pitagorasz-tétellel kifejezve
(a CDG derékszögű háromszögből): $GC^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}$,
tehát $FG^2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$, ezért $FG = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
Az AFG háromszögből koszinusztétellel:

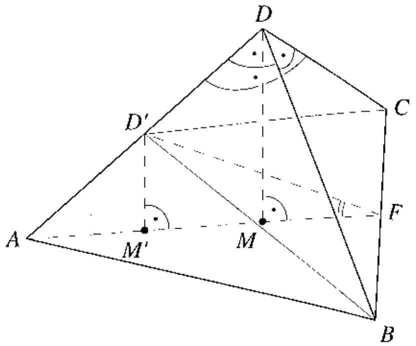
$$\cos\varphi = \frac{AF^2 + FG^2 - AG^2}{2\cdot AF\cdot FG} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{8}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9428,$$

ebből $\varphi \approx 19{,}47°$.
A két sík hajlásszöge tehát kb. 19,47°.

Másik megoldás:
A gúla alapja az ABC egységoldalú szabályos háromszög, a gúla negyedik csúcsa D. Az alaplaphoz tartozó testmagasság legyen m, talppontja M. Ekkor M az ABC há-

romszög súlypontja. A gúla oldalélének hossza $\frac{\sqrt{2}}{2}$, hiszen pl. az ABD háromszög egy fél négyzet, ahol $AB = 1$.

A gúla magasságát a DMF derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számítjuk ki, ahol F a BC él felezőpontja.



$m^2 = DF^2 - MF^2$; itt $DF = \frac{1}{2}$,

$MF = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}$.

$m^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$, innen $m = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

A keresett sík illeszkedjen a BC élre, a gúla AD élét D'-ben messe. Legyen D'-nek alaplapra eső merőleges vetülete M'. A feltétel miatt az $ABCD'$ gúla $D'M'$ magassága fele az $ABCD$ gúla magasságának, így $D'M' = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. Az AMD háromszöget nézve a párhuzamos szelők tétele miatt M' az AM szakasz felezőpontja, így az ABC háromszögben az AF súlyvonalat az M' és M pontok éppen harmadolják; ebből

$M'F = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

A keresett $D'FM'$ szöget a $D'FM'$ derékszögű háromszögből számítjuk ki:

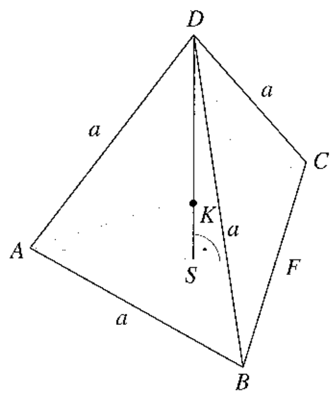
$$\operatorname{tg}(D'FM'\sphericalangle) = \frac{D'M'}{M'F} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{6}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Innen $D'FM'\sphericalangle \approx 19{,}47°$.

2001. A szabályos tetraéder magasságának talppontja egybeesik az alaplap S súlypontjával.

Az a oldalú szabályos háromszög AF súlyvonalának hossza $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, ebből

$AS = \frac{2}{3}AF = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.



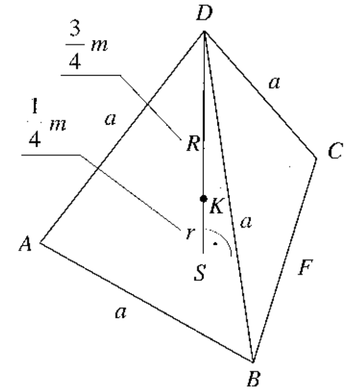
a) A testmagasságot az ASD derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számítjuk ki.

$$m^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a^2 = a^2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}a^2, \text{ ebből } m = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Minthogy $a = 8$, $m = 8\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 6{,}53$.

A tetraéder magassága $m \approx 6{,}53$ cm.

b) Bizonyítható, pl. Pitagorasz-tételekkel, hogy szabályos tetraédernél a DS magasság D csúcstól távolabbi negyedelő pontja K, mindegyik csúcsponttól, illetve mindegyik laptól egyenlő távolságra van. Ez a tetraéder súlypontja, ami egybeesik a tetraéderbe és köré írható gömb középpontjával.



A test köré írható gömb sugara:

$R = DK = \frac{3}{4}m = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Az $a = 8$ cm élű szabályos tetraéder köré írható gömb sugara: $R = 2\sqrt{6}$ cm $\approx 4{,}90$ cm.

c) A beírt gömb sugara: $r = KS = \frac{1}{4}m = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

Másként r meghatározható $r = \frac{R}{3}$-ból is. Az $a = 8$ cm élű szabályos tetraéderbe írható gömb sugara: $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm $\approx 1{,}63$ cm.

2002. a) Lásd a számítás részletezését a 2001. feladat a) és b) részében.

Az a élű szabályos teraéder köré írt gömb sugara: $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

b) Lásd a számítás részletezését a 2001. feladat a) és c) részében.

Az a élű szabályos tetraéderbe beírt gömb sugara: $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

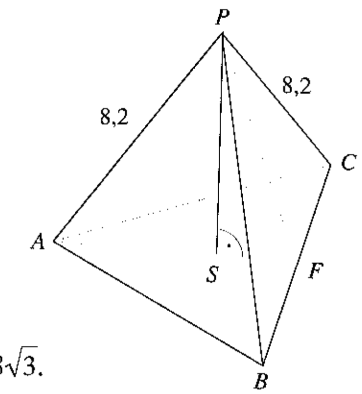
c) A szabályos tetraéder köréírt és beírt gömbje sugarának aránya

$\frac{R}{r} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{12}{\sqrt{6}} = 3$, tehát a köréírt gömb sugara háromszorosa a beírt gömb sugarának.

Megjegyzés:

Ez az arány megállapítható másként is. $R = \frac{3}{4}m$, $r = \frac{1}{4}m$. Ezekből $\frac{R}{r} = 3$.

2003. Az a oldalú ABC szabályos háromszög csúcsaitól P egyenlő távolságra van, ezért $ABCP$ tekinthető szabályos háromoldalú gúlának. P pontnak a síktól való távolsága nem más, mint a gúla PS magassága, ahol S a gúla magasságának talppontja egyúttal az $ABC\,\Delta$ súlypontja. A PS magasság kiszámításához szükség van az $ABC\,\Delta$ súlyvonalának kétharmadára, AS-re.



$$AS = \frac{2}{3}AF = \frac{2}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3} = a\frac{\sqrt{3}}{3} = 5{,}4\frac{\sqrt{3}}{3} = 1{,}8\sqrt{3}.$$

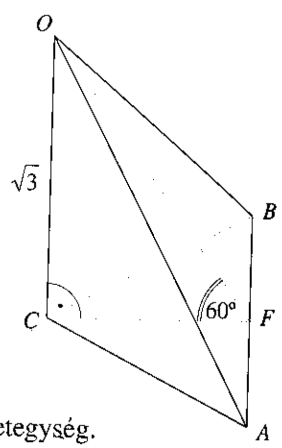
Az $APS\,\Delta$ derékszögű, erre felírható a Pitagorasz-tétel:

$PS^2 = AP^2 - AS^2 = 67{,}24 - 9{,}72 = 57{,}52.$

$PS \approx 7{,}58.$

Ennek alapján a P pontnak a háromszög síkjától való távolsága kb. 7,6 cm.

2004. Tudjuk, hogy $AC = BC$, $OC = \sqrt{3}$. Ha az AB él felezőpontja F, akkor az $OFC\sphericalangle = 60°$. Mivel OC merőleges az ABC síkra, az $OCF\sphericalangle = 90°$, tehát OCF háromszög egy fél szabályos háromszög, amelynek súlyvonala $\sqrt{3}$ hosszú, így $OF = 2$, $CF = 1$. CF az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben éppen AB fele, így $AB = 2$, innen $AC = BC = \sqrt{2}$.



A gúla felszíne a lapok területeinek összege:

$$A_g = t_{ABC} + t_{ACO} + t_{BCO} + t_{ABO} =$$

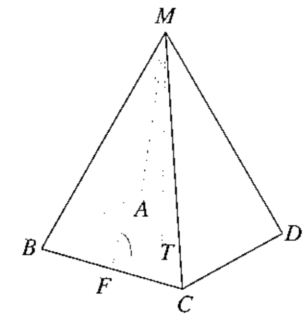
$$= \frac{AC \cdot BC}{2} + \frac{AC \cdot OC}{2} + \frac{BC \cdot OC}{2} + \frac{AB \cdot OF}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} = 3 + 2\sqrt{6} \text{ területegység.}$$

A gúla térfogata:

$$V_g = t_{ABC}\cdot\frac{OC}{3} = \frac{AC \cdot BC}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ térfogategység.}$$

2005. Legyen a piramis alaplapja az $ABCD$ négyzet, ötödik csúcsa M, az M csúcs merőleges vetülete az alaplapra (vagyis a négyzet középpontja) T. Az $ABCD$ négyzet oldala $\sqrt{0{,}04}$ km $= 0{,}2$ km $= 200$ m.



Legyen a BC oldal felezőpontja F. Az $MFT\sphericalangle$ megadja az oldallapok meredekségét. Az MFT háromszög derékszögű, így $\operatorname{tg}(MFT\sphericalangle) = \frac{MT}{TF}$; TF éppen a négyzet oldalának fele: 100 m.

$\operatorname{tg}(MFT\sphericalangle) = \frac{150}{100}$, így $MFT\sphericalangle = 56{,}31°$.

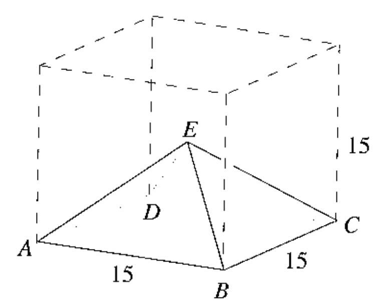
Az MF szakasz hosszát Pitagoras-tétellel számítjuk ki:

$MF^2 = MT^2 + TF^2 = 150^2 + 100^2$, így $MF = 50\cdot\sqrt{13}$ m.

Kiszámoljuk a BCM oldallap területét:

$$t_{BCM} = \frac{BC \cdot MF}{2} = \frac{200\cdot 50\cdot\sqrt{13}}{2} = 5000\cdot\sqrt{13}\ (\text{m}^2) \approx 18\,028\ (\text{m}^2).$$

2006. Ismert, hogy a kockát egy kiválasztott testátlója körül 120°-kal elforgatva a kocka önmagába megy át. Ebből következik, hogy a megadott gúla elhelyezhető egy 15 cm élű kockában az ábrán megadott módon, ahol a gúla E csúcsa a kocka középpontja.



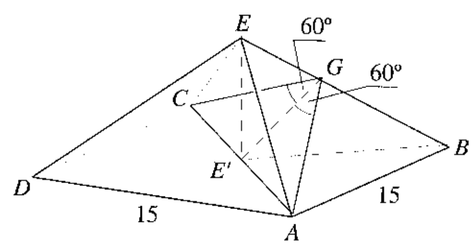
A gúla térfogata tehát:

$$V_g = \frac{1}{3}\cdot 15^2\cdot\frac{15}{2} = 562{,}5 \text{ cm}^3.$$

Másik megoldás:

Jelöljük az ábra szerint a gúla csúcsait, legyen E' a négyzet középpontja.

A négyzet átlója $15\cdot\sqrt{2}$ cm hosszú, tehát az átló felének hossza $\frac{15\cdot\sqrt{2}}{2}$ cm.

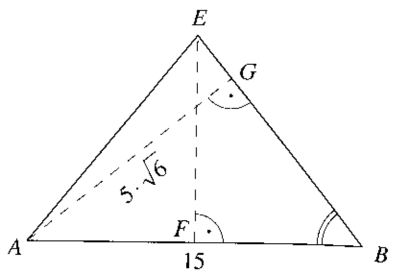


Két szomszédos oldallap szögét úgy kaphatjuk meg, hogy például az A, illetve C csúcsból merőlegest állítunk a BE élre. E két merőleges a BE élt ugyanabban a G pontban metszi, hiszen a gúla oldallapjai egybevágó egyenlő szárú háromszögek.

Mivel GE' felezi az AGC egyenlő szárú háromszög alapját, ezért merőleges is AC-re és felezi a 120°-os szöget.

Az $AE'G$ derékszögű háromszögből: $AG = \dfrac{AE'}{\sin 60°} = \dfrac{15\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}} = 5\cdot\sqrt{6}$ (cm).

Vizsgáljuk az ABE egyenlő szárú háromszöget (ábra)!
Az AG szakasz a háromszög egyik szárához tartozó magassága.
Pitagorasz-tétellel:
$GB^2 = 15^2 - (5\sqrt{6})^2 = 75$, ezért
$GB = 5\sqrt{3}$ (cm).
Az AGB háromszög hasonló az EFB háromszöghöz, mert mindkettő derékszögű és a B csúcsnál fekvő szögük is megegyezik. A két háromszög megfelelő oldalainak aránya tehát egyenlő:



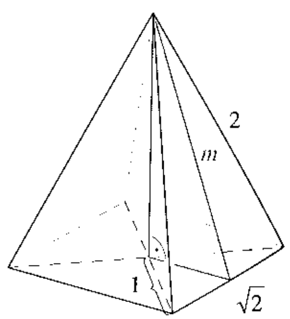
$$\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BG}, \text{ amiből } BE = \frac{BA\cdot BF}{BG} = \frac{15\cdot\frac{15}{2}}{5\cdot\sqrt{3}} = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{2} \text{ (cm).}$$

A $BE'E$ derékszögű háromszögből kapjuk a gúla magasságát:

$$EE'^2 = BE^2 - BE'^2 = \left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}, \text{ tehát } EE' = \frac{15}{2} \text{ cm.}$$

A gúla térfogata: $V_g = \dfrac{1}{3}\cdot 15^2\cdot\dfrac{15}{2} = 562{,}5$ (cm³).

2007. a) A szerkesztendő lapszög az ábrán színezett derékszögű háromszög nagyobbik hegyesszöge. A feltételt vegyük úgy, hogy az oldalélek 2, vetületeik pedig 1 egység hosszúak. A háromszög megszerkeszthető, mert egyik befogója az egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság, a másik pedig az oldallap egyenlőszárú háromszögéből megszerkeszthető, hiszen az alap $\sqrt{2}$, a szárak pedig 2 hosszúak. Így meg lehet a keresett satírozott háromszöget szerkeszteni, s ezzel a szög szerkeszthető!



b) A számításhoz ennek a színezett háromszögnek két oldala kell,

az egyik a fél középvonal: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

a másik az átfogó, amit m-mel jelölve: $m^2 = 2^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, ahonnan $m = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

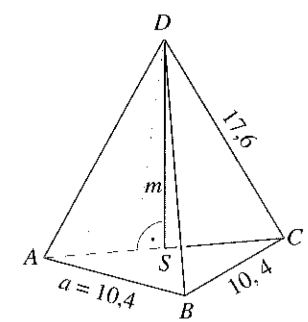
Ezzel a keresett a szögre: $\cos\alpha = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$, ahonnan $\alpha \approx 67{,}79°$.

c) Ha az oldalél 10 cm, akkor ez a gúla 5-szörös nagyítása az eddig alapul vett négyzetes gúlának. A 2 egység élűnek a térfogata, mint tudjuk: alapterület szorozva a magassággal és osztva 3-mal. Esetünkben a négyzet területe 2, a magasság pedig a színezett háromszögben felírt Pitagorasz-tételből:

$$\sqrt{\sqrt{\frac{7}{2}}^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}. \text{ Ezzel a térfogat: } \frac{2\sqrt{3}}{3} (\approx 1{,}155).$$

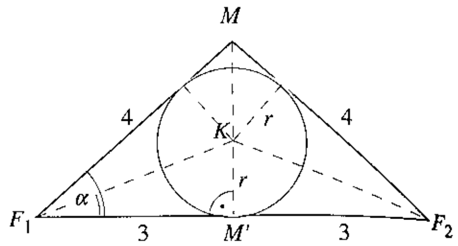
Mivel a nagyítás 5-szörös, ezért a térfogat (5^3 =) 125-szörös, tehát kb. 144,3 (cm³).
A felszín a 2 egység oldalú gúla esetén: az alaplap ismét csak 2, míg a négy oldallap egyenként $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{7}{2}}}{2}$ területű, mivel 4 darab van, ezért összesen $2\sqrt{7}$ lesz a területük. Azaz $2 + 2\sqrt{7} \approx 7{,}29$ a felszín. Ezt most 25-tel kell szorozni, mivel a felszín a hasonlóság arányának négyzetével (5^2) arányos.
Tehát a keresett felszín: 182,3 (cm²).

2008. A szabályos gúla m magasságának talppontja egybeesik az alaplap középpontjával, azaz az átlóinak felezőpontjával. A test m magassága az SDC derékszögű háromszögből állapítható meg a Pitagorasz-tétellel.
Az a oldalú négyzet átlójának fele,
$CS = a\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5{,}2\sqrt{2}$.
$m^2 = DC^2 - SC^2 = 17{,}6^2 - (5{,}2\sqrt{2})^2 = 255{,}68$.
Ebből a test magassága 16,0 cm.



2009. Az $ABCDEFGH$ oszlop magasságát kell meghatározni a térfogathoz. Az $ABCD$ négyzet BD átlója $a\sqrt{2}$. A BCK háromszögben a $BCK\sphericalangle = 90°$, $BK = BD = a\cdot\sqrt{2}$, $BC = a$ Pitagorasz-tétellel $CK^2 = BK^2 - BC^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$, így $CK = a$. Az oszlop magassága $2\cdot CK = 2a$, így térfogata: $V = a^2\cdot 2a = 2a^3$.

2010. A legnagyobb gömb a gúla minden lapját érinti. A gúla tengelyére illeszkedő, az egyik alapéllel párhuzamos sík a gúlát egy egyenlő szárú háromszögben, a legnagyobb gömböt pedig e háromszög beírt körében metszi (ábra). Az egyenlő szárú háromszög két szára egy-egy oldallap háromszög magassága, ennek hossza Pitagorasz-tétellel is számítható: $\sqrt{5^2-3^2}=4$ (cm).



Legyen $\alpha = F_2F_1M\sphericalangle$. Ekkor $F_2F_1K\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Az $F_1M'M$ derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, amiből $\alpha = 41{,}4°$, így $\frac{\alpha}{2} = 20{,}7°$.

Az $F_1M'K$ derékszögű háromszögből $r = 3 \cdot \mathrm{tg}\, 20{,}7° = 1{,}13$ (cm),

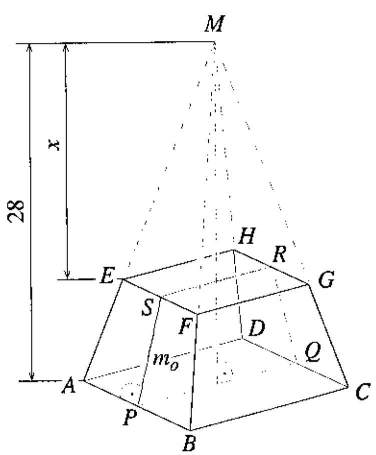
így a legnagyobb gömb felszíne $4 \cdot 1{,}13^2\pi = 16{,}0$ (cm²).

Megjegyzés:

A háromszög beírt körének sugara kiszámítható az $r = \frac{2T}{k}$ összefüggésből is, ahol T a háromszög területe, k pedig a kerülete.

A gúla beírt gömbjének sugara kiszámítható az $r = \frac{3V}{A}$ összefüggésből is, ahol V a gúla térfogatát, A pedig a felszínét jelöli.

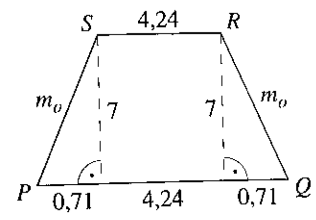
2011. A kimetszett síkidomot a gúla M csúcsából nagyítva az alaplaphoz juthatunk, e két síkidom tehát hasonló. A nagyítás arányát megkapjuk, ha a gúla magasságát elosztjuk a metszősíknak a gúla csúcsától mért távolságával. Jelöljük ezt a távolságot x-szel.



a) Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő.
A bevezetőben tett megállapítások miatt tehát $\frac{32}{18} = \left(\frac{28}{x}\right)^2$.

Ebből $x^2 = \frac{28^2 \cdot 18}{32} = 441\ \mathrm{cm}^2$, így $x = 21$ cm.
A metszősík a gúla alapsíkjától $(28 - 21 =)$ 7 cm-re van.

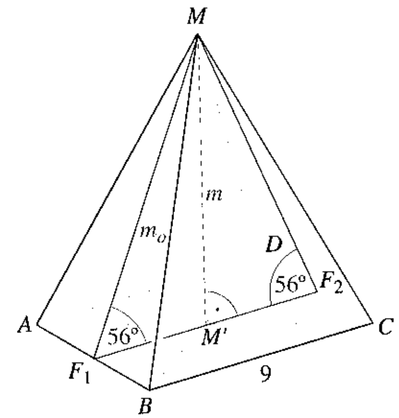
b) A felszín meghatározásához a négy egybevágó oldallap területére van még szükség. Ezek trapézok, amelyekből ismert az alapok hossza ($\sqrt{32} = 5{,}66$ cm, illetve $\sqrt{18} = 4{,}24$ cm).
Az oldallapok m_o magasságának meghatározásához tekintsük a $PQRS$ szimmetrikus trapézt (P, Q, R és S élfelező pontok).



Pitagorasz-tétellel $m_o = \sqrt{0{,}71^2 + 7^2} = 7{,}04$ (cm).

Egy oldallap területe így $\frac{(5{,}66 + 4{,}24) \cdot 7{,}04}{2} = 34{,}85$ (cm²), a csonkagúla felszíne pedig $32 + 18 + 4 \cdot 34{,}85 = 189{,}4$ (cm²).

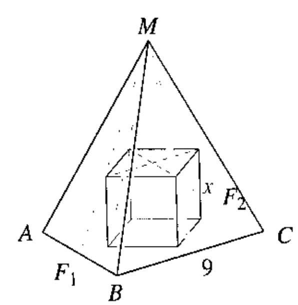
2012. Az ábra jelöléseit használjuk.

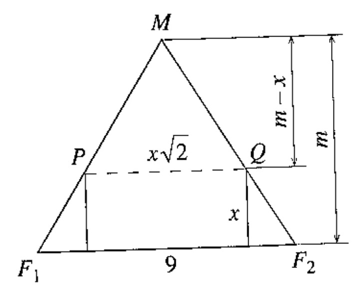


a) Az $F_1M'M$ derékszögű háromszögből a gúla és egy oldallap háromszög alaphoz tartozó magassága is kiszámítható:
$m = 4{,}5 \cdot \mathrm{tg}\, 56° = 6{,}67$ (cm), illetve
$m_o = \frac{4{,}5}{\cos 56°} = 8{,}05$ (cm).
Egy oldallap területe
$\frac{9m_o}{2} = 36{,}23$ cm², így a gúla felszíne:
$A = 9^2 + 4 \cdot 36{,}23 = 225{,}9$ (cm²).
A gúla térfogata: $V = \frac{9^2 \cdot 6{,}67}{3} = 180{,}1$ (cm³).

b) A levágott kis gúla hasonló az eredetihez, annak felére kicsinyítésével kapható. Mivel hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóságuk arányának köbével egyenlő, ezért a kis gúla térfogata az eredetiének egy nyolcada lesz. Ebből következik, hogy a keletkezett csonkagúla térfogata az eredeti gúla térfogatának hét nyolcad része. A metszésnél keletkezett két test térfogatának aránya tehát 1 : 7.

c)



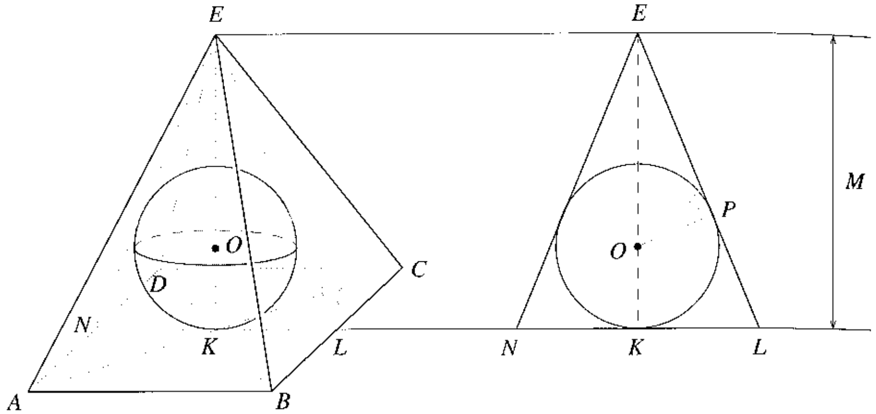


Legyen a kocka éle x cm hosszú. Emeljük ki az ábrából az F_1MF_2 síkmetszetet.

Ez a kockából egy olyan téglalapot metsz ki, melynek két szomszédos oldala x, illetve $x\sqrt{2}$ cm hosszú. A PMQ és F_1MF_2 háromszögek hasonlóságából következik, hogy $\frac{m-x}{m} = \frac{x\sqrt{2}}{9}$, amiből (felhasználva, hogy $m \approx 6{,}67$) $x \approx 3{,}26$ adódik. A szöveg szerint beírt kocka éle tehát 3,26 cm hosszú, térfogata ezért 34,6 cm³. Ez a gúla térfogatának 19,2%-a.

d) A beírt gömb sugara megegyezik az F_1MF_2 háromszög beírt körének sugarával: $r = 4{,}5 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ \approx 2{,}39$ (cm). A gömb térfogata 57,2 cm³, ez a gúla térfogatának 31,8%-a.

2013.



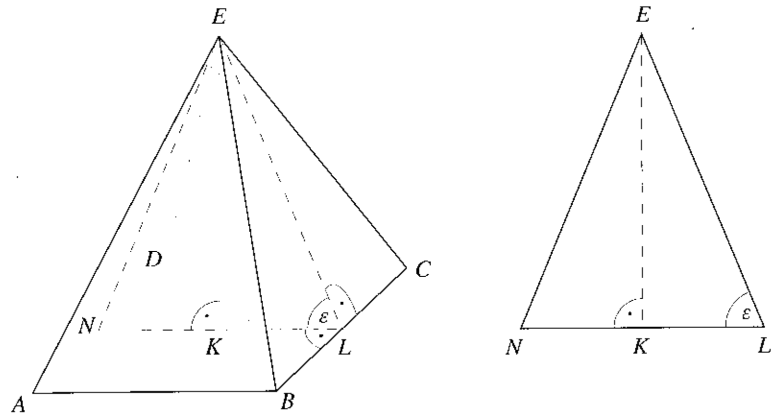
Vegyük a gúla tengelyén átmenő, BC alapélre merőleges sík metszetét! Ez a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a beírt gömbből egy főkört metsz ki. Ez a kör az egyenlő szárú háromszög beírt köre, a háromszög szára az oldallapok (pl. BC) alaphoz tartozó magassága, alapja a gúla alaplapjának az élével egyenlő. $EPO\,\Delta \sim EKL\,\Delta$, mert két-két szögük egyenlő (OEP szög közös, és a derékszög), így megfelelő oldalaik aránya egyenlő.

$$\frac{OP}{OE} = \frac{KL}{LE} \Rightarrow \frac{13}{M-13} = \frac{15}{\sqrt{M^2+15^2}} \Rightarrow 169(M^2+15^2) = 225(M^2-26M+169) \Rightarrow$$

$M \approx 104{,}5$ cm.

Így a gúla térfogata: $V = \frac{T \cdot M}{3} \approx 31\,500$ cm³ $\approx 31{,}5$ dm³.

2014.

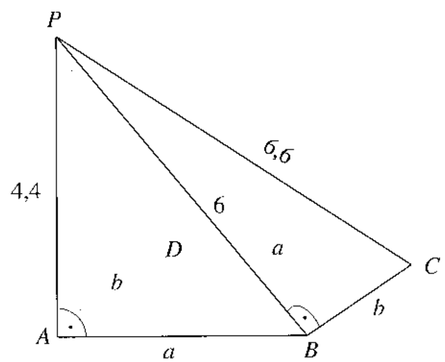


a) A piramis térfogata: $V = \frac{T \cdot M}{3} = 2\,645\,000$ m³. A felépítéshez 2 642 500 m³ követ használtak fel.

b) Vegyük a gúla tengelyén átmenő, BC alapélre merőleges síkmetszetét! Ez a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget metsz ki, a háromszög szára az oldallapok (pl. BC) alaphoz tartozó magassága, alapja a gúla alaplapjának az élével egyenlő. Az EKL derékszögű háromszögben $ELK\sphericalangle$ az oldallapnak a vízszintes síkhoz való hajlásszöge. $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{150}{115} \Rightarrow \varepsilon \approx 52{,}5^\circ$.

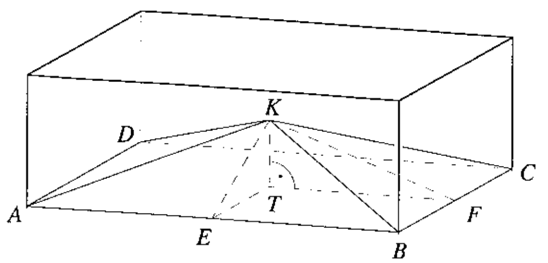
2015.

a) Az $ABP\,\Delta$ derékszögű. Felírható a Pitagorasz-tétel: $a^2 = 6^2 - 4{,}4^2$, innen $a = \sqrt{16{,}64} \approx 4{,}1$.
$BCP\,\Delta$ is derékszögű, ti. BC merőleges az $[ABP]$ sík két egyenesére (AP-re és AB-re), tehát BP-re is.
Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:
$b^2 = 6{,}6^2 - 6{,}0^2$, innen
$b = \sqrt{7{,}56} \approx 2{,}7$.
A téglalap oldalai 4,1 cm, illetve 2,7 cm hosszúak.



b) Az $APD\,\Delta$ is derékszögű; alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt.
$PD^2 = 4{,}4^2 + b^2 = 19{,}36 + 7{,}56 = 26{,}92$, innen $PD = \sqrt{26{,}92} \approx 5{,}19$.
PD hossza 5,2 cm.

2016.



Legyen a téglatest (egyik) legnagyobb területű oldallapja az $ABCD$ téglalap, ahol $AB = CD = 12$ cm, $BC = DA = 8$ cm.
A téglatest középpontja K. Az $ABCDK$ gúla K-ból induló testmagassága a téglatest harmadik oldalának fele, azaz 2 cm.

A térfogat: $V = t_{ABCD} \cdot \frac{m}{3} = 12 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} = 64$ (cm³).

A felszínhez kell az oldallapok területe. A BC oldal felezőpontja legyen F, az AB oldal felezőpontja E, a K-ból induló testmagasság talppontja T. A KF szakasz hosszát a KTF derékszögű háromszögből határozzuk meg:

$KF^2 = KT^2 + TF^2 = 2^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$, innen $KF = 2\sqrt{10}$ cm.

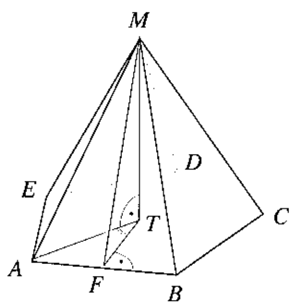
A KE szakasz hosszát a KTE derékszögű háromszögből számoljuk ki:

$KE^2 = KT^2 + TE^2 = 2^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$, innen $KE = 2\sqrt{5}$ cm.

A gúla felszíne:

$$F = t_{ABCD} + 2 \cdot t_{BCK} + 2 \cdot t_{ABK} = AB \cdot BC + 2 \cdot \frac{BC \cdot KF}{2} + 2 \cdot \frac{AB \cdot KE}{2} =$$
$$= 12 \cdot 8 + 8 \cdot 2\sqrt{10} + 12 \cdot 2\sqrt{5} \approx 200{,}3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2017. Meg kell határozni a gúla felszínét. A gúla alaplapja legyen az $ABCDE$ ötszög, hatodik csúcsa M, az M-ből induló testmagasság talppontja T. Az AB él felezőpontja legyen F, ekkor az $ATF \sphericalangle = \frac{360°}{10} = 36°$; az AF szakasz az AB él fele, tehát 2,5 m.

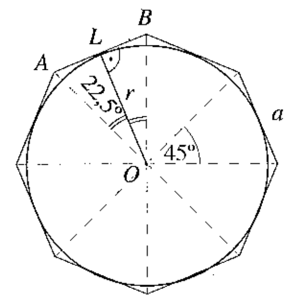


Ekkor $\operatorname{tg} 36° = \frac{AF}{FT}$, innen $FT \approx 3{,}44$ m. $MT = 5$ m,
így $MF^2 = 5^2 + 3{,}44^2$, innen $MF \approx 6{,}07$ m.
A gúla felszíne:

$$F = 5(t_{ABT} + t_{ABM}) = 5\left(\frac{AB \cdot FT}{2} + \frac{AB \cdot MF}{2}\right) = 5\left(\frac{5 \cdot 3{,}44}{2} + \frac{5 \cdot 6{,}07}{2}\right) \approx 118{,}9 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Tehát 80 m² anyagból a gúla nem készíthető el.

2018. A legkevesebb hulladékot akkor kapjuk, ha a körkúp alaplapja a szabályos nyolcoldalú gúla alaplapjának beírható köre, testmagasságuk pedig megegyezik.
Legyen a nyolcszög oldala a, beírható körének sugara r, a testek magassága m.
A nyolcszög 8 db egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontható, ezek alapja a, magassága r, szárszögük $\frac{360°}{8} = 45°$. OLB derékszögű háromszögben



$\operatorname{tg} 22{,}5° = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{2r} \Rightarrow a = 2r \cdot \operatorname{tg} 22{,}5°$. A nyolcszög területe:

$T = 8 \cdot \frac{a \cdot r}{2} = 8r^2 \cdot \operatorname{tg} 22{,}5°$, a körkúp alaplapjának területe: $t = r^2\pi$.

Vegyük a körkúp és a gúla térfogatának arányát!

$$\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = \frac{\frac{r^2\pi \cdot m}{3}}{\frac{8r^2 \operatorname{tg} 22{,}5° \cdot m}{3}} = \frac{\pi}{8 \operatorname{tg} 22{,}5°} = 0{,}948.$$

Ez azt jelenti, hogy a keletkezett lehető legnagyobb körkúp térfogata az eredeti gúla térfogatának a 94,8%-a, tehát a hulladék a gúla térfogatának legalább 5,2%-a.

2019. A forgáskúp sugara r, ekkor az alkotó $2r$. A kúp magassága, sugara és alkotója egy olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, amelynek átfogója az alkotó, így $(2r)^2 = r^2 + (8\sqrt{3})^2$, innen $r = 8$ cm.
A kúp térfogata:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{3} = 64 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 928{,}66$ (cm³).

A kúp felszíne:

$F = r^2\pi + r \cdot \pi \cdot a = 64\pi + 8 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8 = 192\pi$ (cm²).

2020. A kúp alkotójának hossza $a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (dm) ($\approx 1{,}155$ dm),

az alapkör sugara az alkotó fele: $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dm ($\approx 0{,}577$ dm).

Az alapkör kerülete $k = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ dm ($\approx 3{,}625$ dm), tehát a kiterített palást egy a sugarú félkör, középponti szöge: 180°.

A palást területe: $\frac{2\pi}{3}$ dm² ($\approx 2{,}09$ dm²).

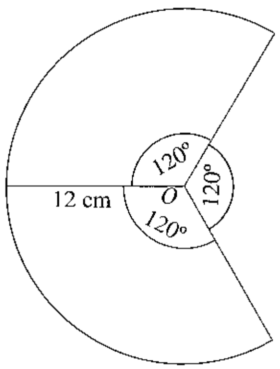
2021. a) A kúp alapkörének kerülete a 18 cm sugarú félkörív hossza, vagyis 18π cm. Ebből az alapkör sugara $r = 9$ cm.
A kúp felszíne $A = 9^2\pi + 18 \cdot 9 \cdot \pi = 243\pi \approx 763{,}4$ (cm²).

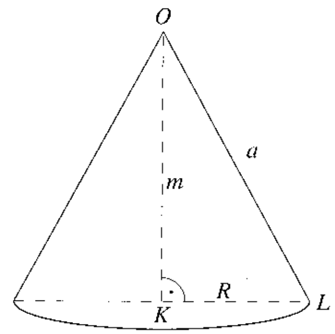
b) A kúp magassága Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{18^2 - 9^2} = 9\sqrt{3} \approx 15{,}59$ (cm),
térfogata így $V = \dfrac{81\pi \cdot 15{,}59}{3} \approx 1322{,}4$ (cm³).

c) Az alapkör átmérője 18 cm, ugyanakkora, mint a kúp alkotója. A kúp nyílásszöge tehát 60°.

d) A beírt gömb sugara megegyezik a 18 cm oldalú szabályos háromszög beírt körének sugarával, ami a kúp magasságának harmada: $3\sqrt{3} \approx 5{,}20$ (cm).
A beírt gömb térfogata: $108\sqrt{3}\pi \approx 587{,}7$ (cm³).

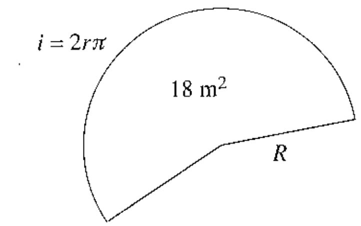
2022.

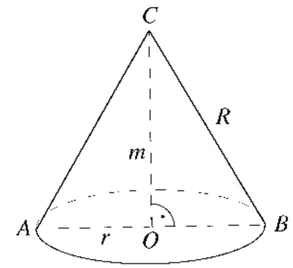




Mivel a 24 cm átmérőjű körlapot három egyenlő részre vágunk, egy-egy süveget 120°-os középponti szögű, 12 cm alkotójú körcikkből készítünk. E körcikk ívének hossza $\dfrac{2 \cdot 12\pi}{3} = 8\pi$ megegyezik a körcikkből képezhető körkúp alapkörének kerületével. Ha a körkúp alapkörének sugara R, magassága m, $2R\pi = 8\pi \Rightarrow R = 4$.
Az alaplap síkjára merőleges, a kör középpontján átmenő sík (a tengelymetszet síkja) a kúpból egy olyan egyenlő szárú háromszöget metsz ki, amelynek alapja a kör átmérője, alaphoz tartozó magassága a kúp magassága, szára a kúp alkotója.
OKL derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint:
$m = \sqrt{a^2 - R^2} = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2} \approx 11{,}3.$
Tehát a süvegek magassága kb. 11,3 cm.

2023. A felállított sátor alapkörének kerülete egyenlő a körcikk alakú palást ívével, az alkotója pedig azonos a körcikk R sugarával.



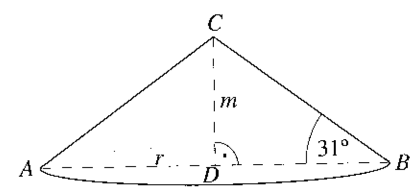


$P = \dfrac{iR}{2} = \dfrac{2r\pi R}{2} = rR\pi$
Az adatokat behelyettesítve megkapjuk R-et: $1{,}8R\pi = 18$, ahonnan $R = \dfrac{10}{\pi}$.

A *COB* derékszögű háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt:
$m^2 = R^2 - r^2 = \dfrac{100}{\pi^2} - 1{,}8^2 \approx 6{,}892$, ebből: $m \approx \sqrt{6{,}892} \approx 2{,}63$.
Tehát a sátor magassága $\approx 2{,}6$ m.

Megjegyzés:
A kúp alkotójának kiszámítására alkalmazható a $P = ra\pi$ képlet közvetlenül is az értelemszerű átbetűzéssel.

2024. A kiöntött homok forgáskúp alakot vesz fel (száraz homok, ideális eset), alapkörének sugara r, magassága m. Az alaplap síkjára merőleges, a kör középpontján átmenő sík (a kúp tengelymetszete) a kúpból egy olyan egyenlő szárú háromszöget metsz ki, melynek alapja a kör átmérője, alaphoz tartozó magassága a kúp magassága.



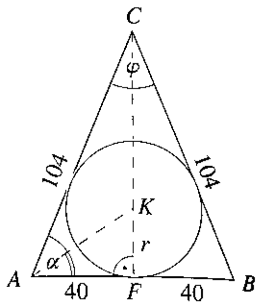
A *BDC* derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} 31° = \dfrac{m}{r}$.

A kúp térfogata, sugara, magassága:
$V = \dfrac{r^2\pi m}{3} \Rightarrow 12 = \dfrac{r^2\pi \cdot r \cdot \operatorname{tg} 31°}{3} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 12}{\pi \cdot \operatorname{tg} 31°}} \approx 2{,}67 \Rightarrow m \approx 1{,}61.$
Tehát a homokkúp kb. 1,6 méter magas és 5,34 méter széles.

2025. a) A kúp nyílásszöge a megforgatott egyenlő szárú háromszög szárszögével egyezik meg. Az AFC derékszögű háromszögből: $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{40}{104} = 0,3846$.

Ebből $\frac{\varphi}{2} = 22,62°$, azaz $\varphi = 45,24°$.

Ez a kúp nyílásszöge.



b) A kúpba írt gömb sugara megegyezik az ABC háromszögbe írt kör sugarával.

$\alpha = 90° - \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 45° - \frac{\varphi}{4} = 33,69°$, így az

Az AFK derékszögű háromszögből $r = 40 \cdot \mathrm{tg}\, 33,69° = 26,67$ (cm).

A beírt gömb felszíne 8938 cm^2.

c) A palást területe $104 \cdot 40 \cdot \pi = 13\,069$ (cm^2). Az alapkör kerülete 80π cm, a kiterített palást (körcikk) sugara 104 cm, tehát a középponti szög radiánban:

$\frac{80\pi}{104} = \frac{10\pi}{13}$, ami 138,5°-kal egyenlő.

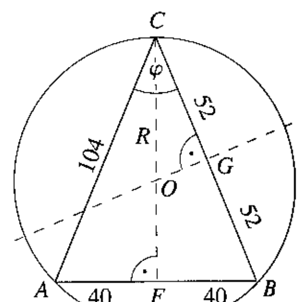
d) Az ABC háromszög körülírt körének sugara megegyezik a kúp köréírt gömbjének sugarával.

Az OGC derékszögű háromszögből ez

$R = \frac{52}{\cos 22,62°} = 56,33$ (cm),

a körülírt gömb térfogata tehát: $V_g \approx 748\,700$ cm^3.

A kúp térfogatának meghatározásához szükség van a kúp magasságára, ami Pitagorasz-tétellel számítva $\sqrt{104^2 - 40^2} = 96$ (cm), így a kúp térfogata $V_k = \frac{40^2\pi \cdot 96}{3} \approx 160\,850$ (cm^3).

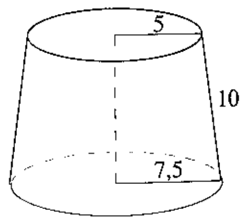


Tehát $\frac{V_g}{V_k} = \frac{748\,700}{160\,850} = 4,65$.

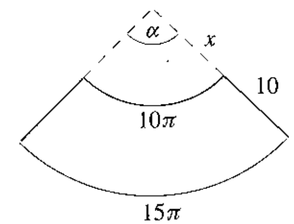
A gömb 4,65-ször akkora térfogatú, mint a kúp.

2026. A csonkakúp palástja síkba terítve körgyűrűcikk, amelyet határoló körívek hosszát a csonkakúp alap- és fedőkörének kerülete, szélességét a csonkakúp alkotója adja. A kiterített palástot kiegészítjük körcikké. A körcikk és a kiegészítő körcikk hasonló, ezért a sugarak és a megfelelő ívek aránya egyenlő.

$\frac{10 + x}{x} = \frac{15\pi}{10\pi} = \frac{3}{2}$, ebből $x = 20$.



a) Az x kiszámított értékét felhasználva megkapjuk a lámpaernyő készítéséhez szükséges körcikk sugarát: $R = x + 10 = 30$ (cm).



b) Minthogy a körcikk szöge és a teljes kör középponti szögének aránya egyenlő a megfelelő körívek hosszának arányával, felírhatjuk:

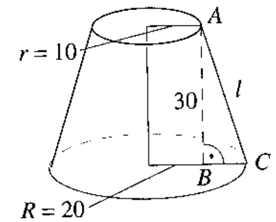
$\frac{\alpha}{360°} = \frac{10\pi}{2x\pi} = \frac{1}{4}$, ebből $\alpha = 90°$.

A lámpaernyő éppen negyed körlapból készülhet.

2027. A csonkakúp l alkotóját meg tudjuk határozni az ABC Δ-re felírt Pitagorasz-tétel alkalmazásával:

$l^2 = 30^2 + 10^2$, ebből $l = 10\sqrt{10}$.

A megoldás további gondolatmenete megegyezik a 2026-os feladat megoldásában közöltekkel.



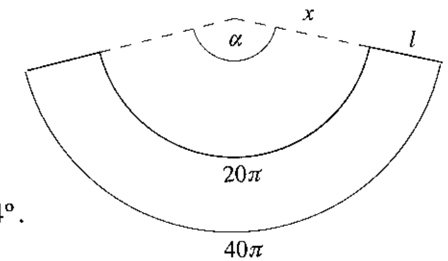
$\frac{10\sqrt{10} + x}{x} = \frac{40\pi}{20\pi} = 2$, ebből a kiegészítő körcikk sugara $x = 10\sqrt{10}$.

$R = x + l = 20\sqrt{10} \approx 63,246$.

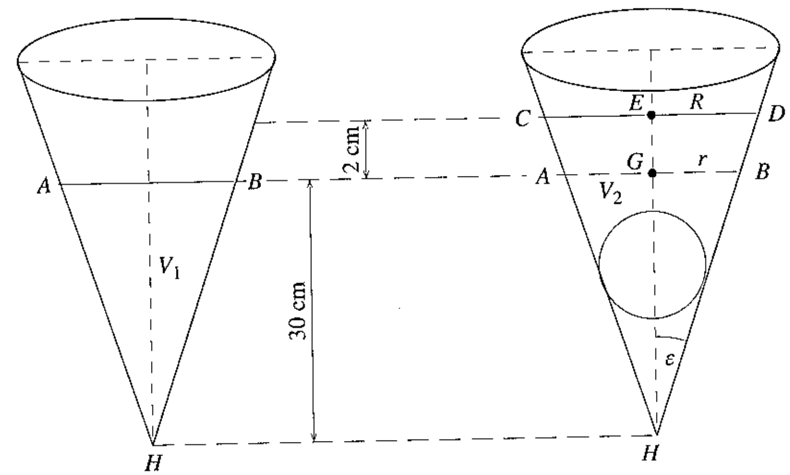
A körcikk sugara ≈ 63,2 cm.

A körcikk szögére felírjuk: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{20\pi}{2x\pi}$,

ebből a körcikk szöge $\alpha = \frac{360°}{\sqrt{10}} \approx 113,84°$.



2028.



A megemelkedett vízszinttel kapott kúp térfogata egyenlő az eredeti vízszinttel levő kúp és a golyó térfogatának összegével, mivel a golyó teljesen lesüllyed a vízben.

$V_2 = V_1 + V_{\text{golyó}}$, azaz $\dfrac{R^2\pi\cdot 32}{3} = \dfrac{r^2\pi\cdot 30}{3} + \dfrac{4\cdot 3^3\pi}{3}$.

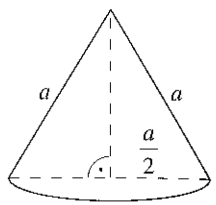
A kúp tengelyére illeszkedő sík a kúpból egy olyan egyenlő szárú háromszöget metsz ki (tengelymetszet), melynek alapja a kör átmérője, alaphoz tartozó magassága a megfelelő kúp magassága. $EDH\,\Delta \sim GBH\,\Delta$, mert két-két szögük egyenlő $\Rightarrow$ megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így $\dfrac{R}{32} = \dfrac{r}{30} \Rightarrow r = \dfrac{15R}{16}$.

Ezt a fenti egyenletbe helyettesítve, $\dfrac{\pi}{3}$-mal egyszerűsítve, $R \approx 4{,}38$, ($r \approx 4{,}11$).

HED derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\varepsilon = \dfrac{R}{32} \approx 0{,}1369 \Rightarrow \varepsilon \approx 7{,}8°$.

A kúp nyílásszöge $2\varepsilon \approx 15{,}6°$.

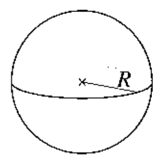
2029. Legyen az egyenlő oldalú kúp alkotójának hossza a, így alaplapjának sugara $\dfrac{a}{2}$,



felszíne: $A_1 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2\pi + \dfrac{a^2\pi}{2} = \dfrac{3a^2\pi}{4}$.

R sugarú gömb felszíne: $A_2 = 4R^2\pi$.

A feltétel szerint $A_1 = A_2$, így $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\pi\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{3} = \dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$,

mert a kúp magassága megegyezik a szabályos háromszög magasságával.

A gömb térfogata:

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4R^3\pi}{3} = \frac{4\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^3\pi}{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{16} \Rightarrow \text{ a gömb térfogata nagyobb.}$$

$$\frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{kúp}}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{ a gömb térfogata 1,5-szerese a kúp térfogatának.}$$

2030. Ha a kocka éle a, akkor a térfogata a^3.

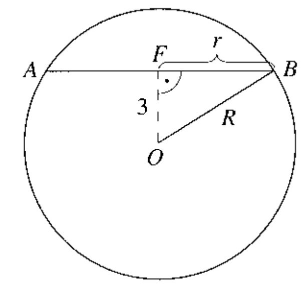
A legnagyobb szóba jövő gömb sugara $\dfrac{a}{2}$, a térfogata $\dfrac{4\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^3\pi}{3} = \dfrac{a^3\pi}{6}$.

A hulladék: $a^3 - \dfrac{a^3\pi}{6} = a^3\left(\dfrac{6-\pi}{6}\right)$, százalékban: $100\cdot\dfrac{a^3\left(\dfrac{6-\pi}{6}\right)}{a^3} \approx 47{,}64\%$.

2031. A cérna hossza mindkét esetben $2r\pi + 1$, vagyis az új kör sugara: $\dfrac{2r\pi+1}{2\pi} = r + \dfrac{1}{2\pi}$.

Ekkor a magasság, a „hézag" szintén mindkét esetben $\dfrac{1}{2\pi}$ ($\approx 0{,}16$) m, azaz egyforma.

2032. A gömb bármely síkmetszete kör. Az R sugarú gömb O középpontján átmenő, a síkmetszetre merőleges sík a gömbből egy főkört, a síkmetszetből egy AB szakaszt metsz ki, melynek hossza a síkmetszet átmérője. A feltétel szerint $r^2\pi = 50{,}26 \Rightarrow r \approx 4$ cm.

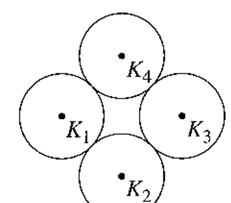


A kör középpontjából a húrra állított merőleges felezi a húrt.

Az OFB derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele miatt: $r^2 + 3^2 = R^2 \Rightarrow R \approx 5$ cm a gömb sugara.

2033. A négy golyó felülnézetben így néz ki (ábra).

K_1, K_2, K_3, K_4 jelöli a golyók középpontjait. A $K_1K_2K_3K_4$ négyszög egy 20 cm oldalú négyzet, így átlója (K_1K_3) $20\cdot\sqrt{2}$ cm.



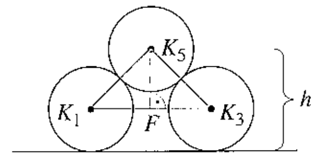
A kupac magasságát egy olyan síkmetszeten olvassuk le, amely tartalmazza a K_1, K_3, K_5 pontokat, ahol K_5 az ötödik gömb középpontja.

A $K_1K_3K_5$ háromszög egyenlő szárú:

$K_1K_5 = K_3K_5 = 20$ cm.

Mivel $K_1K_3 = 20\cdot\sqrt{2}$ cm, ezért a $K_1K_3K_5$ háromszög derékszögű is, hiszen igaz, hogy

$20^2 + 20^2 = (20\sqrt{2})^2$.



Így, ha a K_1K_3 szakasz felezőpontja F, akkor

$FK_5 = \dfrac{K_1K_3}{2} = 10\sqrt{2}$, ezért a kupac magassága:

$10 + 10\sqrt{2} + 10 = 10\cdot(2+\sqrt{2}) \approx 34{,}14$ (cm).

2034. A három alsó golyó középpontja egy 20 cm oldalú szabályos háromszög csúcsaiban helyezkedik el, a negyedik golyó középpontja ezek súlypontja felett van, mindhármuk középpontjától szintén 20 cm-re. Ekkor a négy középpont egy 20 cm élű szabályos tetraédert alkot. Ennek alaplapja 10 cm magasan van az asztal felett, a felső golyó felső pontja pedig szintén 10 cm magasan van a tetraéder felső csúcsa felett.

Az a élű szabályos tetraéder testmagassága $\sqrt{\frac{2}{3}}a$ (lásd 1943. feladat megoldása),

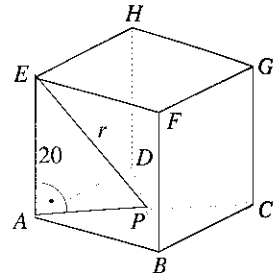
így a kupac magassága: $10+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot 20+10 \approx 36,33$ (cm).

2035. Az $ABCD$ négyzet P középpontjának és a kocka E csúcsának távolsága éppen a félgömb sugara.

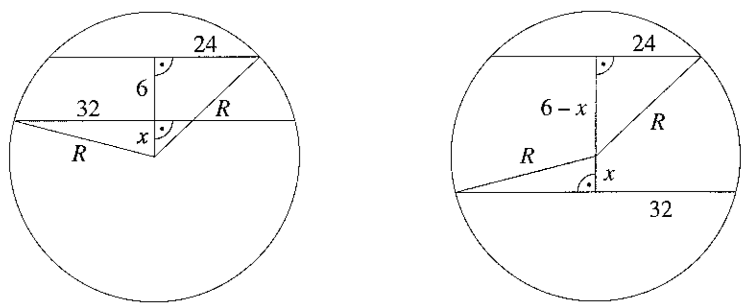
$AP = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} = 14,14$ (cm),

ezért Pitagorasz-tétellel:

$r = \sqrt{20^2+(10\sqrt{2})^2} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6} = 24,49$ (cm).



2036.



Az ábrán a két párhuzamos metsző síkra merőleges főkört tüntettük fel. Ebből a párhuzamos síkok egy-egy húrt metszenek ki. A körmetszet középpontja lehet a párhuzamos húrok között vagy rajtuk kívül. Mindkét esetben két derékszögű háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tételt.

Ha a középpont a párhuzamosok alkotta sávon kívül van:

$R^2 = 24^2+(6+x)^2$, illetve $R^2 = 32^2+x^2$ (*).

A jobb oldalak egyenlők, ebből adódik: $x = \frac{103}{3}$.

A *-os egyenletbe helyettesítve: $R^2 = 1024+\left(\frac{103}{3}\right)^2 \approx 2202,8$.

A gömb sugara $R \approx 46,9$ cm.

Ha a középpont a párhuzamosok között van: $R^2 = 24^2+(6-x)^2$,

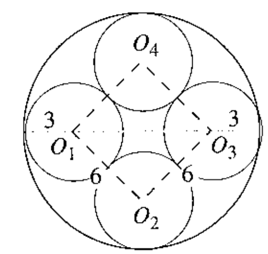
másrészt a *-ot is figyelembe véve $32^2+x^2 = 576+(6-x)^2$.

A kijelölt műveleteket elvégezve $-412 = 12x$ adódik. Ebből x-re negatív számot kapunk, ami azt jelenti, hogy ilyen adatok esetén a középpont nem lehet a párhuzamosok között.

2037. A szöveg alapján a kedvezőbb ajánlatot az a vállalkozó teszi, aki kisebb felszínű hengerbe csomagolja a labdákat.

A hosszúkás henger átmérője egy teniszlabdányi, azaz 6 cm, a henger hossza 24 cm. Egy ilyen henger felszíne $2\cdot 3^2\pi+2\cdot 3\pi\cdot 24 = 162\pi \approx 509$ (cm²).

A lapos henger magassága egy teniszlabdányi, azaz 6 cm. A felülnézeti ábrából megállapítható a henger alapkörének sugara. Az $O_1O_2O_3O_4$ négyszög egy 6 cm oldalú négyzet, ezért $O_1O_3 = 6\sqrt{2}$ cm, tehát az alapkör átmérője $6\sqrt{2}+6$ (cm) sugara $3\sqrt{2}+3 \approx 7,24$ (cm).



A lapos henger felszíne $2\cdot 7,24^2\pi+2\cdot 7,24\cdot\pi\cdot 6 \approx 602$ (cm²).

A hosszúkás henger felszíne a lapos henger felszínénél annak mintegy hatodával kisebb, ezért a csomagolási költség szempontjából a hosszúkás hengert érdemes választani.

2038. A cső térfogata: $V = (R^2-r^2)\pi m = (2,3^2-1,5^2)\pi\cdot 50 = 152\pi$.

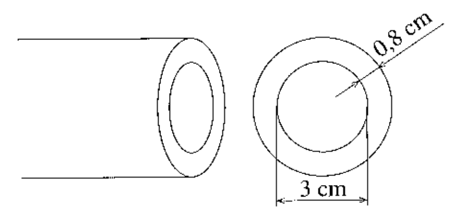
n darab golyó térfogata: $V' = \frac{4r'^3\pi}{3}n = \frac{4\cdot 0,75^3\pi}{3}n = 0,5625\pi n$.

Az 5%-os veszteséget figyelembe véve az n meghatározható a $V' = 0,95V$ összefüggésből:

$0,5625\pi n = 0,95\cdot 152\pi$.

Innét $n = \frac{144,4}{0,5625} \approx 256,7$.

Ezek szerint 256 db egész golyó készíthető a cső anyagából.



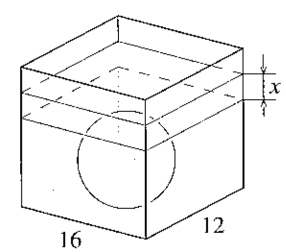
2039. A golyó térfogata: $V = \frac{4\cdot 2,7^3\pi}{3}$.

A vízszint emelkedése x, a megfelelő vízmennyiség térfogata $V' = 12\cdot 16\cdot x$.

Az x kiszámítható a $V = V'$ összefüggésből:

$12\cdot 16\cdot x = \frac{4\cdot 2,7^3\cdot\pi}{3} \Rightarrow x \approx 0,4294$.

A vízszint emelkedése 0,4 cm, ha az edény elég magas.



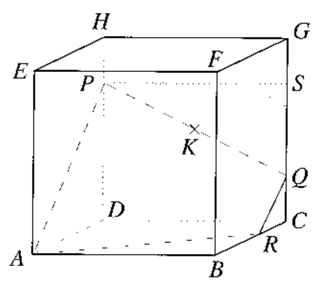
2034. A három … ata ugyanakkora, mint a három csepp térfo-
helyezke … csepp sugara R, így
muk kö … $\Rightarrow R \approx 1,65.$
bályos … je kb. 3 mm.
golyó … színe:
Az … $\cdot 1,5^2\pi = 4 \cdot 3,5\pi.$
… ne: $A_k = 4 \cdot 1,65^2\pi.$

2035. … ,778.

…n csepp felszíne az eredeti 3 csepp együttes felszínének 0,778-%-a, azaz a végső csepp felszíne kisebb, mint az eredeti 3 csepp …színe.

…atest egy csúcsból kiinduló élei a, b, c, akkor a felszíne $A = 2(ab + ac + bc)$, …átlója $t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Mivel $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, így $(a + b + c)^2 = t^2 + A \Rightarrow t = \sqrt{12^2 - 94} \approx 7,1$ (cm).

42. Egy négyzet középpontján át húzott szakasz két szimmetrikus részre vágja a négyzetet, ezért $QC = HP = 1$. $AP \parallel QR$, mert párhuzamos lapokat metsz az APK sík, így a síkmetszet egy trapéz.

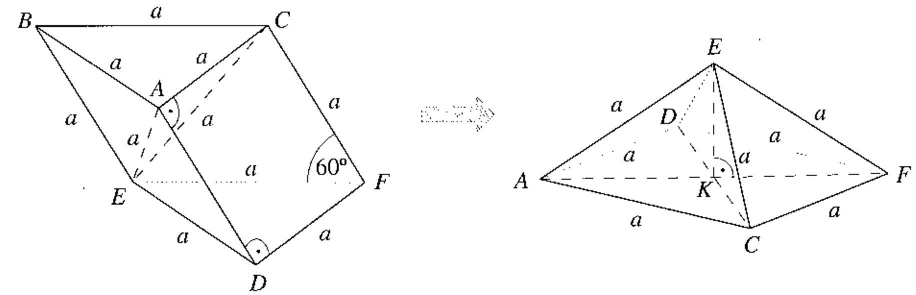


Fennáll még: $ADP\,\Delta \sim RCQ\,\Delta$.
Az $ADP\,\Delta$ derékszögű, befogói:
$AD = 4$, $DP = 3$,
így átfogója: $AP = 5$.
Az említett két háromszög hasonlóságának aránya $\dfrac{QC}{PD} = \dfrac{1}{3}$, így
$CR = \dfrac{4}{3}$ és $QR = \dfrac{5}{3}$.

A P-ből CG-re bocsátott merőleges talppontja S, a PSQ háromszög derékszögű, és $PS = 4$, $SQ = 2$, így $PQ = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. CR miatt $BR = \dfrac{8}{3}$, az ABR derékszögű háromszögből: $AR = \sqrt{4^2 + \left(\dfrac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{144 + 64}{9}} = \dfrac{4\sqrt{13}}{3}$.

Így az $APQR$ trapéz kerülete: $5 + 2\sqrt{5} + \dfrac{5}{3} + \dfrac{4\sqrt{13}}{3} \approx 15,95.$

2043.



$ABCDEF$ hasáb ABC, illetve DEF alaplapjai szabályos háromszögek, $ABED$, illetve $BCFE$ oldallapjai olyan rombuszok, melyek egyik átlója él hosszúságú. $ACFD$ oldallap négyzet. A hasáb szétvágható $ABCE$ szabályos tetraéderre (minden éle 5 cm) és egy $ACFDE$ négyzet alapú szabályos gúlára, melynek minden éle 5 cm. Így az eredeti test térfogata e két test térfogatának összegeként számolható.

Az a élű szabályos tetraéder térfogata: $V_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

$ACFDE$ test alaplapja $ACFD$ a oldalú négyzet, oldallapjai szabályos háromszögek. E csúcsnak az $ACFD$ alaplapra eső merőleges vetülete a négyzet K középpontja. A gúla testmagassága KE Pitagorasz tétellel számolható az EKC derékszögű háromszögből.

$$KE^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow KE = M = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Az $ACFDE$ gúla térfogata: $V_2 = \dfrac{T \cdot M}{3} = \dfrac{a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Az eredeti hasáb térfogata: $V = V_1 + V_2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Mivel $a = 5$ cm, $V \approx 44,2$ cm³.

2044. a) Ha a hasábot a rombusz alakú lapjára állítjuk, akkor a megadott feltételek alapján látható, hogy egy egyenes hasábot kapunk, amelynek magassága 12 cm.
A lapszög megegyezik a rombusz hegyesszögével, tehát a rombusz területe $144\sin 45° = 72\sqrt{2} = 101,8$ (cm²).
A hasáb térfogata tehát $72\sqrt{2} \cdot 12 = 864\sqrt{2} = 1222$ (cm³).

b) A hasáb térfogata nem változik, ha valamelyik négyzet alakú lapjára állítjuk. Ekkor egy m magasságú ferde hasábot kapunk; ennek térfogatára igaz tehát:
$12^2 m = 1222$, amiből $m = 8,5$ cm. (Kerekítés nélkül számolva $m = 6\sqrt{2}$ cm.)
A hasáb magasságai tehát 12 cm, illetve 8,5 cm hosszúak.

2040. a) A keletkezett egyetlen csepp térfogata ugyanakkora, mint a három csepp térfogata együttvéve. Legyen a keletkezett csepp sugara R, így

$$\frac{4R^3\pi}{3} = \frac{4\cdot 0,5^3\pi}{3} + \frac{4\cdot 1^3\pi}{3} + \frac{4\cdot 1,5^3\pi}{3} \Rightarrow R \approx 1,65.$$

A keletkezett egyetlen csepp átmérője kb. 3 mm.

b) Az eredeti cseppek együttes felszíne:

$A = 4\cdot 0,5^2\pi + 4\cdot 1^2\pi + 4\cdot 1,5^2\pi = 4\cdot 3,5\pi.$

A keletkezett csepp felszíne: $A_k = 4\cdot 1,65^2\pi.$

$$\frac{A_k}{A} = \frac{4\cdot 1,65^2\pi}{4\cdot 3,5\pi} \approx 0,778.$$

A végső egyetlen csepp felszíne az eredeti 3 csepp együttes felszínének 0,778-szerese, 77,8%-a, azaz a végső csepp felszíne kisebb, mint az eredeti 3 csepp együttes felszíne.

2041.* Ha a téglatest egy csúcsból kiinduló élei a, b, c, akkor a felszíne $A = 2(ab + ac + bc)$, testátlója $t = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Mivel $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, így $(a+b+c)^2 = t^2 + A \Rightarrow t = \sqrt{12^2-94} \approx 7,1$ (cm).

2042. Egy négyzet középpontján át húzott szakasz két szimmetrikus részre vágja a négyzetet, ezért $QC = HP = 1$. $AP \parallel QR$, mert párhuzamos lapokat metsz az APK sík, így a síkmetszet egy trapéz.

Fennáll még: $ADP\,\Delta \sim RCQ\,\Delta$.

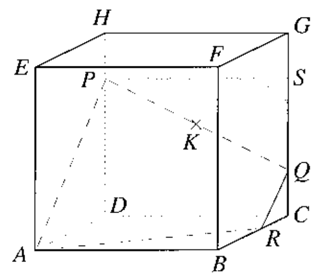
Az $ADP\,\Delta$ derékszögű, befogói:

$AD = 4$, $DP = 3$,

így átfogója: $AP = 5$.

Az említett két háromszög hasonlóságának aránya $\frac{QC}{PD} = \frac{1}{3}$, így

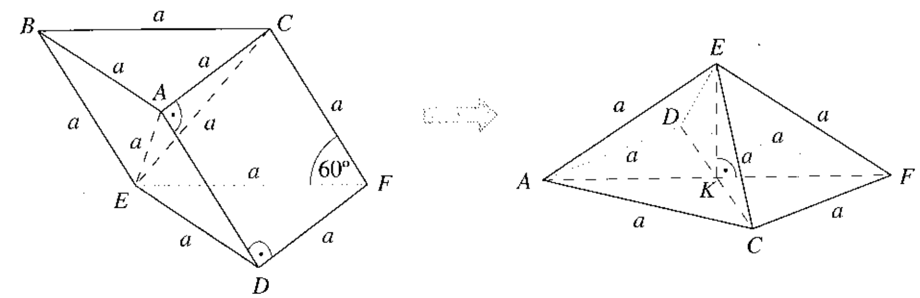
$CR = \frac{4}{3}$ és $QR = \frac{5}{3}$.



A P-ből CG-re bocsátott merőleges talppontja S, a PSQ háromszög derékszögű, és $PS = 4$, $SQ = 2$, így $PQ = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. CR miatt $BR = \frac{8}{3}$, az ABR derékszögű háromszögből: $AR = \sqrt{4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{144+64}{9}} = \frac{4\sqrt{13}}{3}$.

Így az $APQR$ trapéz kerülete: $5 + 2\sqrt{5} + \frac{5}{3} + \frac{4\sqrt{13}}{3} \approx 15,95.$

2043.



$ABCDEF$ hasáb ABC, illetve DEF alaplapjai szabályos háromszögek, $ABED$, illetve $BCFE$ oldallapjai olyan rombuszok, melyek egyik átlója él hosszúságú. $ACFD$ oldallap négyzet. A hasáb szétvágható $ABCE$ szabályos tetraéderre (minden éle 5 cm) és egy $ACFDE$ négyzet alapú szabályos gúlára, melynek minden éle 5 cm. Így az eredeti test térfogata e két test térfogatának összegeként számolható.

Az a élű szabályos tetraéder térfogata: $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$

$ACFDE$ test alaplapja $ACFD$ a oldalú négyzet, oldallapjai szabályos háromszögek. E csúcsnak az $ACFD$ alaplapra eső merőleges vetülete a négyzet K középpontja. A gúla testmagassága KE Pitagorasz tétellel számolható az EKC derékszögű háromszögből.

$$KE^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow KE = M = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Az $ACFDE$ gúla térfogata: $V_2 = \frac{T\cdot M}{3} = \frac{a^2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$

Az eredeti hasáb térfogata: $V = V_1 + V_2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$

Mivel $a = 5$ cm, $V \approx 44,2$ cm³.

2044. a) Ha a hasábot a rombusz alakú lapjára állítjuk, akkor a megadott feltételek alapján látható, hogy egy egyenes hasábot kapunk, amelynek magassága 12 cm.

A lapszög megegyezik a rombusz hegyesszögével, tehát a rombusz területe $144\sin 45° = 72\sqrt{2} = 101,8$ (cm²).

A hasáb térfogata tehát $72\sqrt{2}\cdot 12 = 864\sqrt{2} = 1222$ (cm³).

b) A hasáb térfogata nem változik, ha valamelyik négyzet alakú lapjára állítjuk. Ekkor egy m magasságú ferde hasábot kapunk; ennek térfogatára igaz tehát:

$12^2m = 1222$, amiből $m = 8,5$ cm. (Kerekítés nélkül számolva $m = 6\sqrt{2}$ cm.)

A hasáb magasságai tehát 12 cm, illetve 8,5 cm hosszúak.

2045. A csonkakúp alakú fenyőgerenda térfogata a $V = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + R^2)$ összefüggés alapján számítható ki. Eszerint a 40 db gerenda térfogata:

$$40\frac{140\pi}{3}(1,3^2 + 1,3 \cdot 0,9 + 0,9^2) \approx 21\ 522\ (\mathrm{dm}^3).$$

A fa sűrűsége $\varrho_f = 0,62\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$, a vízé $\varrho_v = 1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$.

A tutaj hordképessége azt a rárakott tömeget jelenti, amelyet a tutaj elbír anélkül, hogy a rakomány vízbe merülne.

Meg kell határoznunk a tutaj maximális teherbíró képességét. Arkhimédész törvénye szerint az úszó testre ható nehézségi erő számértékileg egyenlő a kiszorított folyadék súlyával, azaz a felhajtó erővel. (A két erő iránya ellentétes.)

Minthogy a tutaj vízben úszik, számértékben a maximálisan kiszorított folyadék éppen $2,152 \cdot 10^4$ dm³. Ekkor a tutaj teljes egészében a víz alá merül úgy, hogy a felszíne éppen a vízfelszínen van.

A tutaj és rakománya együttes súlya = felhajtó erő (számértékben).

A rakomány tömegét M-mel jelölve: $Mg + \varrho_{\text{fenyő}} \cdot V \cdot g = \varrho_{\text{víz}} \cdot V \cdot g$.

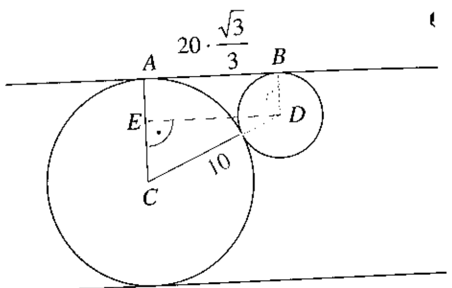
Végigosztva g-vel és M-et kifejezve:

$M = V(\varrho_{\text{víz}} - \varrho_{\text{fenyő}}) = 2,152 \cdot 10^4 \cdot 0,38 = 8,178 \cdot 10^3$.

Jelen esetben nem kerekíthetünk felfelé, mert akkor a tutaj lesüllyedne.

Tehát a tutaj teherbíró képessége $8,17 \cdot 10^3$ kg.

2046. Legyen a kis golyó sugara r. A három alsó golyó középpontja egy 20 cm oldalú szabályos háromszög csúcsaiban helyezkedik el, a negyedik golyó középpontja ezek súlypontja felett van, mindhármuk középpontjától $10 + r$ távolságra. A kis és az egyik nagy golyó középpontján át az asztalra merőlegesen állított síkban az ábra szerinti metszetet kapjuk. Az AB (és a vele egyenlő ED) szakasz hossza a 20 cm oldalú szabályos háromszög csúcsának és súlypontjának távolságával egyezik meg, ami a háromszög magasságának $\left(20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\text{-nek}\right)$ $\frac{2}{3}$ része, azaz $20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. A CDE derékszögű háromszög befogói ekkor $20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ és $10 - r$, átfogója pedig $10 + r$.



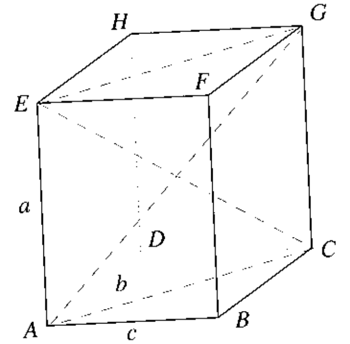
Felírva a Pitagorasz-tételt:

$$(10 + r)^2 = (10 - r)^2 + \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

felbontva: $100 + 20r + r^2 = 100 - 20r + r^2 + \frac{400}{3}$.

Rendezés után: $40r = \frac{400}{3}$, azaz $r = \frac{10}{3}$ (a nagy gömbök sugarának harmada).

2047. Legyenek a téglatest egy csúcsból kiinduló élei a, b, c. Így a téglatest AG és EC testátlót tartalmazó átlós síkmetszete $ACGE$ téglalap, melynek oldalai a és $\sqrt{b^2 + c^2}$. (Ez utóbbit pl. az ABC derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk).



Így e téglalap területe: $a\sqrt{b^2 + c^2}$.

Ugyanilyen megfontolásokból AG és FD testátlót tartalmazó átlós síkmetszet $AFGD$ téglalap, melynek oldalai b és $\sqrt{a^2 + c^2}$. (Ez utóbbit pl. az AEF derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk).

Így e téglalap területe: $b\sqrt{a^2 + c^2}$.

AG és BH testátlót tartalmazó átlós síkmetszet $ABGH$ téglalap, melynek oldalai c és $\sqrt{a^2 + b^2}$. (Ez utóbbit pl. a BCG derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk).

Így e téglalap területe: $c\sqrt{a^2 + b^2}$.

A feltétel szerint:

$a\sqrt{b^2 + c^2} = 20, \qquad b\sqrt{a^2 + c^2} = 25, \qquad c\sqrt{a^2 + b^2} = 30.$

Emeljük négyzetre mindhárom egyenletet! Mivel az egyenletek mindkét oldala pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens művelet. Az egyszerűség kedvéért legyen

$a^2 = x, \quad b^2 = y, \quad c^2 = z.$

Így az egyenletrendszer a következő alakban írható:

$x(y + z) = 400$ (I),

$y(x + z) = 625$ (II),

$z(x + y) = 900$ (III).

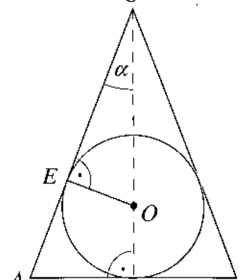
Az (I) egyenletből x-et kifejezzük és behelyettesítjük a másik két egyenletbe, majd a zárójeleket felbontva kapjuk:

$\frac{400y}{y + z} + yz = 625$ (IV),

$\frac{400z}{y + z} + yz = 900$ (V).

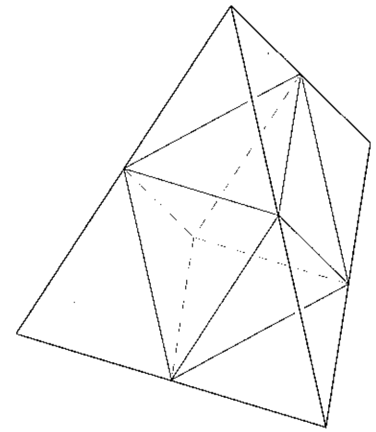
A két egyenletet egymásból kivonva kapjuk:
$\frac{400(z-y)}{z+y} = 275 \Rightarrow z = \frac{27}{5}y$ (VI).
Ezt (IV)-be behelyettesítve adódik:
$y^2 = \frac{625}{6} \Rightarrow (y>0)\ \ y = \frac{25}{\sqrt{6}} \approx 10,21 \Rightarrow (b>0)\ \ b \approx 3,2.$
y értékét (VI)-ba helyettesíte: $z = \frac{135}{\sqrt{6}} \approx 55,11 \Rightarrow (c>0)\ \ c \approx 7,4.$
y és z értékét (I)-be helyettesítve: $x \approx 6,12 \Rightarrow (a>0)\ \ a \approx 2,5.$
Tehát a téglatest egy csúcsból kiinduló élei kb. 2,5 cm, 3,2 cm és 7,4 cm hosszúak.

2048. Az ábra egy síkmetszetet ábrázol. A beírt gömb sugara legyen r, a kúp magassága m, a kúp alapkörének sugara a, a kúp alkotója b.
Az ábra jelölését használva $OEC\,\Delta \sim AFC\,\Delta$, így
$\frac{OE}{OC} = \frac{AF}{AC}$, azaz $\frac{r}{m-r} = \frac{a}{b}$, innen $m = r \cdot \frac{b+a}{a}$.
Az AFC derékszögű háromszögben
$CF^2 = AC^2 - AF^2$, azaz $m^2 = b^2 - a^2$.



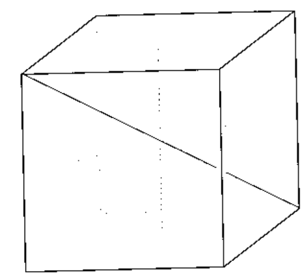
A fentiekből $r^2\frac{(b+a)^2}{a^2} = (b+a)(b-a)$,
innen $r^2 = \frac{a^2(b-a)}{b+a}$.
A feladat szerint $\frac{F_{\text{kúp}}}{F_{\text{gömb}}} = 2$, azaz $\frac{a^2\pi + ab\pi}{4r^2\pi} = 2$, innen $r^2 = \frac{a(a+b)}{8}$.
r^2-et kétféleképpen fejeztük ki, egyenlővé tehetjük: $\frac{a(a+b)}{8} = \frac{a^2(b-a)}{a+b}$.
Ebből $a^2 + 2ab + b^2 = 8ab - 8a^2$, azaz
$0 = 9a^2 - 6ab + b^2\ \ b \neq 0$, b^2-tel lebontva osztva
$0 = 9\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\frac{a}{b} + 1$. Mivel $\frac{a}{b} = \sin\alpha$, így
$0 = 9\sin^2\alpha - 6\sin\alpha + 1$, innen $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, tehát $\alpha = 19,47°$, mert $\alpha < 90°$.
A keresett szög tehát 19,47°.

2049. a) Minden csúcsnál levágott kis tetraéder után egy-egy szabályos háromszöglap marad. Az eredeti test mind a négy lapjából egy-egy kisebb (a középvonalak alkotta, tehát fele akkora) háromszöglap marad. Összesen tehát nyolc, egybevágó szabályos háromszög határolta test marad, ami egy (szabályos) oktaéder.



b) Az előző pont miatt ehhez arra lenne szükség, hogy tetraéderekből oktaédert lehessen összerakni. Ez azonban az eltérő (és nem is egymás többszöröseit kitevő) lapszögek miatt lehetetlen. (A tetraéder szomszédos lapjai 70,53°-os, míg az oktaéderéi 109,47°-os szöget zárnak be egymással, lásd az 1916. és 1921. feladatok megoldását.)

2050. A legkönnyebben felismerhető a két szemközti lap középpontját összekötő tengely körüli negyedrendű forgásszimmetria. (Lévén hat lap, három ilyen tengely van.) Szintén nem nehéz a szemközti élek felezőpontját összekötő forgástengelyt felismerni, ekörül másodrendű forgásszimmetriát mutat a kocka. (Tizenkét él lévén, hat ilyen tengely van.) A szemközti csúcsokat összekötő testátlót mint forgástengelyt, s különösen az ekörüli forgásszimmetria rendjét (harmad-) felismerni már komoly térlátást igényel. (Nyolc csúcs lévén, négy ilyen tengely van. Állítson egy kockát a csúcsára, függőleges testátlóval, így ellenőrizheti e legutóbbi állítást. Segíthet az 1922. d) megoldás ábrája is. Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a három forgástengely-fajta esetén a tengelyek száma és forgásszimmetria rendjének szorzata azonos: $3 \cdot 4 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 12$.)



2051. Minden kocka hasonló egymáshoz, most a hasonlóság aránya $3:1$. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóságuk arányának köbe, tehát most a nagy kocka térfogata $3^3 = 27$-szer akkora, mint a kicsié. Tehát 27 kis kocka keletkezik a darabolás során. Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóságuk arányának négyzete. Tehát most mindegyik kis kocka felszíne $\frac{1}{9}$ része a nagyénak, van belőlük 27 db, így összfelszínük $27 \cdot \frac{1}{9} = 3$-szorosa az eredetiének.

2052. a) Azt kell meggondolni, hogy 4 lapközéppont által meghatározott tetraéderben minden él egyenlő hosszú.

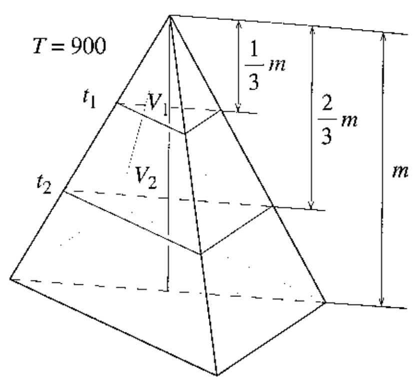
b) A nagy tetraéder egyik élének felezőmerőleges síkjával létrejött síkmetszetből leolvasható a kis tetraéder élének nagysága: a párhuzamos szelők tétele miatt az a nagy tetraéder élének harmada, így a kis tetraéder felszíne a nagy tetraéder felszínének $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$-ed része, a kis tetraéder térfogata a nagy tetraéder térfogatának $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$-ed része.

2053. Legyen a kúp alapkörének sugara R, alkotójának hossza a. Felszíne: $A = R\pi(R+a)$, palástjának mint körcikknek ívhossza az alapkör kerülete, így a középponti szöge: $\widehat{\alpha} = \frac{2R\pi}{a}$. A 216° ívmértékben $\frac{6\pi}{5}$ radián, ezt egyenlővé téve a törttel: $\frac{R}{a} = \frac{3}{5}$, azaz $a = \frac{5}{3}R$. Beírva ezt a felszín képletébe $R\pi\left(R + \frac{5}{3}R\right) = 75,4$, amiből

$\frac{8}{3}R^2 \approx 24$, s ezért $R \approx 3$ (cm).

A magasság felében elmetszett kúp metszete egy, az alapkörhöz képest fele akkora sugarú kör: $r \approx 1,5$ cm. Ennek területe $r^2\pi \approx 7,07$ cm².

2054. a) Ha a gúlát az alaplappal párhuzamos síkkal metszszük, akkor a lemetszett gúla hasonló az eredeti gúlához. A gúla alaplappal párhuzamos síkmetszete és az alaplap területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével.



Az alaplap területe 900 cm², a teljes gúla magassága m, térfogata:

$V = \frac{900m}{3}$.

$\frac{t_1}{900} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, ebből az egyik síkmetszet területe: $t_1 = 100$ cm².

$\frac{t_2}{900} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, ebből a másik síkmetszet területe: $t_2 = 400$ cm².

b) $V_1 = \frac{100}{3} \cdot \frac{m}{3} = \frac{100m}{9}$.

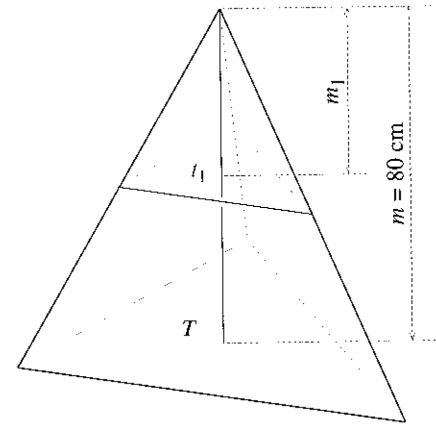
V_2-t és V_3-at két gúla térfogatának különbségeként számítjuk ki:

$V_2 = \frac{400}{3} \cdot \frac{2m}{3} - \frac{100}{3} \cdot \frac{m}{3} = \frac{700m}{9}$; $\quad V_3 = \frac{900m}{3} - \frac{400}{3} \cdot \frac{2m}{3} = \frac{1900m}{9}$.

A testek térfogatának aránya: $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 7 : 19$.

Megjegyzés:
A feladat megoldható úgy is, hogy a V_2 és a V_3 térfogatára a csonkagúla térfogatképletét alkalmazzuk. (Ez a módszer kevesebb ötletet, de több számolást igényel.)

2055. A gúla alappal párhuzamos síkmetszeteire vonatkozó összefüggés alapján (lásd 2054. feladat megoldását)



a) $\frac{t_1}{T} = \left(\frac{m_1}{80}\right)^2$, minthogy $\frac{t_1}{T} = \frac{1}{2}$, ezért

$m_1 = 80 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 40\sqrt{2}$ (cm).

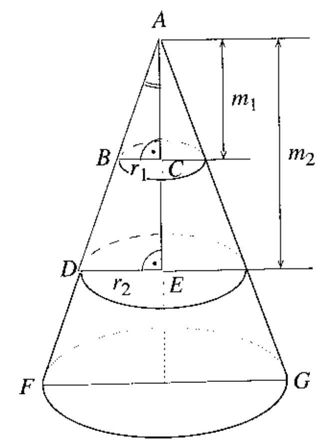
b) $\frac{t_2}{T} = \left(\frac{m_2}{80}\right)^2$, minthogy $\frac{t_2}{T} = \frac{1}{3}$, ezért

$m_2 = 80 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ (cm).

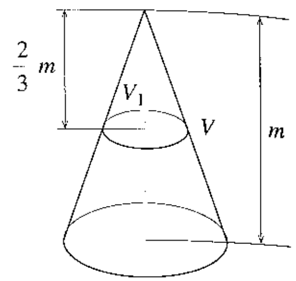
c) $\frac{t_3}{T} = \left(\frac{m_3}{80}\right)^2$, minthogy $\frac{t_3}{T} = \frac{1}{4}$, ezért

$m_3 = 80 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 40$ (cm).

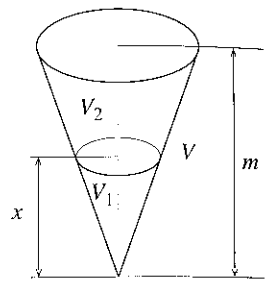
2056. A forgáskúp egy tengelymetszete is látható az ábrán (AFG háromszög). Az ABC Δ és ADE Δ hasonló (2-2 szög egyenlő), ezért a megfelelő oldalak arányára felírható: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1}{m_2}$. Éppen a feladat állítása.



2057. A két kúp hasonló. A hasonló testek térfogatának aránya egyenlő a hasonlóság arányának köbével. Jelöljük V-vel az eredeti kúp, V_1-gyel a lemetszett kúp térfogatát! Ekkor $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.



2058. A hasonló kúpok térfogatának aránya egyenlő a hasonlóság arányának köbével. Ebből adódik, hogy, ha a kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metszünk, a lemetszett kúp és eredeti kúp térfogatának aránya egyenlő a megfelelő magasságok köbével.
Jelöljük a kúp alakú papírtölcsér térfogatát V-vel, a megmaradt kukoricával töltött rész térfogatát V_1-gyel, illetve V_2-vel, a csúcstól mért távolságot m-mel, x-szel, illetve y-nal.



$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} = \left(\frac{x}{m}\right)^3$, innen $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}m \approx 0{,}79m$.

$\frac{V_2}{V} = \frac{3}{5} = \left(\frac{y}{m}\right)^3$, innen $y = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}m \approx 0{,}84m$.

a) A pattogatott kukorica fele marad meg, ha Ildikó a kúp magasságának kb. 79%-áig hagyja meg a kukoricát.

b) A pattogatott kukorica 60%-a marad meg, ha Ildikó a kukoricát a kúp magasságának kb. 84%-áig hagyja meg.

2059. A hasonló kúpok térfogatának aránya egyenlő a hasonlóság arányának köbével. (Lásd a 2058. feladat megoldásának a magyarázatát!)

$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{V_1}{V}$, ebből $V_1 = \frac{64}{125}V = 0{,}512V$.

Gergő öccsének a kukorica 0,512 része, 51,2%-a, tehát a felénél 1,2%-kal több marad, mert Gergő a 0,488 részt, 48,8%-át eszi meg, a felénél 1,2%-kal kevesebbet fogyaszt el. Ezért öccse az egész kukoricából 2,4%-kal többet ehet meg, mint Gergő.

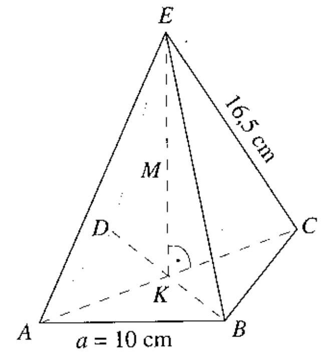
2060. a) A szabályos négyoldalú gúla E csúcsának az alaplapra eső merőleges vetülete a négyzet K középpontja.
Az EKC derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva:

$EK^2 = EC^2 - KC^2$

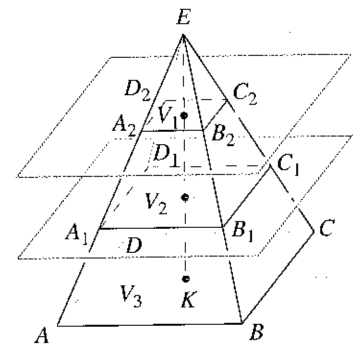
$M = EK = \sqrt{16{,}5^2 - (5\sqrt{2})^2} = 14{,}9$ (cm).

Térfogata:

$V = \frac{a^2 \cdot M}{3} = 496{,}9$ cm³.



b) A gúla egy kisebb gúlára ($A_2B_2C_2D_2E$) és két csonkagúlára [($A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$), illetve $ABCDA_1B_1C_1D_1$] bomlik.
Ezek térfogata legyen V_1; V_2; V_3, az eredetié V.
A keletkezett kis gúla hasonló az eredeti gúlához, hasonlóságuk középpontja E, a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$. Így $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{27}V$.
A $V_1 + V_2$ térfogatú gúla hasonló az eredeti gúlához, hasonlóságuk középpontja E, a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$. Így $\frac{V_1 + V_2}{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow$



$V_2 = \frac{8}{27}V - V_1 = \frac{7}{27}V$, $\quad V_3 = V - (V_1 + V_2) = \frac{19}{27}V$.

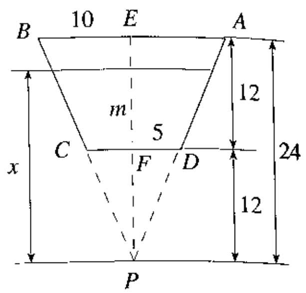
A kapott 3 test téfogatának aránya $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 7 : 19$.

c) $V_1 = \frac{1}{27}V \approx 18{,}4$ cm³,

$V_2 = \frac{7}{27}V \approx 128{,}8$ cm³,

$V_3 = \frac{19}{27}V \approx 349{,}7$ cm³.

2061. Egészítsük ki teljes kúppá a csonkakúpot, legyen ennek csúcsa P. A kiegészítő kis kúp térfogata legyen v, a térfogatának feléig töltött cserépben a föld felső szintjének P-től való távolsága legyen x. A kúp tengelyére illeszkedő síkmetszet (ábra) alapján a következőket állapíthatjuk meg.



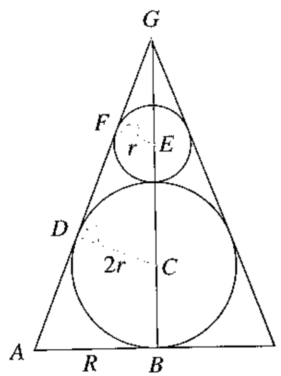
PEA és PFD hasonló háromszögek, a hasonlóságuk aránya 2. Ezért egyrészt $PF = 12$ cm, másrészt a teljes kúp térfogata a kiegészítő kis kúp térfogatának 8-szorosa (hiszen hasonló testekről van szó).

A csonkakúp alakú cserép térfogata tehát $7v$, a cserép térfogatának fele pedig $\frac{7}{2}v$.

Ismét csak a hasonló kúpok térfogatának arányára vonatkozó ismeretet felhasználva kapjuk, hogy $\left(\frac{x}{12}\right)^3 = \frac{\frac{7}{2}v + v}{v} = \frac{9}{2}$, amiből $x = 12 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \approx 19{,}8$ (cm).

A cserépben a földet tehát $m = x - 12 \approx 7{,}8$ cm magasságig kell feltölteni.

2062. A kúp tengelyére illeszkedő és alaplapjára merőleges síkban az ábra szerinti metszetet kapjuk.



$GDC\,\Delta \sim GFE\,\Delta$, hiszen oldalaik párhuzamosak, illetve illeszkedők, így $\frac{GC}{GE} = \frac{DC}{FE} = \frac{2r}{r} = 2$.

Vagyis $GE = EC$, de ez utóbbi a körök érintkezése miatt $3r$. (A későbbiek kedvéért azt is rögzíthetjük, hogy $GF = FD$.)

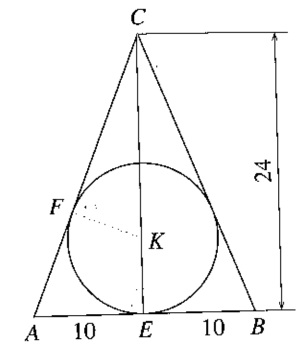
a) A kúp magassága így $GB = GE + EC + CB =$ $= 3r + 3r + 2r = 8r$.

b) Az FGE derékszögű háromszögből $\sin FGE\sphericalangle =$ $= \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$, amiből $FGE\sphericalangle \approx 19{,}47°$. A kúp nyílásszöge $2FGE\sphericalangle \approx 38{,}92°$.

c) Az is igaz, hogy $GFE\,\Delta \sim GBA\,\Delta$, hiszen mindkettőben van egy derékszög és G-beli szögük közös. Ekkor $\frac{GE}{FE} = \frac{GA}{BA} = \frac{3r}{r} = 3$, ami miatt $GA = 3BA = 3R$. A külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $AB = AD =$ $= R$, de ekkor $DG = 2R$. Mivel már korábban megállapítottuk, hogy $GF = FD$, ezek mindegyike is R-rel egyenlő. Ekkor a GFE derékszögű háromszög befogói r és R, átfogója $3r$, így a Pitagorasz-tétel szerint: $R = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = \sqrt{8}r$.

Vagyis $\frac{R}{r} = \sqrt{8}$.

2063. Az ábra jelöléseit használva $AEC\,\Delta \sim KFC\,\Delta$, így $\frac{AE}{EC} = \frac{KF}{FC}$, azaz $\frac{10}{24} = \frac{r}{FC}$, innen $FC = r \cdot \frac{12}{5}$ (r a gömb sugarát jelöli). A KFC háromszög derékszögű, így $KC^2 = FC^2 + KF^2$, behelyettesítve



$(24 - r)^2 = \left(r \cdot \frac{12}{5}\right)^2 + r^2$.

A következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$3r^2 + 25r - 300 = 0$, innen $r = \frac{20}{3}$ cm, tehát a golyó átmérője $\frac{40}{3}$ cm.

Másik megoldás:

Pitagorasz-tétellel: $AC = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ (cm).

Az ábra jelöléseit használva: AEC háromszög hasonló a KFC háromszöghöz, ezért megfelelő oldalaik aránya páronként megegyezik: $\frac{KC}{AC} = \frac{KF}{AE}$, azaz $\frac{24 - r}{26} = \frac{r}{10}$.

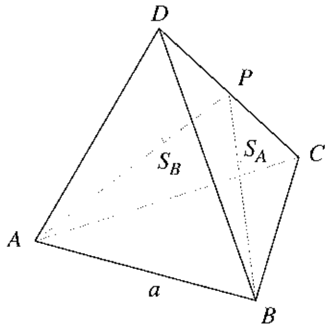
Ebből $240 - 10r = 26r$, majd $2r = \frac{240}{18} = \frac{40}{3}$ adódik.

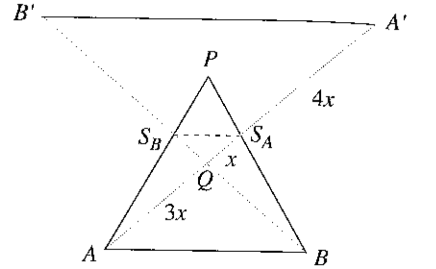
A golyó átmérője tehát $\frac{40}{3}$ cm.

2064. Minden gömb hasonló egymáshoz, és most a Föld sugara $\frac{11}{3}$-szorosa a Holdénak. Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóságuk arányának négyzete, tehát a Föld felszíne $\left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{121}{9} = 13{,}\dot{4}$-szerese a Holdénak. Hasonló testek térfogatának aránya pedig a hasonlóságuk arányának köbe, tehát a Föld térfogata $\left(\frac{11}{3}\right)^3 = \frac{1331}{27} =$ $= 49{,}\overline{296}$-szerese a Holdénak.

2065. Készítsünk megfelelő síkmetszetet a térbeli ábrából: az ABP egy a alapú, $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ szárú egyenlő szárú háromszög, melyben az alap csúcsait kell a szemközti szárak felső harmadoló pontjára tükrözni. Mivel S_A, S_B harmadoló pont BP-n, illetve AP-n, az S_AS_B szakasz párhuzamos és harmad akkora, mint AB (párhuzamos szelők tétele). Ekkor Q 1 : 3 arányban osztja AS_A-t és BS_B-t. A tükrözés miatt $AS_A = S_AA'$ és $BS_B = S_BB'$. Ekkor S_A a QA'-t 1 : 4 arányban osztja, hasonlóan S_B a QB'-t – vagyis ezek ötödölő pontok a QA' és QB' szakaszokon. Ekkor persze $A'B'$ párhuzamos

$S_A S_B$-vel és ötször akkora – így aztán párhuzamos AB-vel is és $\frac{5}{3}$-szor akkora, vagyis $3 \cdot A'B' = 5 \cdot AB$.





2066. Az eredeti vízfelszín sugara r. Ezt az ábrán jelölt két hasonló háromszögből számítjuk ki, felhasználva, hogy a vízszint magassága a kúp magasságának $\frac{3}{5}$ része, $m' = \frac{3}{5} \cdot 8,6 = 5,16$.

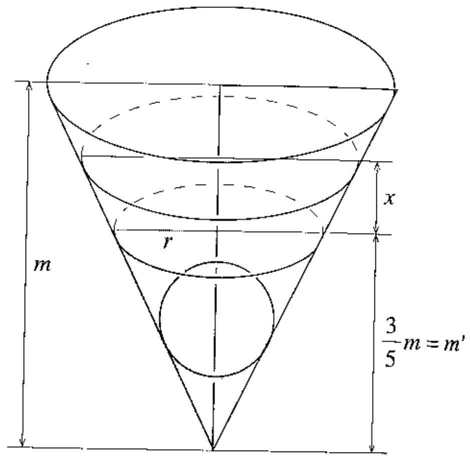
$\frac{r}{2,8} = \frac{3}{5}$, innen $r = 1,68$.

A víz térfogata:

$V_v = \frac{1,68^2 \pi \cdot 5,16}{3} \approx 4,85\pi$.

A kúp térfogata:

$V_k = \frac{2,8^2 \pi \cdot 8,6}{3} \approx 22,47\pi$.



A gömb térfogata:

$V_g = \frac{4 \cdot 1,2^3 \pi}{3} \approx 2,304\pi$, ami a kiszorított víz térfogatával egyenlő.

A vízszint x emelkedését a hasonló kúpok térfogatarányára vonatkozó összefüggésből számíthatjuk ki: $\frac{V_v + V_g}{V_k} = \left(\frac{5,16 + x}{8,6}\right)^3$.

Mindkét oldalból harmadik gyököt vonunk és célszerűen rendezünk:

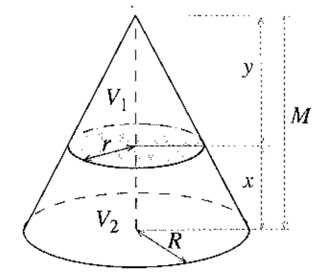
$x + 5,16 = 8,6 \cdot \sqrt[3]{\frac{4,85 + 2,30}{22,47}}$, ebből $x \approx 5,87 - 5,16 = 0,71$.

A vízszint tehát 0,71 dm-rel emelkedett.

A kúp magassága 8,6 dm, így a megemelkedett szintű víz nem ömlik ki a kúpból.

2067. Az eredeti kúp térfogata:

$V = \frac{R^2 \pi \cdot M}{3} = \frac{10^2 \pi \cdot 24}{3} \approx 2513,3$ (cm³).



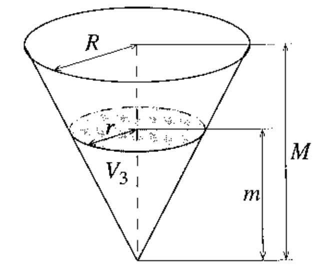
Ha a kúpot az alaplapjával párhuzamos síkkal metszszük, a keletkezett síkmetszetek és kúpok hasonlók. A hasonló kúpok térfogatának aránya megegyezik a síkmetszetek csúcstól mért távolságai arányának köbével (a hasonlóság arányának köbével). Ha a kúp a körlapon áll, a víz térfogata $V_2 = 2000$ cm³.

$V_1 + V_2 = V$; A V_1 és V térfogatú kúpok hasonlók egymáshoz, tehát $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{y}{M}\right)^3$, ebből $y = M \cdot \sqrt[3]{\frac{V_1}{V}} = 24 \cdot \sqrt[3]{\frac{513,3}{2513,3}} \approx 14,13$ (cm).

Tehát a körlapon álló kúpban levő víz magassága $x = 24 - 14,13 = 9,87$ (cm).

Ha a kúpot a tengelyével függőleges helyzetben a csúcsára állítjuk, V_3 és V térfogatú kúpok hasonlók egymáshoz, tehát $\frac{V_3}{V} = \left(\frac{m}{M}\right)^3$, ebből

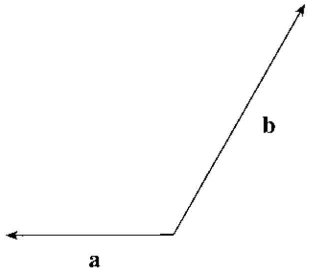
$m = M \cdot \sqrt[3]{\frac{V_3}{V}} = 24 \cdot \sqrt[3]{\frac{2000}{2513,3}} \approx 22,24$ (cm).

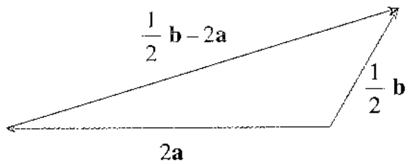


Tehát ha a kúpot a tengelyével függőleges helyzetben a csúcsára állítjuk, a benne levő víz magassága $m \approx 22,24$ cm.

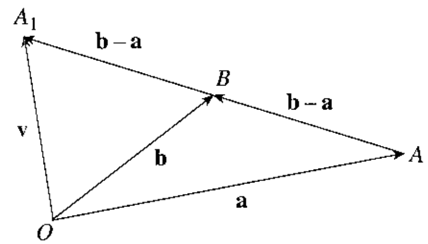
4.3. Vektorok

2068.





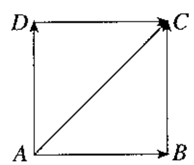
2069. Készítsünk ábrát!
A tükrözés miatt $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.
Ezért az A_1 pontba vezető helyvektor:
$\mathbf{v} = \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$



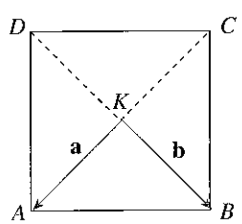
2070. a) $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Mivel a négyzet átlójának hossza 1, ezért a négyzet oldala $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hosszúságú, tehát az $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}$ vektor hossza $\sqrt{2}$.

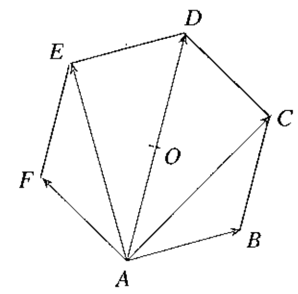
2071. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet!
Egyenlő oldalvektorai: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$; átlóvektorai: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$, ezek között nincs egyenlő.



2072. Az oldalvektorok közül legkönnyebb az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Ezzel azonos a $\overrightarrow{DC}$ is. Mivel $\overrightarrow{KC}$ jól láthatóan $-\mathbf{a}$, így $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Szintén ezzel azonos a $\overrightarrow{DA}$ is. Ügyesen irányítva az átlóvektorokat, szintén nincs nehéz dolgunk: $\overrightarrow{CA} = 2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB} = 2\mathbf{b}$. Az ellentett irányítású (oldal- vagy átló-) vektorok az előző vektorok ellentettjeként írhatók fel.



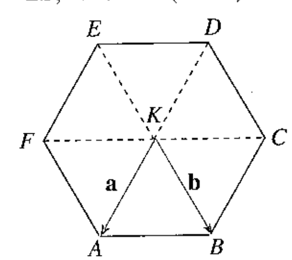
2073. Legyen az $ABCDEF$ szabályos hatszög és a középpontja O.



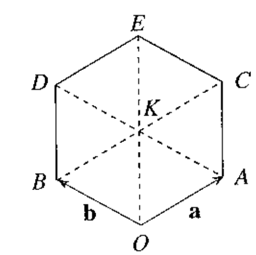
a) Pl.: az $\overrightarrow{AB}$ oldalvektorral *egyenlő hosszúságú, de tőle különböző irányú* az összes többi oldalvektor, kivéve az $\overrightarrow{ED}$-t. (Ilyen típusú átlóvektor nincs.)
Pl.: az $\overrightarrow{AC}$ átlóvektorral egyenlő hosszúságú, de más irányú átlóvektorok: $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BF}$ (ilyen oldalvektor nincs).
Az $\overrightarrow{AD}$-ral egyenlő hosszúságú, de más irányú a többi O-ra illeszkedő átló vektora (pl.: $\overrightarrow{CF}$ vagy $\overrightarrow{DA}$).

b) Az oldalvektorok egyenlő hosszúságúak, ezért pl.: az $\overrightarrow{AB}$ oldalvektorral *azonos irányú, de más hosszúságú* oldalvektor nincs, átlóvektor van, az $\overrightarrow{FC}$.
Az $\overrightarrow{AC}$ átlóvektorral egyenlő hosszúságú, de más irányú vektorok az O-ra nem illeszkedő átlóvektorok, kivéve az $\overrightarrow{FD}$-t.
Az $\overrightarrow{AD}$ átlóvektorral azonos irányú, de más hosszúságú átlóvektor nincs, ilyen tulajdonságú oldalvektorok: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$.

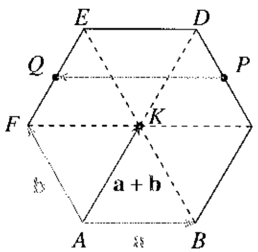
2074. a) Az oldalvektorok közül $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.
Ügyesen irányítva az átlóvektorokat: $\overrightarrow{DA} = 2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{EB} = 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{FC} = 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.
Még viszonylag könnyebben felismerhető az $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ is. A további átlóvektorokat oldalvektorok összegeként állítjuk elő:
$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$,
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
Az ellentett irányítású (oldal- vagy átló-) vektorok az előző vektorok ellentettjeként írhatók fel.



b) Az oldalvektorok: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DE} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CE} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ $(= \overrightarrow{OK}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.
Az átlóvektorok:
$\overrightarrow{OE}$ $(= 2\overrightarrow{OK}) = 2(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\overrightarrow{BC} = 2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{b}$;
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} =$
$= \mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} =$
$= \mathbf{b} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$. Az ellentett irányítású (oldal- vagy átló-) vektorok az előző vektorok ellentettjeként írhatók fel.



2075. Készítsünk ábrát!



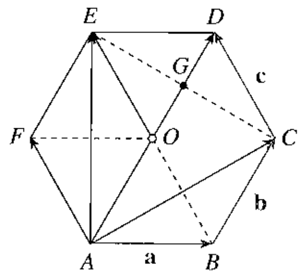
A szabályos hatszög felbontható hat darab szabályos háromszögre. Ennek felhasználásával könnyen adódnak a kívánt felírások is:

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK} = 2(\mathbf{a}+\mathbf{b})$;

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} = \mathbf{a} + (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 2\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

A $\overrightarrow{PQ}$ vektor párhuzamos az $\overrightarrow{AB}$ vektorral, vele ellentétes irányú, hossza pedig az $\overrightarrow{AB}$ hosszának 1,5-szerese. Ezért $\overrightarrow{PQ} = -1{,}5\mathbf{a}$.

2076. Legyen O a szabályos hatszög középpontja, és jelöljük G-vel az EC felezőponját.



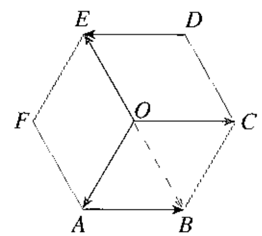
Az $ABOF$ rombuszban: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}$.
Felhasználva, hogy O egyben az ACE szabályos háromszög súlypontja, így $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = 2\cdot\overrightarrow{AG} =$
$= 2\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO} = 3\cdot\overrightarrow{AO}$.
Ezekből $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 4\cdot\overrightarrow{AO} = 2\cdot\overrightarrow{AD}$.

Második megoldás:
Használjuk az ábra jelöléseit! $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AF} = \mathbf{c}$, így
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + (\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \mathbf{c} = 2\cdot\overrightarrow{AD}$.

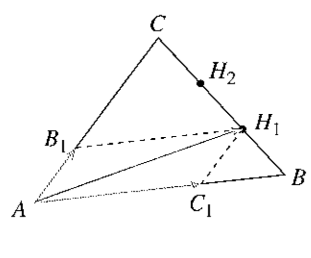
2077. a) $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \mathbf{0}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = 2\cdot\overrightarrow{AB}$

c) pl.: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \mathbf{0}$ vagy
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \mathbf{0}$ (stb.)



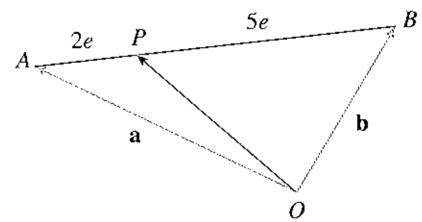
2078. Legyen a BC oldal két harmadolópontja H_1 és H_2. A H_1 pontra illeszkedő AC-vel párhuzamos egyenes az AB oldalt a C_1 pontban, az AB-vel párhuzamos egyenes AC-t a B_1 pontban metszi.
Az $AC_1H_1B_1$ paralelogrammából leolvasható:
$\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AB_1}$.
H_1 a B ponthoz közelebb fekvő harmadolópont, ezért
$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{B_1H_1} = \dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{C_1H_1} = \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$,
így $\overrightarrow{AH_1} = \dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{2\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$.



A C-hez közelebbi H_2 harmadolópontra a szerkesztés a fent leírtakhoz hasonlóan végezhető el, és $\overrightarrow{AH_2} = \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{AC}}{3}$.

Megjegyzés:
Eredményül a tanult képletet kapjuk, ha a háromszög A csúcspontjától a BC oldal harmadolópontjaiba mutató vektorokat írjuk fel.

2079. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{7}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \mathbf{a} + \dfrac{2}{7}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \dfrac{2\mathbf{b}+5\mathbf{a}}{7}$.

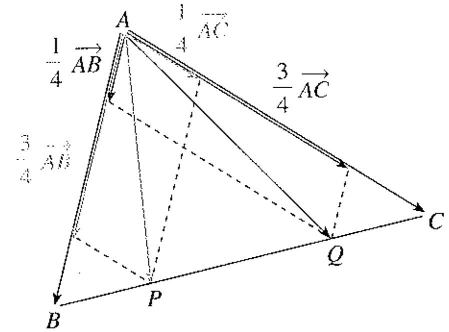


2080. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC} =$

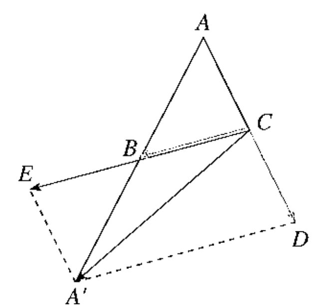
$= \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \dfrac{3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4}$;

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC} =$

$= \overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{4}$.



2081. Húzzunk az A' ponton át párhuzamost a BC, illetve az AC egyenesekkel. Ezeknek az AC, illetve a BC oldalegyenesekkel való metszéspontját jelöljük rendre D-vel, illetve E-vel.
$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA'}$
A szerkesztésből következik, hogy BC az $A'DA$ háromszög középvonala, s így $\overrightarrow{DA'} = 2\cdot\overrightarrow{CB}$, illetve $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}$, tehát $\overrightarrow{CA'} = -\overrightarrow{CA} + 2\cdot\overrightarrow{CB}$.



Másik megoldás:
B pont az AA' szakasz felezőpontja, ezért $\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CA})$.
Innen $2\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CA}$, amiből $\overrightarrow{CA'} = -\overrightarrow{CA} + 2\cdot\overrightarrow{CB}$ adódik.

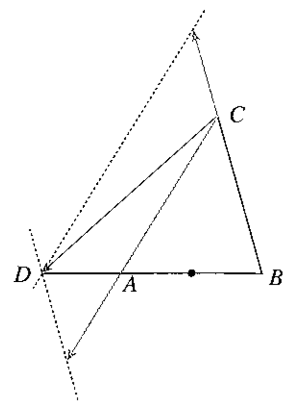
2082. A szerkesztés (az előző feladatokhoz hasonló) az ábráról leolvasható.

$\overrightarrow{CD}$-t ettől függetlenül is kifejezhetjük:

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$



Másik megoldás:

Az A pont a DB szakasz $1:2$ arányú osztópontja, ezért

$\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. Ebből $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

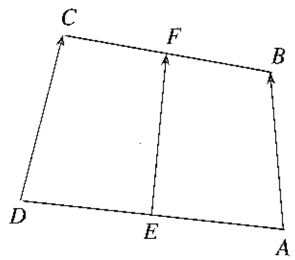
2083. Jelöljük egy tetszőleges O kezdőpontból az A, B, C, D, E, F pontokba mutató helyvektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$-fel.

Ekkor $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}$ és $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$.

$\overrightarrow{EF} = \mathbf{f} - \mathbf{e} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{c}-\mathbf{d}}{2}$.

Mivel $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$,

ezért $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$.



Másik megoldás:

Az $\overrightarrow{EF}$ vektort kétféleképpen felírva: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

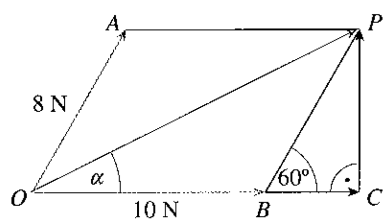
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$.

E két egyenlőségből: $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF}$.

Mivel $\overrightarrow{EA}$ és $\overrightarrow{ED}$ ellentett vektorok, ezért $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED} = \mathbf{0}$, hasonlóan $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}$.

Ezért $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, s így $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$.

2084. Jelöljük a vektorok közös kezdőpontját O-val, a 8 N nagyságú erővektor végpontját A-val, a 10 N nagyságú erővektor végpontját pedig B-vel. A két vektor eredője $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP}$-nak az $\overrightarrow{OB}$-ral bezárt szöge α.



Az $\overrightarrow{OA}$-val egyenlő $\overrightarrow{BP}$ vektort felbontjuk az $\overrightarrow{OB}$-vel párhuzamos $\overrightarrow{BC}$ és az $\overrightarrow{OB}$-re merőleges $\overrightarrow{CP}$ vektorok összegére.

$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BP}| \cdot \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ (N).

$|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{BP}| \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (N).

Az $\overrightarrow{OP}$ eredő erővektor nagyságát és az α szöget az OCP derékszögű háromszög segítségével számoljuk ki.

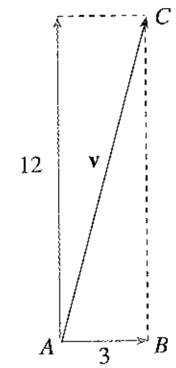
$|\overrightarrow{OP}|^2 = 14^2 + (4\sqrt{3})^2$, innen $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ (N).

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{14}$, amiből $\alpha = 26{,}33°$.

2085. a) A szerkesztés az ábráról leolvasható.

b) Az eredő sebesség nagyságát, az ABC derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel segítségével kapjuk:

$\mathbf{v}^2 = 3^2 + 12^2 = 153$; $|\mathbf{v}| = \sqrt{153}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 12{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

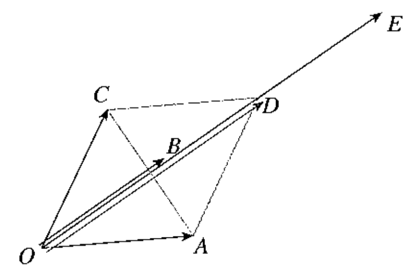


2086. A szerkesztés az ábráról leolvasható; a keresett eredő erőt az $\overrightarrow{OE}$ vektor szemlélteti. ($OAC\ \Delta$ szabályos, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$, ahol $OADC$ rombusz.)

Az eredő erő iránya $\overrightarrow{OB}$ irányával azonos.

Megjegyzés:

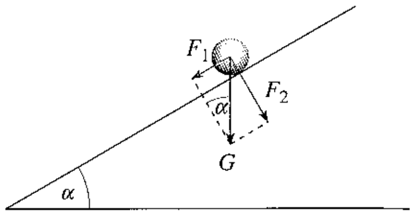
$\overrightarrow{OE}$ nagysága $120 \cdot (\sqrt{3} + 1)$ N.



2087. Lásd a 2088. feladat ábráját. Itt $\alpha = 30°$. A felbontás az ábráról leolvasható. A két jelölt szög egyenlő, mert merőleges szárú hegyesszögek. F_1, F_2 és G, az erővektorok abszolútértékei 30°, 60°, 90°-os háromszög oldalai, így a lejtővel párhuzamos összetevő nagysága $F_1 = \frac{1}{2}G = 5$ (N) és a lejtőre merőleges összetevő nagysága

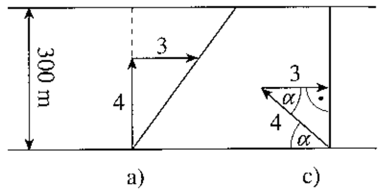
$F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}G = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ (N).

2088. A golyóra ható nehézségi erőt szemléltető vektor végpontjain keresztül a lejtővel párhuzamost, illetve rá merőlegest húzunk. Az így nyert téglalap két oldalvektora a keresett két összetevő. A lejtővel párhuzamos összetevő nagysága $F_1 = G \cdot \sin \alpha$, a lejtőre merőleges összetevő nagysága $F_2 = G \cdot \cos \alpha$.



Megjegyzés:
Felhasználtuk, hogy az ábrán α-val jelölt szögek – merőleges szárú hegyesszögek – egyenlők.

2089. a) Ha a partra merőlegesen evez, ameddig átér $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel a 300 méter széles folyón, addig lefelé ennek a $\frac{3}{4}$-ét teszi meg, mert a folyó sebessége csak $3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

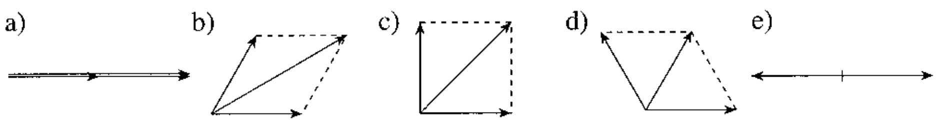


Eszerint (300 · 0,75 =) 225 méterrel lejjebb köt ki. Lényegében a vektorháromszög és az „átkelési háromszög" hasonlóságát használtuk ki.

b) $\dfrac{0,3\ \text{km}}{4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}$ alatt, ami 4,5 perc.

c) Ahhoz, hogy szemközt kössön ki, „felfelé" kellene eveznie úgy, hogy az evezés irányának a parttal bezárt szögére igaz legyen: $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, azaz α kb. 41,41°.

2090.



a) Egyirányú vektorok hossza összegzéskor összeadódik, az eredmény: 10 (egység).

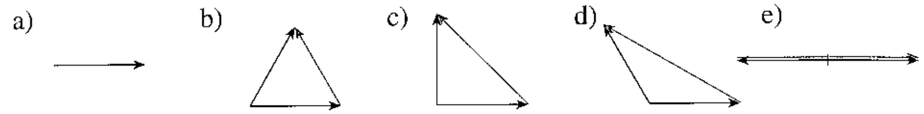
b) A paralelogramma-szabály szerint összegezve egy olyan háromszög harmadik oldalát keressük, amelynek két oldala 5, és ezek közrezárt szöge 120°:
$\sqrt{5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos 120°} = 5\sqrt{3} \approx 8,66.$

c) A Pitagorasz-tétel révén az összegvektor hossza $5\sqrt{2} \approx 7,07$.

d) A paralelogramma-szabály szerint összegezve egy olyan háromszög harmadik oldalát keressük, amelynek két oldala 5, és ezek közrezárt szöge 60° – ekkor egy szabályos háromszöggel van dolgunk, tehát az összegvektor hossza 5.

e) Ellentétes irányú vektorok hossza összegzéskor kivonódik, az eredmény: **0** (nullvektor), ennek a hossza 0.

2091.



a) Egyirányú vektorok hossza kivonáskor kivonódik, az eredmény nullvektor, aminek hossza 0.

b) A közös kezdőpontból felmért vektorok végpontját összekötő különbségvektor a két eredetivel ilyenkor egy szabályos háromszöget alkot, tehát hossza: 5.

c) A Pitagorasz-tétel révén a különbségvektor hossza $5\sqrt{2} \approx 7,07$.

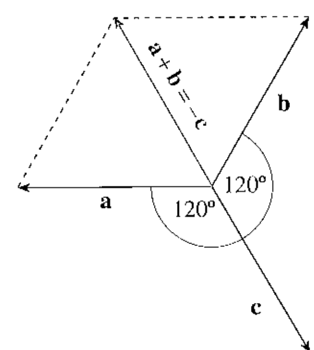
d) A közös kezdőpontból felmért vektorok végpontját összekötő különbségvektor a két eredetivel ilyenkor egy olyan háromszöget alkot, amelynek két oldala 5, és ezek közrezárt szöge 120°, és a harmadik oldalát keressük. Ennek hossza:
$\sqrt{5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos 120°} = 5\sqrt{3} \approx 8,66.$

e) Ellentétes irányú vektorok hossza kivonáskor összeadódik, az eredmény: 10 (egység).

2092. Két vektor skaláris szorzata: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma$, ahol a két vektor γ szöget zár be egymással. Emiatt az eredmények egyszerű behelyettesítéssel:

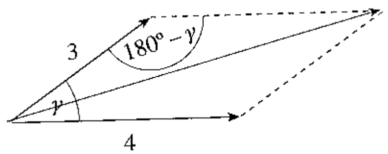
a) 25; b) 12,5; c) 0; d) $-12,5\sqrt{3} \approx -21,65$; e) -25.

2093. A minimális hossz nulla. Ekkor a három vektor páronként 120°-os szöget zár be (közülük bármelyik kettőnek az összege a harmadik vektor ellentettjével egyenlő).
A maximális hossz 3 · 2,4 = 7,2 cm. Ekkor a három vektor azonos állású és azonos irányú (a három vektor egyenlő).



2094. a) Az összegvektor hossza akkor minimális, ha a vektorok ellenkező irányúak, azaz szögük 180°, ekkor hosszuk különbsége az összeg hossza, azaz most 1; és az összegvektor hossza akkor maximális, ha a vektorok egyirányúak, azaz szögük 0°; ekkor hosszuk összege az összeg hossza, azaz most 7. (L. még 2090. a), e).)

b) Legyen a vektorok által közrezárt szög γ. A paralelogramma-szabály szerint összegezve egy olyan háromszög harmadik oldalát keressük, amelynek két oldala 3 és 4, és ezek közrezárt szöge $180° - \gamma$, azaz $c = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(180° - \gamma)}$.



Összevonva, és felhasználva, hogy kiegészítő szögek koszinusza ellentett érték, az összeg abszolútértéke: $\sqrt{25 + 24 \cdot \cos\gamma}$. (Mivel $\cos\gamma$ értéke -1 és 1 között változhat, a gyök alatti kifejezés 1 és 49 közötti lehet, vagyis valóban 1 és 7 közötti az összeg lehetséges abszolútértéke, l. a) pont.)

2095. a) A különbségvektor hossza akkor minimális, ha a vektorok egyirányúak, azaz szögük 0°, ekkor hosszuk különbsége a különbség hossza, azaz most 1; és a különbségvektor hossza akkor maximális, ha a vektorok ellenkező irányúak, azaz szögük 180°; ekkor hosszuk összege a különbség hossza, azaz most 7. (L. még 2091. a), e).)

b) Legyen a vektorok által közrezárt szög γ. A közös kezdőpontból felmért vektorok végpontját összekötő különbségvektor a két eredetivel ilyenkor egy olyan háromszöget alkot, amelynek két oldala 3 és 4, és ezek közrezárt szöge γ, és a harmadik oldalát keressük. Ennek hossza: $\sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\gamma}$.

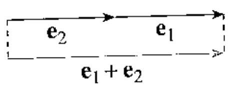
Összevonva: $\sqrt{25 - 24 \cdot \cos\gamma}$.

(Mivel $\cos\gamma$ értéke -1 és 1 között változhat, a gyök alatti kifejezés 49 és 1 közötti lehet, vagyis valóban 7 és 1 közötti a különbség lehetséges abszolútértéke, lásd a) pont.)

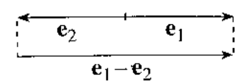
2096. a) Két vektor skaláris szorzata: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma$, ahol a két vektor γ szöget zár be egymással. Mivel $\cos\gamma$ értéke -1 és 1 között változhat, ezért a szorzat akkor minimális, ha a vektorok ellenkező irányúak, azaz szögük 180°, ekkor $\mathbf{ab} = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, azaz most -12; és a szorzat akkor maximális, ha a vektorok egyirányúak, azaz szögük 0°; ekkor $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, azaz most 12.

b) $\mathbf{ab} = 3 \cdot 4 \cdot \cos\gamma = 12 \cdot \cos\gamma$.

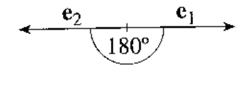
2097. a) A leghosszabb összegvektort egyenlő egységvektorok esetén kapjuk; a legnagyobb hossz 2.



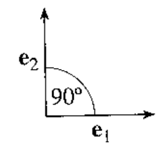
b) A leghosszabb különbségvektort akkor kapjuk, ha a két egységvektor egymásnak ellentettje; a legnagyobb hossz 2.



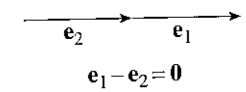
c) Az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ egységvektorok skaláris szorzata: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$. Ennek a legkisebb értéke -1, ami ellentétes irányú egységvektorok esetében ($\varphi = 180°$) adódik.



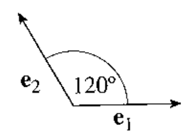
d) Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor nulla, ha merőlegesek egymásra.



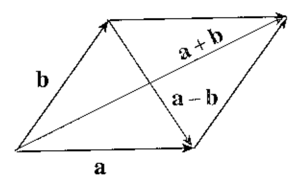
e) A legkisebb hosszúságú különbségvektort két egyenlő egységvektor esetén kapjuk; a minimális hossz 0.



f) $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$. Ha $\cos\varphi = -0{,}5$, akkor $\varphi = 120°$.



2098. A feltétel szerint $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.
Ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$, vagy $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, ami megállapodás szerint tetszőleges irányú, azaz pl.: minden vektorra merőleges.
Ha $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, akkor, vegyük fel a két nem párhuzamos vektort közös kezdőponttal! Ekkor egy speciális paralelogrammát, rombuszt feszítenek ki. Ennek átlóvektorai $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, illetve $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Ismert, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra, így $\mathbf{a} + \mathbf{b} \perp \mathbf{a} - \mathbf{b}$.



Másik megoldás:
Vegyük a két egyenlő abszolútértékű vektor összegének és különbségének skaláris szorzatát! A vektorok skaláris szorzatára alkalmazzuk az ismert összefüggést:
$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$.
Ez a különbség az $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ feltétel szerint 0.
Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha azok merőlegesek egymásra, ezért $\mathbf{a} + \mathbf{b} \perp \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

2099. Tegyük fel, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$. Ismert, hogy két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0.
Ezt felhasználva a feltétel ekvivalens az $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$ egyenlőséggel.
Ebből $\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$ adódik. Így $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

2100. Ha $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra, akkor az $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ és az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ egyike nullvektor, vagy pedig rombuszról van szó, mivel a rombusz az a paralelogramma, amelynek átlói merőlegesek. Mindkét esetben az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok egyenlő hosszúak.

a) A vektorok hosszát a feltételből nem lehet megmondani.

b) Ha az eredeti vektorok egyike fele olyan hosszú, mint a másik, (ugyanakkor a bevezető részben leírtak szerint a két vektor egyenlő hosszú is), akkor ez csak úgy lehetséges, hogy mindkettő a nullvektor. (Ekkor összegük és különbségük is nullvektor, amelyek iránya tetszőleges, így tekinthetők egymásra merőlegesnek is.)

2101. Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát

$\mathbf{a}-\mathbf{b} \perp \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{a}-\mathbf{b})\mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{ab}-\mathbf{b}^2 = 0.$

A skaláris szorzat definíciója szerint

$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 60° - |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 0° = 0,$

$|\mathbf{b}| \cdot (|\mathbf{a}| \cdot \cos 60° - |\mathbf{b}| \cdot \cos 0°) = 0.$

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. $\Rightarrow$

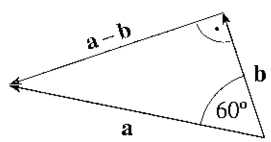
1) $|\mathbf{b}| = 0$, azaz $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b}$ nullvektor, ekkor $\mathbf{a}$ hossza tetszőleges, vagy

2) $|\mathbf{a}| \cdot \cos 60° - |\mathbf{b}| \cdot \cos 0° = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|,$

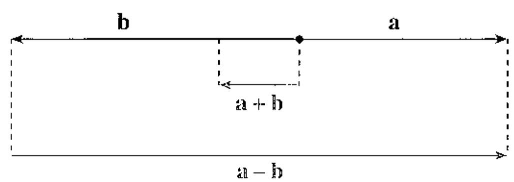
azaz $\mathbf{a}$ hossza $\mathbf{b}$ hosszának kétszerese.

Másik megoldás:

Rajzoljuk meg egy pontból kiindulva $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, egymással 60°-os szöget bezáró vektorokat! A $\mathbf{b}$ végpontjából az $\mathbf{a}$ végpontjába mutató $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ merőleges a feltétel szerint $\mathbf{b}$-re! E speciális 30°, 60°, 90°-os háromszögben az átfogó a rövidebb befogó kétszerese, (egy szabályos háromszög fele) azaz $\mathbf{a}$ hossza $\mathbf{b}$ hosszának a kétszerese.

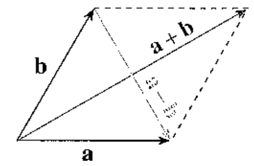


2102. a) Legyenek pl. $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ellentétes irányú vektorok.



b) Ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor tetszőleges $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor megfelel.

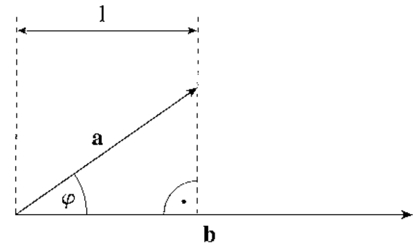
c) Legyen $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq 0$.



d) Legyen $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{0}$, de $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

2103. a) $\mathbf{ab}$ egy valós számmal egyenlő, ami nem lehet egyenlő a jobb oldalon álló vektorral.

b) A skaláris szorzat definíciója alapján $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi = |\mathbf{b}|$, amiből $|\mathbf{b}| \neq 0$ miatt $|\mathbf{a}| \cos \varphi = 1$ adódik. A következő ábra egy megfelelő vektorpárt mutat.



c) A skaláris szorzat definíciója és a feltétel alapján $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi > |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, itt $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| > 0$, és emiatt (az egyenlőtlenség osztásával) $\cos \varphi > 1$ adódik. Ez azonban nem lehetséges.

d) $\mathbf{ab}$ egy valós számmal egyenlő, ami nem lehet egyenlő a jobb oldalon álló nullvektorral.

e) A két vektor legyen egymásra merőleges.

2104. $(x+y-2)\mathbf{a} = (3x-2y)\mathbf{b}$.

Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két nem párhuzamos vektor, ezek számszorosa akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a két vektor együtthatója 0, azaz $\left.\begin{aligned} x+y-2 &= 0 \\ 3x-2y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = \frac{4}{5}$; $y = \frac{6}{5}$.

Így $\left(\frac{4}{5}+\frac{6}{5}-2\right)\mathbf{a} - \left(\frac{12}{5}-\frac{12}{5}\right)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ valóban teljesül.

2105. Merőleges vektorok skaláris szorzata 0, így:

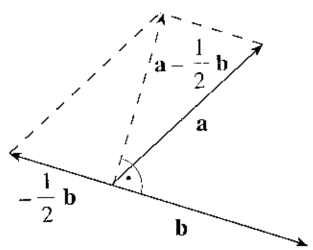
$0 = (\mathbf{a}+2\mathbf{b})(5\mathbf{a}-4\mathbf{b}) = 5\mathbf{a}^2 + 6\mathbf{ab} - 8\mathbf{b}^2.$

Mivel $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, ezt írhatjuk így: $0 = 5|\mathbf{a}|^2 + 6|\mathbf{a}|^2 \cos \gamma - 8|\mathbf{a}|^2$, ahol γ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt, keresett szög.

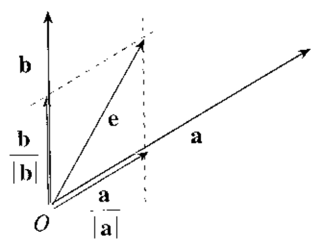
Összevonva: $0 = |\mathbf{a}|^2(6 \cdot \cos \gamma - 3)$. Mivel $\mathbf{a}$ nem nullvektor, csak a második tényező lehet 0, amiből: $\cos \gamma = 0{,}5$. Tehát $\gamma = 60°$ (a visszakeresés más eredményei vektorok hajlásszögeként nem jöhetnek szóba).

2106. Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát
$\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \perp 4\mathbf{a} - 3\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{a} + 3\mathbf{b})(4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\mathbf{a}^2 + 9\mathbf{ab} - 9\mathbf{b}^2 = 0.$
Jelöljük $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszögét ε-nal! A skaláris szorzat definíciója szerint:
$4 \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 0° + 9 \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varepsilon - 9 \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 0° = 0.$
Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1 \Rightarrow \cos\varepsilon = \frac{5}{9} \Rightarrow \varepsilon \approx 56{,}3°$ a két vektor által bezárt szög.

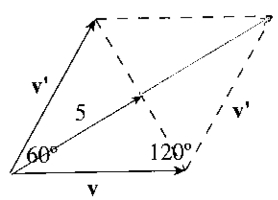
2107. Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát
$\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \perp \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})\mathbf{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{ab} + \lambda\mathbf{b}^2 = 0.$
A skaláris szorzat definíciója szerint
$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 60° + \lambda|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 0° = 0.$
Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok,
$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{1}{2}.$



2108. $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ egy $\mathbf{a}$-val egyirányú egységvektor, hiszen hossza az $\mathbf{a}$ hosszának $|\mathbf{a}|$-ad része. Hasonlóan $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ is $\mathbf{b}$ irányú egységvektor. A két egyenlő hosszú (de a feltétel szerint nem párhuzamos) vektort közös O kezdőpontból felmérve, egy rombusz egy csúcsból kiinduló két oldalvektorát kapjuk. E két vektor összege a rombusz O csúcsából induló $\mathbf{e}$ átlóvektora. Mivel a rombusz átlói egyben szögfelezők is, ezért $\mathbf{e}$ is felezi $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét. Mivel $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ és $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ bárhol felvehető, $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ vektorról általában az állítható, hogy párhuzamos $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögfelezőjével.



2109. Az ábra alapján egy szabályos háromszög magassága az 5 egység, tehát $|\mathbf{v}|\frac{\sqrt{3}}{2} = 5$ egység, azaz a vektor $\mathbf{v}$ hosszára igaz: $\frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5{,}774$ egység.

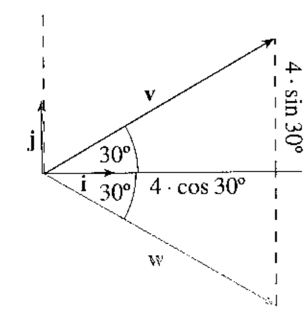


2110. Legyen a második koordináta e_2. Mivel az $\mathbf{e}$ egységvektor hossza 1, ezért
$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + e_2^2 = 1$, amiből $e_2^2 = \frac{3}{4}$.
Két lehetőség van tehát: $\mathbf{e}\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, vagy $\mathbf{e}\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Másik megoldás:
Mivel az $\mathbf{e}$ egységvektor első koordinátája $-\frac{1}{2}$, ezért egyik irányszöge 120°, vagy $-120°$. A második vektorkoordinátát ezek után geometriai megfontolással (szabályos háromszög magassága), vagy trigonometriai úton kaphatjuk meg (a második koordináta $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vagy $\sin(-120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$).

2111. Az $\mathbf{a}$ második koordinátája $\frac{1}{2}$, ezért egyik pozitív irányszöge 30°. A szabályos háromszög magasságáról tanultak miatt $\mathbf{a}$ első koordinátája $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Tehát $\mathbf{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$.
A $\mathbf{b}$ egyik irányszöge 45°, ezért az egyenlő szárú derékszögű háromszögről tanultak alapján mindkét koordinátája $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tehát $\mathbf{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$.
A $\mathbf{c}$ első koordinátája $\frac{1}{2}$, ezért egyik irányszöge 60°. A szabályos háromszög magasságáról tanultak miatt $\mathbf{c}$ második koordinátája $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.
A tengelyes szimmetria segítségével:
$\mathbf{d} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j};\quad \mathbf{e} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j};\quad \mathbf{f} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}.$

2112. Két vektor felel meg a követelményeknek. Az ábrán ezeket $\mathbf{v}$, illetve $\mathbf{w}$ jelöli.
$\mathbf{v} = 4 \cdot \cos 30° \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \sin 30° \cdot \mathbf{j} = 2\sqrt{3}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
$\mathbf{w} = 4 \cdot \cos 30° \cdot \mathbf{i} - 4 \cdot \sin 30° \cdot \mathbf{j} = 2\sqrt{3}\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$



2113. A huszár a „vízszintes" és „függőleges" irányok egyikében 1, a másikában 2 mezőt léphet bármerre, így a ± 1 és ± 2 koordináták párosításai adják az eredményt. Az óramutató járásának megfelelő sorrendben végigjárva a (feladatgyűjteménybeli) ábrán jelölt lehetőségeket:
$(1; 2)$, $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(1; -2)$, $(-1; -2)$, $(-2; -1)$, $(-2; 1)$, $(-1; 2)$.

2114. Ha $\mathbf{a}(2; -3)$, $\mathbf{b}(-1; 5)$ és $\mathbf{c}(0; 3)$, akkor

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (1; 5)$;

b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = (3; -11)$;

c) $2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = (5; -14)$;

d) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - 3\mathbf{c} = (1; -10{,}5)$;

e) $3(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (15; -33)$.

2115. a) $[(2; 3) + (-3; 2)](5; -1) = (-1; 5)(5; -1) = -5 - 5 = -10$.
(A skaláris szorzat eredménye egy valós szám!)

b) $[(2; 3) - (5; -1)](-3; 2) = (-3; 4)(-3; 2) = 9 + 8 = 17$.

c) Mivel a skaláris szorzat „disztributív", ez ugyanaz, mint az a) feladat, tehát az eredmény -10. Persze közvetlenül is kiszámolható, mintegy ellenőrzésül:
$(2; 3)(5; -1) + (-3; 2)(5; -1) = (10 - 3) + (-15 - 2) = 7 - 17 = -10$.

d) $[(2; 3) - (-3; 2)][(2; 3) + (-3; 2)] = (5; 1)(-1; 5) = -5 + 5 = 0$.
(Azaz a két vektor merőleges. Lásd még a 2100. feladat megoldását).

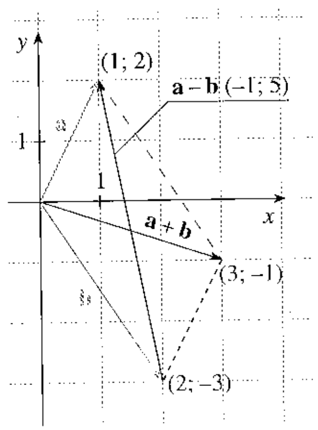
2116. a) Ha ismertek az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorok, akkor ezek összegének fele az $\mathbf{a}$, és különbségük fele a $\mathbf{b}$.

Koordinátákkal: $\mathbf{a} = \dfrac{(3; -1) + (-1; 5)}{2} = (1; 2)$;

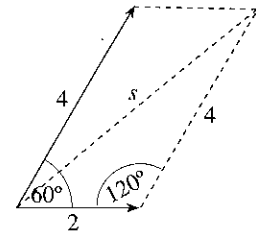
illetve $\mathbf{b} = \dfrac{(3; -1) - (-1; 5)}{2} = (2; -3)$.

b) Lásd az ábrát!

c) A két vektor skaláris szorzata:
$\mathbf{ab} = (1; 2)(2; -3) = 2 - 6 = -4$.
(Negatív, mert a közbezárt szög nagyobb, mint 90°, és ekkor a koszinusz már negatív.)

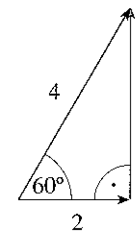


2117. a) Legyen az egyik vektor hossza a, míg a másiké b.
A feltétel szerint $b = 2a$.
$4 = \mathbf{ab} = a \cdot 2a \cdot \cos 60° = 2a^2 \cdot 0{,}5 = a^2$.
Innen az egyik vektor hossza 2, a másiké 4.



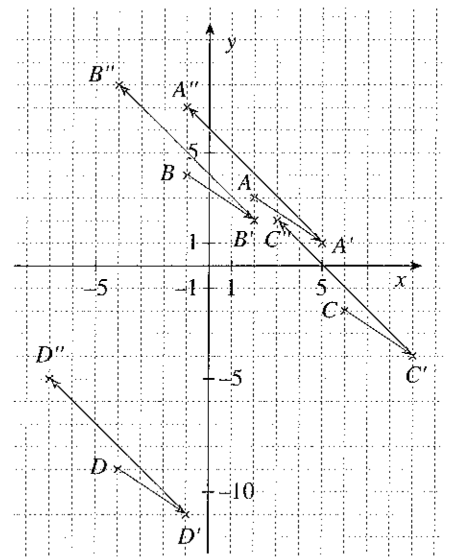
b) Az összegükre az ábrán satírozott háromszögből:
$s^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \cos 120° = 28$. Azaz az összegvektor $\sqrt{28} \approx 5{,}29$ egység hosszú.

c) A különbségre a másik háromszögből, hasonlóan koszinusztétellel: $t^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \cos 60° = 12$. Tehát a különbségvektor $\sqrt{12} \approx 3{,}46$ egység hosszú.

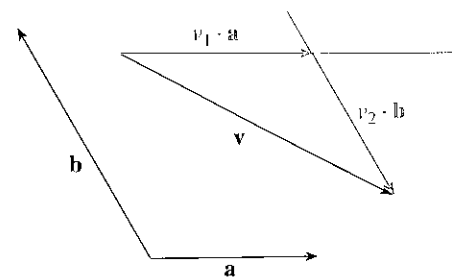


2118. a) $\overrightarrow{AA'} = (5 - 2; 1 - 3) = (3; -2)$,
$\overrightarrow{A'A''} = (-1 - 5; 7 - 1) = (-6; 6)$.
A hosszuk ezért:
$|\overrightarrow{AA'}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ és
$|\overrightarrow{A'A''}| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$.

b) A pontok koordinátáihoz hozzáadva az eltolások vektorának koordinátáit kapjuk az eltolt pontok képének koordinátáit:
$B' = (-1; 4) + (3; -2) = (2; 2)$,
$B'' = (2; 2) + (-6; 6) = (-4; 8)$;
$C' = (6; -2) + (3; -2) = (9; -4)$,
$C'' = (9; -4) + (-6; 6) = (3; 2)$;
$D' = (-4; -9) + (3; -2) = (-1; -11)$,
$D'' = (-1; -11) + (-6; 6) = (-7; -5)$.



2119. Húzzunk a $\mathbf{v}$ kezdőpontján keresztül párhuzamost $\mathbf{a}$-val, $\mathbf{v}$ végpontján keresztül pedig párhuzamost $\mathbf{b}$-vel. A kapott háromszög két oldalvektora $v_1\mathbf{a}$, illetve $v_2\mathbf{b}$ ($v_1\mathbf{a}$ kezdőpontja a $\mathbf{v}$ kezdőpontja, $v_2\mathbf{b}$ végpontja a $\mathbf{v}$ végpontja). A v_1 szám két dolgot fejez ki: előjele azt jelzi, hogy a $v_1\mathbf{a}$ vektor az $\mathbf{a}$-hoz ké-



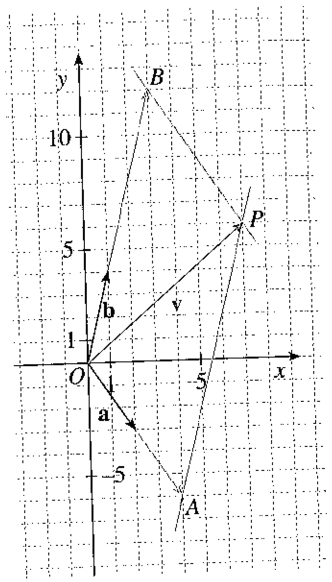
pest milyen irányú (ha pozitív, akkor azonos irányú, ha negatív, akkor **a**-val ellentétes irányú); a v_1 abszolútértéke pedig azt mutatja meg, hogy a v_1**a** vektor hossza hányszorosa az **a** hosszának. Ezt méréssel, majd egy osztással lehet megállapítani: **a** hossza 22 mm, v_1**a** hossza 24,5 mm és egyirányú vektorok, ezért $v_1 = \frac{24,5}{22} \approx 1,11$.

Hasonlóan állapítható meg a v_2 is: **b** hossza 35 mm, v_2**b** hossza 22 mm és ellentétes irányú vektorok, ezért $v_2 = -\frac{22}{35} \approx -0,63$.

Tehát $\mathbf{v} = 1,11\mathbf{a} - 0,63\mathbf{b}$; az adott **v** vektor koordinátái az adott bázisrendszerben 1,11 és –0,63.

Megjegyzés:
A szerkesztés és mérés útján kapott eredmény természetesen közelítő jellegű, a pontosságtól függően más (elvileg helyesen megállapított, elfogadható) értékek is adódhatnak.

2120. a) Jelöljük a **v** vektor kezdőpontját O-val, végpontját P-vel. O-n és P-n keresztül húzzunk az **a**, illetve a **b** vektorokkal párhuzamos egyeneseket.
Az O-n átmenő **a**-val párhuzamos és a P-n átmenő **b**-vel párhuzamos egyenesek metszéspontja legyen A, az O-n átmenő **b**-vel párhuzamos és a P-n átmenő **a**-val párhuzamos egyenesek metszéspontja legyen B.
A **v** vektor **a**-val párhuzamos összetevője $\overrightarrow{OA}$, **b**-vel párhuzamos összetevője pedig $\overrightarrow{OB}$.



b) A **v** vektor **a**-val párhuzamos $\overrightarrow{OA}$ összetevője $\alpha\mathbf{a}$, **b**-vel párhuzamos összetevője pedig $\beta\mathbf{b}$ alakban is felírható, ahol α és β valamilyen valós szám.
Mivel $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, ezért $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.
Ez utóbbi vektoregyenletet mindkét koordinátára felírva az alábbi egyenletrendszert kapjuk:
$7 = 2\alpha + \beta$
$6 = -3\alpha + 4\beta$.
Az egyenletrendszert megoldva $\alpha = 2$, $\beta = 3$ adódik.
Így az $\overrightarrow{OA} = \alpha\mathbf{a}$ vektor koordinátái $(4; -6)$, az $\overrightarrow{OB} = \beta\mathbf{b}$ vektor koordinátái pedig $(3; 12)$.

2121. $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, ez a megfelelő koordinátákra lebontva: $\begin{aligned} -6 &= 2\lambda - 10\mu \\ 12 &= 5\lambda + 2\mu. \end{aligned}$

Az egyenletrendszer megoldása: $\lambda = 2$, $\mu = 1$, így $\mathbf{x} = 2 \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b}$.

2122. Ekkor fel kell írnunk **v** vektort $k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$ alakban, ahol $(k; l)$ a keresett koordináták. A **v**, **a** és **b** eredeti első és második koordinátáira külön-külön is fennáll a felbontás:
$\left.\begin{aligned} 4 &= k(-3) + l \cdot 2 \\ 2 &= k \cdot 1 + l \cdot 3 \end{aligned}\right\}$, vagy a megszokottabb formában: $\left.\begin{aligned} -3k + 2l &= 4 \\ k + 3l &= 2 \end{aligned}\right\}$.

A felső egyenlethez hozzáadva az alsó háromszorosát, k kiesik és kapjuk: $11l = 10$, azaz $l = \frac{10}{11}$.

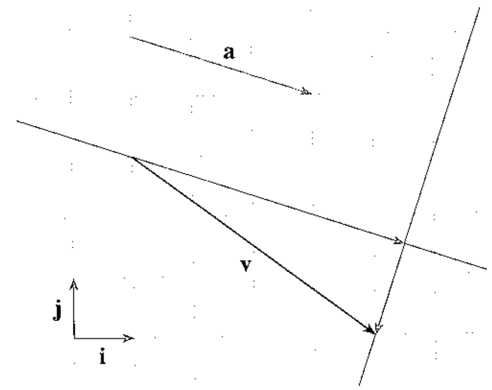
Visszahelyettesítve (pl.) az alsóba: $k = 2 - 3 \cdot \frac{10}{11} = -\frac{8}{11}$.

Tehát $\mathbf{v} = -\frac{8}{11}\mathbf{a} + \frac{10}{11}\mathbf{b}$.

2123. Az **a** vektor hossza $\sqrt{10}$, a **b** vektoré pedig $\sqrt{80}$, ami az **a** hosszának $\sqrt{8}$-szorosa. A keresett vektor tehát: $\frac{1}{\sqrt{8}}\mathbf{b}$.

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\mathbf{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{b} = \left(\frac{8\sqrt{2}}{4}; -\frac{4\sqrt{2}}{4}\right) = \left(2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right).$$

2124. *Szerkesztés*
Húzzunk párhuzamost **a**-val a **v** vektor kezdőpontján keresztül és állítsunk merőlegest **a**-ra a **v** végpontján keresztül. A keresett összetevőket az ábra mutatja.



Számolás
Egy az **a**-ra merőleges vektor például $\mathbf{b}(1; 3)$. A párhuzamos összetevő legyen $\alpha\mathbf{a}$, a merőleges összetevő $\beta\mathbf{b}$, tehát $\alpha(3; -1) + \beta(1; 3) = (4; -3)$.
Ebből a következő egyenletrendszer adódik: $\begin{aligned} 3\alpha + \beta &= 4 \\ -\alpha + 3\beta &= -3. \end{aligned}$

Az egyenletrendszer megoldásaként $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ adódik.

Tehát a párhuzamos összetevő $\left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, a merőleges összetevő $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

2125. Legyen $\mathbf{b}(x; y)$. A feltétel szerint egyrészt $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, tehát $\mathbf{ab} = 2x - 3y = 0$, (I.)
másrészt $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ és $|\mathbf{a}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, így $x^2 + y^2 = 13$. (II.)

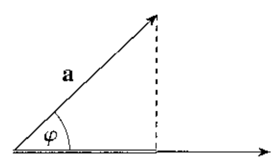
(I.)-ből $x = 1{,}5y$, így $2{,}25y^2 + y^2 = 13$, $y^2 = \dfrac{13}{3{,}25} = 4$, $y = \pm 2$;
$y_1 = 2$ esetén $x_1 = 3$, $y_2 = -2$ esetén $x_2 = -3$.
A keresett vektorok: $\mathbf{b}'(3\,;2)$ és $\mathbf{b}''(-3\,;-2)$.

Másik megoldás:
A feltételek miatt $\mathbf{b}$ az $\mathbf{a}$ $+90°$-os és $-90°$-os elforgatottja lehet:
$\mathbf{b}'(3; 2)$ és $\mathbf{b}''(-3; -2)$.

2126. Legyen $\mathbf{b}(b_1; b_2)$.
Mivel $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, ezért $\mathbf{ab} = 0$, azaz $10b_1 - 5b_2 = 0$,
illetve $|\mathbf{b}| = \sqrt{10}$, így $b_1^2 + b_2^2 = 10$.
Az első egyenletből $b_2 = 2b_1$.
Ezt a második egyenletbe behelyettesítve $b_1^2 + 4b_1^2 = 10$, amiből $b_1^2 = 2$ adódik.
Innen $b_1 = \sqrt{2}$, s így $b_2 = 2\sqrt{2}$, illetve
$b_1 = -\sqrt{2}$, s így $b_2 = -2\sqrt{2}$.
Két megoldás van: $(\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$ és $(-\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$.

2127. Az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ vektor egyenesére eső merőleges vetületének hossza $|\mathbf{a}| \cdot |\cos\varphi|$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge.

$$|\mathbf{a}| \cdot |\cos\varphi| = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{|-6+4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}.$$



Hasonlóan a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{a}$ vektorra eső merőleges vetületének a hossza

$$|\mathbf{b}| \cdot |\cos\varphi| = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{2}{\sqrt{9+16}} = \frac{2}{5}.$$

Megjegyzés:
$|\mathbf{a}| \cdot \cos\varphi = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}°$, ahol $\mathbf{b}°$ a $\mathbf{b}$ vektorral egyirányú egységvektor, s így

$$\mathbf{b}° = \frac{1}{|\mathbf{b}|} \cdot \mathbf{b} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

2128. $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.

a) Az $\mathbf{a}$ vektorral egyirányú egységvektor $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{a}_e\left(\dfrac{2}{\sqrt{29}};\ -\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$.
Az $\mathbf{a}$ vektorra merőleges egységvektorok:
$\mathbf{a}_\perp\left(\dfrac{5}{\sqrt{29}};\ \dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$, illetve $\mathbf{a}_\perp^*\left(-\dfrac{5}{\sqrt{29}};\ -\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$.

b) Az $\mathbf{a}$ vektorra merőleges, 3 egység hosszúságú vektorok:
$\mathbf{a}_1\left(\dfrac{15}{\sqrt{29}};\ \dfrac{6}{\sqrt{29}}\right)$, illetve $\mathbf{a}_2\left(-\dfrac{15}{\sqrt{29}};\ -\dfrac{6}{\sqrt{29}}\right)$.

c) Az összes, $\mathbf{a}$ vektorra merőleges vektor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}_\perp\left(\dfrac{5\lambda}{\sqrt{29}};\ \dfrac{2\lambda}{\sqrt{29}}\right)$, ahol $\lambda \in \mathbf{R}$.

2129. Az $\mathbf{a}$ vektor hossza $\sqrt{25} = 5$, a $\mathbf{b}$ vektor hossza $\sqrt{100} = 10$. A $\mathbf{b}$ vektor irányába mutató $|\mathbf{a}|$ hosszúságú vektor $(3; -4)$. Tehát az $\mathbf{a} + \dfrac{1}{2}\mathbf{b} = (6; 0)$ vektor már az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögfelezőjének irányába mutat, (mert a rombusz átlója egyúttal szögfelező is) hossza 6, így a keresett egységvektor $\dfrac{1}{6}(6; 0) = (1; 0)$, és a $(-1; 0)$.

2130. Legyen $\mathbf{z} = (x; y)$. Ekkor $\mathbf{uz} = 2x + 2y = 14$ és $\mathbf{vz} = x - 6y = -7$.
Kifejezve a második egyenletből x-et: $x = 6y - 7$.
Ezt beírva az első egyenletbe: $2(6y - 7) + 2y = 14$.
Rendezve: $14y = 28$, amiből $y = 2$.
Visszaírva x kifejezésébe: $x = 6 \cdot 2 - 7 = 5$. Tehát $\mathbf{z} = (5; 2)$.

2131. a) A skaláris szorzat értéke a koordinátákból:
$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 2$.

b) A két vektor abszolútértéke: $|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
A skaláris szorzat definíció szerint: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma$, ahol a két vektor γ szöget zár be egymással. Beírva a már ismert értékeket: $2 = 5\sqrt{5}\cos\gamma$, amiből $\cos\gamma = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$. Ebből $\gamma = 79{,}70°$ (a visszakeresés más eredményei vektorok hajlásszögeként nem jöhetnek szóba).

2132. a) $a_1 = 3{,}8$; $a_2 = -2{,}4$; $b_1 = -4{,}2$; $b_2 = -5$ helyettesítése után $\cos\alpha = -0{,}1349$ adódik, amiből $\alpha = 97{,}75°$.
b) A vektorok hossza.

2133. Két vektor skaláris szorzatáról tanultak alapján az **a** és **b** vektorok α hajlásszögének a koszinusza: $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$.

A megadott adatok esetén $\cos\alpha = \dfrac{8\cdot 2 - 3\cdot 6}{\sqrt{8^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+6^2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{40}} = -0{,}037.$

A keresett $\alpha = 92{,}12°$.

2134. $\mathbf{xy} = |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|\cdot\cos\varphi$, ahol φ az **x** és **y** vektorok szöge. Innen $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}$.

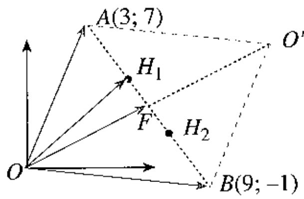
Legyen **a** és **b** szöge γ.

Ekkor $\cos\gamma = \dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \dfrac{-9+16}{5\cdot 5} = \dfrac{7}{25} = 0{,}28$, innen $\gamma = 73{,}74°$.

b és **c** szögét jelöljük α-val! Ekkor $\cos\alpha = \dfrac{-12-12}{5\cdot 5} = \dfrac{-24}{25} = -0{,}96$, $\alpha = 163{,}74°$.

Mivel $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 0$, ezért **a** és **c** merőlegesek egymásra, tehát szögük 90°.

2135. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (6; -8)$.



b) Legyen AB felezőpontja F.
O pont F-re vonatkozó tükörképét jelöljük O'-vel.
$OBO'A$ paralelogramma egyik átlója
$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (12; 6)$.

F felezi OO' átlót, ezért $\overrightarrow{OF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OO'} = (6; 3)$.

Másként: $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

c) Legyen $AH_1 = H_1H_2 = H_2B$. Ekkor

$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \dfrac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3}$.

Innen $\overrightarrow{OH_1} = \left(5; \dfrac{13}{3}\right)$.

Hasonlóan $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Ebből $\overrightarrow{OH_2} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3} = \left(7; \dfrac{5}{3}\right)$.

2136. $\overrightarrow{AB}(3; 4)$; $\overrightarrow{AC}(-3; 3)$.

$\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ hajlásszöge kiszámítható a két vektor skaláris szorzatának kétféleképpen való felírásával:

$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha = 3\cdot(-3) + 4\cdot 3 = 3.$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = 3\sqrt{2}$;

$5\cdot 3\sqrt{2}\cdot\cos\alpha = 3 \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = 0{,}1414 \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 81{,}9°.$

$\overrightarrow{BA}(-3; -4)$; $\overrightarrow{BC}(-6; -1)$.

$\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok hajlásszöge kiszámítható a két vektor skaláris szorzatának kétféleképpen való felírásával:

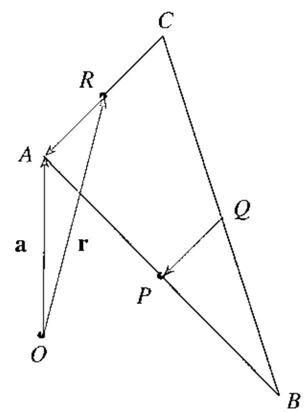
$|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\beta = (-3)\cdot(-6) + (-4)\cdot(-1) = 22.$

$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}| = 5$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-6)^2+(-1)^2} = \sqrt{37}$.

$5\cdot\sqrt{37}\cdot\cos\beta = 22 \quad\Rightarrow\quad \cos\beta = 0{,}7234 \quad\Rightarrow\quad \beta \approx 43{,}7°.$

A háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért $\gamma = 54{,}4°$.

2137. Az oldalfelező pontok legyenek rendre P, Q, R. Az A pontba mutató **a** vektor $\mathbf{r} + \overrightarrow{RA}$.



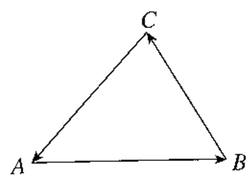
A háromszög középvonalának tulajdonságából adódóan $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{QP} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$.
Tehát $\mathbf{a} = \mathbf{r} + \mathbf{p} - \mathbf{q}$.
Hasonlóan számolható ki a B pontba mutató **b** vektor és a C pontba mutató **c** vektor is.
$\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{r}$, $\quad \mathbf{c} = \mathbf{q} + \mathbf{r} - \mathbf{p}$.
A megadott adatok esetén:
$\mathbf{a}(4; 10)$, $\mathbf{b}(0; 6)$, $\mathbf{c}(8; -2)$.

Másik megoldás:
Legyenek a csúcspontokba mutató vektorok $\mathbf{a}(a_1; a_2)$; $\mathbf{b}(b_1; b_2)$; $\mathbf{c}(c_1; c_2)$. A felezőpontra vonatkozó tételek szerint:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1+b_1}{2} &= 2 \\ \frac{a_1+c_1}{2} &= 6 \\ \frac{b_1+c_1}{2} &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{összeadva az egyenleteket} \quad a_1+b_1+c_1 = 12 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; b_1+c_1 = 8, \\ &\text{tehát } a_1 = 4;\ b_1 = 0;\ c_1 = 8. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_2+b_2}{2}&=8\\ \frac{a_2+c_2}{2}&=4\\ \frac{b_2+c_2}{2}&=2\end{aligned}\right\}$$ összeadva az egyenleteket $a_2+b_2+c_2=14$
$b_2+c_2=4$,
tehát $a_2=10$; $b_2=6$; $c_2=-2$.

2138. Mivel itt három egymáshoz csatlakozó vektorról van szó, az összefűző módszer szerint összegük az első kezdőpontjából az utolsó végpontjába mutat. Mivel azonban e két pont egybeesik (az $\overrightarrow{AA}$-ról van szó), az eredmény a nullvektor ($\mathbf{0}$).



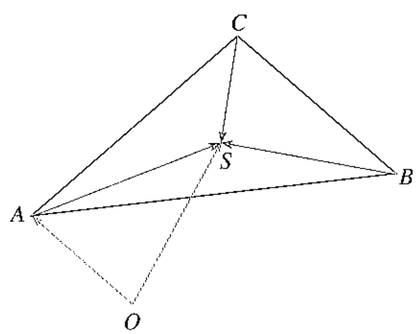
2139. A háromszög S súlypontjába mutató helyvektor $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, így a súlypontból a csúcspontokba mutató vektorok:

$$\overrightarrow{SA}=\mathbf{a}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}=\frac{2\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}}{3},$$

$$\overrightarrow{SB}=\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}=\frac{2\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}}{3},$$

$$\overrightarrow{SC}=\mathbf{c}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}=\frac{2\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}}{3}.$$

2140. Jelöljük a vonatkoztatási rendszer kezdőpontját O-val, és vezessük be a következő jelöléseket:
$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{OS}=\mathbf{s}$.
Így $\overrightarrow{AS}=\mathbf{s}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BS}=\mathbf{s}-\mathbf{b}$,
$\overrightarrow{CS}=\mathbf{s}-\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}=$
$=\mathbf{s}-\mathbf{a}+\mathbf{s}-\mathbf{b}+\mathbf{s}-\mathbf{c}=$
$=3\mathbf{s}-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$.
Ismert, hogy $\mathbf{s}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, ezt alkalmazva, a keresett összeg $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}=\mathbf{0}$.



Megjegyzés:
Ha S a vonatkoztatási rendszer kezdőpontja, az említett tétel szerint:

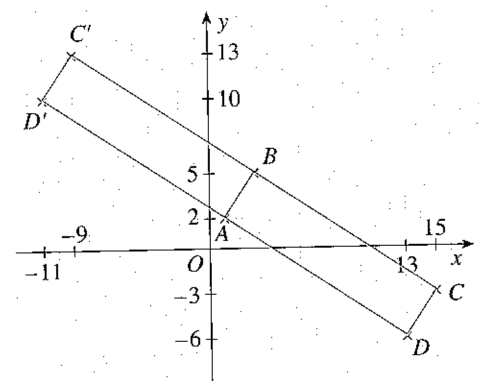
$$\overrightarrow{SS}=\frac{\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}}{3}=\mathbf{0}.$$

2141. A szabályos háromszög köréírt körének középpontja egybeesik a súlyponttal. A 2140. feladat eredményét alkalmazva $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\mathbf{0}$, így $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

2142. Az A, B, C pontokba mutató helyvektorok legyenek rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.
Ekkor az ABC háromszög súlypontjába mutató helyvektor $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$.
Az A_1 pontba mutató helyvektor $\mathbf{b}+\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}+\mathbf{b}-\mathbf{a}=2\mathbf{b}-\mathbf{a}$.
A B_1 pontba mutató helyvektor $2\mathbf{c}-\mathbf{b}$, a C_1 pontba mutató helyvektor $2\mathbf{a}-\mathbf{c}$.
Az $A_1B_1C_1$ háromszög súlypontjába mutató helyvektor $\frac{2\mathbf{b}-\mathbf{a}+2\mathbf{c}-\mathbf{b}+2\mathbf{a}-\mathbf{c}}{3}=$
$=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, tehát a két háromszög súlypontja valóban megegyezik.

2143. $\overrightarrow{CC_1}=\frac{\mathbf{a}}{2}-\mathbf{b}$. A felezőpontba mutató helyvektorra vonatkozó tétel szerint:
$\overrightarrow{AA_1}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$. Tehát $\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{AA_1}=\frac{\mathbf{a}}{2}-\mathbf{b}+\frac{\mathbf{a}}{2}+\frac{\mathbf{b}}{2}=\mathbf{a}-\frac{\mathbf{b}}{2}$.

2144. Legyenek a téglalap két szomszédos csúcspontjának koordinátái:
$A(1; 2)$, $B(3; 5)$, így $\overrightarrow{AB}(2; 3)$.
Mivel $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ és $|\overrightarrow{AD}|=4\cdot|\overrightarrow{AB}|$, felírjuk az $\overrightarrow{AB}$-re merőleges, négyszer olyan hosszú vektort. Két ilyen vektor van: $\overrightarrow{AD}(12; -8)$, illetve $\overrightarrow{AD'}(-12; 8)$.
A téglalap megfelelő szemközti oldalvektorai egyenlők: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}$.
Ezek segítségével a csúcspontok koordinátái a következőképpen számolhatók: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$, illetve $\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD'}$ $\Rightarrow$ $D(13; -6)$; $D'(-11; 10)$;
$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$, illetve $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{D'C'}$ $\Rightarrow$ $C(15; -3)$; $C'(-9; 13)$.



2145. Legyenek a rombusz két szemközti csúcspontjának koordinátái: $A(-1; -3)$, $C(9; 5)$.
A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. Ha a hosszabbik átló a rövidebb átló háromszorosa, akkor ez az átlók felére is igaz.
Az átlók felezőpontja $F(4; 1)$, így $\overrightarrow{FC}(5; 4)$.
Mivel $\overrightarrow{FC}\perp\overrightarrow{FB}$ és $|\overrightarrow{FC}|=3\cdot|\overrightarrow{FB}|$, felírjuk az $\overrightarrow{FC}$-re merőleges, harmadolyan hosszú vektort.

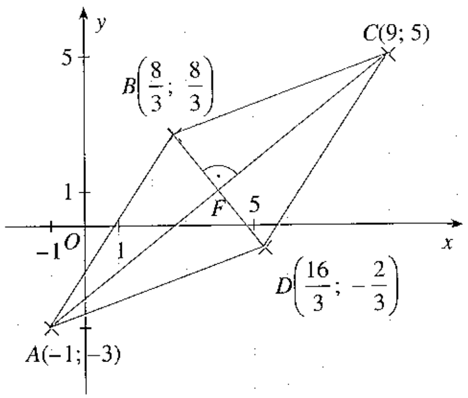
Két ilyen vektor van: $\overrightarrow{FB}\left(-\frac{4}{3};\ \frac{5}{3}\right)$,

illetve $\overrightarrow{FD}\left(\frac{4}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$.

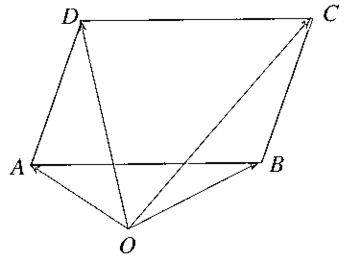
Ezek segítségével a csúcspontok koordinátái a következőképpen számolhatók: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3};\ \frac{8}{3}\right)$,

illetve

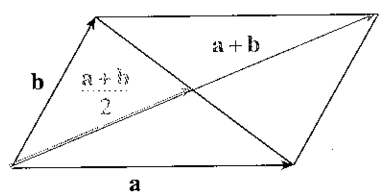
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD} \Rightarrow D\left(\frac{16}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$.



2146. Mivel $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ a paralelogramma szemközti oldalvektorai, így igaz az állítás.

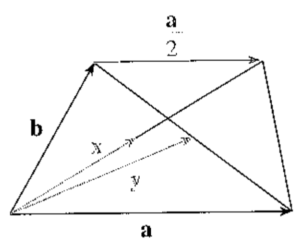


2147. a) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, ahol azt használtuk fel, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást (lásd az ábrát is).

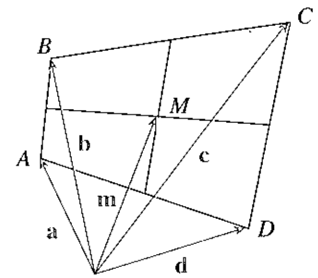


b) A két átló felezőpontja különböző, azaz két vektort kell meghatározni. Az ábrán **x**-szel jelölt vektorra igaz: $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{b}+\frac{\mathbf{a}}{2}}{2} = \frac{\mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a}}{4}$.

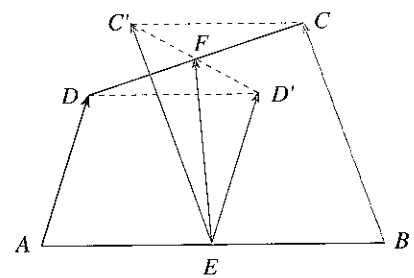
A másik, **y**-nal jelölt vektorra: $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2} = \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{2}$.



c) Az ábra szerinti M pontba mutató vektort kell meghatározni. Az AD felezőpontjába mutató vektor $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}$. Hasonlóan BC felezőpontjába mutat $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$. Ekkor igaz lesz, hogy: $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$, mivel a középvonalak a négyszög oldalainak felezéspontjai által meghatározott paralelogramma átlói. Ez tehát a négyszög középvonalainak metszéspontjába – ami egyben a négyszög súlypontja – mutató vektor.



2148. Legyen $\overrightarrow{ED'} = \overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{EC'} = \overrightarrow{BC}$. Így $AED'D$ és $EBCC'$ négyszögek paralelogrammák, mivel AD és ED', illetve EC' és BC párhuzamosak és egyenlők. Ezért e paralelogrammák másik oldalai is egyenlők: $DD' = AE = EB = C'C$ és párhuzamosak. Így $DD'CC'$ négyszög is paralelogramma, mert két oldala párhuzamos és egyenlő. A paralelogramma átlói felezve metszik egymást, tehát F a $C'D'$ szakaszt is felezi. Ezért $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EC'}+\overrightarrow{ED'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.



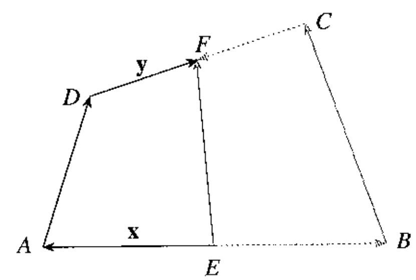
Másik megoldás:

Az ábra szerint $\overrightarrow{EF} = \mathbf{x} + \overrightarrow{AD} + \mathbf{y}$,

valamint $\overrightarrow{EF} = -\mathbf{x} + \overrightarrow{BC} - \mathbf{y}$.

A két egyenletet összeadva kapjuk:

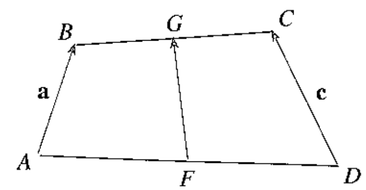
$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.



2149. $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} =$

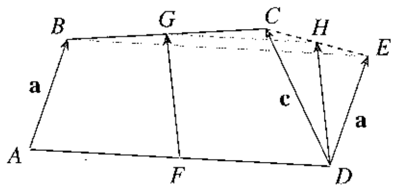
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} =$

$= \mathbf{a} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}\right)$ (I.)



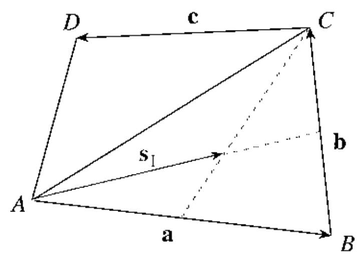
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$ és a kezdeti jelöléssel
$\mathbf{a}+\overrightarrow{BC}-\mathbf{c}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$.
Ezt (I.)-be helyettesítve $\overrightarrow{FG}=\mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$.

Másik megoldás:
Toljuk el $\overrightarrow{AB}$-t $\overrightarrow{AD}$-ral!
Így $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}=\mathbf{a}$, az eltolás miatt $ABED$ paralelogramma.
Húzzunk párhuzamost G-n keresztül BE-vel. Mivel G a BC oldal felezőpontja, ezért GH a $BCE\ \Delta$ középvonala, így felezi CE oldalt és hossza BE szakasz fele. Mivel F az AD felezőpontja és $AD \parallel BE \parallel GH$ és $GH=FD$, ezért $FGHD$ paralelogramma (konvex, és 1-1 oldala párhuzamos és egyenlő), így $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{DH}$.



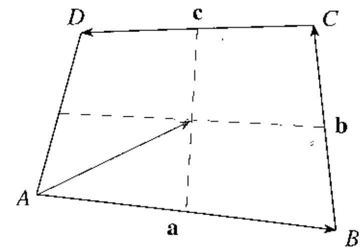
Mivel $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}=\mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$.

2150. a) Kezdjük az ABC háromszög súlypontjával. Az ábra szerinti $\mathbf{s}_1$ a kérdés. Mivel a keresett vektor $\frac{2}{3}$-a a BC felezőpontjába mutató vektornak, ezért:
$\mathbf{s}_1=\frac{2}{3}\cdot\left(\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2}\right)=\frac{2\mathbf{a}}{3}+\frac{\mathbf{b}}{3}$.



A BCD háromszög esetén induljunk ki abból, hogy a súlypontba mutató helyvektor mindig a csúcsokba mutató helyvektorok „számtani közepe". Az A-ból rendre a B, C, D csúcsokba vezetnek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, illetve $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektorok. Ekkor $\mathbf{s}_2=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}=\mathbf{a}+\frac{2\mathbf{b}}{3}+\frac{\mathbf{c}}{3}$.
Az ACD háromszög esetén az előbbi gondolatmenettel a $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektorok számtani közepe kell: $\mathbf{s}_3=\frac{2\mathbf{a}}{3}+\frac{2\mathbf{b}}{3}+\frac{\mathbf{c}}{3}$.
Végül az ABD háromszög esetén A-ból a csúcsokba mutató vektorok: $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, így $\mathbf{s}_4=\frac{2\mathbf{a}}{3}+\frac{\mathbf{b}}{3}+\frac{\mathbf{c}}{3}$.

b) A feladat szövegének zárójeles megjegyzése miatt a $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektorok számtani közepe kell: $\mathbf{s}=\frac{\mathbf{0}+\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{4}=$
$=\frac{3\mathbf{a}}{4}+\frac{2\mathbf{b}}{4}+\frac{\mathbf{c}}{4}$.
Ez lesz a négyszög súlypontjába mutató vektor (ti. a négyszög súlypontjáról van szó).



2151. a) egyenlő;
b) összegének ellentettjével;
c) ugyanakkora (vagy: ugyanolyan hosszú);
d) nullával;
e) 60°.

2152. a) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\overrightarrow{RA_2}=\overrightarrow{B_2Q}$; $\frac{1}{2}\mathbf{a}+2\mathbf{b}=\overrightarrow{A_3Q}=\overrightarrow{RB_1}$; $3\mathbf{b}-\frac{3}{2}\mathbf{a}=\overrightarrow{LB_1}=\overrightarrow{A_3N}$;
$(2\mathbf{a}-\mathbf{b})-\frac{2}{3}\left(3\mathbf{a}-\frac{3}{2}\mathbf{b}\right)=2\mathbf{a}-\mathbf{b}-2\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}=\overrightarrow{KK}=\overrightarrow{A_1A_1}=\ldots$ stb.
b) $\overrightarrow{B_3B_2}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}$; $\overrightarrow{PM}=2\mathbf{b}$; $\overrightarrow{MK}=-2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$; $\overrightarrow{LR}=-2\mathbf{a}+\mathbf{b}$; $\overrightarrow{SP}=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$;
$\overrightarrow{PN}=-2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$; $\overrightarrow{A_3B_1}=-\mathbf{a}+3\mathbf{b}$.
Megjegyzés:
A fentiek szerint a megadott **a** és **b** vektorok által alkotott bázisrendszerben a berajzolt vektorok koordinátái a következők lesznek: $\overrightarrow{B_3B_2}\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$; $\overrightarrow{PM}(0;\ 2)$;
$\overrightarrow{MK}(-2;\ -3)$; $\overrightarrow{LR}(-2;\ 1)$; $\overrightarrow{SP}(2;\ -1)$; $\overrightarrow{PN}(-2;\ 2)$; $\overrightarrow{A_3B_1}(-1;\ 3)$.

2153. a) $|\mathbf{a}|=1{,}8$ cm; $|\mathbf{b}|=1{,}0$ cm.
b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorú eltolással; ennek hossza 2,3 cm.
c) Soronként haladva: $\mathbf{a}$; $2\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$; $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; $2\mathbf{a}+\mathbf{b}$; $-\mathbf{a}+2\mathbf{b}$; $2\mathbf{b}$; $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$; $2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$.

2154. a) Az ABC háromszög S_1 súlypontjába mutató helyvektor: $\overrightarrow{OS_1}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$;
a PQR háromszög S_2 súlypontjába mutató helyvektor: $\overrightarrow{OS_2}=\frac{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}}{3}$.

b) A KLM háromszög S_3 súlypontjába mutató helyvektor: $\overrightarrow{OS_3} = \dfrac{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}}{3}$,

ahol $\mathbf{k} := \overrightarrow{OK}$; $\mathbf{l} := \overrightarrow{OL}$; $\mathbf{m} := \overrightarrow{OM}$.

A szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató két helyvektor összegének a fele, ezért $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{p}}{2}$, $\mathbf{l} = \dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{q}}{2}$, $\mathbf{m} = \dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{r}}{2}$.

Ezt felhasználva $\overrightarrow{OS_3} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}}{6}$.

c) Az S_1S_2 szakasz F felezőpontjába mutató helyvektor:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OS_1}+\overrightarrow{OS_2}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}+\frac{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}}{3}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}}{6} = \overrightarrow{OS_3}.$$

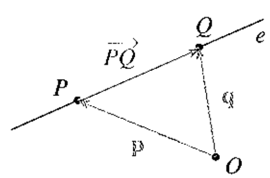
Tehát az F pont az S_3 ponttal azonos. Ezt kellett bizonyítani.

2155. A PQR háromszöget K középpontú, $\frac{4}{3}$ arányú középpontos hasonlósággal lehet az ABC háromszögbe átvinni, ezért $\overrightarrow{KA} = \frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{KB} = \frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{KQ}$, $\overrightarrow{KC} = \frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{KR}$.

Így $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KA} = \frac{4}{3}\cdot(\overrightarrow{KQ} - \overrightarrow{KP})$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KB} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{KR} - \overrightarrow{KQ})$,

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KC} = \frac{4}{3}\cdot(\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KR})$.

2156. Az e egyenes párhuzamos a $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = 5\mathbf{i} - 9{,}6\mathbf{j}$ vektorral. Ennek a $\mathbf{z}$ vektorral alkotott skaláris szorzata: $\mathbf{z}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = (48\mathbf{i} + 25\mathbf{j})(5\mathbf{i} - 9{,}6\mathbf{j}) = 240 - 240 = 0$, tehát $\mathbf{z}$ merőleges a $\overrightarrow{PQ}$-ra és így az e egyenesre is.



2157. a) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DE} = \mathbf{e} - \mathbf{d}$, $\overrightarrow{EA} = \mathbf{a} - \mathbf{e}$.

b) Legyen AB felezőpontja F_1, BC felezőpontja F_2, CD felezőpontja F_3, DE felezőpontja F_4, EA felezőpontja F_5. A szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató két helyvektor összegének a fele, ezért

$\overrightarrow{OF_1} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\overrightarrow{OF_2} = \dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $\overrightarrow{OF_3} = \dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$, $\overrightarrow{OF_4} = \dfrac{\mathbf{d}+\mathbf{e}}{2}$, $\overrightarrow{OF_5} = \dfrac{\mathbf{e}+\mathbf{a}}{2}$.

c) Legyenek a szóban forgó átlók felezőpontjai K, L, M, N, P (ábra).

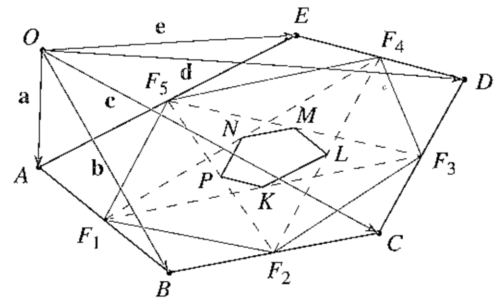
$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OF_1}+\overrightarrow{OF_3}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4},$$

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OF_2}+\overrightarrow{OF_4}}{2} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}}{4},$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OF_3}+\overrightarrow{OF_5}}{2} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{a}}{4},$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OF_4}+\overrightarrow{OF_1}}{2} = \frac{\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{a}+\mathbf{b}}{4},$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OF_5}+\overrightarrow{OF_2}}{2} = \frac{\mathbf{e}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{4}.$$



d) $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK} = \dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}}{4} - \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4} = \dfrac{\mathbf{e}-\mathbf{a}}{4} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$,

tehát $\overrightarrow{KL}$ valóban párhuzamos az $ABCDE$ ötszög egyik oldalvektorával.
Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{a}}{4} - \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}}{4} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{4} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{a}+\mathbf{b}}{4} - \frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{a}}{4} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{c}}{4} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \frac{\mathbf{e}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{4} - \frac{\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{a}+\mathbf{b}}{4} = \frac{\mathbf{c}-\mathbf{d}}{4} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OP} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4} - \frac{\mathbf{e}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{4} = \frac{\mathbf{d}-\mathbf{e}}{4} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ED},$$

tehát az állítás igaz.

e) A d) rész megoldásából adódik, hogy a két ötszög szögei páronként egyenlők és a kis ötszög ($KLMNP$) oldalai rendre az $ABCDE$ ötszög megfelelő oldalainak negyedével egyenlők. Ez a két ötszög hasonlóságának elégséges feltétele.

2158. a) $\overrightarrow{PF} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}}{2}$.

b) $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{PV} - \overrightarrow{PT}$.

c) A származtatás miatt $PQ = PT$, $PR = PV$ és $QPV\sphericalangle = RPT\sphericalangle$, ezért az említett két skaláris szorzat is egyenlő.

d) $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{TV} = \dfrac{(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})(\overrightarrow{PV}-\overrightarrow{PT})}{2} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PV}+\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PV}-\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PT}-\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PT}}{2}$.

Mivel $\overrightarrow{PR}$ merőleges $\overrightarrow{PV}$-re és $\overrightarrow{PQ}$ merőleges $\overrightarrow{PT}$-re, ezért $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PV} = 0$ és $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PT} = 0$, tehát $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{TV} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PV}-\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PT}}{2}$. A c) részben bizonyítottak szerint $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PV}-\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PT} = 0$, tehát $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{TV} = 0$ is igaz. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

e) $(\overrightarrow{PF})^2 = \dfrac{(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})^2}{4} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}^2+\overrightarrow{PR}^2+2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{4}$, ebből

$|\overrightarrow{PF}| = \dfrac{\sqrt{PQ^2+PR^2+2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}}{2}$.

$(\overrightarrow{TV})^2 = (\overrightarrow{PV}-\overrightarrow{PT})^2 = PV^2+PT^2-2\overrightarrow{PV}\cdot\overrightarrow{PT}$, ebből

$|\overrightarrow{TV}| = \sqrt{PV^2+PT^2-2\overrightarrow{PV}\cdot\overrightarrow{PT}}$.

Mivel $PQ = PT$, $PR = PV$, $QPR\sphericalangle = 180° - TPV\sphericalangle$, ezért $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{PV}\cdot\overrightarrow{PT}$, tehát $|\overrightarrow{TV}| = 2|\overrightarrow{PF}|$, ami bizonyítandó volt.

2159. a) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (1; -1)$.

b) Az 1 s alatt megtett út $\sqrt{2}$ egység, a 7 s alatt megtett út $7\sqrt{2}$ egység.

2160. a) $24\cdot180+31\cdot240 = 11\,760$ (Ft).

b) A kétféle cukor ára lesz az első, illetve a második koordináta, ekkor az „árvektor": (180; 240); míg a fogyást, az eladott termék mennyiségét jellemző vektor: (24; 31). A két vektor skaláris szorzata a bevétel.

c) Ekkor az árvektor: (180; 240; 300), a fogyás pedig legyen a $(k; m; n)$ nemnegatív egészekből álló vektor, a bevétel pedig: $180k+240m+300n$; a háromdimenziós skaláris szorzat.

2161. A munkavégzés az erő és az elmozdulás skaláris szorzata, tehát esetünkben:
$\mathbf{Fs} = F\cdot s\cdot\cos(\mathbf{F};\mathbf{s}) = 110\cdot150\cdot\cos30° = 8250\sqrt{3}\approx 14289{,}4$ (J).

2162. Az elmozdulás vektora $\mathbf{s} = \overrightarrow{AB}(3; -4)$, a testre ható erő $\mathbf{F}(3; 2)$. A fizikai értelemben vett munkavégzés állandó erő esetén, az erő és az elmozdulás vektorának skaláris szorzata: $W = \mathbf{Fs} = 9-8 = 1$ egység.

Megjegyzés:
Az adatokból a munka számértéke határozható meg.

2163. $F = 7$ N; $s = 0{,}02$ m.

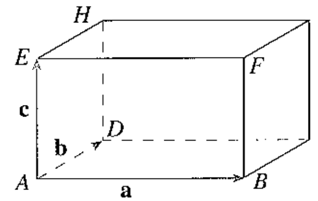
a) $\mathbf{Fs} = F\cdot s\cdot\cos180° = -0{,}14$ (joule).

b) A két merőleges vektor skaláris szorzata 0.

c) $\mathbf{Fs} = F\cdot s\cdot\cos45° \approx 0{,}099$ (joule).

d) $\mathbf{Fs} = F\cdot s\cdot\cos135° \approx -0{,}099$ (joule).

2164. $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$;
$\overrightarrow{AF} = \mathbf{a}+\mathbf{c}$;
$\overrightarrow{AH} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$;
$\overrightarrow{AG} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.



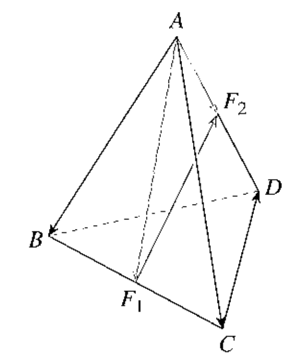
2165. a) Az ABC háromszög súlypontjába mutató vektor $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$.

b) A téglatest P-ből kiinduló testátlójának végpontjába az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektor mutat, a testátló P-hez közelebbi harmadoló pontjába pedig az $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$ vektor mutat.

Figyelembe véve az a) feladat eredményét beláttuk, hogy a P-ből kiinduló testátló P-hez közelebbi harmadoló pontja megegyezik az ABC háromszög súlypontjával. Ebből következik, hogy az ABC háromszög síkja a téglatest P-ből kiinduló testátlójából a harmadát vágja le.

2166. Az ábra jelöléseit használva:
$\overrightarrow{AF_1} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AF_2} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})$.

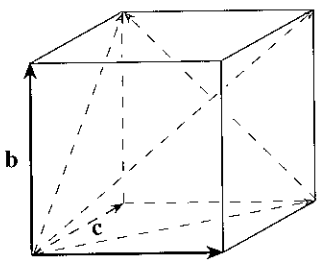
A kérdéses vektor:
$\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{AF_2}-\overrightarrow{AF_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



2167. a) Pl. $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{c}$. (Lásd az ábrát.)

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{c})+\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

c) Pl. $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}-\mathbf{c}$ három olyan lapátló, amelyek összege 0. (Lásd az ábrát.)



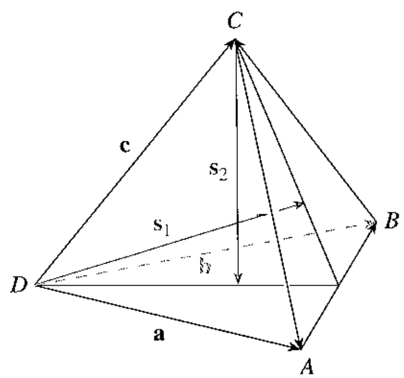
2168. a) Mivel $\mathbf{c}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re is, ezért merőleges e két vektor összegére, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$-re is. Így $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=0$.

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2+\mathbf{ac}+\mathbf{bc}=0+1+0+0=1$.
(Egységkockáról van szó, így $\mathbf{b}$ hossza: 1. A másik három tagban merőleges vektorok skaláris szorzata van, ami 0.)

c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{c})=\mathbf{a}^2+\mathbf{ba}+\mathbf{ca}-\mathbf{ac}-\mathbf{bc}-\mathbf{c}^2=1+0+0-0-0-1=0$.
(Ez úgy is kijött volna, ha belátjuk, hogy a megfelelő testátló és lapátló merőlegesek. Az elemi geometriai bizonyítás volna.)

2169. a) Az ábra szerinti betűzéssel keressük:
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ oldalvektorokat.
$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$; $\overrightarrow{CA}=\mathbf{a}-\mathbf{c}$.
(A három összege, mivel záródnak, a $\mathbf{0}$.)

b) Ismert, hogy a háromszög súlypontjába mutató helyvektor a háromszög csúcsaiba mutató helyvektorok „számtani középével" egyenlő.
Ha tehát $\mathbf{s}_1$ a tetraéder D csúcsából a szemközti ABC háromszög súlypontjába mutató helyvektor (és egyben a tetraéder egyik súlyvonalvektora), akkor: $\mathbf{s}_1=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$.



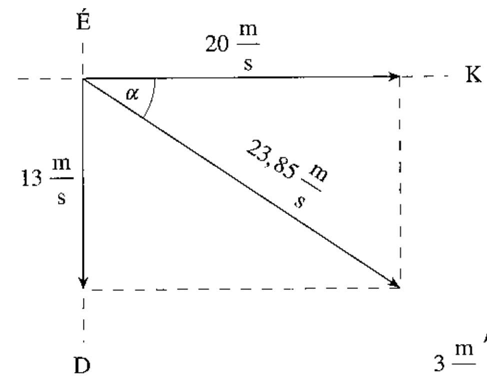
Ha $\mathbf{s}_2$ a tetraéder C csúcsából a szemközti ABD háromszög súlypontjába mutató helyvektor, akkor: $\mathbf{s}_2=\dfrac{(\mathbf{a}-\mathbf{c})+(\mathbf{b}-\mathbf{c})+(-\mathbf{c})}{3}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-3\mathbf{c}}{3}$.
Az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy a B csúcsból a szemközti ACD háromszög súlypontjába mutató helyvektor: $\mathbf{s}_3=\dfrac{(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{c}-\mathbf{b})+(-\mathbf{b})}{3}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}-3\mathbf{b}}{3}$,
végül az A-ból a szemközti BCD háromszög súlypontjába mutató helyvektor:
$\mathbf{s}_4=\dfrac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})+(\mathbf{c}-\mathbf{a})+(-\mathbf{a})}{3}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a}}{3}$.

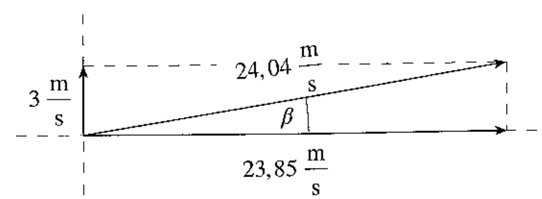
2170. a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{ac}+\mathbf{bc}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ+1\cdot1\cdot\cos60^\circ=0{,}5+0{,}5=1$.

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2+\mathbf{ac}+\mathbf{bc}=0{,}5+1+0{,}5+0{,}5=2{,}5$.
(Felhasználva, hogy bármely két adott egységvektor 60°-os szöget zár be.)

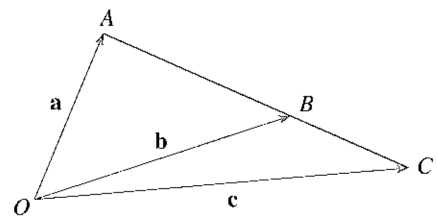
c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{c})=\mathbf{a}^2+\mathbf{ba}+\mathbf{ca}-\mathbf{ac}-\mathbf{bc}-\mathbf{c}^2=$
$=1+0{,}5+0{,}5-0{,}5-0{,}5-1=0$.
(Másik, elemi geometriai okoskodás: az előző feladatból tudjuk, hogy az első vektor éppen az ABC lap súlypontjába mutató vektor háromszorosa. Szabályos tetraéder esetén azonban ez merőleges ABC síkra (testmagasság, mert szabályos a tetraéder) így annak minden egyenesére is. Viszont a másik vektor éppen $\overrightarrow{CA}$ oldalvektor, ami ebben a síkban van, azaz a két vektor merőleges egymásra, tehát a keresett skaláris szorzat értéke 0 kell legyen.)

2171. A gép sebességvektorához a rá ható két hatásvektor összegét kell adni, tehát mivel a nyugat-keleti irányra merőleges az észak-déli, és a felfelé ható áramlás mindkettőre merőleges, ezért az eredő sebességvektor egy téglatest testátlója lesz, amelynek hossza: $\sqrt{20^2+13^2+3^2}=\sqrt{578}\approx24{,}04$, azaz az „eredő sebesség" kb. $24\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ lesz. Az irány pedig kelet-délkelet, valamint „felfelé". Meg kell határozni a kelettel bezárt szöget, amin az eredő sebesség földi merőleges vetülete és a kelet szögét értjük, illetve az emelkedési szöget. Az elsőre $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{13}{20}$, amiből kb. 33,02° adódik, tehát kb. 33°-os szöget zár be haladási iránya a keleti iránnyal (dél felé).
Az emelkedési szögre pedig az ábra szerinti háromszögből: $\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{578}}\approx0{,}1248$, ahonnan $\beta\approx7{,}17°$; azaz kb. 7°-os emelkedési szög adódik.





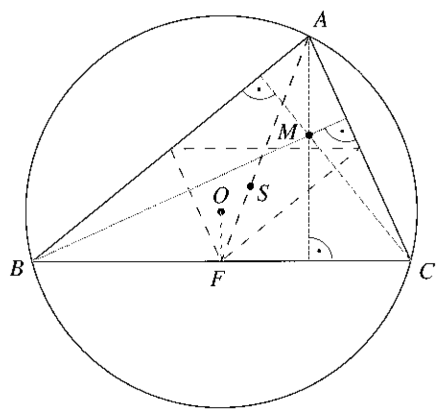
2172. $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} =$
$= \lambda \cdot \mathbf{a} + (\mu - 1) \cdot \mathbf{b}$,
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.



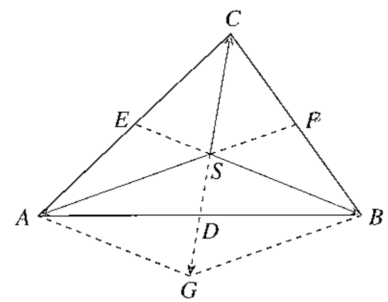
Mivel $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ egyállású vektorok, ezért egyértelműen létezik olyan k valós szám, amelyre $k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, azaz $k \cdot \mathbf{b} - k \cdot \mathbf{a} = (\mu - 1) \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot \mathbf{a}$. A vektorok egyértelmű felbontása szerint ebből $k = \mu - 1$ és $-k = \lambda$ adódik (**a** nem párhuzamos **b**-vel). E két egyenletet összeadva: $0 = \mu - 1 + \lambda$, azaz a bizonyítandó $\lambda + \mu = 1$ összefüggést kapjuk.

Megjegyzés:
A bizonyításban csak azt használtuk fel, hogy A, B és C pontok egy egyenesre illeszkednek, egymáshoz viszonyított helyzetüktől függetlenül igaz az állítás.

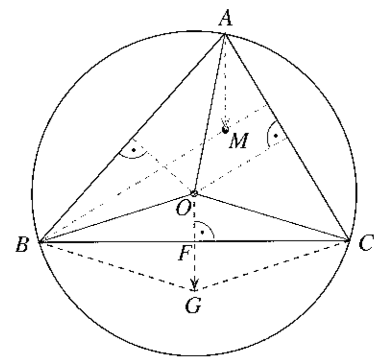
2173. A súlyvonalak harmadolva metszik egymást az S súlypontban. Ezért egy háromszög bármely oldalfelező pontja a szemközti csúcsnak S centrumú, $-0{,}5$ arányú hasonlósággal kapott képe. A háromszög középvonalai alkotta háromszög hasonló az eredetihez, mégpedig az előzőek miatt éppen S centrummal, $-0{,}5$ arányban. (Lásd pl. az 1876. b) megoldás ábráját.) Az eredeti háromszög magasságvonalaiból ugyanezen transzformáció során a középvonal-háromszög magasságvonalai lesznek. Ezek a csúcsokból (vagyis az eredeti háromszög oldalfelező pontjaiból) a szemközti oldalra (azaz középvonalra) bocsátott merőlegesek. Mivel azonban a középvonalak párhuzamosak az oldalakkal, e vonalak egyúttal merőlegesek lesznek az eredeti háromszög oldalaira is. Azonban az oldalra a saját felezőpontjában állított merőleges nem más, mint az oldalfelező merőleges. Ezért a középvonal-háromszög magasságvonalai egyúttal az eredeti háromszög oldalfelező merőlegesei – ekkor metszéspontjuk „funkciója" miatt a középvonal-háromszög magasságpontja az eredeti háromszög köré írható kör középpontja. Tehát O az M-nek S centrumú, $-0{,}5$ arányú hasonlósággal kapott képe. (*Megjegyzés:* tehát minden háromszögben M, S, O egy egyenesre esik – ezt nevezik Euler-egyenesnek –, és $MS = 2SO$.) Mivel e hasonlóság során A képe F, és M képe O, természetesen $AM \parallel FO$, és $AM = 2FO$. (A párhuzamosság onnan is könnyen belátható, hogy mindkettő merőleges a BC oldalra.) A szakaszok megfelelő irányítása miatt ekkor az is igaz, hogy $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OF}$.



2174. a) Határozzuk meg először az $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$ összeget! A paralelogramma-szabály szerint kapott vektorra igaz, hogy $\overrightarrow{SG} = 2\overrightarrow{SD}$, hiszen az $AGBS$ paralelogramma átlói felezik egymást. Azonban a súlypontnak a súlyvonalakat harmadoló tulajdonsága miatt $-2\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SC}$ is igaz, de ekkor $-\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SC}$, és így a keresett három vektor összege: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SG} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SG} - \overrightarrow{SG} = \mathbf{0}$, vagyis nullvektor.

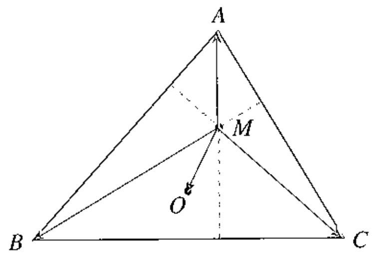


b) Határozzuk meg először az $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ összeget! A paralelogramma-szabály szerint kapott vektorra igaz, hogy $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OF}$, hiszen az $OBGC$ paralelogramma (sőt, most rombusz) átlói felezik egymást. Azonban $2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AM}$, amint az a 2173.-as megoldásban látható. Így a keresett három vektor összege:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG} =$
$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$, vagyis a körülírt kör középpontjából a magasságpontba mutató vektor.

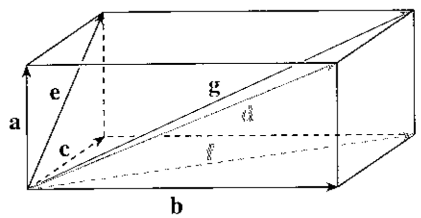


Másik megoldás:
A körülírt kör O középpontjából a háromszög csúcsaiba mutató vektorok legyenek **a**, **b**, **c**. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$.
Tekintsük az $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektort! (*)
Belátjuk, hogy X a háromszög magasságpontja.
Bizonyítás: $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (*)-ból
$\overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$
$\mathbf{x} - \mathbf{a} \perp \overrightarrow{CB}$, mert $(\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2 = 0$.
Így $X \in m_a$. Ugyanígy X illeszkedik a másik két magasságvonalra is, tehát X a háromszög magasságpontja.

c) Mindhárom vektort bontsuk fel két vektor összegére, amelyekből az első mindig $\overrightarrow{MO}$ legyen!
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} +$
$+ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} =$
$= 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
A három utóbbi vektor összege azonban az előző pont szerint $\overrightarrow{OM}$, azaz $-\overrightarrow{MO}$, így a keresett összeg $2\overrightarrow{MO}$ – azaz a magasságpontból a körülírt kör középpontjába mutató vektor kétszerese.



2175. A három oldalél-vektor közül bármely kettő összege egy-egy lapátló-vektor:
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{d}$, $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{e}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{f}$,
és mindhármuk összege maga a testátló-vektor: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{g}$.
Ezért a hét vektor összege: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f} + \mathbf{g} =$
$= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 4\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 4\mathbf{c} =$
$= 4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 4\mathbf{g}$, vagyis a testátló irányába mutat, és négyszer akkora, mint a testátló-vektor.



4.4. Trigonometria

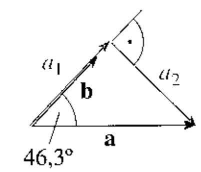
2176. Ha $\cos\alpha = 0{,}34$,
akkor $\alpha = 70{,}12° + k \cdot 360°$ vagy $289{,}88° + n \cdot 360°$, $k, n \in \mathbf{Z}$.
Ha $\cos\alpha = -0{,}7245$,
akkor $\alpha = 136{,}43° + k \cdot 360°$ vagy $223{,}57° + n \cdot 360°$, $k, n \in \mathbf{Z}$.
Ha $\cos\alpha = 0{,}8760$,
akkor $\alpha = 28{,}84° + k \cdot 360°$ vagy $331{,}16° + n \cdot 360°$, $k, n \in \mathbf{Z}$.
Ha $\cos\alpha = 1{,}000$, akkor $\alpha = 0° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbf{N}$. (Ez csak akkor megoldás, ha feltesszük, hogy a megadott érték pontos, vagy felfelé kerekített. Ha lefelé kerekítéssel jött létre, akkor nincs megoldás, ti. $|\cos\alpha| \le 1$, ahol $\alpha \in \mathbf{R}$).

2177. Ha $\sin\alpha = 0{,}8$, akkor $\alpha = 53{,}13° + k \cdot 360°$ vagy $126{,}87° + n \cdot 360°$, $k, n \in \mathbf{Z}$.
Ha $\sin\alpha = -0{,}6742$,
akkor $\alpha = 222{,}39° + k \cdot 360°$ vagy $317{,}61° + n \cdot 360°$, $k, n \in \mathbf{Z}$.
Ha $\sin\alpha = -0{,}7$, akkor $\alpha = 224{,}43° + k \cdot 360°$ vagy $315{,}57° + n \cdot 360°$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

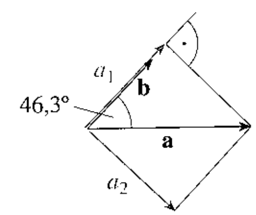
2178. Ha $\cos\alpha = 0{,}8$, akkor $\alpha = 36{,}87° + k \cdot 360°$ vagy $323{,}13° + n \cdot 360°$, $k, n \in \mathbf{Z}$.
Ha $\cos\alpha = 0{,}564$, akkor $\alpha = 55{,}67° + k \cdot 360°$ vagy $304{,}33° + n \cdot 360°$, $k, n \in \mathbf{Z}$.
Ha $\cos\alpha = -0{,}2136$,
akkor $\alpha = 102{,}33° + k \cdot 360°$ vagy $257{,}67° + n \cdot 360°$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

2179. Ha $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$, akkor $\alpha = 63{,}43° + n \cdot 180°$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.
Ha $\mathrm{tg}\,\alpha = 3{,}568$, akkor $\alpha = 74{,}34° + n \cdot 180°$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.
Ha $\mathrm{tg}\,\alpha = -0{,}245$, akkor $\alpha = 166{,}23° + n \cdot 180°$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

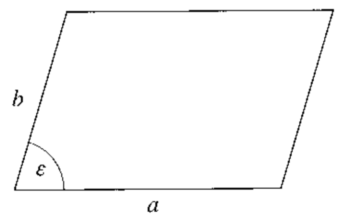
2180. $|\mathbf{a}| = 8{,}2$ cm, $|\mathbf{b}| = 5{,}6$ cm, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle = 46{,}3°$.
Az **a** vektornak a **b** vektorral párhuzamos összetevője
$a_1 = 8{,}2 \cos 46{,}3° \approx 5{,}665$
a **b** vektorra merőleges összetevője
$a_2 = 8{,}2 \sin 46{,}3° \approx 5{,}928$.

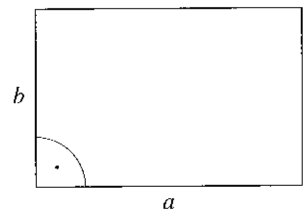


Tehát az **a** összetevőinek hossza:
$a_1 \approx 5{,}7$ cm, $a_2 \approx 5{,}9$ cm.

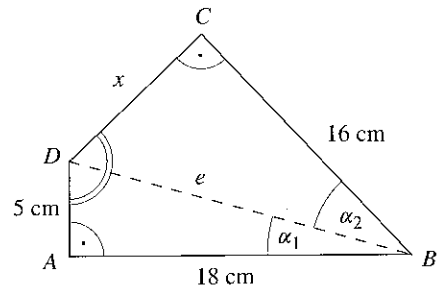


2181. A paralelogramma területe $T_1 = ab\sin\varepsilon$, a téglalap területe $T_2 = ab$.
A feltétel szerint $3T_1 = T_2 \Rightarrow \sin\varepsilon = \frac{1}{3}$, mivel $\varepsilon < 90°$, így a paralelogramma hegyesszöge $19°28'$.





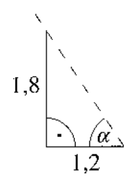
2182. A BAD derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $e^2 = 5^2 + 18^2 = 349$;
a BCD derékszögű háromszögből ugyancsak Pitagorasz-tétellel:
$x^2 = e^2 - 16^2 = 349 - 256 = 93$.
Tehát $x = \sqrt{93} \approx 9{,}64$ (cm) $(x > 0)$.
$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{5}{18} \approx 0{,}2778 \Rightarrow \alpha_1 \approx 15{,}53°$;
$\mathrm{tg}\,\alpha_2 \approx \frac{9{,}64}{16} \approx 0{,}6025 \Rightarrow \alpha_2 \approx 31{,}07°$.



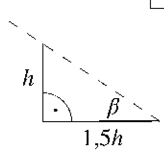
A négyszög B csúcsánál fekvő belső szöge $\alpha_1 + \alpha_2 \approx 46{,}6°$, a D csúcsnál fekvő szög pedig kb. $180° - 46{,}6° = 133{,}4°$.

2183. Jelöljük a-val a háromszög rövidebbik, b-vel a hosszabbik befogóját. Ekkor a területek egyenlősége $\frac{1}{2}ab = a^2$ alakban írható fel, így $b = 2a$.
Legyen α az a-val szemközti szög és β a b-vel szemközti szög. Ezekkel a jelölésekkel $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, így $\alpha \approx 27°$ és $\beta = 90° - \alpha \approx 63°$.
Tehát a háromszög szögei: 27°, 63°, 90°.

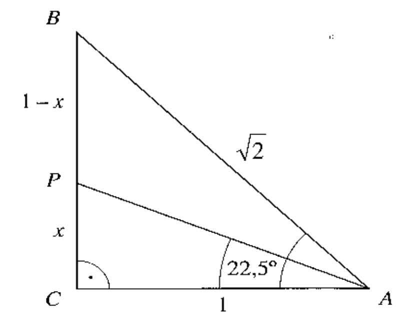
2184. a) Az ábra szerint a keresett szögre:
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1{,}8}{1{,}2} = 1{,}5$, azaz $\alpha \approx 56{,}3°$, azaz ebben a szögben érkeznek a Földre a Nap sugarai esetünkben.



b) Ismét az ábra szerint, most $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{h}{1{,}5h} = \frac{2}{3}$,
ahonnan $\beta \approx 33{,}7°$. Tehát ilyenkor a Nap sugarai már csak 33,7°-os szögben érkeznek.



2185. a) Tudjuk, hogy $x < 1$. A szögfelezőtétel szerint: $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Ezzel ekvivalensek a következők:
$x\sqrt{2} = 1 - x$
$x(\sqrt{2} + 1) = 1$
$x = \sqrt{2} - 1$.
Tehát $PC = \sqrt{2} - 1$ és $PB = 2 - \sqrt{2}$.



b) Pitagorasz-tétellel:
$AP^2 = x^2 + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$;
$AP = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

c) $\mathrm{tg}\,22{,}5° = \frac{x}{1} = \sqrt{2} - 1$; $\mathrm{ctg}\,22{,}5° = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$;

$\sin 22{,}5° = \frac{x}{AP} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$.

Próbáljuk meg egyszerűbb alakban felírni úgy, hogy a tört négyzetét átalakítjuk:

$$\sin^2 22{,}5° = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\right)^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})}{16 - 8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Mivel $\sin 22{,}5° > 0$, ezért $\sin 22{,}5° = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

$\cos^2 22{,}5° = 1 - \sin^2 22{,}5° = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$, tehát $\cos 22{,}5° > 0$ miatt

$\cos 22{,}5° = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Összefoglalva: $\mathrm{tg}\,22{,}5° = \sqrt{2} - 1$; $\mathrm{ctg}\,22{,}5° = \sqrt{2} + 1$;

$$\sin 22{,}5° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2};\quad \cos 22{,}5° = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Megjegyzés:

Ha észrevesszük, hogy $\sin 22{,}5° = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}}$,

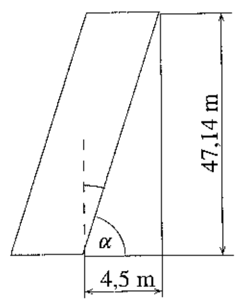
akkor ebből azonnal adódik, hogy $\sin 22{,}5° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$, így $\cos 22{,}5°$ gyorsabban meghatározható.

2186. Ha a lejtő 12%-os, akkor a megadott meghatározás szerint a lejtő emelkedési szögére igaz: tg α = 0,12, vagyis $\alpha \approx 6{,}84°$. Ha 6,2 km hosszan haladt lefelé, akkor ez a lejtő hossza, egy derékszögű háromszög átfogója, kérdés a tengerszint irányába való h elmozdulás, ami a háromszög α-val szemközti befogója: $\sin\alpha = \dfrac{h}{6{,}2\ \text{km}}$, ahonnan h = 6,2 km · sin 6,84° ≈ 0,739 km, azaz 739 métert haladt lefelé (vélhetően egy komolyabb hágóról).

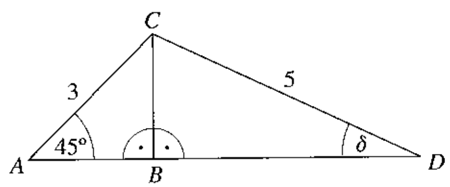
2187. 2°36' = 2,6°
tg 2,6° ≈ 0,0454
A lejtő emelkedése kb. 4,5%-os.

2188. Ha a térképen az egyenes út hossza 13 mm, akkor a megadott lépték alapján a valóságban ez 13 · 30 000 = 390 000 (mm = 390 m). Ha az autó valójában 400 m-t tett meg, akkor az emelkedésre adódik, hogy a 400 m merőleges vetülete 390 m. Innen $\cos\alpha = \dfrac{390}{400} = 0{,}975$, ahonnan $\alpha \approx 12{,}84°$, azaz ez az emelkedés szöge. tg α = 0,228, ami 22,8%-os emelkedést jelentene. Ennyi biztosan nincs, tehát pontatlan lehetett a mérés.

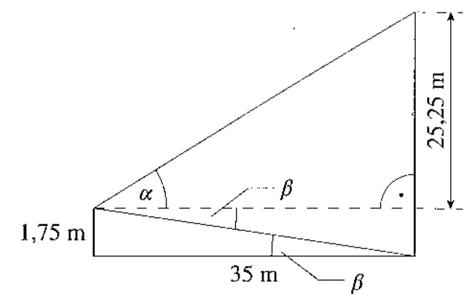
2189. A kő 3,1 s alatt esett le, ezért a megtett útja:
$s = \dfrac{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (3{,}1\ \text{s})^2 \approx 47{,}14$ m. Ekkor az ábra alapján $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{47{,}14}{4{,}5} \approx 10{,}475$, ahonnan a szög kb. 84,5°-os, vagyis a függőlegestől való eltérése ennek kiegészítő szöge: 5,5°. Azaz a torony kb. 5,5°-ot dől a függőlegeshez képest.



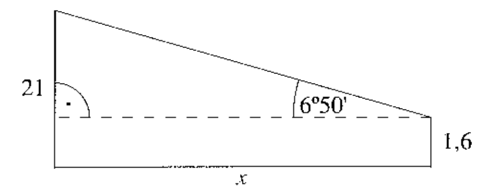
2190. A hegy magassága az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ km.
A déli lejtő alapsíkkal bezárt szöge a BDC derékszögű háromszög D-nél levő δ szöge, amelyre $\sin\delta = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{5} = \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$, így $\delta \approx 25°$.



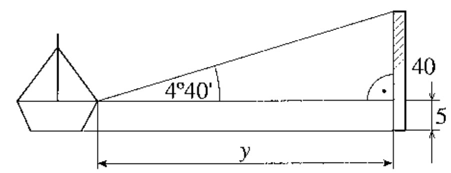
2191. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{25{,}25}{35} \approx 0{,}7214 \Rightarrow \alpha \approx 35{,}8°$
$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1{,}75}{35} = 0{,}05 \Rightarrow \beta \approx 2{,}9°$
A kérdezett látószög $\alpha + \beta \approx 38{,}7°$.



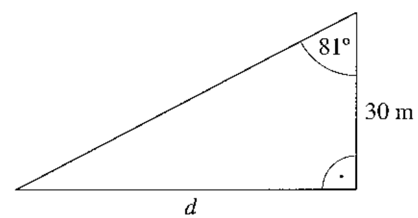
2192. Az épülettől való távolságunk x méter.
$\operatorname{tg} 6°\,50' = \dfrac{19{,}4}{x} \Rightarrow x = \dfrac{19{,}4}{\operatorname{tg} 6{,}833°}$.
Az épülettől való távolság kb. 162 m.



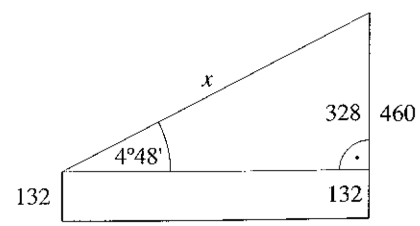
2193. A hajó a parttól (a világítótorony aljától) y méter távolságra van.
$\operatorname{tg} 4°\,40' = \dfrac{35}{y} \Rightarrow y = \dfrac{35}{\operatorname{tg} 4°\,40'} \approx 428{,}8$
A hajó a parttól kb. 429 méter távol van.



2194. A folyó $d = 30 \cdot \operatorname{tg} 81° \approx 189{,}4$ méter széles.

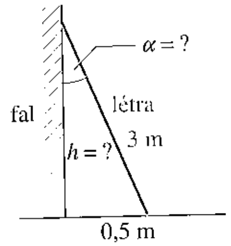


2195. A pálya hosszúsága x méter.
$\sin 4°\,48' = \dfrac{328}{x} \Rightarrow x \approx 3919{,}8$
A fogaskerekű pályájának hossza kb. 3920 méter.

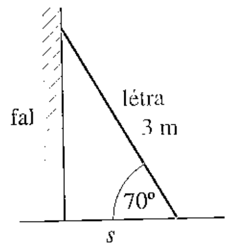


2196. a) Az ábra szerint $\sin\alpha = \frac{0,5}{3}$, ahonnan $\alpha \approx 9,6°$.

Tehát a létra a fallal 9,6°-os szöget zár be.



b) Az ábra szerinti h érték a kérdés. Lehet szögfüggvénnyel is számolni, vagy a Pitagorasz-tétellel: $h^2 = 9 - 0,25 = 8,75$, amiből $h \approx 2,96$ m. Azaz alig rövidebb, mint a létra hossza. Ez nagyon meredek helyzet; igaz, biztosan nem csúszik ki a létra lába.



c) Legyen a létra alja s távolságban a faltól.
Ha legalább 70° a talajjal bezárt szög, akkor
$\cos 70° = \frac{s}{3}$, ahonnan $s \approx 1,03$ m. Vagyis legfeljebb kb. 1 méterre lehet a létra alja a faltól, különben fellép a kicsúszás veszélye.

2197. A legnagyobb távolság egy téglalap alakú helységben a testátló, tehát a horgászbotot legfeljebb $\sqrt{25+16+9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ méterre lehet kinyitni. Ekkor a falsíkokkal bezárt szöge a kérdés. A falsíkokra való vetületével bezárt szöge adja a választ, tehát meg kell határozni a három lapátló hosszát: (1) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$; (2) $\sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5,83$; (3) $\sqrt{25+16} = \sqrt{41} \approx 6,4$;
majd ezután a három különböző szög koszinuszára adódik:

(1) $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{50}}$, ebből $\alpha = 45°$;

(2) $\cos\beta = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{50}}$, ebből $\beta \approx 34,45°$;

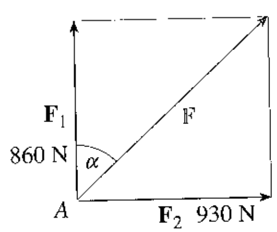
(3) $\cos\gamma = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{50}}$, ebből $\gamma \approx 25,10°$.

Azaz a testátló irányú horgászbotnak a három lappal bezárt szöge rendre a kiszámolt 45°, 34,45° és 25,10°.

2198. Az egymásra merőleges $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ téglalapot „feszít" ki. Ennek a közös kezdőpontból, A-ból induló átlója az eredővektor, $\mathbf{F}$.
Hosszát Pitagorasz-tétellel számítjuk ki.

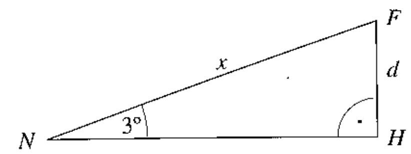
$|\mathbf{F}|^2 = 860^2 + 930^2 \Rightarrow |\mathbf{F}| \approx 1266,7$ N

$\cos\alpha = \frac{860}{1266,7} \approx 0,6789 \Rightarrow \alpha \approx 47,24°$



2199. a) $\frac{d}{x} = \sin 3° \Rightarrow \frac{x}{d} = \frac{1}{\sin 3°} \approx 19,1$

Arisztarkhosz szerint tehát a Föld—Nap távolság 19,1-szer akkora, mint a Föld—Hold távolságnál.

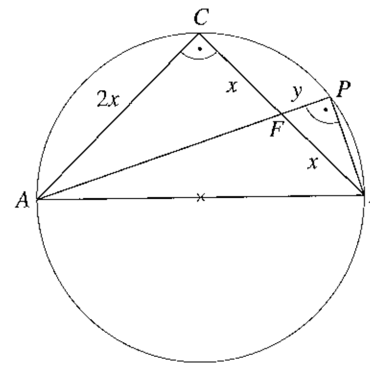


b) $19,1 \cdot 384\,000 \approx 7,33 \cdot 10^6$ km, azaz kb. 7,3 millió km.

c) A kérdéses szöget α-val jelölve $\sin\alpha = \frac{d}{x} = \frac{3,84 \cdot 10^5}{1,5 \cdot 10^8}$ 0,0026, amiből $\alpha = 0,15°$ (tehát igen kicsi szögről van szó, amit nehéz pontosan megmérni).

2200. ACB egyenlő szárú háromszög, így $AC = BC$, F felezőpont (súlyvonal miatt), így $AC = 2CF = 2x$, ACF derékszögű háromszögre Pitagorasz-tétel miatt $x^2 + (2x)^2 = AF^2 \Rightarrow AF = x\sqrt{5}$. Thalész tétele miatt APB derékszögű háromszög, $ACF\,\Delta \sim BPF\,\Delta$, mert kétkét szögük egyenlő (derékszög, F-nél levő csúcsszögek) $\Rightarrow$ megfelelő oldalainak aránya egyenlő.

$\frac{AC}{CF} = \frac{PB}{PF} = \frac{2}{1} \Rightarrow PF = y,\ PB = 2y,$



$FB = y\sqrt{5}$. Mivel F felezőpont, $FB = x = y\sqrt{5} \Rightarrow AP = AF + FP = x\sqrt{5} + y = (y\sqrt{5})\sqrt{5} + y = 6y = 3PB$.

2201. Mivel minden α szögre $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.
Behelyettesítve:

a) $\cos\alpha = \pm 0,6$; b) $\cos\alpha = \pm 0,8$; c) $\cos\alpha = \pm 1$; d) ilyen szög nincs.

2202. Mivel minden α szögre $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.
Behelyettesítve:

a) $\sin\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) $\sin\alpha = 0$; c) $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) ilyen szög nincs.

2203. Mivel minden α szögre $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.
Továbbá (olyan szögekre, amelyekre létezik) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$.
Behelyettesítve:

a) $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{4}{3}$; b) $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2204. a) Mivel $\cos 17° = \sin 73°$ és $\sin 17° = \cos 73°$, ezért
$\cos 17° \cdot \sin 73° + \cos 73° \cdot \sin 17° = \sin 73° \cdot \sin 73° + \cos 73° \cdot \cos 73° =$
$= \sin^2 73° + \cos^2 73° = 1$. (Más megoldási lehetőség: a megfelelő addíciós képlet alapján $\cos 17° \cdot \sin 73° + \cos 73° \cdot \sin 17° = \sin(73° + 17°) = \sin 90° = 1$.)

b) A tört értéke $\operatorname{tg} 135° = -1$, $\cos^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ és $\operatorname{tg}^2 30° = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

Ezeket felhasználva a különbség értéke $-1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{4}$.

Megjegyzés:

$\cos^2 30° \cdot \operatorname{tg}^2 30° = \sin^2 30° = \frac{1}{4}$ felhasználásával gyorsabban is célhoz érhetünk.

c) Mivel $1 + \operatorname{ctg} 135° = 1 - 1 = 0$, ezért a négytényezős szorzat értéke is 0.

2205. a) $3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + (-1) + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - 2$.

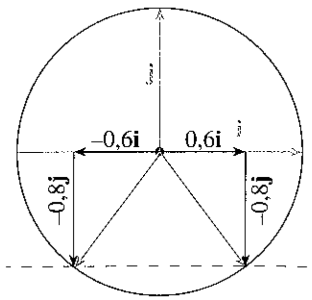
b) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$, tehát
$\cos\alpha = 0{,}6$ vagy $\cos\alpha = -0{,}6$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, amiből

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, vagy $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, amiből

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$, vagy $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$.



c) $\cos^2 20° \cdot \operatorname{tg}^2 20° = \sin^2 20° = \cos^2 70°$ és $\operatorname{ctg} 50° \cdot \operatorname{tg} 50° = 1$ felhasználásával az összeg így írható: $\cos^2 70° + 1 + \sin^2 70°$.
Mivel $\cos^2 70° + \sin^2 70° = 1$, ezért az összeg pontosan 2-vel egyenlő.

2206. a) $\dfrac{3 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4$.

b) Mivel $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ és $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, bármekkora szög is az α, így $\cos 75° = \sin 15°$ és $\sin 75° = \cos 15°$; továbbá az $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ azonosság felhasználásával a kifejezés a következőképpen alakítható át:
$(1 - \sin 15°)(1 + \sin 15°) + \cos 15° \sin 15° \cos 15° =$
$= 1 - \sin^2 15° + \cos^2 15° \sin 15° = 1 - \sin^2 15° + (1 - \sin^2 15°)\sin 15° =$
$= (1 - \sin^2 15°)(1 + \sin 15°)$.

A megadott értéket behelyettesítve:

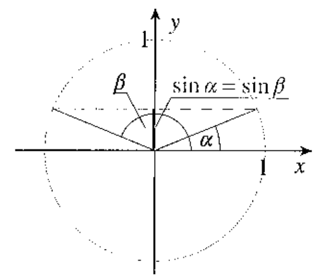
$$\left[1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2\right] \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{8 + \sqrt{6} + \sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{16}.$$

2207. Ha $\operatorname{tg}\alpha > 0$, így α az I. és a III. síknegyedben lehet, tehát szinusza és koszinusza egyaránt lehet pozitív és negatív is (azonos előjelűek).

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 0{,}4$; $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = 0{,}8621 \Rightarrow \sin\alpha = \pm 0{,}9285$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}1379 \Rightarrow \cos\alpha = \pm 0{,}3713$

2208. Mivel $\cos\varepsilon = \sin(90° - \varepsilon)$, ezért
$\sin 4\alpha = \sin[90° - (\alpha - 10°)]$.
Általánosan: $\sin\alpha = \sin\beta$, ha
$\alpha = \beta + k \cdot 360°$ ($k \in \mathbf{Z}$) vagy
$\alpha + \beta = 180° + n \cdot 360°$ ($n \in \mathbf{Z}$).
Így $4\alpha = 100° - \alpha + k \cdot 360°$ ($k \in \mathbf{Z}$) $\Rightarrow$
$\alpha = 20° + k \cdot 72°$ ($k \in \mathbf{Z}$) vagy
$4\alpha + 100° - \alpha = 180° + n \cdot 360°$ ($n \in \mathbf{Z}$) $\Rightarrow$
$\alpha = 26{,}7° + n \cdot 120°$ ($n \in \mathbf{Z}$).
Mivel a feltétel szerint α hegyesszög, ezért $\alpha_1 = 20°$, $\alpha_2 = 26{,}7°$.



2209. $\cos 72° = \cos(2 \cdot 36°) = \cos^2 36° - \sin^2 36° = \cos^2 36° - (1 - \cos^2 36°) =$
$= 2\cos^2 36° - 1$.

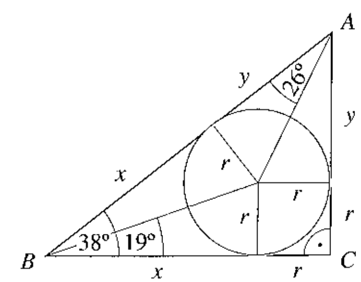
Ezt felhasználva: $\cos 72° = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{2\sqrt{5} - 2}{8} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

A letakart részen $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ áll.

2210. Az ábra jelölései alapján $\beta = 38°$.
A beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja.
Az érintési pontoknak a csúcsoktól mért távolsága x, y, r.

$\frac{r}{x} = \operatorname{tg} 19° \Rightarrow x = \frac{r}{\operatorname{tg} 19°} \approx 17{,}4$

$\frac{r}{y} = \operatorname{tg} 26° \Rightarrow y = \frac{r}{\operatorname{tg} 26°} \approx 12{,}3$



$a = x + r \approx 23{,}4$; $b = y + r \approx 18{,}3$; $c = x + y \approx 29{,}7$

Másik megoldás:

A szokásos jelöléssel a derékszögű háromszögbe írható kör sugara $r = \frac{a+b-c}{2}$

(a képlet a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján – lásd az 1697. a) feladat megoldását – bizonyítható).

Ha az $a > b$ és a befogókat a megadott szöggel, és az átfogóval kifejezzük,

$a = c \cdot \sin 52°$; $b = c \cdot \cos 52°$ és ezeket beírjuk a megadott egyenletbe

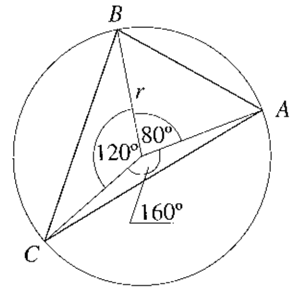
$12 = c(\sin 52° + \cos 52° - 1) \Rightarrow c = 29{,}7$ cm; $a = 23{,}4$ cm; $b = 18{,}3$ cm.

2211. A derékszögű háromszögben a szokásos jelöléseket bevezetve, a feltétel miatt

$a + b = c + 5$ (ha $a > b$).

$a = c \cdot \sin 70°$; $b = c \cdot \cos 70° \Rightarrow c = 17{,}7$ cm; $a = 16{,}6$ cm; $b = 6{,}1$ cm hosszúságúak a háromszög oldalai.

2212. A kör kerületének felosztásával nyert A, B és C pontokat összekötjük a kör O középpontjával is. Az így nyert középponti szögek aránya is $2:3:4$. Egy részre így $\frac{360°}{9}$ jut, azaz a szögek 80°, 120° és 160°-osak.

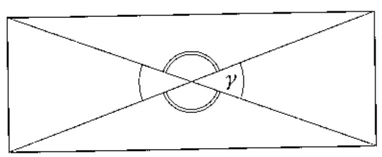


Az ABC Δ T területét a kapott 3 kis háromszög területének összegeként kapjuk a $t = \frac{ab\sin\gamma}{2}$ képlet alapján. Kiemelve a közös tényezőt:

$$T = \frac{r^2}{2}(\sin 80° + \sin 120° + \sin 160°) \approx \frac{25}{2} \cdot 2{,}1929 \approx 27{,}41.$$

Az ABC Δ területe $T \approx 27{,}41$ cm².

2213. A négyzet (mint rombusz!) területe kiszámítható az átlók szorzatának feleként is. Vagyis ekkor a négyzet (és a téglalap) területe $\frac{15^2}{2} = 112{,}5$ (cm²).

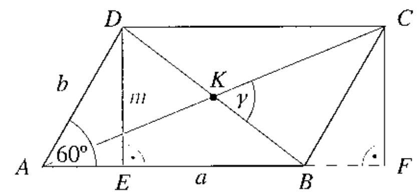


A téglalapot átlói négy azonos területű háromszögre bontják. Ugyanis mindegyik egyenlő szárú (a szárak hossza az átló fele), és a szárszögek egyenlők (szemközti háromszögek), illetve kiegészítők (szomszédos háromszögek). Ekkor a $T = \frac{ab\sin\gamma}{2}$ képlet alapján – és mivel kiegészítő szögek szinusza azonos – mind a négy esetben ugyanazt az eredményt kapjuk. (Vagy másképpen: a téglalapot az átlója felezi, hiszen két egybevágó részre bontja; a másik átló pedig mindkét darabot tovább felezi, mivel súlyvonala a két háromszögnek. Ezért négy egyenlő területű háromszöget kapunk.) Egy ilyen háromszög területe most $\frac{112{,}5}{4} = 28{,}125$, és az idézett képlet szerint $\frac{\left(\frac{27}{2}\right)^2 \sin\gamma}{2}$ módon számolható, ahol γ épp a keresett szög, az átlók hajlásszöge. Kapjuk tehát, hogy $\sin\gamma = \frac{2 \cdot 28{,}125}{13{,}5^2} \approx 0{,}3086$, amiből $\gamma \approx 17{,}98°$ (a visszakeresés egyéb lehetséges eredményei most nem jöhetnek szóba).

2214. Ha a paralelogramma oldalai a és b, az előbbihez tartozó magassága m, akkor $K = 2(a + b) = 20$ és $T = am = 12\sqrt{3}$.

A 60°-os szög miatt fennáll még:

$m = b\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$



Egyszerűsítések után két egyenletünk ekkor: $a + b = 10$ és $ab = 24$. A Viète-formulák miatt ekkor a és b a következő másodfokú egyenlet gyökei: $x^2 - 10x + 24 = 0$. (Megoldható a fenti két egyenletből álló egyenletrendszer pl. a behelyettesítő módszerrel, de abból két lépés után ugyanerre az egyenletre jutunk.) Megoldva az egyenletet (vagy akár csak jobban ránézve: két olyan számot keresünk, amelyek összege 10, szorzata 24) a gyökök 6 és 4, ábránk mérete szerinti betűzésben $a = 6$, $b = 4$. Az AED és a BFC háromszög nevezetes: a 30°-60°-90°-os. Ezért $AE = BF = 2$ (s így $EB = 4$, $AF = 8$) és $m = DE = CF = 2\sqrt{3}$. A paralelogramma átlói most már meghatározhatók, mint derékszögű háromszögek átfogói.

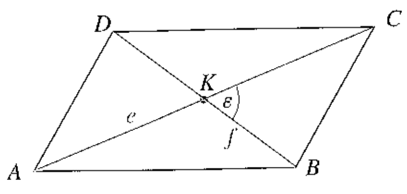
(Persze az oldalak és azok szögének ismeretében akár koszinusztétellel is, de éppen azt mutatjuk meg, hogy erre az ismeretre nincs szükség a feladat megoldásához.)

A DEB Δ-ből: $DB = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}(\approx 5{,}29)$,

az AFC Δ-ből: $AC = \sqrt{8^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}(\approx 8{,}72)$.

A paralelogramma átlói felezik egymást és a paralelogrammát négy azonos területű háromszögre bontják. (L. az előző feladat megoldását.) Egy ilyen háromszög területe most $\frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}(\approx 5{,}20)$, és a $T = \frac{KB \cdot KC \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{19}\sin\gamma}{2}$ módon számolható, ahol γ épp a keresett szög, az átlók hajlásszöge. Azt kapjuk tehát, hogy $\sin\gamma = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{19}} \approx 0{,}9011$, amiből $\gamma \approx 64{,}31°$ (a visszakeresés egyéb lehetséges eredményei most nem jöhetnek szóba).

2215. Az $ABCD$ paralelogrammát az e és f, egymást K pontban metsző átlója, négy háromszögre bontja. (A szemközti háromszögek egybevágóak.) A szomszédos háromszögek egyenlő területűek, mert pl. az $ABC\,\Delta$ területét a BK súlyvonal felezi. Ezért a négy háromszög területe egyenlő. Alkalmazzuk a 2212-es megoldásban szereplő területképletet.



Ha $(e, f)\sphericalangle = \varepsilon$ ($\le 90°$ az egyenesek hajlásszögének definíciója alapján),

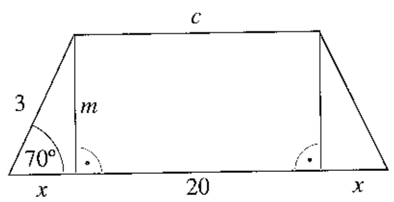
$$T_{CBK} = \frac{\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\sin\varepsilon}{2} = \frac{e\cdot f\cdot\sin\varepsilon}{8}.$$

A paralelogramma területe ennek megfelelően

$$T_{ABCD} = 4T_{CBK} = \frac{e\cdot f\cdot\sin\varepsilon}{2},\quad \sin\varepsilon = \frac{2T_{ABCD}}{ef} = \frac{2\cdot 42}{12{,}2\cdot 9{,}6} \approx 0{,}7172.$$

Az átlók által bezárt szög, $\varepsilon \approx 45{,}8°$.

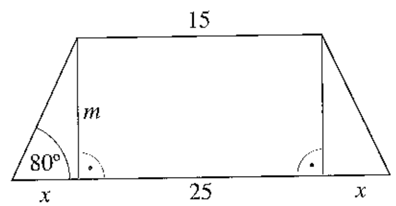
2216. A trapéz magassága
$m = 3\cdot\sin 70° \approx 2{,}82$.
A rövidebbik alap a szimmetria miatt $20 - 2x$, ahol
$x = 3\cdot\cos 70° \approx 1{,}03$.
Ekkor $c \approx 17{,}95$, a trapéz területe pedig



$$T = \frac{a+c}{2}m \approx \frac{20+17{,}95}{2}\cdot 2{,}82 \approx 53{,}49.$$

2217. A hosszabbik alapon fekvő szögek ekkor 80°-osak. A szimmetria miatt x a két alap különbségének fele:

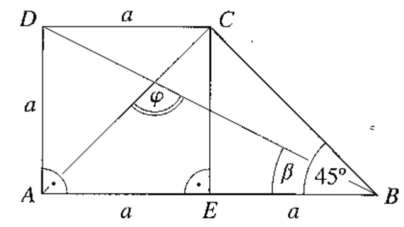
$$x = \frac{25-15}{2} = 5,$$ és a merőlegesség miatt fennáll: $\operatorname{tg} 80° = \frac{m}{5}$.



A trapéz magassága tehát $m = 5\cdot\operatorname{tg} 80° \approx 28{,}36$.

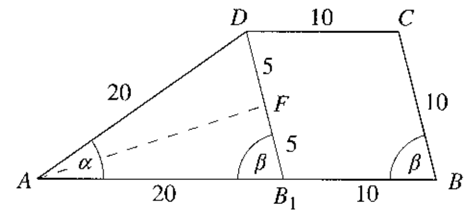
A trapéz területe pedig $T = \dfrac{a+c}{2}m \approx \dfrac{25+15}{2}\cdot 28{,}36 \approx 567{,}1$.

2218. A megadott adatok miatt a trapéz C-ből induló magassága épp felezi az AB alapot. Mivel BCE egyenlő szárú derékszögű háromszög, $AECD$ négyzet, ezért az AC átló az alappal 45°-os szöget zár be. Az ABD derékszögű háromszögben a BD átló alappal bezárt β szögére $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$ az ABD derékszögű háromszögben, így $\beta \approx 26{,}6°$.



Ekkor az átlók által bezárt φ szög $180° - 45° - \beta \approx 108{,}4°$.

2219. Húzzunk párhuzamost a D csúcson keresztül a BC szárral. Ez a trapézt egy 10 cm oldalú rombuszra és egy egyenlő szárú háromszögre (DAB_1) bontja. E háromszög 10 cm hosszú alapjához tartozó magasságát meghúzva olyan derékszögű háromszöget kapunk (AFB_1), amelynek egyik hegyesszöge a trapéz B csúcsánál fekvő szöggel (β), a másik hegyesszöge pedig a trapéz A csúcsánál fekvő szög felével ($\frac{\alpha}{2}$-vel) egyenlő.

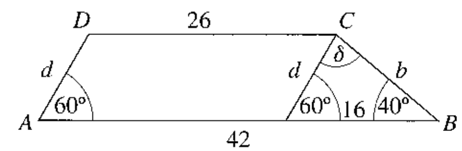


$$\cos\beta = \frac{5}{20} = 0{,}25 \;\Rightarrow\; \beta \approx 75{,}52°.$$

Ebből $\frac{\alpha}{2} = 90° - \beta \approx 14{,}48°$, vagyis $\alpha \approx 28{,}96°$.

A trapéz szögei tehát $\alpha \approx 28{,}96°$, $\beta \approx 75{,}52°$, $180° - \alpha \approx 151{,}04°$ és $180° - \beta \approx 104{,}48°$.

2220. Az AD-t párhuzamosan eltoljuk C-be, ezzel a trapézt egy paralelogrammára és egy háromszögre bontjuk. Ez utóbbinak három adatát ismerjük (egy oldalt és a rajta fekvő két szöget). A harmadik szög (δ) kiszámítása után alkalmazható a szinusztétel. $\delta = 180° - 100° = 80°$.



$$\frac{b}{16} = \frac{\sin 60°}{\sin 80°} \;\Rightarrow\; b = \frac{16\sin 60°}{\sin 80°} \approx 14{,}07;$$

$$\frac{d}{16} = \frac{\sin 40°}{\sin 80°} \;\Rightarrow\; d = \frac{16\sin 40°}{\sin 80°} \approx 10{,}44.$$

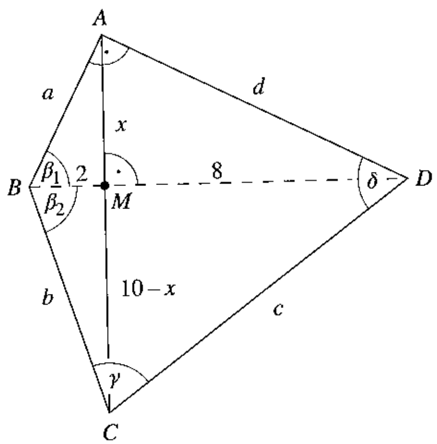
2221. A BAD derékszögű háromszögből magasságtétellel $x = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$, tehát $MA = 4$ cm és $MC = 6$ cm.
Pitagorasz-tétellel is megkaphatjuk az oldalak hosszát:

$a = \sqrt{20} = 4,47$ (cm),

$b = \sqrt{40} = 6,32$ (cm),

$c = \sqrt{100} = 10$ (cm) és

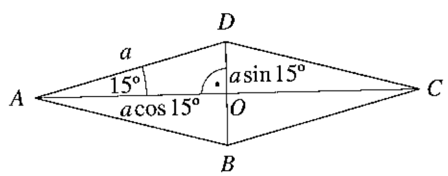
$d = \sqrt{80} = 8,94$ (cm).



A négyszög kerülete tehát
$k = a + b + c + d = 29,73$ (cm).
A négyszög szögei:
tudjuk, hogy $\alpha = 90°$. A β szöget két részletben kapjuk meg: $\mathrm{tg}\,\beta_1 = \frac{x}{2} = \frac{4}{2} = 2$, amiből $\beta_1 = 63,43°$;
$\mathrm{tg}\,\beta_2 = \frac{10-x}{2} = \frac{6}{2} = 3$, így $\beta_2 = 71,57°$. Tehát $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 135°$.
Mivel $BD = CD = 10$ cm, ezért a BDC háromszög egyenlő szárú, ezért a négyszög γ szöge β_2-vel egyenlő: $\gamma = 71,57°$.
Az ACD háromszög is egyenlő szárú ($AC = CD = 10$ cm), ezért $\delta = CAD\sphericalangle$.
A $CAD\sphericalangle$ és β_1 merőleges szárú hegyesszögek, ezért egyenlők: $\delta = \beta_1 = 63,43°$.
A négyszög szögei tehát: $\alpha = 90°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 71,57°$ és $\delta = 63,43°$.
(Ellenőrzés: $90 + 135 + 71,57 + 63,43 = 360$, tehát a megadott szögek lehetnek egy négyszög szögei.)

Megjegyzés:
A négyszög negyedik szögét a négyszög belső szögeinek összegéből is kiszámíthatjuk.

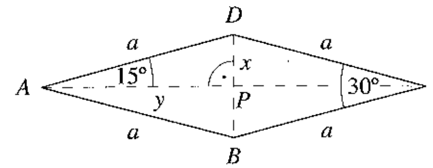
2222. Az ábra alapján a rombusz területe $2a^2 \sin 15° \cos 15°$, ami a feladat szövege szerint 1 cm²-rel egyenlő.



Ezért $a^2 = \frac{1}{2\sin 15° \cos 15°} = 2$ (cm²),
amiből $a > 0$ miatt $a = \sqrt{2} \approx 1,41$ (cm) adódik.

Másik megoldás:
Jelöljük a rombusz oldalát a-val és a hegyesszögét α-val.
Ekkor a területe $T = a^2 \sin \alpha$, az adatokat figyelembe véve:
$a^2 = \frac{1}{\sin 30°} = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$(cm).

2223. A rombusz területe $a^2 \sin 30° = 5 \Rightarrow$
$a \approx 3,2$ cm.
A rombusz átlói szögfelezők, felezik egymást és merőlegesek egymásra, így $PAD\sphericalangle = 15°$.
APD derékszögű háromszögben
$x = a \sin 15° \approx 0,8$ (cm); $y = a \cos 15° \approx 3,1$ (cm).
Tehát a rombusz átlói 1,6 cm illetve 6,2 cm, oldala 3,2 cm hosszú.

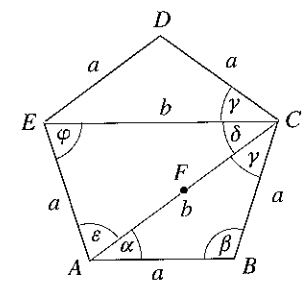


2224. A rombusz átlóit e-vel és f-fel jelölve az

$$\left.\begin{aligned} e + f &= 50 \\ \frac{1}{2}ef &= 560 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer adódik, ennek azonban nincs megoldása, tehát ilyen kert nem létezik.

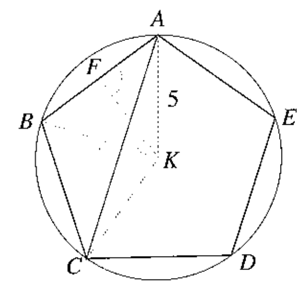
2225. A szabályos ötszög átlói egyenlők.
A szabályos n-szög egy belső szöge $\frac{(n-2)180°}{n}$, ebből kapjuk meg az ötszög belső szögét.
Kétféle egyenlő szárú háromszög keletkezik.



I. Az $ABC\,\Delta$ szögei: $\beta = 108°$, $\alpha = \gamma = 36°$.
Az AC szakasz felezőpontja F. Az ABF derékszögű háromszögből számítható ki b.
$\cos\alpha = \frac{AF}{AB} \Rightarrow AF = AB\cos\alpha = a\cos 36° \Rightarrow$
$AF \approx 0,81a$, $b = 2AF \approx 1,62a$.
Az $ABC\,\Delta$ oldalai a, a, b. Kerülete $2a(1 + \cos 36°) \approx 3,62a$.

II. Az $ACE\,\Delta$ szögei: $\varepsilon = \varphi = 108° - 36° = 72°$, $\delta = 180° - 2\varepsilon = 36°$.
A szögek tehát 72°, 72°, 36°.
Az $ACE\,\Delta$ oldalai a, b, b. Kerülete $a + 2b = a(1 + 4\cos 36°) \approx 4,24a$.

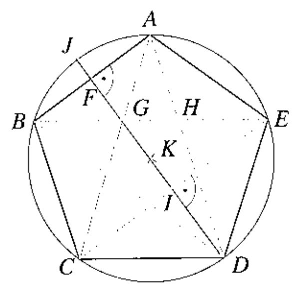
2226. a) A csúcsokba futó sugarak egyenlő szárú háromszögekre bontják az ötszöget, amelyek szára 5 cm, szárszöge pedig $\frac{360°}{5} = 72°$.
A szárszög felezője egyúttal az alap felezőmerőlegese is, így $\sin 36° = \frac{AF}{5}$, amiből az ötszög oldala $AB = 2AF = 10 \cdot \sin 36° \approx 5,88$ (cm). Az ötszög területe az öt egybevágó egyenlő szárú háromszög



területének összege, azaz $T_{\text{ötszög}} = 5\dfrac{5 \cdot 5 \cdot \sin 72^\circ}{2} \approx 59{,}44$ (cm²).

b) A KAC háromszög szintén egyenlő szárú, szárai 5 cm-esek, szárszöge $2 \cdot 72^\circ = 144^\circ$. A KB sugár felezi a szárszöget és (merőlegesen) az AC átlót is. Ekkor

$\sin 72^\circ = \dfrac{\frac{AC}{2}}{5}$, amiből $AC = 10 \sin 72^\circ \approx 9{,}51$ (cm).



c) AK egyenese szimmetriatengelye az ötszögnek, így a csillagnak is. A $KAC\sphericalangle = \dfrac{180^\circ - 144^\circ}{2} = 18^\circ$, ezért $CAD\sphericalangle = 36^\circ$, és a csillag többi hegyesszöge is ekkora. A konkáv szögeit teljesszöggé kiegészítő külső szögek (pl. $AGB\sphericalangle$) pedig csúcsszögei a belül keletkezett kisebb szabályos ötszög szögeinek, amelyek $\dfrac{5-2}{5}180^\circ = 108^\circ$-osak, s így a csillag konkáv szögei $360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$-osak.
(Utóbbiakat onnan is megkaphatjuk, hogy a csillag geometriai értelemben egy konkáv tízszög, amelynek szögösszege $(10-2)180^\circ = 1440^\circ$, ebből az öt hegyesszög $5 \cdot 36^\circ = 180^\circ$-ot tesz ki, a többi 1260°-on pedig az öt konkáv szög osztozik, tehát egy $\dfrac{1260^\circ}{5} = 252^\circ$-os.) A csillag területét megkapjuk, ha a nagy ötszög (az a)-ban már kiszámolt) területéből elhagyjuk az öt egybevágó (pl. AGB) háromszög területét. Az AFG derékszögű háromszögből $\sin 54^\circ = \dfrac{AF}{AG}$, amiből $AG = \dfrac{AF}{\sin 54^\circ} = \dfrac{5 \cdot \sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = 5 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \approx 3{,}63$ (cm). Az AGB egyenlő szárú háromszög területe így $T_{AGB} = \dfrac{AG^2 \cdot \sin 108^\circ}{2} \approx 6{,}28$, a csillag területe pedig $T_{\text{csillag}} = T_{\text{ötszög}} - 5 \cdot T_{AGB} \approx 28{,}06$ (cm²).

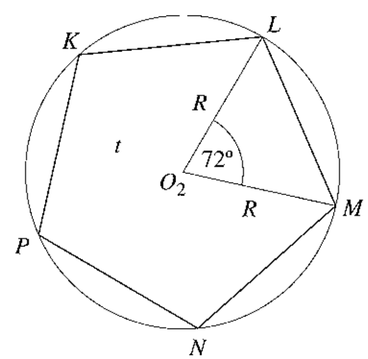
d) Bármely két szabályos ötszög hasonló egymáshoz, hasonlóságuk aránya oldalhosszuk hányadosa. A belső kis ötszög egy oldalának hossza:
$GH = BE - BG - HE = BE - 2BG = AC - 2AG$, felhasználva a csillag több szimmetriáját (szabályosságát). A korábbi eredményeket beírva kapjuk: $GH = 10(\sin 72^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ) \approx 2{,}25$ (cm). A két ötszög oldalhosszának aránya:
$\dfrac{AB}{GH} = \dfrac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ} \approx 2{,}62$. (Megjegyzés: a szögfüggvények pontos, irracionális értékével számolva ez $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$.) A hasonlóság centruma természetesen K, de figyelembe véve a két ötszög egymásnak megfelelő csúcsainak (pl. G és D) elhelyezkedését K két oldalán, a hasonlóság aránya (kb.) $-2{,}62$.

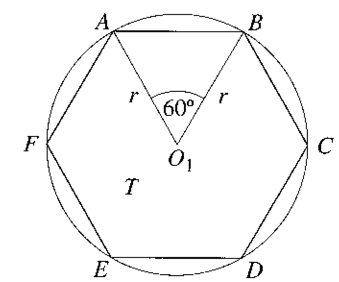
e) A keletkezett három szakasz: JF, FI, ID.
Az EID derékszögű háromszögből $ID = ED \cdot \cos 54^\circ$.
Mivel $ED = AB$, ezt így is írhatjuk: $ID = 10 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 54^\circ = 10 \cdot \sin^2 36^\circ \approx 3{,}45$. Az FI-t $FG + GI$ módon állítjuk elő.
Az EIG derékszögű háromszögből $GI = EG \cdot \cos 54^\circ = (EB - BG) \cdot \sin 36^\circ = (AC - AG) \cdot \sin 36^\circ = (10 \cdot \sin 72^\circ - 5 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ) \cdot \sin 36^\circ \approx 3{,}45$. (Nem véletlenül „hasonlít" ID-re, hanem egzaktul ugyanannyi. Ugyanis $AC \parallel ED$ és $BE \parallel CD$, ezért a $CDEG$ négyszög paralelogramma – sőt, átlóinak merőlegessége miatt rombusz –, tehát átlói felezik egymást, ezért $GI = ID$.) Az AFG derékszögű háromszögből $FG = AG \cdot \cos 54^\circ = 5 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \sin 36^\circ \approx 2{,}14$.
Összeadva így: $FI = 10 \cdot \sin 72^\circ \cdot \sin 36^\circ = 20 \cdot \sin^2 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \approx 5{,}59$.
Végül $JF = JD - (FI + ID) \approx 0{,}95$.
A három szakasz aránya tehát: $JF : FI : ID \approx 0{,}95 : 5{,}59 : 3{,}45 \approx 1 : 5{,}85 : 3{,}62$.

Megjegyzés:

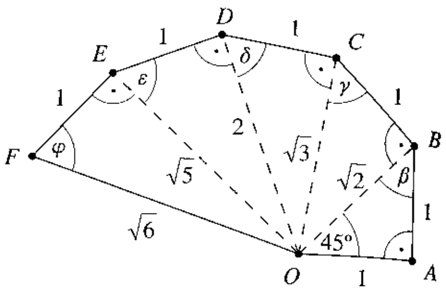
1. A szögfüggvények pontos, irracionális értékeivel végigszámolva mindent, az utolsó pontban eredményül $2 : (5 + 3\sqrt{5}) : (5 + \sqrt{5})$ arány adódik.
2. A megoldás során sokszor alkalmazható a koszinusztétel is; de épp a közölt változat mutatja, hogy a feladat enélkül is megoldható.

2227. Az $R = 6$ cm sugarú körbe írt szabályos ötszög (t), és az $r = 5$ cm sugarú körbe írt szabályos hatszög területének (T) aránya $\dfrac{t}{T} = \dfrac{5 \cdot \dfrac{R^2 \sin 72^\circ}{2}}{6 \cdot \dfrac{r^2 \sin 60^\circ}{2}} = \dfrac{6 \sin 72^\circ}{5 \sin 60^\circ} \approx 1{,}318$.



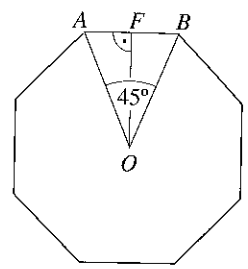


2228. a) Pitagorasz-tétellel felírhatjuk a hétszög átlóinak hosszát.
Az ábra szerint egyrészt $\beta = 45°$, másrészt a γ, δ, ε, φ hegyesszögekre:
$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\delta = \sqrt{3}$,
$\operatorname{tg}\varepsilon = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{5}$, tehát
$\beta = 45° < \gamma < \delta < \varepsilon < \varphi < 90°$.
Ebből már látható, hogy a hétszög legnagyobb szöge az E vagy az O csúcsánál van. Az E-nél fekvő szög $90° + \varepsilon \approx 90° + 63{,}43° = 153{,}43°$.
Az O-nál fekvő szög: $45° + (90° - \gamma) + (90° - \delta) + (90 - \varepsilon) + (90 - \varphi) \approx$
$\approx 45° + 35{,}26° + 30° + 26{,}57° + 24{,}09° = 160{,}92°$.
A hétszög legnagyobb szöge tehát $160{,}92°$ nagyságú és az O csúcsnál fekszik.

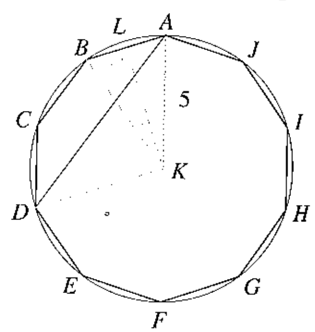


b) A hétszög kerülete $6 + \sqrt{6} \approx 8{,}45$ (dm),
területe $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}) \approx 4{,}19$ (dm²).

2229. A nyolcszög O középpontját a szomszédos A, B csúcsokkal összekötve egy OAB egyenlő szárú háromszög adódik, melynek alapja 10 cm, a szárak által bezárt szöge pedig 45°. A nyolcszög köré írt kör sugara a háromszög szárával, a beírt kör sugara pedig a háromszög alaphoz tartozó magasságával egyezik meg.
Ezt behúzva kapjuk az OAF derékszögű háromszöget, amelyben $OA = \dfrac{5}{\sin 22{,}5°} \approx 13{,}07$ (cm) és
$OF = 5 \cdot \operatorname{ctg} 22{,}5° \approx 12{,}07$ (cm).
Tehát a nyolcszög köré írt kör sugara: $R \approx 13{,}07$ cm, a beírt kör sugara pedig: $r \approx 12{,}07$ cm.

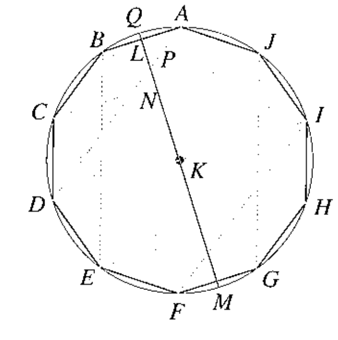


2230. a) A csúcsokba futó sugarak olyan egyenlő szárú háromszögekre bontják a tízszöget, amelyek szára 5 cm, szárszöge pedig $\dfrac{360°}{10} = 36°$.
A szárszög felezője egyúttal az alap felezőmerőlegese is, így $\sin 18° = \dfrac{AL}{5}$, amiből a tízszög oldala $AB = 2AL = 10 \cdot \sin 18° \approx 3{,}09$ (cm). A tízszög területe a tíz egybevágó egyenlő szárú háromszög területének összege, azaz
$T_{\text{tízszög}} = 10 \cdot \dfrac{5 \cdot 5 \cdot \sin 36°}{2} \approx 73{,}47$ (cm²).



b) A KAD háromszög szintén egyenlő szárú, szárai 5 cm-esek, szárszöge $3 \cdot 36° = 108°$. A szárszög felezője egyúttal merőlegesen felezi az AD átlót is. Ekkor
$\sin 54° = \dfrac{\frac{AD}{2}}{5}$, amiből $AD = 10 \sin 54° \approx 8{,}09$ (cm).

c) AK egyenese szimmetriatengelye a tízszögnek, így a csillagnak is. A $KAD\sphericalangle = \dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$, ezért $HAD \sphericalangle = 72°$, és a csillag többi hegyesszöge is ekkora. A konkáv szögeit onnan kapjuk meg, hogy a csillag geometriai értelemben egy konkáv húszszög, amelynek szögösszege $(20 - 2)\,180° = 3240°$, ebből a tíz hegyesszög $10 \cdot 72° = 720°$-ot tesz ki, a többi 2520°-on pedig a tíz konkáv szög osztozik, tehát egy 252°-os. (Érdekes, hogy az ötágú csillag konkáv szögei is ekkorák, l. 2226.-os feladat.) A későbbiek kedvéért rögzítsük, hogy tehát a (konvex) $APB \sphericalangle = 108°$. A csillag területét megkapjuk, ha a nagy tízszög (az a)-ban már kiszámolt) területéből elhagyjuk a tíz egybevágó (pl. APB) háromszög területét. Az ALP derékszögű háromszögből $\sin 54° = \dfrac{AL}{AP}$, amiből $AP = \dfrac{AL}{\sin 54°} = \dfrac{5 \cdot \sin 18°}{\sin 54°} \approx 1{,}91$ (cm).



Az APB egyenlő szárú háromszög területe így $T_{APB} = \dfrac{AP^2 \cdot \sin 108°}{2} \approx 1{,}73$, a csillag területe pedig $T_{\text{csillag}} = T_{\text{tízszög}} - 10 \cdot T_{APB} \approx 56{,}13$ (cm²).

d) Bármely két szabályos tízszög hasonló egymáshoz, a hasonlóság centruma most természetesen K, és a $\dfrac{KL}{KN}$ hányados megadja az arányt. A KCN derékszögű háromszögben K-nál $1{,}5 \cdot 36° = 54°$-os szög van (hiszen $CKB \sphericalangle$ a tízszöget felépítő 36°-os „cikkek" egyike, $BKQ \sphericalangle$ pedig egy ugyanilyennek a fele), ezért innen $KN = KC \cdot \cos 54° = 5 \cdot \cos 54° \approx 2{,}94$. Hasonlóan a BKL derékszögű háromszögből $KL = KB \cdot \cos 18° = 5 \cdot \cos 18° \approx 4{,}76$. A hasonlóság aránya tehát
$\dfrac{KL}{KN} = \dfrac{\cos 18°}{\cos 54°} \approx 1{,}62$ (pontosan $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$).

e) A keletkezett négy szakasz: QL, LN, NK, KM. Utóbbi a kör sugara, 5.
NK-t az előző pontban kiszámoltuk: $5 \cdot \cos 54° \approx 2{,}94$.
$LN = LK - NK = 5(\cos 18° - \cos 54°) \approx 1{,}82$.
$QL = QK - LK = 5(1 - \cos 18°) \approx 0{,}24$.
A négy szakasz aránya tehát:
$QL : LN : NK : KM \approx 0{,}24 : 1{,}82 : 2{,}94 : 5$, avagy $1 : 7{,}42 : 12{,}01 : 20{,}43$.

Megjegyzés:

1. A szögfüggvények pontos, irracionális értékeivel végigszámolva mindent, az utolsó pontban a szomszédos szakaszok arányaira a következőket kapjuk:

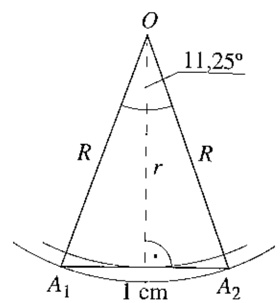
$$\frac{LN}{QL}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}},\quad \frac{NK}{LN}=\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

$$\frac{KM}{NK}=\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

2. A megoldás során sokszor alkalmazható a koszinusztétel is; de épp a közölt változat mutatja, hogy a feladat enélkül is megoldható.)

2231. Bontsuk fel a szabályos sokszöget 32 db egybevágó, egyenlő szárú háromszögre.

a) A sokszög kerülete 32 cm. A körülírt kör sugara az A_1OA_2 egyenlő szárú háromszög szárával egyenlő hosszúságú.



$R=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{11,25°}{2}}\approx 5,101$ (cm) a körülírt kör kerülete $K=2R\pi=\dfrac{\pi}{\sin 5,625°}\approx 32,052$ (cm).

Ez a 32 cm-nek 100,16%-a, azaz 0,16%-os hibát követünk el.

b) A beírt kör sugara az A_1OA_2 egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága:

$r=\dfrac{\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{11,25°}{2}}\approx 5,077$ (cm),

a beírt kör kerülete $k=2r\pi=\dfrac{\pi}{\operatorname{tg}5,625°}\approx 31,897$ (cm).

Ez a 32 cm-nek 99,68%-a, azaz 0,32%-os hibát követünk el.

2232. Használjuk az előző feladat ábráját és eredményeit.

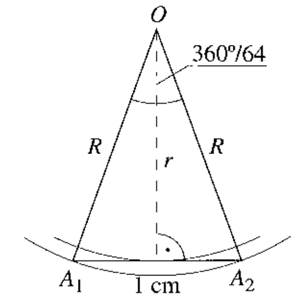
Az adott szabályos 32-szög területe $32\cdot\frac{1\cdot r}{2}=16r\approx 81,225$ (cm²).

a) A körülírt kör területe $R^2\pi\approx 81,750$ (cm²), ami a 32-szög területének 100,65%-a. Tehát 0,65%-os hibát követünk el, ha a körülírt kör területével számolunk.

b) A beírt kör területe $r^2\pi\approx 80,964$ (cm²), ami a 32-szög területének 99,68%-a. Tehát 0,32%-os hibát követünk el, ha a beírt kör területével számolunk.

2233. Bontsuk fel a szabályos sokszöget 64 db egybevágó, egyenlő szárú háromszögre.

a) Az adott sokszög kerülete 64 cm. A körülírt kör sugara az egyenlő szárú A_1OA_2 háromszög szárával egyenlő hosszúságú.



$R=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{360°}{128}}\approx 10,190$ (cm), a körülírt kör kerülete $K=2R\pi\approx 64,026$ (cm).

Ez a 64 cm-nek 100,04%-a, azaz 0,04%-os hibát követünk el.

b) A beírt kör sugara az egyenlő szárú A_1OA_2 háromszög alaphoz tartozó magassága:

$r=\dfrac{\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{360°}{128}}\approx 10,178$ (cm), a beírt kör kerülete $k=2r\pi\approx 63,949$ (cm).

Ez a 64 cm-nek 99,92%-a, azaz 0,08%-os hibát követünk el.

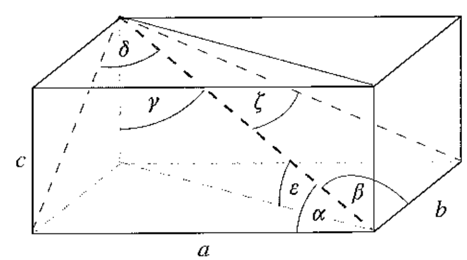
2234. Használjuk az előző feladat ábráját és eredményeit.

A szabályos 64-szög területe $64\cdot\frac{1\cdot r}{2}=32r\approx 325,687$ (cm²).

a) A körülírt kör területe $R^2\pi\approx 326,211$ (cm²), ami a 64-szög területének 100,16%-a. Tehát 0,16%-os hibát követünk el, ha a körülírt kör területével számolunk.

b) A beírt kör területe $r^2\pi\approx 325,426$ (cm²), ami a 64-szög területének 99,92%-a. Tehát 0,08%-os hibát követünk el, ha a beírt kör területével számolunk.

2235. a) A testátló és egy él által bezárt szöget az ábrán satírozott derékszögű háromszögből lehet számolni, mégpedig ha a koszinuszát szeretnénk, az mindig az él és a testátló hosszának aránya. (A berajzolt szögeket a feladat b) részében használjuk).



Tehát $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Hasonlóan a másik két szögre adódik: $\cos\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, illetve $\cos\gamma=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Ebből azonnal adódik, hogy $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$

$$= \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1,$$ amit igazolnunk kellett.

b) A lapátlók esetén a szög koszinusza egy lapátló és a testátló hosszának hányadosa lesz, tehát például $\cos\delta = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (lásd az ábrát a feladat a) részében).

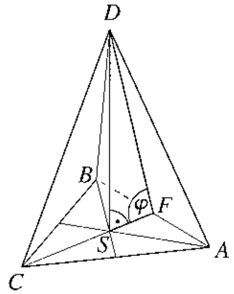
Hasonlóan adódik a másik két szög koszinuszára:

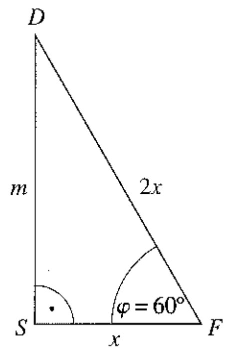
$$\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \text{ illetve } \cos\zeta = \frac{\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Ebből adódik, hogy $\cos^2\delta + \cos^2\varepsilon + \cos^2\zeta = \frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2} +$

$+ \frac{c^2+a^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2a^2+2b^2+2c^2}{a^2+b^2+c^2} = 2,$ és éppen ezt akartuk bizonyítani.

2236. A szabályos gúla magasságának talppontja az alaplap középpontja, ez a háromszög S súlypontja.





A feladat feltétele szerint

$$T_{ABD} = 2\frac{T_{ABC}}{3} = 2T_{ABS} \; *.$$

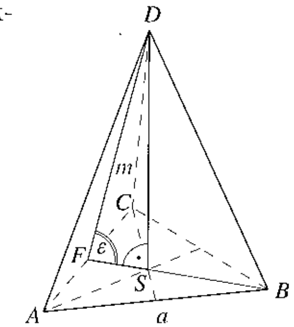
Az $ABD\,\Delta$ és $ABS\,\Delta$ közös oldala AB, ehhez az oldalhoz tartozó magasságuk DF, illetve SF, $T_{ABD} = \frac{AB\cdot DF}{2}$, $T_{ABS} = \frac{AB\cdot SF}{2}$. Ezeket behelyettesítve a *-os összefüggésbe, kapjuk, hogy $DF = 2SF$. Az SFD tehát olyan derékszögű háromszög, amely átfogójának hossza az egyik befogó kétszerese. Ez azt jelenti, hogy az általuk bezárt $DFS \sphericalangle = 60°$-os.

E szerint az oldallap és alaplap hajlásszögének nagysága $(DF, FS) \sphericalangle = 60°$.

2237. Legyen a szabályos gúla alaplapjának területe T_a, egy oldallapjának területe T_o, m egy oldallapnak az alaphoz tartozó magassága, m_a az alaplap magassága.

A feltétel szerint $\frac{4}{3}T_o = T_a$, ahol $T_o = \frac{a\cdot m}{2}$; $T_a = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$, mert a gúla alaplapja szabályos háromszög. Mivel a gúla szabályos, a D csúcspont alaplapra eső merőleges vetülete a szabályos háromszög S súlypontja.

Így $FS = \frac{1}{3}m_a = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.



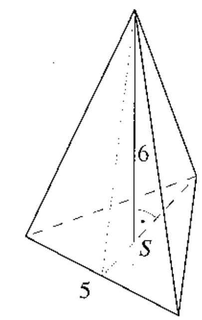
Az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge a DSF derékszögű háromszögben ε, $\cos\varepsilon = \frac{FS}{FD} = \frac{a}{m}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$. $(*)$

A feltétel miatt $\frac{4}{3}\cdot\frac{a\cdot m}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$.

Ezt az értéket $(*)$-ba helyettesítve $\cos\varepsilon = \frac{4}{9}$.

Tehát az oldallap és az alaplap által bezárt szög $\varepsilon \approx 63{,}6°$.

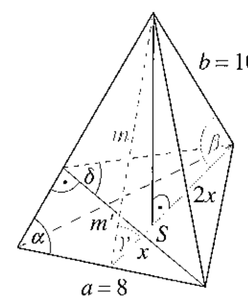
2238. A testmagasság az alaplapot annak súlypontjában éri el. A keresett szög egy oldallap-magasság és az alaplap magassága között található: az alaplap-magasság egyharmada, az oldallap-magasság és a testmagasság által alkotott derékszögű háromszögből egyszerű visszakereséssel meghatározható. Az alaplap mint egy 5 egység oldalú szabályos háromszög magassága: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, ennek harmada: $x = \frac{5\sqrt{3}}{6} \approx 1{,}443$.



Ekkor a keresett szög tangense:

$$\frac{m}{x} = \frac{6}{\frac{5\sqrt{3}}{6}} = \frac{36}{5\sqrt{3}} = 2{,}4\sqrt{3}\ (\approx 4{,}157),$$ amiből a szög maga kb. 76,47°.

2239. a) Az oldallapot a szimmetriatengelyére illeszkedő m magassága két (egybevágó) derékszögű háromszögre bontja. Ebből az oldalél és az alapél szögére: $\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{4}{10}$, amiből $\alpha \approx 66{,}42°$.



b) A testmagasság az alaplapot annak súlypontjában éri el. A keresett szög egy oldalél és az alaplap magassága között található: az alaplap-magasság kétharmada, az oldalél és a testmagasság által alkotott derékszögű háromszögből egyszerű visszakereséssel meghatározható. Az alaplap mint egy 8 egység oldalú szabályos háromszög magassága: $\frac{8\sqrt{3}}{2}$, ennek kétharmada: $2x = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}62$. Ekkor $\cos\beta = \frac{2x}{b} = \frac{8\sqrt{3}}{30} \approx 0{,}4619$, amiből $\beta \approx 62{,}49°$.

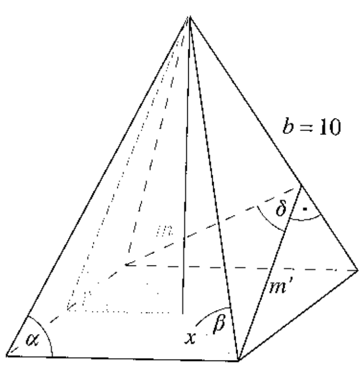
c) Ez a szög egy oldallap-magasság és az alaplap magassága között található: az alaplap-magasság egyharmada, az oldallap-magasság és a testmagasság által alkotott derékszögű háromszögből egyszerű visszakereséssel meghatározható. Az oldallap-magasságot Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk az alapél feléből és az oldalélből: $m=\sqrt{10^2-4^2}=\sqrt{84}\approx 9{,}165$.

Ekkor $\cos\gamma=\dfrac{x}{m}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{84}}=\dfrac{2}{3\sqrt{7}}\approx 0{,}2520$, amiből $\gamma\approx 75{,}41°$.

d) Ekkor a lapok mint síkok metszésvonalára (ez a közös oldalél) mindkét lapon merőlegest állítunk – ez célszerűen az oldallap-háromszög oldalélhez tartozó magassága (m') lehet. Ekkor az ezek által bezárt szög az oldallapok szöge. Ez tehát síkmetszetben egy olyan egyenlő szárú háromszög szárszöge, amelynek alapja a, szárai pedig m' hosszúságúak. Az m' szakaszt legegyszerűbben az oldallap területéből számíthatjuk ki: ez egyrészt $\dfrac{am}{2}$, másrészt $\dfrac{bm'}{2}$, így $m'=\dfrac{am}{b}=\dfrac{8\sqrt{84}}{10}=1{,}6\sqrt{21}\approx 7{,}332$. Egy egyenlő szárú háromszög szárszögének felezője merőlegesen felezi az alapot is, így a keresett szög felére:

$\sin\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{\frac{a}{2}}{m'}=\dfrac{4}{1{,}6\sqrt{21}}\approx 0{,}5455$, amiből $\delta\approx 66{,}12°$.

2240. a) Az oldallapot a szimmetriatengelyre illeszkedő m magassága két (egybevágó) derékszögű háromszögre bontja. Ebből az oldalél és az alapél szögére: $\cos\alpha=\dfrac{\frac{a}{2}}{b}=\dfrac{4}{10}$, amiből $\alpha\approx 66{,}42°$.



b) A testmagasság az alaplapot annak középpontjában éri el. A keresett szög egy oldalél és az alaplap átlója között található: az átló fele, az oldalél és a testmagasság által alkotott derékszögű háromszögből egyszerű visszakereséssel meghatározható. Az alaplap mint egy 8 egység oldalú négyzet átlója: $8\sqrt{2}$, ennek fele: $x=4\sqrt{2}\approx 5{,}657$.

Ekkor $\cos\beta=\dfrac{x}{b}=\dfrac{4\sqrt{2}}{10}=0{,}5657$, amiből $\beta\approx 55{,}55°$.

c) Ez a szög az m oldallap-magasság és az alaplap középvonala között található: a középvonal fele, az oldallap-magasság és a testmagasság által alkotott derékszögű háromszögből egyszerű visszakereséssel meghatározható.

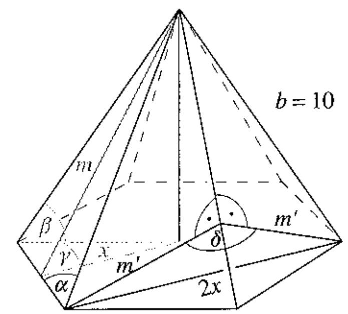
Az oldallap-magasságot Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk az alapél feléből és az oldalélből: $m=\sqrt{10^2-4^2}=\sqrt{84}\approx 9{,}17$.

Ekkor $\cos\gamma=\dfrac{\frac{a}{2}}{m}=\dfrac{4}{\sqrt{84}}\approx 0{,}4364$, amiből $\gamma\approx 64{,}12°$.

d) Ekkor a lapok mint síkok metszésvonalára (ez a közös oldalél) mindkét lapon merőlegest állítunk – ez célszerűen az oldallap-háromszög oldalélhez tartozó magassága (m') lehet. Ekkor az ezek által bezárt szög az oldallapok szöge. Ez tehát síkmetszetben egy olyan egyenlő szárú háromszög szárszöge, amelynek alapja az alaplap átlója ($2x=\sqrt{2}a$), szárai pedig m' hosszúságúak. Az m' szakaszt legegyszerűbben az oldallap területéből számíthatjuk ki: ez egyrészt $\dfrac{am}{2}$, másrészt $\dfrac{bm'}{2}$, így $m'=\dfrac{am}{b}=\dfrac{8\sqrt{84}}{10}=1{,}6\sqrt{21}\approx 7{,}33$. Egy egyenlő szárú háromszög szárszögének felezője merőlegesen felezi az alapot is, így a keresett szög felére:

$\sin\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{x}{m'}=\dfrac{4\sqrt{2}}{1{,}6\sqrt{21}}\approx 0{,}7715$, amiből $\delta\approx 100{,}98°$.

2241. a) Az oldallapot magassága két (egybevágó) derékszögű háromszögre bontja. Ebből az oldalél és az alapél szögére: $\cos\alpha=\dfrac{\frac{a}{2}}{b}=\dfrac{4}{10}$, amiből $\alpha\approx 66{,}42°$.



b) A testmagasság az alaplapot annak középpontjában éri el. A szabályos hatszögről tudjuk, hogy a középpontját egy csúccsal összekötő szakasz épp az oldalával egyenlő. A keresett szög egy oldalél és az alaplap egy ilyen szakasza között található: ezen szakasz, a megfelelő oldalél és a testmagasság által alkotott derékszögű háromszögből egyszerű visszakereséssel meghatározható.

Ekkor $\cos\beta=\dfrac{8}{10}$, amiből $\beta\approx 36{,}87°$.

(Bár nem kérdés, de rögtön látható, hogy a testmagasság ekkor 6; hiszen 6, 8, 10 a jól ismert, pitagoraszi számhármas.)

c) Ez a szög egy oldallap-magasság és az alaplap középpontját a megfelelő oldalél felezőpontjával összekötő szakasz között található: e szakasz, az oldallap-magasság és a testmagasság által alkotott derékszögű háromszögből egyszerű visszakereséssel meghatározható. A szóban forgó szakasz egy szabályos háromszög magassága, vagyis $x = \frac{\sqrt{3}}{2}8 = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$. Az oldallap-magasságot pedig Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk az alapél feléből és az oldalélből:

$m = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} \approx 9{,}17$. Ekkor $\cos\gamma = \frac{x}{m} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{84}} \approx 0{,}7559$, amiből

$\gamma \approx 40{,}89°$.

d) Ekkor a lapok mint síkok metszésvonalára (ez a közös oldalél) mindkét lapon merőlegest állítunk – ez célszerűen az oldallap-háromszög oldalélhez tartozó magassága (m') lehet. Ekkor az ezek által bezárt szög az oldallapok szöge. Ez tehát síkmetszetben egy olyan egyenlő szárú háromszög szárszöge, amelynek alapja az alaplap egy olyan átlója, amely egyúttal két szemközti oldal távolsága, vagyis a középpont és egy oldalfelező pont távolságának kétszerese ($2x$), szárai pedig m' hosszúságúak. Az m' szakaszt legegyszerűbben az oldallap területéből számíthatjuk ki: ez egyrészt $\frac{am}{2}$, másrészt $\frac{bm'}{2}$, így $m' = \frac{am}{b} = \frac{8\sqrt{84}}{10} =$

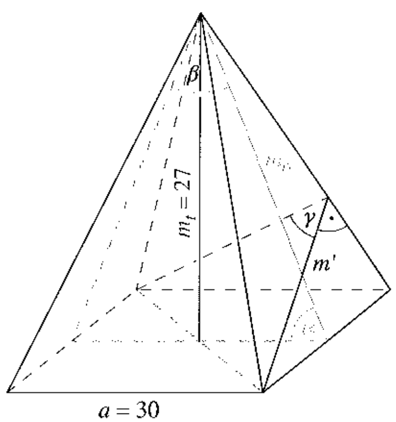
$= 1{,}6\sqrt{21} \approx 7{,}33$. Egy egyenlő szárú háromszög szárszögének felezője merőlegesen felezi az alapot is, így a keresett szög felére: $\sin\frac{\delta}{2} = \frac{x}{m'} = \frac{4\sqrt{3}}{1{,}6\sqrt{21}} \approx$

$\approx 0{,}9449$, amiből $\delta \approx 141{,}79°$.

2242. a) A testmagasság az alaplapot annak középpontjában éri el. A keresett szög egy oldallap alapélhez tartozó m_o magassága és az alaplap középvonala között található: a középvonal fele, az m_o oldallap-magasság és a testmagasság által alkotott derékszögű háromszögből egyszerű visszakereséssel meghatározható:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_t}{\frac{a}{2}} = \frac{27}{15} = 1{,}8$, amiből

$\alpha \approx 60{,}95°$.



b) Ez a szög két szemközti oldallap alapélhez tartozó magassága között található: a két oldallap-magasság és az alaplap-középvonal által alkotott egyenlőszárú háromszög szárszöge. Mint ilyen, könnyen meghatározható az előző pontbeli eredmény segítségével: $\beta = 180° - 2\alpha \approx 58{,}11°$.

c) Ekkor a lapok mint síkok metszésvonalára (ez a közös oldalél) mindkét lapon merőlegest állítunk – ez célszerűen az oldallap-háromszög oldalélhez tartozó magassága (m') lehet. Ekkor az ezek által bezárt szög az oldallapok szöge. Ez tehát sík-

metszetben egy olyan egyenlő szárú háromszög szárszöge, amelynek alapja az alaplap átlója ($\sqrt{2}a$) szárai pedig m' hosszúságúak.
Először kiszámítjuk a szimmetriatengelyre illesszkedő m_o oldallap-magasságot Pitagorasz-tétellel a testmagasságból és a középvonal (alapél) feléből:

$$m_o = \sqrt{m_t^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{27^2 + 15^2} = \sqrt{954} \approx 30{,}89.$$

Ezután ugyancsak Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk az oldalélt az m_o oldallap-magasságból és az alapél feléből:

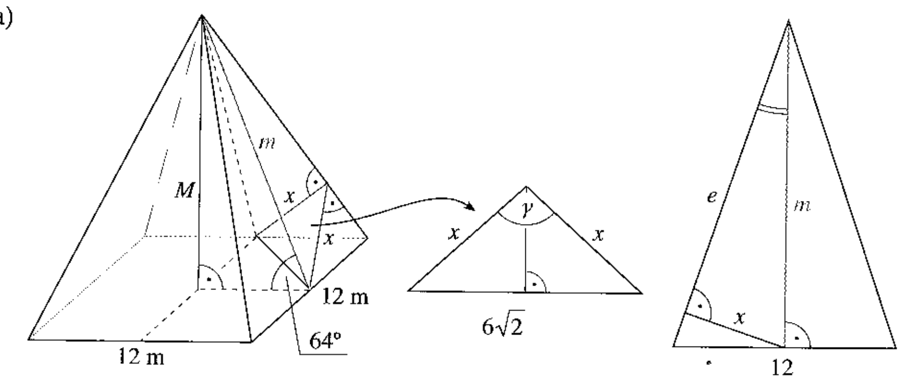
$$b = \sqrt{m_o^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{954 + 15^2} = \sqrt{1179} \approx 34{,}34.$$

Az m' szakaszt legegyszerűbben az oldallap területéből számíthatjuk ki: ez egyrészt $\frac{am_o}{2}$, másrészt $\frac{bm'}{2}$, így $m' = \frac{am_o}{b} = \frac{30\sqrt{954}}{\sqrt{1179}} = 30\sqrt{\frac{106}{131}} \approx 26{,}99$.

Egy egyenlő szárú háromszög szárszögének felezője merőlegesen felezi az alapot is, így a keresett szög felére: $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{m'} = \frac{15\sqrt{2}}{30\sqrt{\frac{106}{131}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{131}{53}} \approx 0{,}7861$,

amiből $\gamma \approx 103{,}64°$.

2243. a)



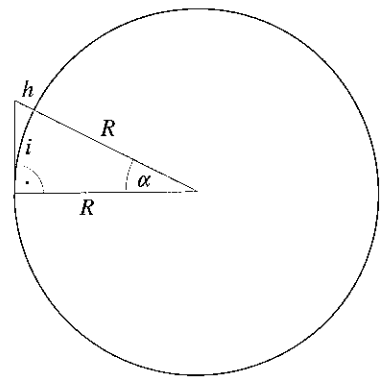
Az ábra alapján, felhasználva, hogy a szabályos négyoldalú gúla alapja négyzet, és csúcsának vetülete éppen a négyzet középpontja:

$\operatorname{tg}64° = \frac{M}{6}$, ahonnan $M \approx 12{,}30$ méter.

b) Az oldallapok szögét az ábrán satírozott és kiforgatott háromszögből számolhatjuk. Ehhez szükséges az x-szel jelölt szakasz hossza. Ami az oldallapból két hasonló háromszög alapján: $\frac{x}{m} = \frac{6}{e}$. Kellene m és e. Az első egy Pitagorasz-tételből: $6^2 + M^2 = m^2$, felhasználva az a) rész eredményét: $m \approx 13{,}69$ méter. Innen egy másik Pitagorasz-tételből már e is számolható: $m^2 + 6^2 = e^2$, ahonnan $e \approx 14{,}94$ méter. Eszerint: $x \approx 5{,}496$ méter.

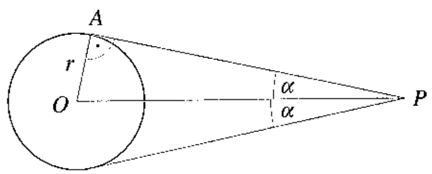
Utolsó lépésünk $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{x} \approx 0{,}7721$, ahonnan $\gamma \approx 2 \cdot 50{,}5°$. Tehát az oldallapok által bezárt szög ebben a szabályos négyoldalú gúlában kb. 101°-os.

2244. Az ívhossz és a sugár hányadosa a (radiánban mért) középponti szög: $\hat{\alpha} = \frac{i}{R} = \frac{300\ \text{km}}{6378\ \text{km}} \approx 0{,}0470$ (rad $\approx 2{,}695°$). A „még éppen látszik" azt jelenti, hogy a horizonton, vagyis vízszintesen (tehát geometriailag: a Föld mint gömb érintője irányába) nézve látjuk a csúcsot. Ezért az ábrán látható derékszögű háromszögből:



$\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$, amiből adódik, hogy a hegy $h = \frac{R(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha} \approx 7{,}062$ (km, azaz 7062 m) magas.

2245. A bura O középpontjától 3,2 m távolságra lévő megfigyelési pont P. Az adott szög a P-ből a gömb alakú lámpaburához húzható érintők által meghatározott forgáskúp nyílásszöge. (Az érintőszakaszok a P csúcspontú forgáskúp palástját alkotják.) Az ábrán a kúp tengelymetszetét jelenítettük meg. $OP = 3{,}2$; $2\alpha = 6°$; $2r = ?$



Az AOP Δ derékszögű, mert az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Az $APO\sphericalangle = \alpha$, $r = 3{,}2 \sin 3° \approx 0{,}1675$ (m). A bura átmérője $2r \approx 33{,}5$ cm.

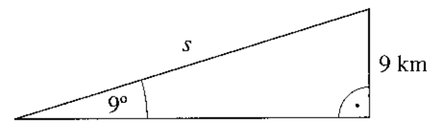
2246. a) Az 5, illetve 16%-os emelkedésű hegyoldal szöge a meghatározás szerint: $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}05$, illetve $\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}16$, ahonnan $\alpha_1 \approx 2{,}9°$, illetve $\alpha_2 \approx 9{,}1°$. Tehát a két lejtő 2,9, illetve 9,1 fokos.

b) Ha $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}03$, akkor $\alpha \approx 1{,}72°$. Ha 7 km-t haladtunk, ez az átfogója egy derékszögű háromszögnek, amelynek az 1,72°-os szöggel szemközti befogóját keres-

sük, tehát $\sin 1{,}72° = \frac{h}{7\ \text{km}}$, azaz $h \approx 0{,}21$ km, vagyis kb. 210 méterrel kerültünk ezen az emelkedőn magasabbra.

c) Ha nem lehet 10%-nál meredekebb az emelkedés, és 400 métert kell emelkedni, akkor a legrövidebb a legmeredekebb szerpentin, tehát: $\sin\alpha = \frac{400\ \text{m}}{l}$, ahol l a minimális szerpentin úthossz, a szögre pedig tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1$. Ebből $l > 4020$ méter, azaz több, mint 4 km hosszú szerpentin kell.

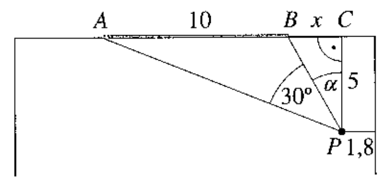
2247. a) Az ábra alapján $\sin 9° = \frac{9}{s}$, ahonnan $s = 57{,}532$ km.



Mivel a sebessége 250 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ezért kb. $\frac{57{,}532}{250} \approx 0{,}23$ (óra $\approx$ 13 perc 49 másodperc) alatt éri el a kívánt magasságot.

b) Ezzel kezdtük az a)-beli számítást, 57,532 km-t tesz meg ezalatt.

2248. Készítsünk ábrát és használjuk az ábra jelöléseit! Az AB-vel jelölt mozivásznon az első sor szélét jelölő P pontból 30°-os szögben látszik. Legyen C a P-nek a mozivászon síkjára eső merőleges vetületének talppontja. A BCP derékszögű háromszögben legyen $BC = x$, $BPC\sphericalangle = \alpha$. A terem szélessége: $(10 + 2x + 2 \cdot 1{,}8)$ m, amelynek meghatározásához x értékére van szükségünk.



Az APC derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg}(30° + \alpha) = \frac{10+x}{5}$ (1).

A BPC derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{5}$ (2).

Mivel $\operatorname{tg}(30°+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}30° + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}\alpha}$, így (1) $\frac{\operatorname{tg}30° + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{10+x}{5}$ alakban is felírható.

Felhasználva, hogy $\operatorname{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ és $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{5}$, x-re a következő egyenletet kapjuk:

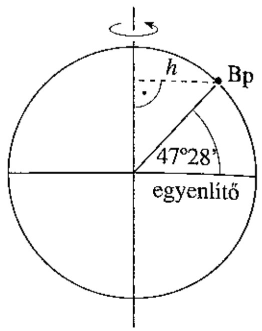
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{5}}{1 - \frac{x}{5\sqrt{3}}} = \frac{10+x}{5}$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}} + x = 10 + x - \frac{10x}{5\sqrt{3}} - \frac{x^2}{5\sqrt{3}}$$

$$x^2 + 10x + 25 - 50\sqrt{3} = 0.$$

Ez utóbbi másodfokú egyenlet gyökei közelítőleg 4,31 és $-14{,}31$.
Mivel $x > 0$, így $x \approx 4{,}31$.
Tehát a mozi terem szélessége: $10 + 2 \cdot 4{,}31 + 2 \cdot 1{,}8 = 22{,}22$ (m).

2249. a) Az ábrára a Föld egy keresztmetszetét rajzoltuk fel. A 47°28' szélességi kör jelentése is az ábrán látható. A kérdés a h-val jelölt, tengelytől való távolság.

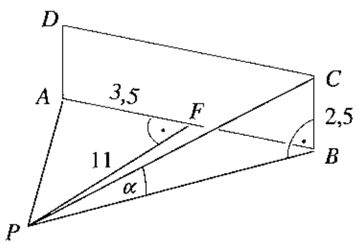


$\cos 48° 28' = \dfrac{h}{6378}$, ahonnan $h \approx 4229$ km adódik.

b) Budapest kerületi sebességét abból kaphatjuk meg, hogy egy 4229 km sugarú kör kerületét 23,93 óra alatt teszi meg. Azaz $v = 1110\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ sebesség adódik, ami közel a hang sebessége a levegőben! Azért nem érezzük ezt a süvítő sebességet, mert a légkör is lényegében együtt forog a Földdel. (Szél akkor van, ha eltér a légkör sebessége a Földétől, de ez jóval kisebb sebesség, még komoly viharok esetén is csak maximum 100-as nagyságrendű.)

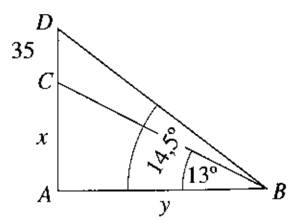
2250. Az ábrán α-val jelölt szöget keressük, ahol $ABCD$ a kapu, P a tizenegyes pont. Ekkor a PBC derékszögű háromszög PB oldala kiszámítható a PBF derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $BP \approx 11{,}5$ m, innen

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2{,}5}{11{,}5} \approx 0{,}2$, azaz $\alpha = 12{,}2°$.



2251. Az ábrán C jelöli a hegy csúcsát, D a torony tetejét és B pontból nézzük a tornyot. Ha A a C pont merőleges vetülete az alapsíkon, akkor az ábra jelöléseit használva a következő összefüggéseket írhatjuk fel az ABC és ABD derékszögű háromszögekben:

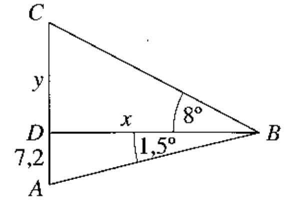
$\dfrac{x}{y} = \operatorname{tg}13°$, $\dfrac{x+35}{y} = \operatorname{tg}14{,}5°$.



Az egyenletrendszerből y kiküszöbölésével $x = \dfrac{35 \cdot \operatorname{tg}13°}{\operatorname{tg}14{,}5° - \operatorname{tg}13°} \approx 291$ adódik.

Tehát a hegy közelítőleg 291 m magas.

2252. Az ábrán A jelöli a kémény alját, C a tetejét és B pontból nézzük a kéményt. Ekkor az ábra jelöléseit használva a következő összefüggéseket írhatjuk fel az ABD és BCD derékszögű háromszögekben:



$\dfrac{7{,}2}{x} = \operatorname{tg}1{,}5°$, $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}8°$, amiből $y \approx 38{,}6$ m, így a kémény magassága közelítőleg 45,8 m.

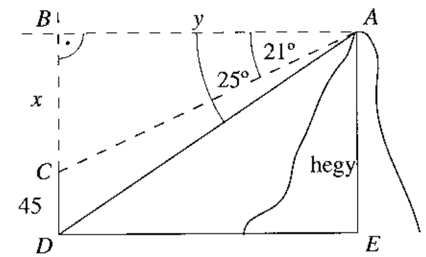
2253. A hegycsúcsnak a völgyhöz viszonyított magassága $AE = BD = 45 + x$ (méter).
ABC derékszögű háromszögben

$\operatorname{tg}21° = \dfrac{x}{y}$.

ABD derékszögű háromszögben

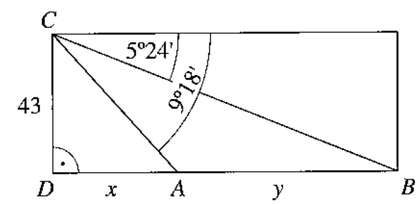
$\operatorname{tg}25° = \dfrac{x+45}{y}$.

Ebből $\dfrac{x}{\operatorname{tg}21°} = \dfrac{x+45}{\operatorname{tg}25°} \Rightarrow$



$x \approx 210$ (m).
Tehát a hegycsúcsnak a völgyhöz viszonyított magassága kb. 255 m.

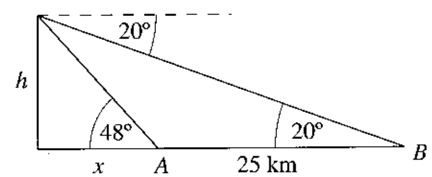
2254. Az ábrán A, B a híd két végpontja, C pont jelöli a helyet, ahol állunk, és D ennek az alapsíkra eső merőleges vetülete. Ekkor ACD és BCD derékszögű háromszögek C-nél levő szögei 80°42' és 84°36', ezért $\dfrac{x}{43} = \operatorname{tg}80° 42'$ és



$\dfrac{x+y}{43} = \operatorname{tg}84° 36'$, amiből $x \approx 262{,}6$ m és $y \approx 192{,}3$ m.
Tehát a híd hossza közelítőleg 192,3 m.

2255. a) Lásd az ábrát!

b) Az ábrán h-val jelölt repülési magasság a kérdés. Két egyenletet lehet a szögket használva felírni:



$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \operatorname{tg}48° = \frac{h}{x} \\ &(2)\quad \operatorname{tg}20° = \frac{h}{x+25} \end{aligned}\right\}$$

(1)-ből $x = \dfrac{h}{\operatorname{tg} 48°}$ és ezzel (2) $\operatorname{tg} 20° = \dfrac{h}{25 + \dfrac{h}{\operatorname{tg} 48°}}$, ahonnan

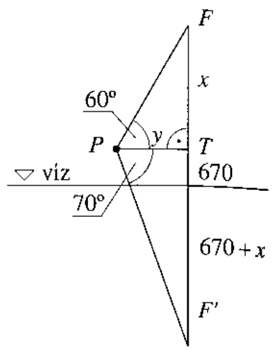
$h = \dfrac{25 \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 48°}{\operatorname{tg} 48° - \operatorname{tg} 20°} \approx 13,53$ km.

Azaz a repülőgép 13,53 km magasan repül.

2256. Az ábrán P pont a hegycsúcsot, F a felhőt, F' a felhő tükörképét jelöli. Ekkor az ábra jelöléseit használva PTF és $PF'T$ derékszögű háromszögekben:

$\dfrac{x}{y} = \operatorname{tg} 60°$ és $\dfrac{1340 + x}{y} = \operatorname{tg} 70°$, amiből

$y \approx 1320$ m és $x \approx 2290$ m, tehát a felhő a csúcs felett 2290 m magasan van.



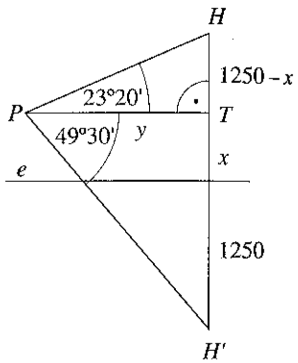
2257. a) P pont a turista helyzetét, H a hegycsúcsot, H' annak tükörképét, e pedig a tó síkját jelöli. Ekkor a megadott tengerszint feletti magasságok alapján H az e-től 1250 m távolságra van, így PTH és $PH'T$ derékszögű háromszögekben:

$\dfrac{1250 - x}{y} = \operatorname{tg} 23°20'$, $\dfrac{1250 + x}{y} = \operatorname{tg} 49°30'$,

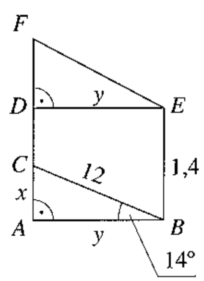
amiből $y \approx 1560,3$ m és $x \approx 577$ m, tehát a turista tengerszint feletti magassága közelítőleg 1177 m.

b) A PH távolság meghatározására a PTH derékszögű háromszögből az előbb kiszámított y segítségével:

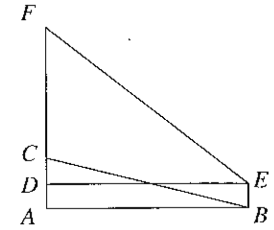
$PH = \dfrac{y}{\cos 23°20'} \approx 1699,2$ (m).



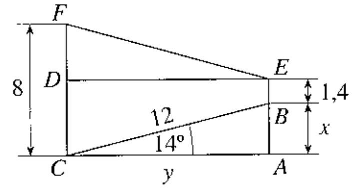
2258. a) B és E jelöli a kerítés alját és tetejét, C és F a házfal alját és a párkányt.
Ekkor az ábra jelöléseit használva ABC derékszögű háromszögből:
$x = 12 \cdot \sin 14° \approx 2,9$ (m) és
$y = 12 \cdot \cos 14° \approx 11,6$ (m).



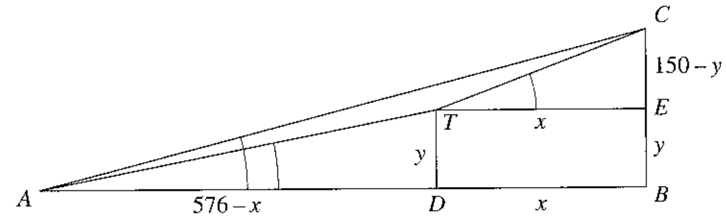
Mivel $FC = 8$ m és
$EB = AD = 1,4$ m, valamint
$AC = x \approx 2,9$ m $> 1,4$ m, ezért C pont a D fölött van, ám ettől függetlenül DEF derékszögű háromszögben:
$DF = 8 + x - 1,4 \approx 9,5$ (m) és
$DE = y \approx 11,6$ m, ekkor a keresett EF távolság Pitagorasz-tétellel kiszámítható: $EF \approx 15$ m.



b) x és y értéke ugyanannyi, mint az *a)* feladatban, de most
$DF = 8 - x - 1,4 \approx 3,7$ (m), így a Pitagorasz-tételből: $EF \approx 12,2$ m.



2259.



A jelöli a pálya alját, C a tetejét és T pontban törik meg.
Ekkor ABC derékszögű háromszögben
$AB = 150 \cdot \operatorname{ctg} 14°36' \approx 576$, így ADT és TEC derékszögű háromszögekben:

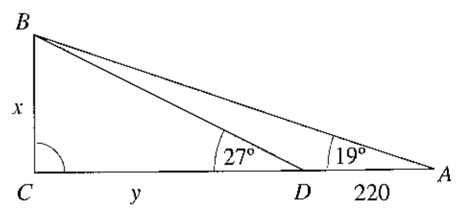
$\dfrac{y}{576 - x} = \operatorname{tg} 11°24'$ és $\dfrac{150 - y}{x} = \operatorname{tg} 20°54'$, amiből $x \approx 188$ m és $y \approx 78$ m.

Innen kiszámítható az ATC töröttvonal, vagyis a kötélpálya hossza:
$AT \approx 395$ m, $TC \approx 201$ m, tehát a pálya hossza közelítőleg 596 m.

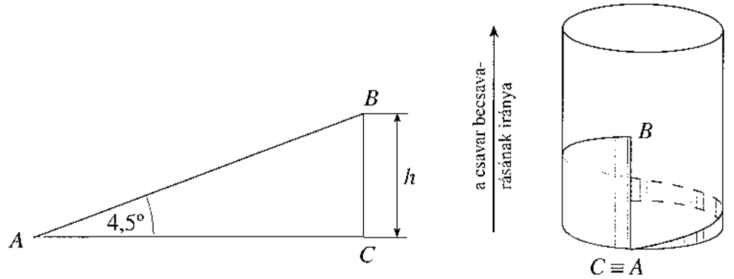
2260. A torony alját C, a tetejét B jelöli, A és D a két nézőpont. Ekkor az ábra jelölései szerint a BDC és BAC derékszögű háromszögekben:

$\dfrac{x}{y} = \operatorname{tg} 27°$ és $\dfrac{x}{y + 220} = \operatorname{tg} 19°$,

amiből $x \approx 233,6$ m, tehát a torony közelítőleg 234 m magas.

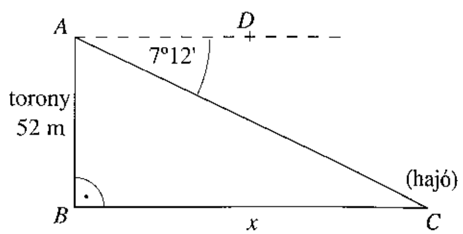


2261.

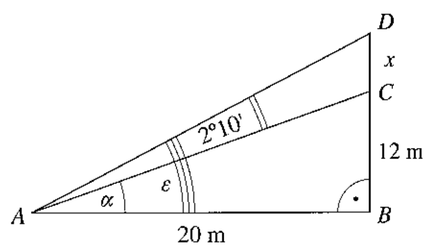


A csavarvonal úgy jön létre, hogy az ábrán látható derékszögű háromszöget egy hengerre csavarjuk fel. A csavar becsavarásának irányát is feltüntettük. Egy fordulat alatt C-ből B-be jut a csavar. Az $ABC\,\Delta$ AC oldala éppen a csavar (henger) alapkörének kerülete, azaz $AC = 2r\pi$.
Feladatunk az $ABC\,\Delta$ $BC = h$ magasságának meghatározása
$h = 2r\pi \operatorname{tg} 4{,}5° \approx 1{,}236 \Rightarrow h \approx 1{,}2$ mm.

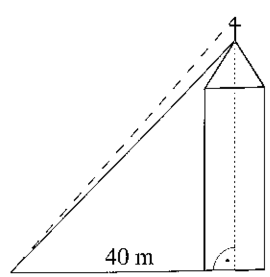
2262. $ACB\sphericalangle = CAD\sphericalangle = 7°12'$ (váltószögek).
ABC derékszögű háromszögben
$\operatorname{tg} 7°12' = \dfrac{52}{x} \Rightarrow x \approx 411{,}6$ (m).
Tehát a hajó a világítótoronytól kb. 412 m távolságra van.



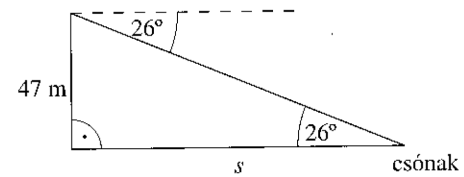
2263. ABC derékszögű háromszögben
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{12}{20} \Rightarrow \alpha = 30°58'$.
ABD derékszögű háromszögben
$\varepsilon = \alpha + 2°10' = 33°8'$;
$\operatorname{tg} 33°8' = \dfrac{x+12}{20} \Rightarrow x \approx 1{,}05$.
Tehát a szobor kb. 1 méter magas.



2264. A torony magassága így $40 \cdot \operatorname{tg} 56{,}31° = 60$ (m), a kereszttel együtt mért magassága pedig
$40 \cdot \operatorname{tg}(56{,}31° + 2{,}47°) = 40 \cdot \operatorname{tg} 58{,}78° = 66$ (m).
A kereszt tehát 6 m magas.



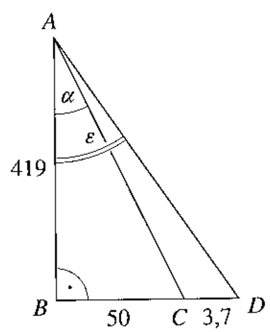
2265. a) Jelölje az ábrán látható s a csónak parttól való távolságát, ekkor a feltételek szerint: $\operatorname{tg} 26° = \dfrac{47}{s}$,
ahonnan $s \approx 96{,}4$ méter.



b) Ha kétszer ilyen messze van a csónak, akkor kb. 192,7 méterre van, ekkor $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{47}{192{,}7}$, ahonnan $\alpha \approx 13{,}7°$. Ez tehát a kétszer olyan messze levő csónak depressziószöge a toronyból.

c) Ha 44°-os a depressziószög, akkor a parttól való t távolságra: $\operatorname{tg} 44° = \dfrac{47}{t}$,
ahonnan $t \approx 48{,}7$ méter.
Tehát fél perc = 30 s alatt megtett a csónak $96{,}4 - 48{,}7 = 47{,}7$ métert, azaz sebessége, ha egyenletesen haladt: $v \approx \dfrac{47{,}7\text{ m}}{30\text{ s}} \approx 1{,}59\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \approx 5{,}72\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

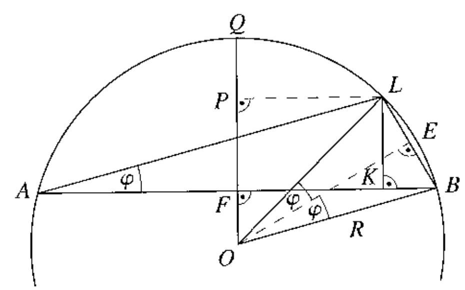
2266. ABC derékszögű háromszögben
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{50}{419} \Rightarrow \alpha = 6°48'$.
ABD derékszögű háromszögben
$\operatorname{tg}\varepsilon = \dfrac{53{,}7}{419} \Rightarrow \varepsilon = 7°18'$.
Mivel $\varepsilon - \alpha = 30'$ és szemünk felbontóképessége kb. 1', így szemünk érzékelhette a kérdéses autót.



2267. Legyen $FQ = x$. Az OPL, illetve az OFB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel miatt

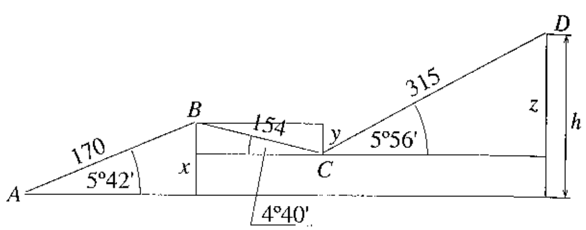
$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & (R - x + 1{,}52)^2 + 34^2 = R^2 \\ \text{II.} & (R - x)^2 + 40^2 = R^2 \end{array}\right\}$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat $3{,}04(R - x) = 40^2 - 34^2 - 1{,}52^2$, amelyből $R - x \approx 145$; $R \approx 150$ m; $x \approx 5$ m.



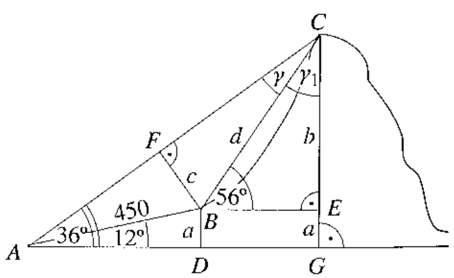
Másik megoldás:
$AB = 80$ m, $KB = 6$ m, $KL = 1{,}52$ m $\Rightarrow AK = 74$ m.
A kerületi és középponti szögek tétele szerint az R sugarú körben az LB ívhez tartozó LOB középponti szög (2φ) kétszer akkora, mint az ugyanahhoz az ívhez tartozó LAB kerületi szög (φ).
Így LKA derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{KL}{AK} \Rightarrow \varphi \approx 1{,}18°$.
LKB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel miatt:
$LB^2 = KL^2 + KB^2$; $LB \approx 6{,}19$.
LOB háromszög egyenlőszárú, az LB alaphoz tartozó OE magasság felezi az alapot és a szárszöget. Az OEB derékszögű háromszögben $\sin\varphi = \dfrac{EB}{R} \Rightarrow R \approx 150$.
Az AB húrra merőleges átmérő felezi a húrt, így F felezőpont, az OFB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel miatt $OF^2 = R^2 - FB^2 \Rightarrow OF \approx 145$.
Tehát a tartószerkezet körívének sugara kb. 150 m,
a legnagyobb magasság $FQ = R - OF \approx 5$ m.

2268. Az ábráról leolvasható, hogy az A és D pont közötti szintkülönbség
$h = x - y + z$.
$x = 170 \sin 5°42' \approx 16{,}88$;
$y = 154 \sin 4°48' \approx 12{,}53$;
$z = 315 \sin 5°56' \approx 32{,}56$;
$h \approx 36{,}9$.



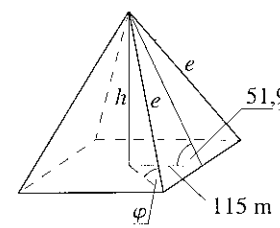
Az út végpontja a kiindulópontnál kb. 36,9 méterrel van magasabban.

2269. Az ábrán feltüntetett adatok és jelölések szerint a keresett hegymagasság
$CG = a + b$.
Az ABD Δ-ben $a = 450 \sin 12°$.
Az ABF Δ-ben $c = 450 \sin 24°$.
Az EBC Δ-ben $\gamma_1 = 90° - 56° = 34°$.
Az ACG Δ-ben $\gamma + \gamma_1 = 90° - 36° = 54°$,
innen $\gamma = 54° - 34° = 20°$.
Az FBC Δ-ben $\sin 20° = \dfrac{c}{d}$,



innen $d = \dfrac{c}{\sin 20°} = \dfrac{450 \sin 24°}{\sin 20°}$, $b = d \sin 56° = \dfrac{450 \sin 24° \sin 56°}{\sin 20°} \approx 443{,}7$.
A hegy magassága $CG \approx 537$ m.

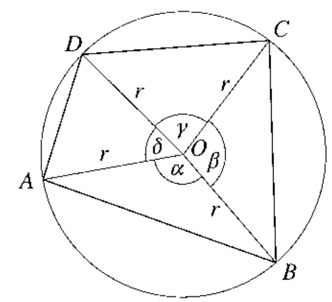
2270. a) A magasság az ábrán látható derékszögű „függőleges metszetű" háromszögben h-val jelölt szakasz. Mivel a háromszög alapja az alapél fele, 115 m,
ezért $\operatorname{tg} 51{,}9° = \dfrac{h}{115}$, ahonnan $h \approx 146{,}7$ méter,
azaz kb. ilyen magas a Kheopsz-piramis.



b) Az ábrán φ jelöli a keresett oldalél-alaplap szöget,
amire $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{146{,}7}{115\sqrt{2}}$, azaz $\varphi \approx 42°$.

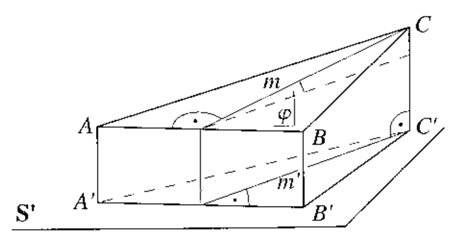
c) Az oldalél hossza pl. egy Pitagorasz-tételből adódik:
$146{,}7^2 + (115\sqrt{2})^2 = e^2$, ahonnan $e \approx 219$ méter.
Tehát az oldalélek kb. 219 méter hosszúak.
(Kicsit rövidebbek, mint az alapnégyzet éle.)

2271. Vizsgáljuk először azokat az $ABCD$ négyszögeket, amelyek tartalmazzák a kör O középpontját. Ezek felbonthatók négy egyenlő szárú háromszögre, amelyek szárai r hosszúak, a szárak által bezárt szögek pedig α, β, γ, δ nagyságúak.
A négyszög területe felírható a háromszögek területének összegeként, amit $\sin\varphi \le 1$ egyenlőtlenség felhasználásával felülről becsülve:



$T = \dfrac{1}{2}r^2 \sin\alpha + \dfrac{1}{2}r^2 \sin\beta + \dfrac{1}{2}r^2 \sin\gamma + \dfrac{1}{2}r^2 \sin\delta \le 2r^2$ adódik.
Tehát bármely szóba jövő négyszög területe maximum $2r^2$, ami $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$ esetén és csak ekkor valósul meg, azaz ha $ABCD$ négyszög egy négyzet.
Azok a négyszögek, amelyek O-t nem tartalmazzák a félkörön belül vannak, ezért területük kisebb $\dfrac{1}{2}r^2\pi$-nél, tehát $2r^2$-nél is, így a maximális területű négyszög a négyzet.

2272. Feltétel: $AB \parallel A'B'$, ezért $AB = A'B'$.
AB illeszkedik az **S**-re, az $A'B'$ az **S'**-re.
S és **S'** metszésvonala (ha van) e,
(**S**, **S'**) $\sphericalangle = \varphi$.
Az ABC Δ-nek az **S'**-re eső merőleges vetülete $A'B'C'$ Δ.

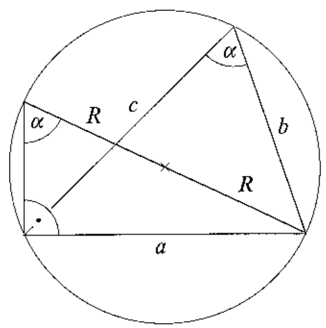


Az $ABC\,\Delta$ AB-hez tartozó magassága m.
Az $A'B'C'\,\Delta$ $A'B'$-höz tartozó magassága m'.
I. Ha $\mathbf{S} \parallel \mathbf{S'}$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz, hiszen ekkor $m = m'$ és $\varphi = 0$ miatt $\cos\varphi = 1$, $t' = t$.
II. Ha $\mathbf{S} \nparallel \mathbf{S'}$, akkor a C-re illeszkedő, AB-re merőleges (un. vetítő-) sík illeszkedik C'-re is és a két háromszögből az m, illetve m' magasságot metszi ki.
Ezért $m' = m\cos\varphi$, továbbá

$$t'_{A'B'C'} = \frac{A'B'\cdot m'}{2} = \frac{AB\cdot m\cos\varphi}{2} = \frac{AB\cdot m}{2}\cos\varphi = t_{ABC}\cos\varphi.$$

Megjegyzés:
Ábránkon a háromszög teljes egészében az **S'** sík által kettéosztott tér egyikében van. Minden más esetben is igaz az összefüggés, mert az **S'** sík önmagával párhuzamosan eltolható továbbá a párhuzamos eltolás nem változtatja meg a vetület területét. Ennek ismeretében a bizonyítást lehet azzal a speciális esettel kezdeni, amikor AB egybeesik $A'B'$-vel, azaz a két sík e metszésvonalára esik.

2273. a) A háromszög számos terület-képlete között van ilyen is:
$T = 2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$, ahol az egyes paraméterek épp a most ismert adatokat jelentik. Tehát
$T = 2\cdot 8^2\cdot\sin 53°\cdot\sin 62°\cdot\sin 65° \approx$
$\approx 81{,}80$ (cm²).



Másik megoldás:
Kössük össze a háromszög csúcsait a köréírt kör középpontjával. Mivel a háromszög szögei 53°, 62°, 65°, a hozzájuk tartozó középponti szögek rendben 106°, 124°, 130° a kerületi-középponti szögek tétele miatt. A behúzott sugarak az $ABC\,\Delta$-et három egyenlőszárú háromszögre bontják, amelyek területének összege:

$$T_{ABC} = T_{BCO} + T_{CAO} + T_{ABO} = \frac{R^2}{2}(\sin 106° + \sin 124° + \sin 130°) \approx 81{,}80 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) A kerületi szögek tétele és a Thalész-tétel miatt minden háromszög minden oldalára igaz, hogy az a körülírt kör átmérőjének és a szemközti szög szinuszának szorzata. Így $a = 2R\cdot\sin\alpha = 16\cdot\sin 53° \approx 12{,}78$ (cm),
$b = 2R\cdot\sin\beta = 16\cdot\sin 62° \approx 14{,}13$ (cm),
$c = 2R\cdot\sin\gamma = 16\cdot\sin 65° \approx 14{,}50$ (cm).

c) A beírható kör r sugara is számos terület-képletben szerepel, talán itt most a legcélszerűbb: $T = Rr(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$. Egyenlővé téve ezt az a)-ban használttal, kapjuk: $r = \dfrac{2R\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \dfrac{16\cdot\sin 53°\cdot\sin 62°\cdot\sin 65°}{\sin 53°+\sin 62°+\sin 65°} \approx 3{,}95$ (cm).

2274. Tudjuk, hogy két oldal és a közbezárt szög ismeretében $t = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$, másrészt a szinusztételből $b = a\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Ezekből adódik $t = \dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$ *. Ez a képlet akkor alkalmazható, ha adott a háromszög egy oldala és két szöge. A harmadik szöget kell előbb a két ismertből kiszámítani.

$$t = \frac{12{,}5^2\sin 71{,}2°\sin 36{,}67°}{2\sin 72{,}13°} \approx 46{,}4 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2275. Előbb a harmadik szöget számítjuk ki. Lásd a 2274. feladat megoldásában a *-gal jelölt képlet levezetésének gondolatmenetét!

2276. Legyen $a < b < c$. A háromszög leghosszabb oldalára felírjuk a koszinusztételt:
$16^2 = 8^2 + 10^2 - 2\cdot 8\cdot 10\cdot\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = -0{,}575 \Rightarrow \gamma \approx 125{,}1°$.
A háromszög egy másik szöge pl. szinusztétellel számolható:
$\dfrac{8}{16} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 125{,}1°} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0{,}4091 \Rightarrow \alpha \approx 24{,}1°$.
Mivel $\gamma > 90°$, így α csak hegyesszög lehet. $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 30{,}8°$.

2277. a) A legnagyobb oldallal szemközti szöget meghatározzuk koszinusztétellel (mert a koszinusz visszakeresése a szóba jöhető 0°—180° tartományban egyértelmű):
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$, amiből $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, most
$\dfrac{8^2 + 3{,}\dot{3}^2 - 10^2}{2\cdot 8\cdot 3{,}\dot{3}} = -0{,}4\dot{6}$, ezért $\alpha \approx 117{,}82°$. Egy következő szöget meghatározunk szinusztétellel (itt a visszakeresésnek már csak a hegyesszög-eredménye jöhet szóba, hiszen egy háromszögnek a nem legnagyobb szöge más nem lehet):
$\dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{a}$, amiből $\sin\beta = \dfrac{b\cdot\sin\alpha}{a}$, most $\dfrac{8\cdot\sin 117{,}82°}{10} \approx 0{,}7075$, ezért
$\beta \approx 45{,}04°$. Végül a harmadik szöget a szögösszegből számoljuk ki:
$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 17{,}15°$. (A kerekített értékekre nem „stimmel" a szögösszeg; de ez előfordulhat, hiszen a számológépen végig a – gép számábrázolási határáig, általában 9-10 jegyig – „pontos" értékekkel számoltunk, felhasználva annak memóriáját/memóriáit, a felírásban azonban kevesebb értékes jeggyel is beértük.)

b) Vagy az előző ponthoz hasonlóan járunk el (most $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{10^2+24^2-26^2}{2\cdot 10\cdot 24} = 0$), vagy ránézésre felismerjük a pitagoraszi számhármast, mindenesetre $\gamma = 90°$. Ekkor egyszerű visszakereséssel (pl.) $\sin\beta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{24}{26}$, amiből $\beta \approx 67{,}38°$, és a szögösszegből $\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 22{,}62°$.

c) Végigszámolhatjuk az a)-ban ismertetett módszerrel; de szellemesebb, igényesebb felismerni, hogy ez a háromszög hasonló az a)-belihez: ugyan fordított sorrendben, de minden oldal háromszorosa az ottaninak. Akkor a szögei ugyanakkorák, bár szintén fordított sorrendben: $\alpha \approx 17{,}15°$, $\beta \approx 45{,}04°$, $\gamma \approx 117{,}82°$.

d) Ennek is nekiállhatunk az a)-ban megismert módon (most $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{10^2+24^2-35^2}{2\cdot 10\cdot 24} = -1{,}14375$, ami lehetetlen) vagy ránézésre felismerjük, hogy nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség ($10 + 24 < 35$), mindenesetre ilyen háromszög nincs.

2278. Mindhárom esetben (a, b és c) a szinusztételt alkalmazzuk.

a) $\frac{a}{9{,}2} = \frac{\sin 110°}{\sin 26{,}2°} \Rightarrow a = \frac{9{,}2\sin 110°}{\sin 26{,}2°} \approx 19{,}58;$ $a \approx 19{,}6$ cm;

$\beta = 180° - (110° + 26{,}2°) = 43{,}8°$

$\frac{b}{9{,}2} = \frac{\sin 43{,}8°}{\sin 26{,}2°} \Rightarrow b = \frac{9{,}2\sin 43{,}8°}{\sin 26{,}2°} \approx 14{,}42;$ $b \approx 14{,}4$ cm.

b) $\frac{\sin\beta}{\sin 72°} = \frac{1{,}2}{2{,}1} \Rightarrow \sin\beta = \frac{1{,}2\sin 72°}{2{,}1} \approx 0{,}5435$

β nem lehet tompaszög, mert $1{,}2 < 2{,}1 \Rightarrow \beta < 72°$, ezért $\beta \approx 32{,}92°$

$\alpha = 180° - (72° + 32{,}92°) = 75{,}08°$

$\frac{a}{2{,}1} = \frac{\sin 75{,}08°}{\sin 72°} \Rightarrow a = \frac{2{,}1\sin 75{,}08°}{\sin 72°} \approx 2{,}13$ $a \approx 2{,}13$ dm

c) $\alpha = 180° - (34° + 45{,}3°) = 100{,}7°$

$\frac{b}{32} = \frac{\sin 34°}{\sin 100{,}7°} \Rightarrow b = \frac{32\sin 34°}{\sin 100{,}7°} \approx 18{,}21$ $b \approx 18{,}2$ cm

$\frac{c}{32} = \frac{\sin 45{,}3°}{\sin 100{,}7°} \Rightarrow c = \frac{32\sin 45{,}3°}{\sin 100{,}7°} \approx 23{,}15$ $c \approx 23{,}15$ cm

2279. Mind az a), mind a b) esetben a koszinusztétellel kezdjük a számítást, majd folytathatjuk a szinusztétellel.

a) $a^2 = 7{,}0^2 + 4{,}6^2 - 2\cdot 7{,}0\cdot 4{,}6\cos 72° \approx 50{,}26$ $a \approx 7{,}089$ $a \approx 7{,}1$ cm

$\frac{\sin\beta}{\sin 72°} = \frac{7}{7{,}089} \Rightarrow \sin\beta = \frac{7\sin 72°}{7{,}089} \approx 0{,}9391$ $\beta \approx 70°$

A β nem lehet tompaszög, ti. $7 < 7{,}089$ miatt $\beta < 72°$ (Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.)

$\gamma = 180° - (72° + 70°) \approx 38°$

b) Célszerű először a legnagyobb szöget meghatározni (ez a leghosszabb oldallal van szemben), mert ezzel eldől, hogy a háromszög hegyes- vagy tompaszögű-e. Ez a koszinusztétellel állapítható meg. (Ha a szög koszinusza negatív, akkor a szög tompaszög.)

$8{,}4^2 = 6{,}7^2 + 4{,}9^2 - 2\cdot 6{,}7\cdot 4{,}9\cos\alpha \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{6{,}7^2 + 4{,}9^2 - 8{,}4^2}{2\cdot 6{,}7\cdot 4{,}9} \approx -0{,}0253 \Rightarrow \alpha \approx 91{,}45°$

$\frac{\sin\beta}{\sin 91{,}45°} = \frac{6{,}7}{8{,}4} \Rightarrow \sin\beta = \frac{6{,}7\sin 91{,}45°}{8{,}4} \approx 0{,}7974$ $\beta \approx 52{,}88°$

A β hegyesszög, mert van már a háromszögnek tompaszöge ($\alpha > 90°$)

$\gamma = 180° - (91{,}45° + 52{,}88°) = 35{,}67°$

2280. Vigyázzunk, mert két oldal és a rövidebbikkel szemközti szög adott, tehát nem feltétlenül van (vagy nem egyértelmű a) megoldás – de ha többfélét kapunk sem biztos, hogy mindegyik lehetséges, meg is valósul. A szinusztételt felírva:

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$, amiből $\sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\gamma}{c}$, most $\frac{6\cdot\sin 50°}{5} \approx 0{,}9193$, ezért $\alpha_1 \approx 66{,}82°$ vagy $\alpha_2 \approx 113{,}18°$. (Kiegészítő szögek szinusza azonos, ezért a visszakeresés nem egyértelmű.) Ekkor a szögösszegből $\beta_1 \approx 63{,}18°$ vagy $\beta_2 \approx 16{,}82°$. Egy újabb szinusztétellel: $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$ (figyelem, ahol csak lehet, az eredetileg megadott értékekkel dolgozunk – c, γ –, nem az általunk közben kiszámoltakkal – α –, mert azt elronthattuk!), amiből $b = \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$, most $b_1 \approx 5{,}83$ vagy $b_2 \approx 1{,}89$. Ellenőriznünk kell, hogy mindkét eredménysor lehetséges-e! A szögösszeg mindkét esetben „stimmel" (persze, hiszen felhasználtuk a megoldás során), és teljesül a „nagyobb szöggel szemközt nagyobb oldal van" tulajdonság is. Egyszerű szűréssel tehát nem találtunk hamis eredményt. Számszerűen ellenőrizni kell (mégpedig az alkalmazotthoz képest másik módszerrel), hogy megvalósulhat-e mindkét háromszög.

Felírva a koszinusztételt: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$, amibe beírva β két lehetséges értékét, valóban a b-re már kijött eredményeket kapjuk, tehát mindkét eredménysor létező háromszöget takar.

$a = 6$	$b \approx 5{,}83$	$c = 5$
$\alpha \approx 66{,}82°$	$\beta \approx 63{,}18°$	$\gamma = 50°$

$a = 6$	$b \approx 1{,}89$	$c = 5$
$\alpha \approx 113{,}18°$	$\beta \approx 16{,}82°$	$\gamma = 50°$

2281. a) Vigyázzunk, mert két oldal és a rövidebbikkel szemközti szög adott, tehát nem feltétlenül van (vagy nem egyértelmű a) megoldás – de ha többfélét kapunk sem biztos, hogy mindegyik lehetséges, meg is valósul.
(Lásd előző feladat! Most egy kicsit más megoldási utat mutatunk.)
Egy szinusztételt felírva: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$, amiből $\sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\gamma}{c}$, most $\frac{7\cdot\sin 40°}{6} \approx 0,7499$, ezért $\alpha_1 \approx 48,58°$ vagy $\alpha_2 \approx 131,42°$.
Ekkor a szögösszegből $\beta_1 \approx 91,42°$ vagy $\beta_2 \approx 8,58°$.
Felírunk egy koszinusztételt:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$, amit rendezve: $b^2 - 2a\cdot\cos\gamma\cdot b + a^2 - c^2 = 0$.
Ez egy másodfokú egyenlet b-re, konkrétan (kerekített elsőfokú együtthatóval):
$b^2 - 10,72b + 13 = 0$.
Megoldva: $b_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 9,33 \\ 1,39 \end{matrix} \right.$.

$a = 7$	$b \approx 9,33$	$c = 6$
$\alpha \approx 48,58°$	$\beta \approx 91,42°$	$\gamma = 40°$

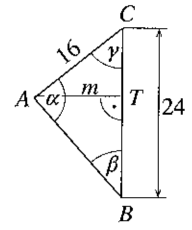
$a = 7$	$b \approx 1,39$	$c = 6$
$\alpha \approx 131,42°$	$\beta \approx 8,58°$	$\gamma = 40°$

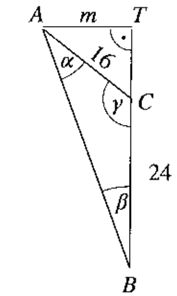
Ellenőriznünk kell, hogy mindkét eredménysor lehetséges-e. A szögösszeg mindkét esetben „stimmel" (persze, hiszen felhasználtuk a megoldás során), és teljesül a „nagyobb szöggel szemközt nagyobb oldal van" tulajdonság is. Egyszerű szűréssel tehát nem találtunk hamis eredményt. Számszerűen ellenőrizni kell (mégpedig az alkalmazotthoz képest másik módszerrel), hogy megvalósulhat-e mindkét háromszög.
Felírva egy szinusztételt: $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$, amiből $b = \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$, amibe beírva β két lehetséges értékét, valóban a b-re már kijött eredményeket kapjuk, tehát mindkét eredménysor létező háromszöget takar.

b) Kétféleképp felírva egy háromszög területét: $T = \frac{ab\cdot\sin\gamma}{2} = rs$ (ahol s a fél kerület), kapjuk a beírt kör sugarára: $r = \frac{ab\cdot\sin\gamma}{2s} = \frac{ab\cdot\sin\gamma}{a+b+c}$. Beírva az adatokat, kapjuk: $r_1 \approx 1,88$ vagy $r_2 \approx 0,44$.

c) Bármely háromszögben egy oldalra, a szemközti szögre és a körülírt kör sugarára: $c = 2R\cdot\sin\gamma$ (l. pl. 2273. megoldás). Ekkor $R = \frac{c}{2\cdot\sin\gamma} \approx 4,67$ – mindkét háromszög esetén.

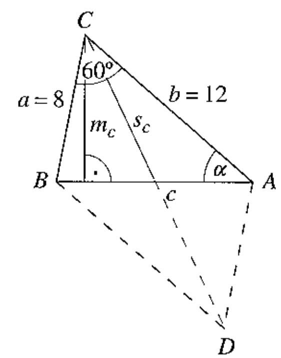
2282. $T = \frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}$, amiből $\gamma \approx 51,38°$ vagy $128,62°$.
Bármelyik esetben a 24-es oldalhoz tartozó magasság $m = 150 : 12 = 12,5$, ebből $CT = \sqrt{16^2 - m^2} \approx 9,99$.
Az első esetben ekkor $BT = 24 - CT \approx 14,01$, és $\operatorname{tg}\beta = \frac{m}{BT}$ révén $\beta \approx 41,74°$, a szögösszeg miatt pedig $\alpha \approx 86,88°$ – ez a háromszög nem tompaszögű!



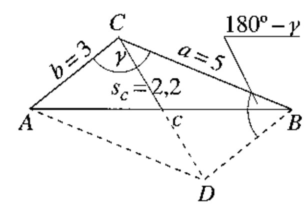


A másik eset már γ miatt biztosan tompaszögű, itt $BT = 24 + CT \approx 33,99$, így $\operatorname{tg}\beta = \frac{m}{BT}$ révén $\beta \approx 20,19°$, a szögösszeg miatt pedig $\alpha \approx 31,19°$.

2283. Ekkor koszinusztétellel $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$, amiből $c = \sqrt{112} \approx 10,58$, ezután a háromszög területét két módon felírva: $\frac{cm_c}{2} = \frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$; amelyből $m_c = \frac{ab\sin\gamma}{c} = 7,856$.
A súlyvonal meghatározásához egészítsük ki háromszögünket paralelogrammává, ennek egyik átlója $2s_c$.
Koszinusztétellel az ADC Δ-ből
$2s_c = \sqrt{8^2 + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12\cdot\cos 120°} = \sqrt{304} \approx 17,44$,
ahonnan $s_c = \sqrt{76} \approx 8,72$.

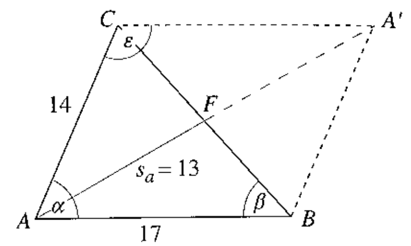


2284. Háromszögünket paralelogrammává kiegészítve, annak egyik átlója épp az ismert súlyvonal kétszerese. A BCD Δ-ben felírva a koszinusztételt:
$(2s_c)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(180° - \gamma)$, amiből
$\cos(180° - \gamma) = \frac{a^2 + b^2 - 4s_c^2}{2ab}$.
Az eredeti, ABC Δ-ben felírva egy másik koszinusztételt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$. Felhasználva, hogy
$\cos\gamma = -\cos(180° - \gamma) = \frac{4s_c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$, ezt így írhatjuk: $c^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4s_c^2 = 2\cdot 5^2 + 2\cdot 3^2 - 4\cdot 2,2^2 = 48,64$.



Ezért $c = \sqrt{48,64} \approx 6,97$. (L. még a 3587.-es megoldást!)

2285. Használjuk az ábra jelöléseit! Tükrözzük a háromszög A csúcsát a szemközti oldal F felezőpontjára (A')! $AA' = 2s_a = 26$. A keletkezett $ACA'B$ négyszög a tükrözés miatt paralelogramma. Az $AA'C$ háromszögben koszinusztétellel kiszámoljuk a leghosszabb oldallal, AA'-vel szemközti szöget.



$26^2 = 14^2 + 17^2 - 2 \cdot 14 \cdot 17 \cdot \cos\varepsilon \Rightarrow \cos\varepsilon \approx -0{,}4013 \Rightarrow \varepsilon \approx 113{,}7°$. Mivel a paralelogramma egy oldalon fekvő szögei egymást 180°-ra egészítik ki, ezért az eredeti háromszögben $\alpha = 180° - \varepsilon = 66{,}3°$.

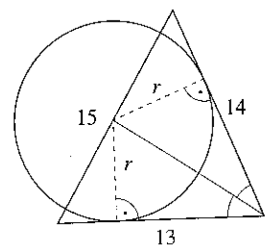
A háromszög harmadik oldala koszinusztétellel:

$a^2 = 14^2 + 17^2 - 2 \cdot 14 \cdot 17 \cdot \cos 66{,}3° \Rightarrow a \approx 17{,}1$ cm. Mivel ez a háromszög legnagyobb oldala, ezért a háromszög másik szögét pl. szinusztétellel számíthatjuk (a szög α-nál biztos kisebb lesz, mert egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik).

$$\frac{14}{17{,}1} = \frac{\sin\beta}{\sin 66{,}3°} \Rightarrow \sin\beta \approx 0{,}7497 \Rightarrow \beta \approx 48{,}6°$$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 65{,}1°$.

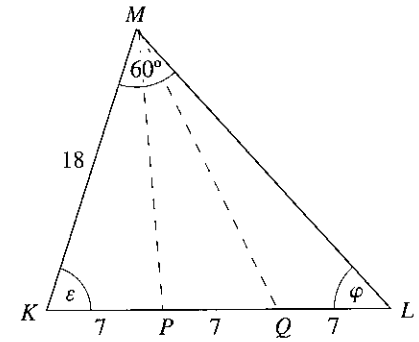
2286. A 15-ös oldallal szemközti szögre egy koszinusztételből: $\cos\gamma = \dfrac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \dfrac{5}{13}$. Mivel ez egy hegyesszög, szinusza: $\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \dfrac{12}{13}$. A háromszög területe: $T = \dfrac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot \frac{12}{13}}{2} = 84$.



(Vagy másképpen a Héron-képlettel: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol s a kerület fele, most: $s = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$. Így $T = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84$.) A keresett kör középpontja a 15-ös oldal és a szemközti szög felezőjének metszéspontja. Ez a szögfelező két háromszögre vágja az eredetit, amelyek területe („alapszor magasság per kettő" képlettel) $\dfrac{14r}{2}$ és $\dfrac{13r}{2}$. Ezek összege az eredeti háromszög területe, 84; és így kapjuk: $r = \dfrac{56}{9} = 6{,}\dot{2}$.

2287. Egy lehetséges terv az ábra jelöléseit használva:

1. φ kiszámítása a KLM háromszögből szinusztétellel;
2. $\varepsilon = 120° - \varphi$;
3. MP kiszámítása a KPM háromszögből koszinusztétellel;
4. $KMP\sphericalangle$ kiszámítása szinusztétellel a KMP háromszögből;
5. MQ kiszámítása a KMQ háromszögből koszinusztétellel;
6. $KMQ\sphericalangle$ kiszámítása szinusztétellel a KMQ háromszögből;
7. $PMQ\sphericalangle = KMQ\sphericalangle - KMP\sphericalangle$;
8. $LMQ\sphericalangle = 60° - KMQ\sphericalangle$.



A terv megvalósítása:

1. $\sin\varphi = \dfrac{18}{21} \cdot \sin 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{7} \approx 0{,}7423 \Rightarrow \varphi \approx 47{,}93°$ (hiszen $\varphi < 60°$);
2. $\varepsilon \approx 72{,}07°$;
3. $MP = \sqrt{18^2 + 7^2 - 2 \cdot 18 \cdot 7 \cdot \cos 72{,}07°} \approx 17{,}19$ (cm);
4. $\sin KMP\sphericalangle = \dfrac{7}{17{,}19} \cdot \sin 72{,}07° \approx 0{,}3874 \Rightarrow KMP\sphericalangle \approx 22{,}80°$;
5. $MQ = \sqrt{18^2 + 14^2 - 2 \cdot 18 \cdot 14 \cdot \cos 72{,}07°} \approx 19{,}10$ (cm);
6. $\sin KMQ\sphericalangle = \dfrac{14}{19{,}10} \cdot \sin 72{,}07° \approx 0{,}6974 \Rightarrow KMQ\sphericalangle \approx 44{,}22°$;
7. $PMQ\sphericalangle \approx 44{,}22° - 22{,}80° = 21{,}42°$;
8. $LMQ\sphericalangle \approx 60° - 44{,}22° = 15{,}78°$.

A keresett szögek tehát: 22,80°, 21,42° és 15,78°.

2288. BCD derékszögű háromszögben

$\operatorname{tg} 15° = \dfrac{CD}{2} \Rightarrow CD = 0{,}536 \approx 0{,}5$ (cm).

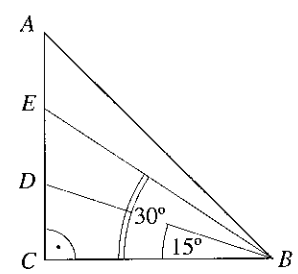
BCE derékszögű háromszögben

$\operatorname{tg} 30° = \dfrac{EC}{2} \Rightarrow EC = 1{,}155 \approx 1{,}2$ (cm).

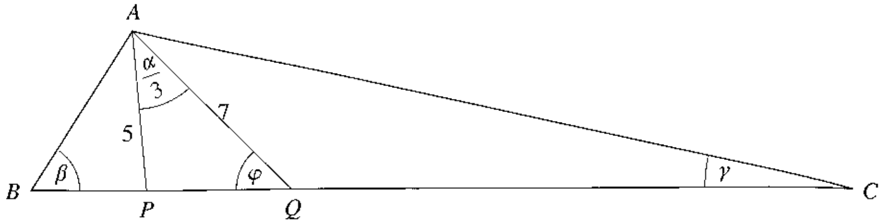
Így az osztásvonalak a befogót

$CD \approx 0{,}5$ cm-es, $DE \approx 0{,}7$ cm-es,

$EA \approx 0{,}8$ cm-es szakaszokra osztják.



2289.



$\frac{\alpha}{3} = 39°\,28'$

A PQ szakasz koszinusztétellel: $PQ = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot \cos 39°\,28'} = 4,47$ (cm).

Az AQP háromszögből szinusztétellel: $\frac{\sin\varphi}{\sin 39°\,28'} = \frac{5}{4,47}$, amiből $\varphi < 90°$ miatt $\varphi = 45,32° = 45°19'$.

Az ABC háromszög β és γ szöge most már könnyen meghatározható.

Mivel φ külső szöge az AQC háromszögnek, ezért $\varphi = \gamma + \frac{\alpha}{3}$, amiből

$\gamma = \varphi - \frac{\alpha}{3} = 5°\,51'$ és így $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 55°45'$.

A háromszög oldalainak meghatározásához először a BP és a QC szakaszokat célszerű meghatározni, végül a háromszög AB és AC oldalának hosszát. A szögek ismeretében mindegyik esetben számolhatunk szinusztétellel is.

Az ABP háromszögből $\frac{BP}{AP} = \frac{\sin\frac{\alpha}{3}}{\sin\beta}$, amiből $BP = \frac{5\cdot\sin 39°\,28'}{\sin 55°\,45'} = 3,84$ (cm).

Hasonló módon kapjuk az ACQ háromszögből, hogy

$CQ = \frac{7\cdot\sin 39°\,28'}{\sin 5°\,51'} = 43,65$ (cm) és így $BC = 3,84 + 4,47 + 43,65 = 51,96$ (cm).

Az ABC háromszögből $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, amiből $AB = \frac{51,96\cdot\sin 5°\,51'}{\sin 118°\,24'} = 6,02$ (cm),

illetve $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, amiből $AC = \frac{51,96\cdot\sin 55°\,45'}{\sin 118°\,24'} = 48,83$ (cm).

Az ABC háromszög oldalai tehát 51,96 cm, 48,83 cm és 6,02 cm hosszúak, az oldalakkal szemben rendre 118°24', 55°45' és 5°51' nagyságú szögek vannak.

2290. Az e és f átlót koszinusztétellel számítjuk ki.

$e^2 = 5,8^2 + 7,4^2 - 2\cdot 5,8\cdot 7,4\cos 48°18' \approx 31,30$ $\quad e \approx 5,6$ cm

A másik átló meghatározásához előbb ki kell számítani a vele szemközti szöget (a paralelogramma másik szögét) is. $\beta = 180° - 48°18' = 131°42'$

$f^2 = 7,4^2 + 5,8^2 - 2\cdot 5,8\cdot 7,4\cos 131°42' \approx 145,50$ $\quad f \approx 12,1$ cm

Megjegyzés:

A β kiszámítása nélkül is cél érthető, ti. $\cos\beta = -\cos 48°18'$.

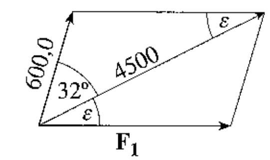
2291. Ha az ABC háromszöget az AB-re tükrözzük, akkor a két háromszög együtt éppen szabályos háromszöget alkot (mindhárom oldala 8 egység hosszú), tehát $CAB\sphericalangle = 30°$. Mivel AC és BD szöge 75°, ezért $ABD\sphericalangle$ szintén 75°, mivel a háromszögek (és így az A, B és az átlók metszéspontja alkotta háromszög) szögösszege 180°. Ekkor azonban a $DBC\sphericalangle = 90° - 75° = 15°$, és mivel $BC = CD = 4$, ezért a $BDC\sphericalangle$ is 15°. Ekkor a $BCD\sphericalangle$-re a szögösszegből 150° adódik. $BCA\sphericalangle$ viszont 60°, tehát a $DCA\sphericalangle$ is 90°. Eszerint $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{8} = 0,5$, ahonnan $\alpha \approx 26,6°$.

2292. Az **F** eredőt megszerkeszthetjük a vektorösszeadás valamelyik szabálya (paralelogramma- vagy háromszög-szabály) szerint. Az eredő erő hossza egy olyan háromszög oldalahosszúsága, amelynek két oldala 400, illetve 600 egység, az ezek által közbezárt szög 180° – 105° = 75°. Koszinusztételt alkalmazunk.

$|\mathbf{F}|^2 = 400^2 + 600^2 - 2\cdot 400\cdot 600\cos 75° \approx 395\,800$ $\quad |\mathbf{F}| \approx 629,1$.

Az eredő erő nagysága $|\mathbf{F}| \approx 629$ N.

2293. A vektorösszeadás szabályának megfelelő ábra feltünteti, hogy a két összetevő, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, és az eredő **F** erőt jelképező vektorok háromszöget zárnak be. Az $\mathbf{F}_1$ összetevő nagyságát koszinusztétellel számítjuk ki.



$|\mathbf{F}_1|^2 = 600,0^2 + 4500^2 - 2\cdot 600,0\cdot 4500\cos 32° \approx 16\,030\,540$.

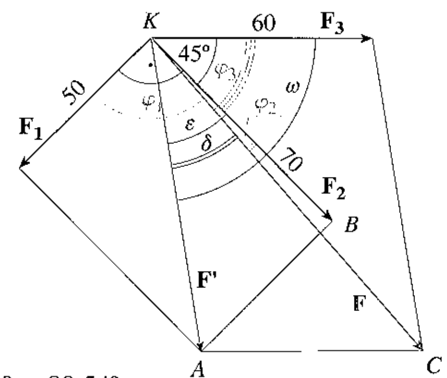
A keresett összetevő $|\mathbf{F}_1| \approx 4\,004$ N.

Az $\varepsilon = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F})\sphericalangle$ szinusztétellel számítható ki.

$\frac{\sin\varepsilon}{\sin 32°} = \frac{600,0}{4004} \Rightarrow \sin\varepsilon = \frac{600,0\sin 32°}{4004} \approx 0,0794 \Rightarrow \varepsilon \approx 4,6°$.

Az ε nem lehet tompaszög, ti. a háromszögben kisebb oldallal szemben kisebb szög fekszik, (600,0 < 4004 miatt $\varepsilon < 32°$).

2294. A délnyugati irányú $|\mathbf{F}_1| = 50$ N és a délkeleti irányú $|\mathbf{F}_2| = 70$ N erő 90°-os szöget zár be egymással. Ezek eredője **F'** nagyságát Pitagorasz tétellel számítjuk ki az AKB Δ-ből.



$|\mathbf{F}'|^2 = 50^2 + 70^2 = 7400$

$|\mathbf{F}'| = 86,02$.

Az **F'** és $\mathbf{F}_2$ által bezárt szög ε, derékszögű háromszögből számítjuk ki.

$\mathrm{tg}\varepsilon = \frac{50}{70} \approx 0,7143$ $\quad \varepsilon \approx 35,54°$.

$\mathbf{F}_3$ és **F'** által bezárt szög $\omega \approx 45° + 35,54° = 80,54°$.

Az $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ és $\mathbf{F}_3$ keresett eredője $\mathbf{F}$. Ennek meghatározásához előbb kiszámítjuk ω kiegészítő szögét: $180° - 80{,}54° = 99{,}46°$. A $\mathbf{F}$ eredő hosszát az AKC háromszögből határozzuk meg koszinusztétellel.

$|\mathbf{F}|^2 = 60^2 + 86{,}02^2 - 2 \cdot 60 \cdot 86{,}02 \cos 99{,}46° \approx 12\,696 \qquad |\mathbf{F}| \approx 112{,}7.$

A három adott erő eredőjének nagysága tehát 112,7 N.

A $\mathbf{F}$ eredőnek a 3 adott ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$) vektorral bezárt szöge kiszámítható, ha meghatározzuk még az $\mathbf{F}'$ és $\mathbf{F}$ által bezárt δ szöget. A koszinusztételt alkalmazzuk.

$$60^2 = |\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{F}|^2 - 2|\mathbf{F}'||\mathbf{F}| \cos \delta \Rightarrow \cos\delta = \frac{7400 + 12\,696 - 3600}{2 \cdot 86{,}02 \cdot 112{,}7} \approx 0{,}8508$$

$\delta \approx 31{,}70°$.

Ennek alapján a keresett szögek:

Az $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}$ által bezárt szög $\varphi_1 = 90° - \varepsilon + \delta \approx 86{,}16°$.

Az $\mathbf{F}_2$ és $\mathbf{F}$ által bezárt szög $\varphi_2 = \varepsilon - \delta \approx 3{,}84°$.

Az $\mathbf{F}_3$ és $\mathbf{F}$ által bezárt szög $\varphi_3 = \omega - \delta \approx 48{,}84°$.

Megjegyzés:

Az $\mathbf{F}$ eredőnek a 3 adott ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$) vektorral bezárt szöge másként is kiszámítható. Az AKC Δ-re felírjuk a szinusztételt:

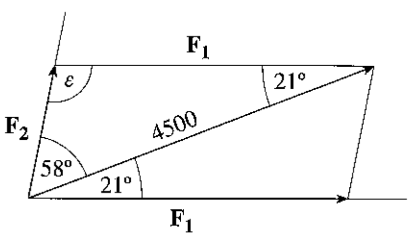
$$\frac{\sin\varphi_3}{\sin 99{,}46°} = \frac{|\mathbf{F}'|}{|\mathbf{F}|} \Rightarrow \sin\varphi_3 = \frac{|\mathbf{F}'|\sin 99{,}46°}{|\mathbf{F}|} = 0{,}7530.$$

Ebből $(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}) \sphericalangle = \varphi_3 \approx 48{,}85°$ (φ_3 nem lehet tompaszög),

$(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}) \sphericalangle = \varphi_2 = \varphi_3 - 45° \approx 3{,}85°$,

$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}) \sphericalangle = \varphi_1 = 90° - \varphi_2 \approx 86{,}15°$.

2295. Az eredő erő az összetevők által „kifeszített" paralelogramma azon átlója, amely az összetevők közös kezdőpontjából indul. Az összetevők nagysága kiszámítható szinusztétellel, ha ismerjük az ábra szerint az adott eredővektorral szemközti szöget.



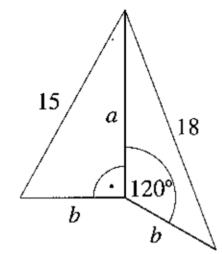
$\varepsilon = 180° - (21° + 58°) = 101°$.

$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{4500} = \frac{\sin 58°}{\sin 101°} \Rightarrow |\mathbf{F}_1| = \frac{4500 \sin 58°}{\sin 101°} \approx 3887{,}6,$$

$$\frac{|\mathbf{F}_2|}{4500} = \frac{\sin 21°}{\sin 101°} \Rightarrow |\mathbf{F}_2| = \frac{4500 \sin 21°}{\sin 101°} \approx 1642{,}8.$$

A két összetevő nagysága kb. 3888 N és kb. 1643 N.

2296. 9 órakor a nagymutató, a, és a kismutató, b, merőlegesek egymásra, 4 órakor az általuk bezárt szög 120°. A mutatók hosszának kiszámításához ezért használhatjuk a Pitagorasz-tételt és a koszinusztételt.



$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & a^2 + b^2 = 225 \\ \text{II.} & a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° = 324 \end{array}\right\}$$

Itt $a > b$, mert a az óra nagymutatója.

($\cos 120° = -0{,}5$)

Az I. egyenlet jobb oldalát behelyettesítjük a II.-ba és kifejezzük ab-t

III. $ab = 324 - 225 = 99$.

Ebből a b-t kifejezzük $b = \dfrac{99}{a}$ és az I.-be behelyettesítjük:

$$a^2 + \frac{9801}{a^2} = 225.$$

A nevezővel az egyenlet mindkét oldalát megszorozva egy másodfokúra vissszavezethető negyedfokú egyenletet kapunk, amit rendezve:

$a^4 - 225a^2 + 9801 = 0$.

Ez az a^2-ben másodfokú.

$$a_{1,2}^2 = \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 4 \cdot 9801}}{2} \approx \frac{225 \pm 106{,}87}{2} \qquad a_1^2 \approx 165{,}9 \qquad a_2^2 \approx 59{,}1$$

$a_1 \approx 12{,}9 \qquad a_2 \approx 7{,}7$ (Az óramutatók hossza csak pozitív lehet.)

Minthogy az egyenletrendszer a-ban és b-ben szimmetrikus, b-re ugyanezek az értékek adódnak, fordított sorrendben. Az $a > b$ miatt a nagymutató hossza 12,9 cm, a kismutató hossza 7,7 cm.

Megjegyzés:

Az I.-III. egyenletrendszert másként is megoldhatjuk.

I. + 2III.: $(a + b)^2 = 225 + 198 = 423 \Rightarrow a + b \approx 20{,}57$ (ti. $a + b > 0$)

I. − 2III.: $(a - b)^2 = 225 - 198 = 27 \Rightarrow a - b \approx 5{,}20$ (ti. $a - b > 0$)

Innen $a \approx 12{,}9$ cm, $b \approx 7{,}7$ cm.

2297. Lásd a 2296-os feladat megoldásának gondolatmenetét!

A nagymutató hossza kb. 16,2 cm, a kismutató hossza kb. 7,9 cm.

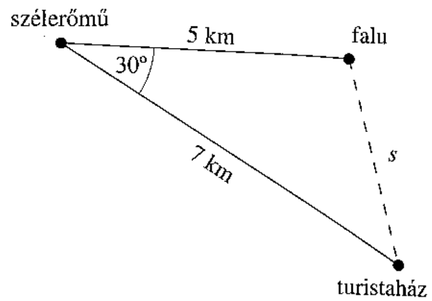
2298. Adott a háromszög egy oldala, (AB) és a rajta fekvő két szög. Az A csúcsponttal szemközti $a = BC$ oldal, az AB-vel szemközti szög kiszámítása után, szinusztétellel határozható meg. $\gamma = 180° - 115° = 65°$.

$$\frac{a}{360} = \frac{\sin 50°}{\sin 65°} \Rightarrow a = BC \approx 304{,}3 \text{ m}.$$

Megjegyzés:
A γ szög kiszámítása után kiderül, hogy az $ABC\,\Delta$ egyenlőszárú ($AC = AB$). Ezt az A-ból induló magasság két (egybevágó) derékszögű háromszögre bontja. Így a szinusztétel helyett elég a koszinusz szögfüggvény alkalmazása a $BC = 2x$ meghatározásához.

$$\cos 65° = \frac{x}{360} \Rightarrow x = 360\cos 65°; \quad BC \approx 304,3 \text{ m}.$$

2299. A sematikus ábra alapján az erőmű, a falu (pontszerűnek képzelve), és a turistaház háromszögében három adatunk van, két oldal (5, illetve 7 km) és a bezárt szög 30°. A koszinusztételből adódik, hogy a keresett s távolságra:

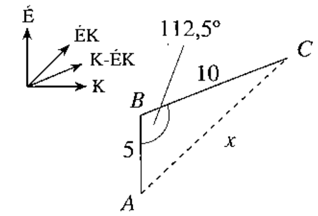


$s^2 = 25 + 49 - 70\cos 30° =$
$= 74 - 35\sqrt{3} \approx 13,38$, ahonnan
$s \approx 3,7$ km. Tehát a falutól (pontosabban a falu azon helyétől, ahová befut a távvezeték) a turistaház kb. 3,7 km-re van légvonalban.

2300. Az egyik hajó 46 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 2 óra 20 perc alatt $\approx$ 107,3 km-t tesz meg.
A másik hajó 62 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 2 óra 20 perc alatt $\approx$ 144,7 km-t tesz meg.
A két oldal és közbezárt szög ismeretében a harmadik oldal a koszinusztétellel számítható ki.
$a^2 = 107,3^2 + 144,7^2 - 2 \cdot 107,3 \cdot 144,7 \cdot \cos 109° \approx 42\,560$
$a \approx 206,3$
A két hajó 2 óra 20 perc múlva kb. 206,3 km-re lesz egymástól.

Megjegyzés:
Más megoldási lehetőség: Egy óra alatt az egyik hajó 46 km-t, a másik 62 km-t tett meg. Ekkor b távolságra voltak egymástól, ami koszinusztétellel számítható ki.
$b^2 = 46^2 + 62^2 - 2 \cdot 46 \cdot 62 \cos 109° \approx 7817$; $\quad b \approx 88,41$;
$2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ óra alatt $\frac{7}{3} \cdot 88,4 \approx 206,3$ távolságra jutottak egymástól.

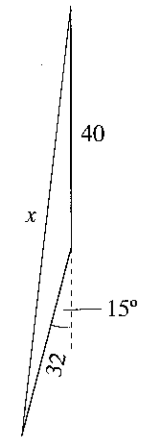
2301. Mivel a kelet-északkeli irány 22,5°-ot zár be a keleti iránnyal, így az útvonalat az ábrán látható háromszög adja. Ennek x-szel jelölt AC oldalát a koszinusztétellel határozhatjuk meg:



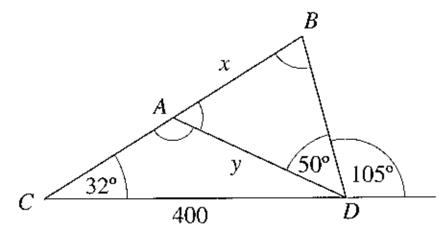
$x^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 112,5°$, amiből
$x \approx 12,8$, tehát légvonalban körülbelül 12,8 km-re van egymástól a két ház.

2302. Ekkor a kiindulási hely, az irányváltoztatás helye és a végső hely olyan háromszöget alkotnak, amelynek két szomszédos oldala 40 és 32, s az ezek által bezárt szög 165°. Így egy egyszerű koszinusztétellel a kérdéses távolság:

$$x = \sqrt{40^2 + 32^2 - 2 \cdot 40 \cdot 32 \cdot \cos 165°} \approx 71,39 \text{ (km)}.$$

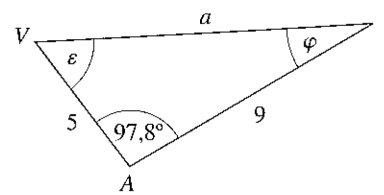


2303. Az ábrán C jelöli az elágazást, A az első, B a második épületet. A megadott szögek segítségével az ábrán jelölt összes szöget meghatározhatjuk, így:
$CDA\sphericalangle = 25°$, $DAC\sphericalangle = 123°$,
$BAD\sphericalangle = 57°$, $DBA\sphericalangle = 73°$.
Ekkor az ábra jelöléseivel ACD és BAD háromszögekben szinusztételeket felírva: $\frac{y}{400} = \frac{\sin 32°}{\sin 123°}$ és $\frac{x}{y} = \frac{\sin 50°}{\sin 73°}$, amiből $x \approx 202$ m, vagyis a két épület távolsága körülbelül 202 m.

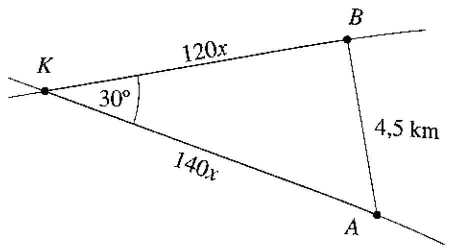


2304. a) Koszinusztétellel: $a = \sqrt{5^2 + 9^2 - 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cos 97,8°} \approx 10,87$ (km).

b) Az ε és a φ hegyesszögek meghatározása a feladat. Szinusztétellel:
$\frac{\sin\varepsilon}{\sin 97,8°} = \frac{9}{10,87}$, amiből
$\sin\varepsilon \approx 0,8203$, tehát $\varepsilon \approx 55,1°$.
$\varphi \approx 180° - 97,8° - 55,1° = 27,1°$.

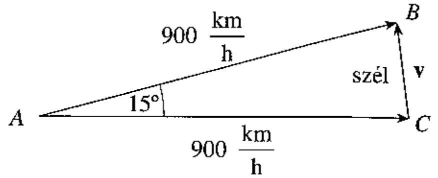


2305. A járőrnek x óra áll rendelkezésére. Az összeütközés azt jelenti, hogy x óra alatt a lopott gépkocsival éppen AK, a másik gépkocsival pedig pontosan BK utat tesznek meg, vagyis km-ben mérve $AK = 140x$, $BK = 120x$ hosszúságú szakasz.



Az AKB háromszög AB oldalára felírva a koszinusztételt: $4{,}5^2 = (140x)^2 + (120x)^2 - 2 \cdot (140x) \cdot (120x) \cdot \cos 30°$.
Ebből $20{,}25 = 4901{,}55x^2$, vagyis $x \approx 0{,}064$ $(x > 0)$.
A járőrnek tehát 0,064 óra, azaz $0{,}064 \cdot 60 = 3{,}84$ perc (= 231 másodperc) áll rendelkezésére a közbeavatkozásra.

2306. a) Szélcsendben az AB úton repül a gép. Szélben az AC úton haladna „önerőből", és CB irányt képvisel a szél. Így jön létre az ABC vektorháromszög.



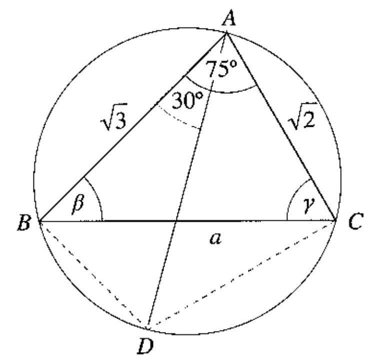
b) Szerkeszteni azért lehet, mert 60°-ból két felezéssel lehet 15°-ot kapni, és a $900\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$-t pl. 9 cm-rel jelöljük. Ekkor $\overrightarrow{CB}$ lesz a szélvektor.

c) Az $ABC\,\Delta$ A-ból induló magassága (az egyenlő szárúság miatt) felezi a BC oldalt, így az egyik derékszögű háromszögből: $\sin 7{,}5° = \dfrac{\frac{v}{2}}{900} = \dfrac{v}{1800}$, ahonnan $v \approx 235\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ami igen viharos szelet jelent.

2307.
Jelöljük a következőképpen a háromszög oldalait:
$k := a^2 + a + 1,\quad m := 2a + 1,\quad n := a^2 - 1.$
Megvizsgáljuk, melyik a háromszög legnagyobb oldala.
$k - n = a + 2 > 3$, ezért $k > n$.
$k - m = a^2 - a = a(a-1) > 0$, mert $a > 1$, ezért $k > m$ is igaz.
Tehát bármelyik 1-nél nagyobb számot írjuk az a helyébe, mindig k lesz a legnagyobb oldal.
Írjuk fel a háromszög k oldalára a koszinusztételt: $k^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \varphi$, ahol φ a k oldallal szemközti szög.
Beírva az a-val kifejezett alakokat:
$(a^2 + a + 1)^2 = (2a+1)^2 + (a^2-1)^2 - 2(2a+1)(a^2-1)\cos \varphi$.

Elvégezve a négyzetre emeléseket, a szorzást és a lehetséges összevonásokat:
$a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = a^4 + 2a^2 + 4a + 2 - 2(2a^3 + a^2 - 2a - 1)\cos \varphi$.
Rendezve: $2a^3 + a^2 - 2a - 1 = -2(2a^3 + a^2 - 2a - 1)\cos \varphi$.
Mivel $2a^3 + a^2 - 2a - 1 = a^2(2a+1) - (2a+1) = (2a+1)(a^2-1) \neq 0$, hiszen $a > 1$, ezért ezzel a kifejezéssel az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk.
$1 = -2\cos \varphi$, vagyis $\cos \varphi = -\dfrac{1}{2}$, amiből a háromszögben $\varphi = 120°$ adódik. Ezt kellett bizonyítani.

2308. Az $ABC\,\Delta$-ből koszinusztétellel
$a = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2}\cos 75°} \approx$
$\approx 1{,}93$, majd szinusztétellel
$\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$, amiből $\sin\gamma = \dfrac{c \cdot \sin\alpha}{a}$,
most $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sin 75°}{1{,}93} \approx 0{,}8660$, ezért
$\gamma = 60°$, és a szögösszeg miatt $\beta = 45°$.
(Később majd látjuk, hogy egzakt egyenlőség áll fenn, nemcsak közelítő.)

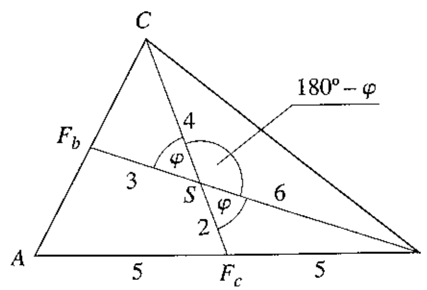


A kerületi szögek tétele miatt
$BCD\sphericalangle = BAD\sphericalangle = 30°$ és $CBD\sphericalangle = CAD\sphericalangle = 45°$. Ekkor az ABD és az ACD háromszög is derékszögű, tehát a Thalész-tétel miatt közös átfogójuk, AD a kör átmérője. Bármelyik derékszögű háromszögből kiszámíthatjuk, például

$$AD = \frac{AB}{\cos 30°} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2.$$

(Ekkor az $ABD\,\Delta$ a nevezetes 30°-60°-90°-os háromszög, oldalai 1, $\sqrt{3}$, 2; míg az $ACD\,\Delta$ a nevezetes 45°-45°-90°-os háromszög, oldalai $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2. E két háromszöget az átfogójánál összeillesztve valóban a kiindulási háromszög jön létre, tehát a szögek értéke pontos.)

2309. Az S súlypont az ismert módon harmadolja a súlyvonalakat. Tegyük fel, hogy a 9 egység hosszúságú súlyvonal a B-ből indul.
A BSF_c háromszögből koszinusztétellel: $5^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \cos \varphi$.
Ebből $\cos\varphi = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$, így
$\varphi \approx 51{,}32°$.



A CSF_b háromszögből koszinusztétellel: $CF_b = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{5}{8}} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ egység, ezért $AC = 2CF_b = 6{,}32$ egység.

A BSC háromszögből koszinusztétellel: $BC = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)} = \sqrt{82} \approx$

$\approx 9{,}06$ egység (felhasználtuk, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$).

A körülírt kör sugarát az $R = \dfrac{abc}{4T}$ összefüggésből határozzuk meg.

Az ABC háromszög területe a BSC háromszög területének pontosan 3-szorosa:

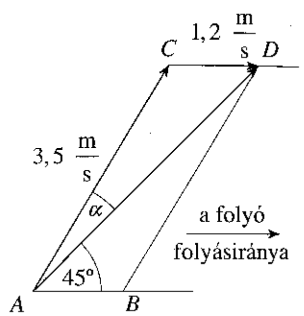
$T = 3 \cdot \dfrac{6 \cdot 4 \cdot \sin(180° - \varphi)}{2} \approx 36 \cdot \sin 51{,}32° \approx 28{,}1$, ezért a körülírt kör sugara

$R \approx \dfrac{9{,}06 \cdot 6{,}32 \cdot 10}{4 \cdot 28{,}1} \approx 5{,}09$ egység (felhasználtuk, hogy $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$).

A háromszög kérdezett oldalai, ha a 9 egységnyi súlyvonal a BC oldalhoz tartozik, $AC \approx 6{,}32$ és $BC \approx 9{,}06$ egység hosszúak, a körülírt körének sugara 5,09 egység.

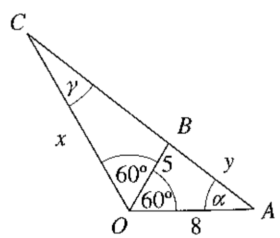
Megjegyzés:
Más megoldások ellenőrzéséhez megadjuk az ABC háromszög szögeit: 78,91°, 62,76° és 38,33°.

2310. A csónakot az A kiindulási pontból a víz sodra 1 sec alatt 1,2 m-re, B-be vinné. Ha állóvízben eveznének, a csónak 1 sec alatt A-tól 3,5 m-re C-be érne. Az $|\overrightarrow{AB}| = 1{,}2$, $|\overrightarrow{AC}| = 3{,}5$. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok eredője $\overrightarrow{AD}$. Az ábrán a vektorösszeadásnak megfelelő paralelogramma szerepel.
Ebben ismert még a $BAD\sphericalangle = 45°$.
Adott az ABD Δ-nek két oldala és a nagyobbikkal szemközti szöge. Az ábrán α-val jelölt szöget szinusztétellel számítjuk ki:



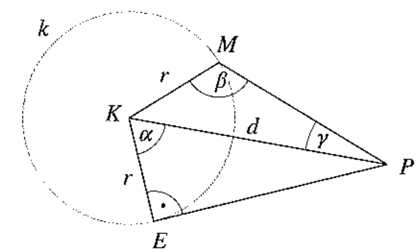
$\dfrac{\sin\alpha}{\sin 45°} = \dfrac{1{,}2}{3{,}5} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1{,}2\sin 45°}{3{,}5} \approx 0{,}2424 \quad \alpha \approx 14°$. Az α nem lehet tompaszög, ti. kisebb oldallal szemben kisebb szög van: $1{,}2 < 3{,}5$, ezért $\alpha < 45°$.

2311. y meghatározható OAB háromszögben a koszinusztételből: $y^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60°$, amiből $y = 7$.
Ekkor ugyanitt a szinusztételt felírva kapjuk az A-nál levő α szöget: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 60°} = \dfrac{5}{7}$, így $\sin\alpha \approx 0{,}62$, azaz $\alpha \approx 38°$. (α nyilván hegyesszög).

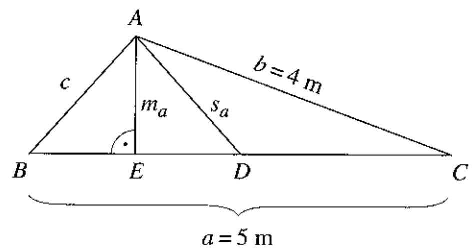


Innen $\gamma = 22°$ és az OAC háromszögben felírt szinusztételből adódik x:
$\dfrac{x}{8} = \dfrac{\sin 38°}{\sin 22°}$, azaz $x \approx 13{,}1$, tehát OAC háromszög területe:
$T = \dfrac{1}{2} \cdot 13{,}1 \cdot 8 \cdot \sin 120° \approx 45{,}4$ területegység.

2312. A KEP háromszög E-nél derékszögű, ezért $\cos\alpha = \dfrac{r}{d}$.
A KMP háromszögben a szinusztétel szerint $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{d}{r}$.
Tehát $\dfrac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \cos\alpha \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} =$
$= \dfrac{r}{d} \cdot \dfrac{d}{r} = 1$, ami bizonyítandó volt.



2313. A feltétel miatt $c = s_a$, így BAD háromszög egyenlőszárú, BD alaphoz tartozó magassága felezi a BD alapot.
Így $BE = \dfrac{BC}{4} = 1{,}25 = ED$.
AEC, illetve BEA derékszögű háromszögekre Pitagorasz tételét alkalmazva:



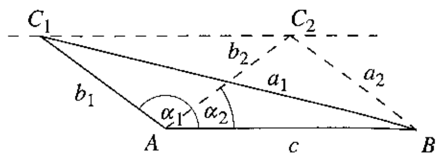
$$\left.\begin{aligned} 3{,}75^2 + m_a^{\,2} &= 4^2 \\ 1{,}25^2 + m_a^{\,2} &= c^2 \end{aligned}\right\}$$

A két egyenletet kivonva egymásból, rendezés után $c = \sqrt{3{,}5} \approx 1{,}87$.
Tehát a keresett harmadik oldal 1,87 m hosszú.

Másik megoldás:
A feltétel miatt $c = s_a$. Legyen a $BCA\sphericalangle = \gamma$.
A koszinusztétel szerint:

az ABC Δ-ben:	$c^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos\gamma$
az ADC Δ-ben:	$c^2 = 2{,}5^2 + 4^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 4\cos\gamma$
kivonva, átrendezve:	$20\cos\gamma = 18{,}75$
	$c^2 = 2{,}5^2 + 4^2 - 20\cos\gamma$
	$c = \sqrt{3{,}5} \approx 1{,}87$ (m).

ətel szerint $AB = 8{,}4$ cm,
$= AC_2 = 5{,}2$ cm, a háromszög te-
..ülete 13 cm².



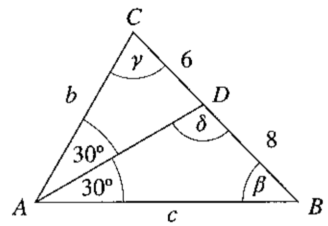
$T = \dfrac{bc\sin\alpha}{2}$, ebből

$\sin\alpha = \dfrac{2\cdot 13}{5{,}2\cdot 8{,}4} \approx 0{,}5952$ *

így $\alpha_1 \approx 143{,}5°$; $\alpha_2 \approx 36{,}5°$.
a_1, illetve a_2 koszinusztétellel kiszámítható $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$.
A megfelelő értékeket behelyettesítve kapjuk: $a_1 \approx 13$ cm; $a_2 \approx 5{,}2$ cm.

A *-tól másképp: a szögek kikeresése nélkül $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \approx \pm 0{,}8035$, amely közvetlenül helyettesíthető a koszinusztételbe.

2315. A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában metszi. Az ábra jelöléseit használva: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$.



Ennek megfelelően $b = 3x$, $c = 4x$ alakban írható. Az ABC Δ-re alkalmazzuk a koszinusztételt:

$(3x)^2 + (4x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 4x\cdot\cos 60° = 14^2$.

$13x^2 = 196$

$x = \sqrt{\dfrac{196}{13}} = \dfrac{14}{\sqrt{13}} = \dfrac{14\sqrt{13}}{13}$

$BC = a = 14$

$AB = c = 4x = \dfrac{4\cdot 14}{\sqrt{13}} \approx 15{,}53$

$AC = b = 3x = \dfrac{3\cdot 14}{\sqrt{13}} \approx 11{,}65.$

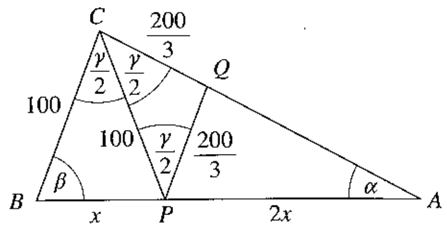
A szögeket szinusztétellel számítjuk ki:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 60°} = \frac{\frac{42}{\sqrt{13}}}{14} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sin\beta = \frac{3\sin 60°}{\sqrt{13}} \approx 0{,}7206 \Rightarrow \beta \approx 46{,}1°;$$

$\gamma \approx 180° - (60° + 46{,}1°) = 73{,}9°$.

A háromszög oldalai: 14 cm, kb.15,5 cm, kb.11,6 cm, az ezekkel szemközti szögek nagysága: 60°, kb. 73,9° és kb. 46,1°.

2316. A szögfelezőtétel miatt $BP : PA = 1 : 2$, ha tehát BP hosszát x jelöli, akkor PA hossza $2x$.
Húzzunk P-n keresztül a BC oldallal párhuzamost; metssze ez az AC oldalt a Q pontban.
A párhuzamos húzása miatt $CPQ\sphericalangle = {}$
$= PCB\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{2}$ (mert váltószögek).



A CQP háromszög CP oldalán fekvő két szöge tehát egyenlő, ezért a háromszög egyenlő szárú, így $QC = QP$.

A párhuzamos szelők tételét az α szög száraira alkalmazva $\dfrac{QC}{AC} = \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$,

tehát $QC = \dfrac{1}{3}AC = \dfrac{200}{3}$, s természetesen ugyanekkora a QP szár is.

A PCQ háromszögben a PC alaphoz tartozó magasság meghúzásával kapott derékszögű háromszögből: $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{50}{\frac{200}{3}} = \dfrac{3}{4}$, így $\dfrac{\gamma}{2} \approx 41{,}41°$.

A BCP egyenlő szárú háromszögben a BP alaphoz tartozó magasság meghúzásával kapott derékszögű háromszögből: $\dfrac{x}{2} = 100\cdot\sin\dfrac{\gamma}{4} \approx 100\cdot\sin 20{,}71° \approx 35{,}36$, így $AB = 3x \approx 212{,}16$.

Szintén a BCP háromszögből $\beta = 90° - \dfrac{\gamma}{4} \approx 69{,}29°$, ezért az ABC háromszögben
$\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 180° - 69{,}29° - 82{,}82° \approx 27{,}89°$.
Az ABC háromszög szögei tehát: $\alpha \approx 27{,}89°$, $\beta \approx 69{,}29°$, $\gamma \approx 82{,}82°$, az AB oldalának hossza pedig kb. 212,16.

Másik megoldás:

Fejezzük ki $\cos\dfrac{\gamma}{2}$-t koszinusztétellel az ACP, illetve a BCP háromszögből is:

$\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{100^2 + 200^2 - (2x)^2}{2\cdot 100\cdot 200} = \dfrac{12\,500 - x^2}{10\,000}$, illetve $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{100^2 + 100^2 - x^2}{2\cdot 100\cdot 100} =$
$= \dfrac{20\,000 - x^2}{20\,000}$. Igaz tehát, hogy $\dfrac{12\,500 - x^2}{10\,000} = \dfrac{20\,000 - x^2}{20\,000}$.

Ebből $x^2 = 5000$, vagyis $x > 0$ miatt $x = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2} \approx 70{,}71$, tehát $AB = 3x \approx 212{,}13$.

A szögek meghatározásához először helyettesítsük vissza $\cos\dfrac{\gamma}{2}$ egyik kifejezésébe x^2 értékét: $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{12\,500 - 5000}{10\,000} = 0{,}75$, amiből az első megoldásban kapott

$\frac{\gamma}{2} \approx 41,41°$, azaz $\gamma \approx 82,82°$ adódik. A továbbiakban egy szinusztétellel kiszámíthatjuk pl. α értékét, majd a háromszög szögösszegére vonatkozó képletből β-t kapjuk meg.

Másik megoldás:

$T_{ABC} = 3 \cdot T_{BPC}$

(az alapok aránya 3 : 1, és a két háromszög magassága ugyanaz).

Tehát $100 \cdot 200 \cdot \sin\gamma = 3 \cdot 100^2 \sin\frac{\gamma}{2}$;

$$2\sin\gamma = 3\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$4\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 3\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Mivel $\sin\frac{\gamma}{2} \neq 0$, ezért $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{3}{4}$; $\frac{\gamma}{2} = 41,41°$.

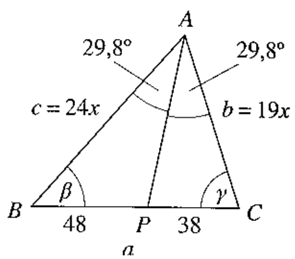
A BPC Δ-ből $\beta \approx 69,29°$; az ABC Δ-ből $\alpha \approx 27,89°$.

Behúzva a BPC Δ C-ből induló magasságát a kapott derékszögű háromszögben

$\cos\beta = \frac{\frac{x}{2}}{100} = \frac{x}{200}$, amelyből $x \approx 70,7$, tehát az $AB = 3x \approx 212$.

2317. A szögfelezőtétel miatt $\frac{b}{c} = \frac{38}{48} = \frac{19}{24}$, tehát alkalmas x hosszúságegységgel mérve $b = 19x$ és $c = 24x$.

Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszög BC oldalára:



$86^2 = (19x)^2 + (24x)^2 - 2\cdot(19x)\cdot(24x)\cdot\cos 59,6°$.

Ezzel ekvivalens: $7396 \approx 475,50x^2$, amiből $x \approx 3,944$ $(x > 0)$.

$b = 19x = 74,94$ cm és $c = 24x = 94,66$ cm.

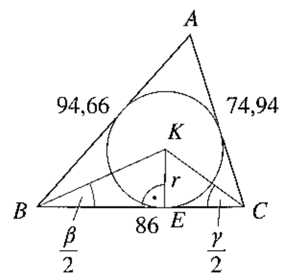
A β hegyesszöget szinusztétellel is kiszámíthatjuk:

$\frac{\sin\beta}{\sin 59,6} = \frac{74,94}{86}$, amiből $\sin\beta = 0,7516$, vagyis $\beta = 48,73°$.

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 71,67°$.

A beírt kör K középpontját megkaphatjuk pl. a β és a γ szögfelezőjének metszéspontjaként is (ábra).

Az E érintési pont két részre osztja az a oldalt:

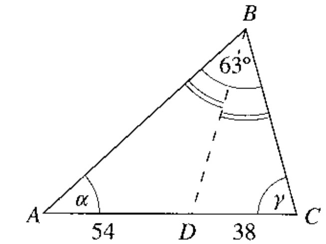


$BE = r\cdot\text{ctg}\frac{\beta}{2}$ és $EC = r\cdot\text{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

$r\cdot\text{ctg}\frac{\beta}{2} + r\cdot\text{ctg}\frac{\gamma}{2} = 86$ (m), amiből $r = 23,94$ cm.

A háromszög oldalai: 86 cm, 74,94 cm és 94,66 cm hosszúak, szögei 59,6°, 48,73° és 71,67° nagyságúak, a beírt kör sugara 23,94 cm hosszú.

2318. A szögfelezőtétel szerint a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szögfelezőt közrefogó oldalak arányában osztja.



Így $\frac{54}{38} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ $\Rightarrow AB = 27x$; $BC = 19x$.

ABC háromszögre a koszinusztételt alkalmazva:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos 63°$.

Behelyettesítve:

$92^2 = (27x)^2 + (19x)^2 - 2\cdot 27x\cdot 19x\cdot\cos 63° \Rightarrow x^2 = 13,56$.

Mivel $x > 0$ $\Rightarrow$ $x \approx 3,68$, $AB \approx 99,4$ cm, $BC \approx 69,9$ cm.

Számoljuk ki szinusztétellel az α szöget! $\frac{\sin\alpha}{\sin 63°} = \frac{BC}{AC}$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha \approx 0,6770$.

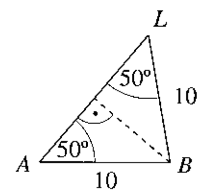
Bármely háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.

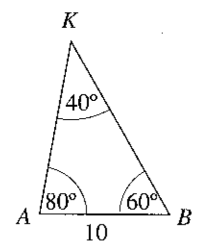
Mivel $BC < AC$, ezért $\alpha < 63°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 42,6°$.

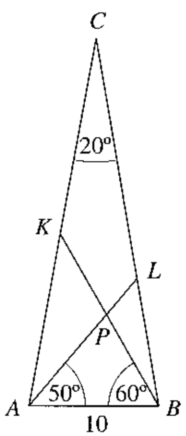
A háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért $\gamma = 74,4°$.

2319. a) Az ABC Δ alapszögei 80°-osak, ezért $ALB\sphericalangle = 180° - 80° - 50° = 50°$, így az ABL háromszög egyenlő szárú. Tehát $BL = 10$ cm.

b)







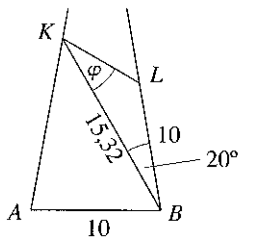
Az ABL egyenlő szárú háromszögből

$AL = 2\cdot 10\cdot\cos 50° \approx 12,86$ (cm).

Az ABK háromszögből szinusztétellel:

$\frac{BK}{10} = \frac{\sin 80°}{\sin 40°}$, amiből $BK \approx 15,32$ cm.

c) A BKL háromszögből koszinusztétellel:

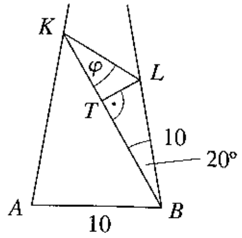


$KL = \sqrt{15,32^2 + 10^2 - 2\cdot 15,32\cdot 10\cdot\cos 20°} \approx$

$\approx 6,84$ (cm). Szinusztétellel: $\frac{\sin\varphi}{\sin 20°} = \frac{10}{6,84}$,

amiből $\sin\varphi \approx 0,5000$, vagyis $\varphi \approx 30,00°$ (hiszen φ nyilván hegyesszög).

Megjegyzés:
Az addíciós tételek ismeretében bizonyítható, hogy φ pontosan 30°. (A bizonyítás során minden hosszúságot cm-ben adunk meg.)
Állítsunk merőlegest L-ből BK-ra, a merőleges talppontja legyen T. A keletkező BTL derékszögű háromszögből $TL = 10 \cdot \sin 20°$ és $TB = 10 \cdot \cos 20°$.



A b) részben láttuk, hogy $\dfrac{BK}{10} = \dfrac{\sin 80°}{\sin 40°}$, amiből

$$BK = \frac{10 \cdot 2 \cdot \sin 40° \cdot \cos 40°}{\sin 40°} = 20 \cdot \cos 40°.$$

A TK szakasz tehát $BK - TB = 20 \cdot \cos 40° - 10 \cdot \cos 20°$ hosszúságú.
Alakítsuk át ezt a kifejezést. Először emeljünk ki 20-at:

$$20 \cdot \cos 40° - 10 \cdot \cos 20° = 20 \cdot \left(\cos 40° - \frac{1}{2} \cdot \cos 20°\right). \qquad (1)$$

Tudjuk, hogy $\cos 40° = \cos(60° - 20°) = \cos 60° \cdot \cos 20° + \sin 60° \cdot \sin 20°$, továbbá $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ és $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ezek felhasználásával az (1) kifejezés így is írható:

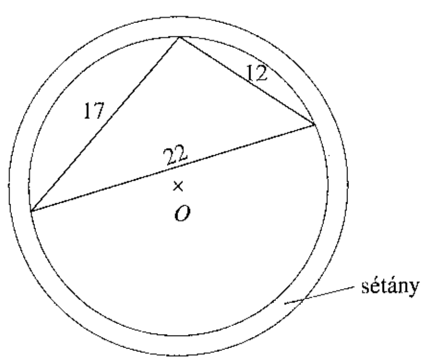
$$20 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos 20° + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 20° - \frac{1}{2} \cdot \cos 20°\right) = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 20° = 10 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 20°.$$

Tehát $TK = 10 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 20°$, így a KTL derékszögű háromszögből

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{TL}{TK} = \frac{10 \cdot \sin 20°}{10 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 20°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$ vagyis $\varphi = 30°$, ami bizonyítandó volt.

2320. a) Számoljuk ki koszinusztétellel a leghosszabb oldallal szemközti szöget!
$22^2 = 17^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 17 \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = -0{,}125 \Rightarrow \gamma = 97{,}18°$
Így a háromszög területe $T = \dfrac{12 \cdot 17 \cdot \sin 97{,}18°}{2} = 101{,}2$ (m²).

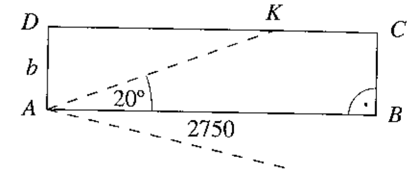
Megjegyzés:
A háromszög területe a szög kiszámítása nélkül a Héron-képlettel is kiszámolható:
$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol s a kerület fele.

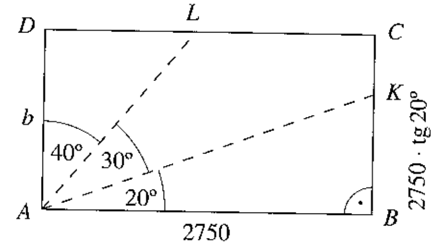


b) A háromszög köré írt kör sugara:
$R = \dfrac{c}{2\sin\gamma} = \dfrac{22}{2\sin 97{,}18°} \approx$
$\approx 11{,}09$ (méter).

A park köré tervezett 1,5 méter széles körgyűrű belső körének sugara 11,09 m, kerülete $K = 2R\pi \approx 69{,}68$ (m), külső körének sugara $R' = 11{,}09 + 1{,}5 = 12{,}59$ (m), kerülete $K' = 2R'\pi \approx 79{,}11$ (m).

2321. Készítsünk ábrát!
A szöveg szerint nem lehetséges, hogy a K-val jelölt pont a CD oldalon legyen. Ekkor ugyanis az ADK derékszögű háromszög alakú rész jutna a legkisebb testvérnek és így nem létezne az AK-val 30°-os szöget bezáró olyan félegyenes, amelyik kettévágja az $ABCK$ négyszöget.
Így csak a második ábra szerinti eset lehetséges.





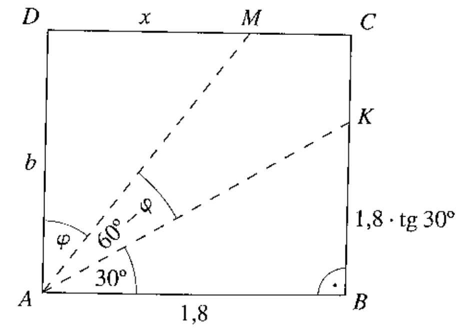
Az ABK derékszögű háromszögből egyrészt $BK = 2750 \cdot \operatorname{tg} 20°$, másrészt a szöveg szerint ennek a háromszögnek a területe a téglalap területének harmada:

$$\frac{2750^2 \cdot \operatorname{tg} 20°}{2} = \frac{2750b}{3}.$$

Ebből $b = \dfrac{3 \cdot 2750 \cdot \operatorname{tg} 20°}{2} \approx 1501$, tehát a téglalap másik oldala 1501 m hosszú, a teljes földdarab területe pedig $T \approx 2750 \cdot 1501 \approx 4{,}128 \cdot 10^6$ (m²) (kb. 413 hektár).
Az ADL derékszögű háromszögben $DL = 1501 \cdot \operatorname{tg} 40° \approx 1260$ (m), így a legnagyobb fiúnak jutó földdarab területe $\dfrac{1501 \cdot 1260}{2} \approx 0{,}946 \cdot 10^6$ (m²); ez kisebb a teljes terület harmadánál (ami $1{,}376 \cdot 10^6$ m²).
A középső fiú kapta a legnagyobb földdarabot (kb. 180 hektárt), a legidősebb fiú pedig a legkisebbet (kb. 95 hektárt).

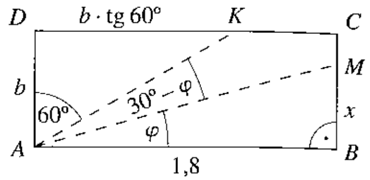
2322. Két eset lehetséges a rendelkezésünkre álló adatok alapján.

1. eset
Az ABK derékszögű háromszög alakú földrész jut a legkisebb fiúnak. Ennek területe $t = \dfrac{1{,}8^2 \cdot \operatorname{tg} 30°}{2} \approx 0{,}935$ (km²).
A teljes földterület a feladat szövege szerint $T = 3t \approx 3 \cdot 0{,}935 = 2{,}805$ (km²), ezért $1{,}8b \approx 2{,}805$, amiből $b \approx 1{,}56$ km.



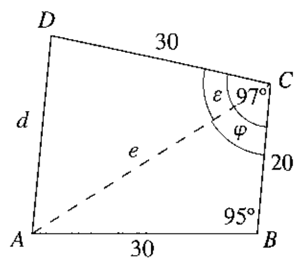
Mindegyik fiúnak ugyanakkora terület jut, ezért az ADM háromszög területére fennáll: $0,935 = \frac{bx}{2} = \frac{1,56x}{2}$, amiből $x \approx 1,20$ km. Így $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{b} = \frac{1,20}{1,56} \approx 0,7692$, tehát $\varphi \approx 37,6°$ és $60° - \varphi \approx 22,4°$.
A másodiknak meghúzott félegyenes az elsővel 22,4°-os szöget zár be.

2. eset
Az ADK derékszögű háromszög alakú földrész jut a legkisebb fiúnak. Ennek területe $t = \frac{b^2 \cdot \operatorname{tg}60°}{2}$. A szöveg szerint ez a teljes terület harmada:



$\frac{b^2 \cdot \operatorname{tg}60°}{2} = \frac{1,8b}{3}$, vagyis $b = \frac{2 \cdot 1,8}{3 \cdot \operatorname{tg}60°} = \frac{1,2}{\sqrt{3}} = 0,4 \cdot \sqrt{3} \approx 0,69$ (km).
A teljes földterület $T \approx 1,8 \cdot 0,69 \approx 1,242$ (km²), ennek harmada jut mindegyik fiúnak. Ezért az ABM derékszögű háromszög területére fennáll: $\frac{1,8x}{2} = \frac{1,242}{3}$, amiből $x \approx 0,46$ km.
Így $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{1,8} \approx \frac{0,46}{1,8} \approx 0,2556$, tehát $\varphi \approx 14,3°$ és $30° - \varphi \approx 15,7°$.
A másodiknak meghúzott félegyenes az elsővel 15,7°-os szöget zár be.

2323. a) Az AC átlóval két részre vágjuk a négyszöget.
Az ABC háromszög területe:
$t_1 = \frac{30 \cdot 20 \cdot \sin 95°}{2} \approx 298,9$ (m²).

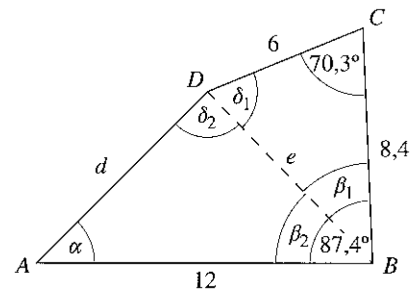


Az ACD háromszög területének meghatározásához kiszámítjuk az e átló hosszát (az ABC háromszögből), továbbá az ε szöget. Koszinusztétellel:
$e = \sqrt{30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos 95°} \approx 37,5$ (m).
Szinusztétellel: $\frac{\sin\varphi}{\sin 95°} = \frac{30}{37,5}$, amiből $\sin\varphi \approx 0,7970$.
Mivel φ hegyesszög, ezért $\varphi \approx 52,84°$.
$\varepsilon = 97° - \varphi \approx 44,16°$, tehát az ACD háromszög területe:
$t_2 = \frac{37,5 \cdot 30 \cdot \sin 44,16°}{2} \approx 391,9$ (m²).
A telek területe $t_1 + t_2 \approx 298,9 + 391,9 = 690,8$ (m²).

Megjegyzés:
A BD átló berajzolásával is kezdhetjük a feladat megoldását. A BD átló hossza 38,0 m, a BCD háromszög ismeretlen szögeire 51,53°, illetve 31,47°, az ABD háromszög szögeire 84,71°, 43,47° és 51,82° adódik.

b) Az ACD háromszögből koszinusztétellel:
$d = \sqrt{37,5^2 + 30^2 - 2 \cdot 37,5 \cdot 30 \cdot \cos 44,16°} \approx 26,3$ (m), a telek kerülete tehát
$2 \cdot 30 + 20 + 26,3 = 106,3$ (m). Ennyi kerítés kell (legalább).

2324. A kérdezett adatok – a mellékelt ábra jelöléseit használva – a következő terv megvalósításával is kiszámíthatók:



1. e átló koszinusztétellel a BCD háromszögből
2. β_1 szinusztétellel a BCD háromszögből
3. δ_1 és β_2 kivonással
4. d oldal az ABD háromszögből koszinusztétellel
5. α szinusztétellel az ABD háromszögből
6. δ_2, majd végül δ

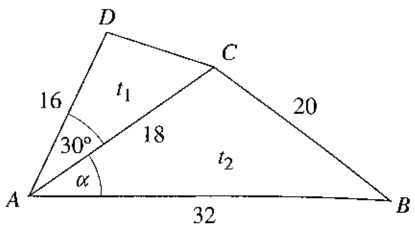
Megvalósítás:

1. $e = \sqrt{8,4^2 + 6^2 - 2 \cdot 8,4 \cdot 6 \cdot \cos 70,3°} \approx 8,52$.
2. $\frac{\sin\beta_1}{\sin 70,3°} = \frac{6}{8,52}$, amiből $\sin\beta_1 \approx 0,6630$.
   Mivel β_1 hegyesszög, ezért $\beta_1 = 41,53°$.
3. $\delta_1 \approx 180° - 70,3° - 41,53° = 68,17°$; $\beta_2 \approx 87,4° - 41,53° = 45,87°$.
4. $d = \sqrt{8,52^2 + 12^2 - 2 \cdot 8,52 \cdot 12 \cdot \cos 45,87°} \approx 8,61$.
5. $\frac{\sin\alpha}{\sin 45,87°} = \frac{e}{d} = \frac{8,52}{8,61} \approx 0,7103$.
   Mivel α hegyesszög (pl. $e < 12$ miatt), ezért $\alpha \approx 45,26°$.
6. $\delta_2 = 180° - \alpha - \beta_2 \approx 88,87°$; $\delta = \delta_1 + \delta_2 \approx 68,17° + 88,87° = 157,04°$.

A négyszög negyedik oldala 8,6 cm hosszú, a másik két szöge pedig 45,26°, illetve 157,04° nagyságú.

Megjegyzés:
Természetesen a másik átló berajzolásával is kezdhetjük a feladat megoldását. Ekkor a másik átló hosszára 14,3 cm, az ABC háromszög két ismeretlen szögére 35,84° és 56,76°, az ACD háromszög szögeire pedig 13,54°, 9,42° és 157,04° adódik.

2325. $t_1 = \dfrac{16 \cdot 18 \sin 30^\circ}{2} = 72$ (mm²).



Az $ABC\ \Delta$ t_2 területének kiszámításához előbb meghatározzuk koszinusztétellel az α szöget.

$400 = 324 + 1024 - 2 \cdot 18 \cdot 32 \cos\alpha$;

$\cos\alpha = \dfrac{948}{1152} \approx 0{,}8229 \Rightarrow \alpha \approx 34{,}62^\circ$;

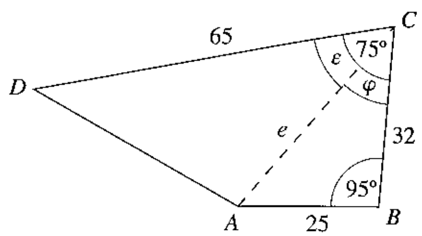
$t_2 = \dfrac{18 \cdot 32 \sin 34{,}62^\circ}{2} \approx 163{,}6$ (mm²).

A térképen mért terület $t = t_1 + t_2 = 235{,}6$ mm².

a) Az 1 : 25 000-es méretarányt figyelembe véve, a terület valódi nagysága
$T_a = 25\,000^2 \cdot t \approx 1{,}47 \cdot 10^{11}$ (mm² = 0,147 km² = 14,7 ha).

b) Az 1 : 50 000-es méretarányt figyelembe véve, a terület valódi nagysága
$T_b = 4 \cdot T_a \approx 0{,}589$ (km² = 58,9 ha).

2326. a) Az AC átlóval két részre vágjuk a négyszöget.



Az ABC háromszög területe:
$t_1 = \dfrac{25 \cdot 32 \cdot \sin 95^\circ}{2} \approx 398{,}5$ (m²).

Az ACD háromszög területének meghatározásához kiszámítjuk az e átló hosszát (az ABC háromszögből), továbbá az ε szöget.

Koszinusztétellel: $e = \sqrt{25^2 + 32^2 - 2 \cdot 25 \cdot 32 \cdot \cos 95^\circ} \approx 42{,}3$ (m).

Szinusztétellel $\dfrac{\sin\varphi}{\sin 95^\circ} = \dfrac{25}{42{,}3}$, amiből $\sin\varphi \approx 0{,}5888$.

Mivel φ hegyesszög, ezért $\varphi \approx 36{,}07^\circ$.

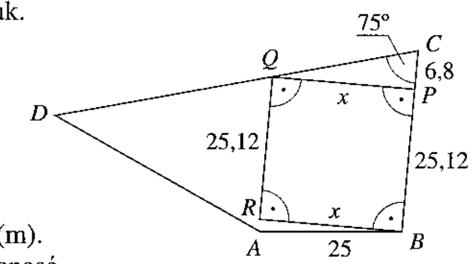
$\varepsilon = 75^\circ - \varphi \approx 38{,}93^\circ$, tehát az ACD háromszög területe:
$t_2 = \dfrac{42{,}3 \cdot 65 \cdot \sin 38{,}93^\circ}{2} \approx 863{,}9$ (m²).

A telek területe $t_1 + t_2 = 398{,}5 + 863{,}9 = 1262{,}4$ m², jelenlegi értéke pedig
$1{,}262 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^4 = 1{,}893 \cdot 10^7$ Ft, azaz kb. 19 millió forint.

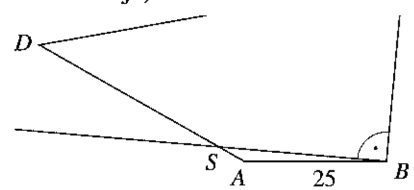
b) Az ACD háromszögből koszinusztétellel:
$AD = \sqrt{42{,}3^2 + 65^2 - 2 \cdot 42{,}3 \cdot 65 \cdot \cos 38{,}93^\circ} \approx 41{,}7$ (m), a telek kerülete tehát $25 + 32 + 65 + 41{,}7 = 163{,}7$ (m). Ez a beszerzett mennyiség 96%-a, tehát kb. 170,5 métert kell vásárolni.

Megjegyzés:
A BD átló berajzolásával is kezdhetjük a feladat megoldását. A BD átló hossza 64,6 m, a BCD háromszög ismeretlen szögeire 76,41°, illetve 28,59°, az ABD háromszög szögeire 150,39°, 18,59° és 11,03° adódik.

c) A telek területének fele 631,2 m². Az ekkora alapterületű, négyzet alapú épület alapéle: $\sqrt{631{,}2} \approx 25{,}12$ m.
Azt is megvizsgáljuk, hogy egy ekkora épület egyáltalán elhelyezhető-e ezen a földdarabon. Ezt pontos szerkesztéssel és méréssel, vagy – ahogyan az alábbiakban – számításokkal is megmutathatjuk.

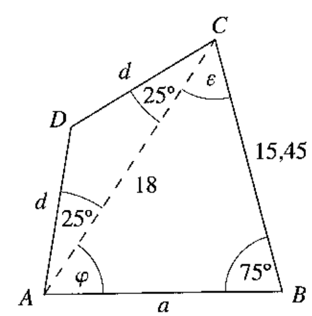


Állítsunk a BC oldalra egy olyan $BPQR$ téglalapot, amelynek BP oldala 25,12 méter hosszú, és a Q csúcsa a CD szakaszon van (ábra).
Ekkor a CPQ derékszögű háromszögből a téglalap másik oldala:
$x = 6{,}8 \cdot \mathrm{tg}\ 75^\circ \approx 25{,}38$ (m) > 25,12 (m).
Megmutatjuk, hogy a BR szakasz egyenesének a négyszög belsejébe eső szakasza nagyobb 25,38 m-nél (azaz R valóban a négyszögön belül van, ahogyan az előző ábra mutatja).



Messze a BR egyenese az AD oldalt az S pontban (ábra).
$ABS\sphericalangle = 5^\circ$, $BAS\sphericalangle \approx 150{,}39^\circ$
(ld. a b) végén található megjegyzést), ezért $ASB\sphericalangle \approx 24{,}61^\circ$.
Az ASB háromszögből szinusztétellel: $\dfrac{BS}{25} = \dfrac{\sin 150{,}39^\circ}{\sin 24{,}61^\circ}$, amiből $BS \approx 29{,}7$ m; az R pont tehát az $ABCD$ négyszög belső pontja.
Az $ABCD$ földdarabon tehát elhelyezhető egy olyan négyzet alapú épület, amelynek alapéle 25,2 m hosszú. Mivel $25{,}2^2 = 635{,}0 > 631{,}2$ ezért olyan négyzet alapú épület is elhelyezhető, amelynek alapterülete a földdarab területének 50%-a.

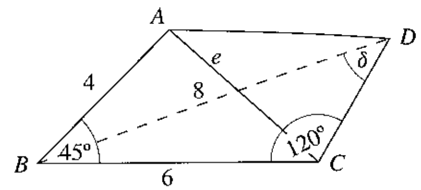
2327. Először tegyük fel, hogy a négyszög **konvex**. Az ADC háromszög egyenlő szárú, mert két egyenlő szöge van.



Ezért $d = \dfrac{9}{\cos 25^\circ} \approx 9{,}93$ (m), az ADC háromszög területe pedig $t_1 = \dfrac{d^2 \cdot \sin 130^\circ}{2} \approx 37{,}8$ (m²).
Az ABC háromszögben szinusztétellel:
$\dfrac{\sin\varphi}{\sin 75^\circ} = \dfrac{15{,}45}{18}$, amiből $\sin\varphi \approx 0{,}8291$.

Mivel φ hegyesszög, ezért $\varphi \approx 56{,}0°$, így $\varepsilon \approx 180° - 75° - 56{,}0° = 49{,}0°$.
Az ABC háromszög területe $t_2 = \dfrac{18 \cdot 15{,}45 \cdot \sin 49{,}0°}{2} \approx 104{,}9$ (m^2), tehát az $ABCD$ négyszög területe $t_1 + t_2 \approx 142{,}7$ (m^2).
Koszinusztétellel $a = \sqrt{18^2 + 15{,}45^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15{,}45 \cdot \cos 49{,}0°} \approx 14{,}06$ (m), így a négyszög kerülete $14{,}06 + 15{,}45 + 2 \cdot 9{,}93 = 49{,}37$ (m).
Ha a négyszög **konkáv**, akkor kerülete ugyanakkora, mint a konvex esetben, területe pedig: $t_2 - t_1 \approx 67{,}1$ (m^2).

2328. a) A másik átló az ábra szerint az ABC háromszögből a koszinusztétellel számítható ki:
$e^2 = 16 + 36 - 48 \cdot \cos 45° =$
$= 52 - 24\sqrt{2}$, ahonnan
$e \approx 4{,}25$ egység.

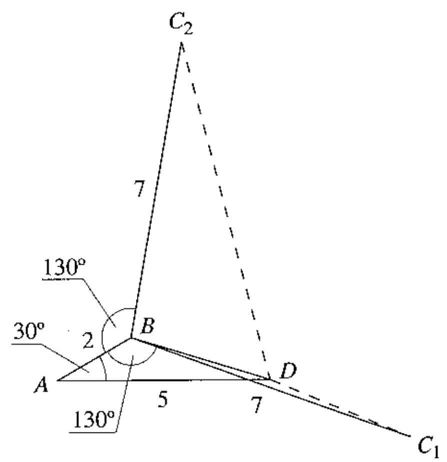


b) Először BCD háromszögben egy szinusztétellel kiszámítjuk $CDB\sphericalangle$-et:
$\dfrac{\sin\delta}{\sin 120°} = \dfrac{6}{8}$, ahonnan $\delta \approx 40{,}5°$ (vagy $139{,}5°$, de ez most a $BCD\,\Delta$ szögösszege miatt nem lehetséges). Ekkor $CBD\sphericalangle = 180° - 120° - 40{,}5° = 19{,}5°$.
Azaz $\dfrac{CD}{8} = \dfrac{\sin 19{,}5°}{\sin 120°}$, ahonnan a keresett CD oldal hossza: kb. 3,1 egység.

c) $DBA\sphericalangle = 45° - 19{,}5° = 25{,}5°$, azaz ismét egy koszinusztételből adódik AD hossza: $AD^2 = 16 + 64 - 64 \cdot \cos 25{,}5° = 80 - 64 \cdot \cos 25{,}5° \approx 22{,}2$, amiből $AD \approx 4{,}7$ egység hosszú.

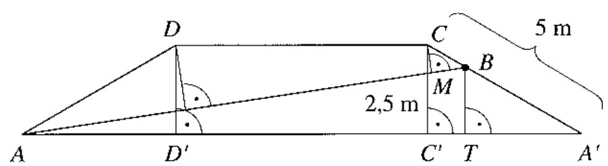
2329. a) Két eset van, C_1, és C_2 jelöli a víztároló két lehetséges helyzetét a leírás alapján.

b) Mindkét esetben megadjuk CD hosszát.
Az első lépésként BD-re felírjuk a koszinusztételt (ez mindkét esetben azonos, utána jön majd az eltérés):
$BD^2 = 4 + 25 - 20 \cdot \cos 30° =$
$= 29 - 10\sqrt{3} \approx 11{,}7$, ahonnan
$BD \approx 3{,}4$ km hosszú.
Ezután az első esetben a koszinusztétellel: $5^2 = 2^2 + 3{,}4^2 -$
$- 2 \cdot 2 \cdot 3{,}4 \cdot \cos ABD\sphericalangle$,



amiből $ABD\sphericalangle \approx 133°$. Ezzel $C_1BD\sphericalangle \approx 3°$. Ezután $BDC_1\,\Delta$-ben egy koszinusztételből adódik a keresett C_1D hossz: $C_1D^2 = 11{,}68 + 49 - 47{,}84 \cdot \cos 3° =$
$= 60{,}68 - 47{,}78 = 12{,}90$, azaz C_1D kb. 3,59 km.
A második esetben hasonlóan $ABD\sphericalangle = 133°$, és így
$C_2BD\sphericalangle \approx 360° - 130° - 133° = 97°$.
Ennek kell a koszinusza, amivel ezúttal: $C_2D^2 = 11{,}68 + 49 - 47{,}84 \cdot \cos 97° =$
$= 60{,}68 + 5{,}84 = 66{,}52$, amiből C_2D kb. 8,16 km. Tehát az ábrán látható két kiemelt távolság: a víztorony illetve a gyárkémény távolsága (C_1D és C_2D) kb. 3,59, illetve 8,16 km.

2330. a) Mivel a töltés magassága 2,5 m, ezért D pont alapra eső merőleges vetületének (D') távolsága A-tól:



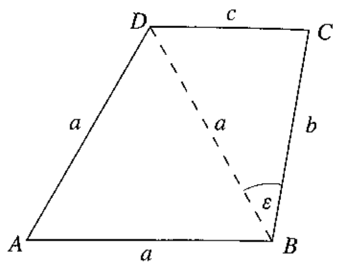
$\operatorname{ctg} 30° = \dfrac{AD'}{2{,}5 \text{ m}}$, ahonnan $D'A \approx 4{,}33$ m. Ezzel megegyezik $C'A'$ szakasz hossza is, mivel a töltés egyenlőszárú trapéz keresztmetszetű.
Így az alap $AA' \approx 4{,}33 + 10 + 4{,}33 = 18{,}66$ (m).

b) Mivel 15%-os lejtő, ezért $\operatorname{tg} BAA'\sphericalangle = 0{,}15$, ahonnan a szög: $8{,}53°$.
Ekkor $ABA'\sphericalangle$-re adódik: $180° - 30° - 8{,}5° = 141{,}5°$.
Ezután a szinusztétel szerint: $\dfrac{\sin 30°}{\sin 141{,}5°} = \dfrac{AB}{18{,}66}$, ahonnan $AB \approx 14{,}98$ m.

c) A töltés keresztmetszet-területe: $\dfrac{10 + 18{,}66}{2} \cdot 2{,}5 \approx 35{,}8$ (m^2).

d) $DAB\sphericalangle \approx 30° - 8{,}53° = 21{,}47°$ (l. a b)-beli eredményt). Először kiszámoljuk AD-t, és D távolsága AB-től ekkor: $AD \cdot \sin 21{,}47°$. AD éppen 5 méter, mivel $ADD'\,\Delta$ egy szabályos háromszög fele, és $DD' = 2{,}5$, ami a fél oldal. Azaz D az AB alaptól $5 \cdot \sin 21{,}47° \approx 1{,}83$ méter távolságra van. C távolságához először BC hossza kell. Az ábra alapján: $BT \approx AB \cdot \sin 8{,}53° \approx 2{,}22$ (m). Ekkor 4,44 m lesz BA' hossza, mivel az $A'BT\,\Delta$ a nevezetes 30-60-90 fokos háromszög.
Tehát $BC \approx 5 - 4{,}44 = 0{,}56$ (m). A keresett CM szakasz hossza meglenne, ha tudnánk CBM vagy MCB szögek egyikét. $MBC\sphericalangle$ azonban külső szöge $A'BA$ háromszögnek, tehát $MCB\sphericalangle \approx 30° + 8{,}53° = 38{,}53°$.
Innen $MC \approx 0{,}56 \cdot \sin 38{,}53° \approx 0{,}35$ (m).
Tehát a C csúcs az új töltésalaptól mindössze 35 cm-re van.

2331. A feltétel szerint ABD szabályos, BCD általános háromszög, területük aránya $4:3$, így



$T_{ABD} = 3000 \cdot \frac{4}{7}$ m²,

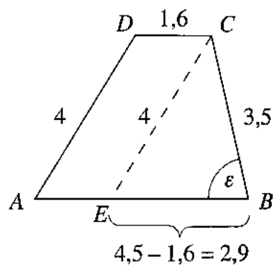
$T_{BCD} = 3000 \cdot \frac{3}{7}$ m².

Egy a oldalú szabályos háromszög területe $T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, tehát $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3000 \cdot \frac{4}{7}$, ebből $a = 62{,}92$ (m). A trapéz egy száron fekvő szögei egymást 180°-ra egészítik ki, így $DAB \sphericalangle = 60°$; $ADC \sphericalangle = 120°$. A szabályos háromszög miatt $ADB \sphericalangle = 60°$, ezért $CDB \sphericalangle = 60°$.

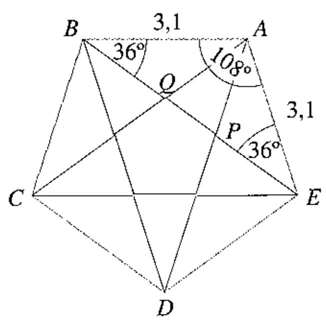
BCD háromszög területe: $\frac{a \cdot c \sin 60°}{2} = 3000 \cdot \frac{3}{7}$, ebből $c = 47{,}19$ (m).

BCD háromszög b oldalára felírjuk a koszinusztételt:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 60°$.
A megfelelő értékeket behelyettesítve: $b \approx 56{,}72$ (m).
Mivel $c < b \Rightarrow$ a BCD háromszögben $\varepsilon < 60°$, a szinusztételt alkalmazva:
$\frac{\sin\varepsilon}{\sin 60°} = \frac{c}{b}$, ebből $\varepsilon \approx 46{,}1°$.
Így a trapéz szögei: 60°; 120°; 106,1°; 73,9°;
oldalai: 62,92 m; 62,92 m; 47,19 m; 56,72 m.

2332. Toljuk el a trapéz AD oldalát CE-be! A keletkezett EBC háromszög oldalaira a koszinusztételt alkalmazva: $4^2 = 3{,}5^2 + 2{,}9^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}9 \cdot \cos\varepsilon \Rightarrow$
$\cos\varepsilon \approx 0{,}2296 \quad \varepsilon \approx 76{,}73°$.
Tehát a meredekebb oldalon a töltés dőlési szöge 76,73°.



2333. A BAE háromszög egyenlő szárú, ezért $BE = 2 \cdot 3{,}1 \cdot \cos 36° \approx 5{,}02$ (cm).
A szabályos ötszög szimmetriája miatt az EPA háromszög is egyenlő szárú, így $EP = \frac{3{,}1}{2 \cdot \cos 36°} \approx 1{,}92$ (cm).
$EP = BQ$, tehát $PQ = BE - 2 \cdot EP \approx$
$\approx 5{,}02 - 2 \cdot 1{,}92 = 1{,}18$ (cm).

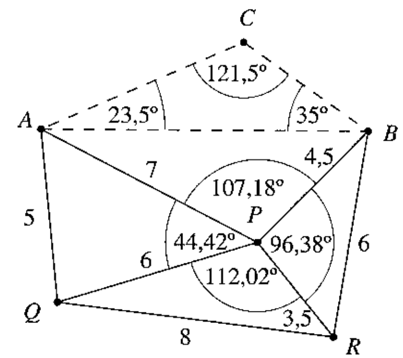


2334. Az előző ábra jelöléseit használva most $AB = 5{,}4$ cm, $BE = 2 \cdot 5{,}4 \cdot \cos 36° \approx$
$\approx 8{,}74$ (cm), $EP = \frac{5{,}4}{2 \cdot \cos 36°} \approx 3{,}34$ (cm), $PQ \approx 8{,}74 - 2 \cdot 3{,}34 = 2{,}06$ (cm).
A 2,06 cm oldalú szabályos ötszög területét kiszámíthatjuk öt egybevágó egyenlő szárú háromszög területének összegeként is:
$t = 5 \cdot \frac{2{,}06 \cdot 1{,}03 \cdot \operatorname{tg} 54°}{2} \approx 7{,}30$ (cm²).

2335. Terv:

1. $APB \sphericalangle$ kiszámítása.
2. AB hossza.
3. $ACB \sphericalangle$.
4. AC és BC szakaszok hosszának kiszámítása.

1. A P pont körüli szögek közül hármat koszinusztétellel is kiszámíthatunk:



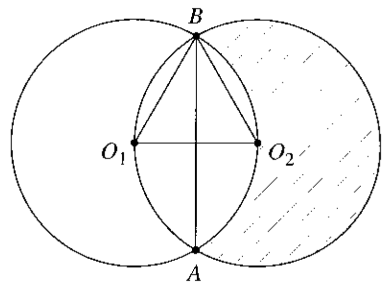
$\cos APQ \sphericalangle = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{7} \Rightarrow$
$APQ \sphericalangle \approx 44{,}42°$;
$\cos QPR \sphericalangle = \frac{6^2 + 3{,}5^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 3{,}5} =$
$= -\frac{3}{8} \Rightarrow QPR \sphericalangle \approx 112{,}02°$;
$\cos RPB \sphericalangle = \frac{3{,}5^2 + 4{,}5^2 - 6^2}{2 \cdot 3{,}5 \cdot 4{,}5} =$
$= -\frac{1}{9} \Rightarrow RPB \sphericalangle \approx 96{,}38°$.
$APB \sphericalangle = 360° - (44{,}42° + 112{,}02° + 96{,}38°) = 107{,}18°$.

2. Koszinusztétellel az APB háromszögből:
$AB = \sqrt{7^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 107{,}18°} \approx 9{,}37$ (km).

3. $ACB \sphericalangle = 180° - 23{,}5° - 35° = 121{,}5°$

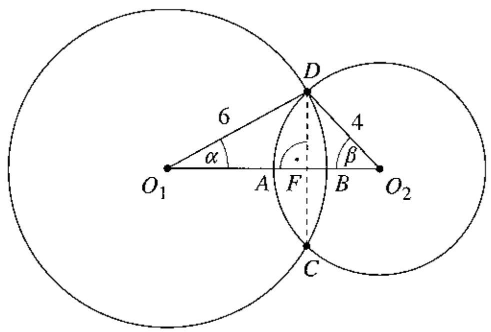
4. Szinusztételekkel az ABC háromszögből:
$\frac{AC}{9{,}37} = \frac{\sin 35°}{\sin 121{,}5°} \Rightarrow AC \approx 6{,}30$ (km); $\frac{BC}{9{,}37} = \frac{\sin 23{,}5°}{\sin 121{,}5°} \Rightarrow BC \approx 4{,}38$ (km).
Az ABC háromszög oldalainak hossza: 9,37 km, 6,30 km és 4,38 km.

2336. Kössük először a kecskét az O_1-ben levert karóhoz, majd mikor lelegelte a füvet kössük O_2-be. Ekkor a satírozott területet keressük. Ismert a körök sugara: $r = 10$ m, és a két középpont távolsága: 10 m. A keresett területet megkapjuk, ha a kör területéből az O_1AB körszelet kétszeres területét kivonjuk. Ennek meghatározásához a $BO_1A\sphericalangle$-et kell meghatározni.



Mivel az O_1O_2B háromszög egyenlő oldalú, ezért a $BO_1A\sphericalangle = 120°$, amiből a körszelet területe közelítőleg: 61,4 m², így a kecske által még lelegelhető terület nagysága körülbelül 191 m².

2337.

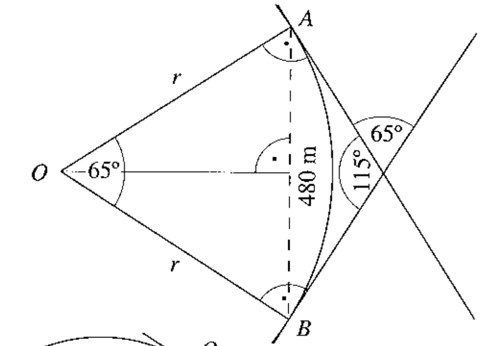


a) O_1 közepű, 6 m sugarú kört locsol be az egyik és O_2 közepű, 4 m sugarút a másik öntöző.
A mindkettő által öntözött terület az ACD körszelet és a BDC körszelet. Ezek területének kiszámításához DO_1C és CO_2D szögek nagyságát kell meghatároznunk, amelyek az O_1FD és az O_2DF derékszögű háromszögek α-val és β-val jelölt hegyesszögeinek a kétszeresei. α és β kiszámítható a 4, 6, 8 egység oldalakkal rendelkező O_1O_2D háromszögben felírt koszinusztételekből:
$4^2 = 6^2 + 8^2 - 2\cdot 6\cdot 8\cdot \cos\alpha$, amiből $\alpha \approx 29°$ és
$6^2 = 4^2 + 8^2 - 2\cdot 4\cdot 8\cdot \cos\beta$, amiből $\beta \approx 47°$.
Így a keresett középponti szögek: $DO_1C\sphericalangle \approx 58°$ és $CO_2D\sphericalangle \approx 94°$.
Ekkor a két körszelet együttes területét megkapjuk, ha a megfelelő körcikkek területét összeadjuk és kivonjuk belőle az O_1O_2D háromszög területének a kétszeresét, tehát a keresett terület: $t \approx 18{,}2 + 13{,}1 - 23{,}3 = 8$ (m²).

b) A keresett területek nagyságát kapjuk ha az egyes körök területéből levonjuk az a) feladatban meghatározott területet, így: $t_1 \approx 105$ m²; $t_2 \approx 42$ m².

2338. a) Lásd a mellékelt rajzot.
A körív sugara az ABO egyenlő szárú háromszögből:

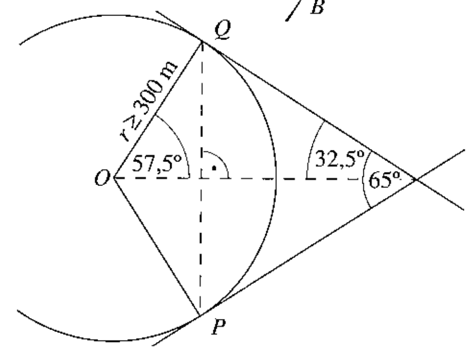
$$r = \frac{240}{\sin 32{,}5°} \approx 446{,}7 \text{ (m)}.$$



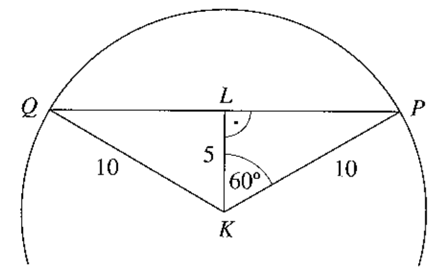
b) A mellékelt ábra szerint most a hegyesszögű tartományba kell egy érintő kört rajzolni, aminek legalább 300 méter a sugara.

$$\frac{\frac{PQ}{2}}{300} = \sin 57{,}5°,$$

ahonnan PQ legalább 506 méter.
Azaz, ha PQ legalább 506 méter, és merőleges a 65°-os szög felezőjére, akkor az ív görbületi sugara is legalább 300 méter lesz.

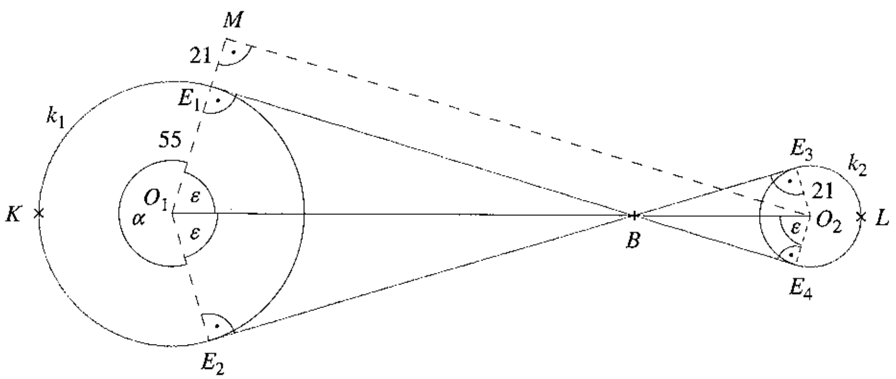


2339. A tortaszelet mennyiségét az alapterülete meghatározza.
A körcikk alapú tortaszelet alapterülete: $10^2\pi\cdot\frac{115°}{360°} \approx 100{,}4$ (cm²).
A körszelet alapú torta alapjának területe a QKP körcikk és a QKP egyenlő szárú háromszög területének különbségeként is megkapható.



A QKP háromszög az alapjához tartozó KL magasságának meghúzásával két olyan egybevágó derékszögű háromszögre darabolható, amelyekből egy 10 cm oldalú szabályos háromszög rakható össze, ezért területe: $\frac{10^2\cdot\sqrt{3}}{4} \approx 43{,}3$ (cm²).
A QKP körcikk középponti szöge az előzőek miatt 120°, ezért a körcikk területe a kör területének harmada: $\frac{1}{3}\cdot 10^2\pi \approx 104{,}7$ (cm²).
A körszelet területe: $104{,}7 - 43{,}3 = 61{,}4$ (cm²).
A körcikk alapú torta kedvezőbb választás, mint a körszelet alapú (annak, aki szereti a csokitortát).

2340.



Keresztezett szíjhajtás esetén a szíj t hossza a két kör közös belső érintőinek és a körök érintési pontjai közötti „külső” köríveinek hosszából tevődik össze, azaz $t = E_1E_4 + E_2E_3 + E_1KE_2(\text{ív}) + E_3LE_4(\text{ív})$.

Mivel a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért $O_1E_1 \perp E_1B$; $O_2E_4 \perp E_4B$. Toljuk el az E_1E_4 érintőt O_2M-be, így a keletkezett $E_1MO_2E_4$ négyszög egy téglalap $\Rightarrow$ a belső érintő hossza kiszámítható az O_1MO_2 derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele segítségével: $76^2 + (MO_2)^2 = 265^2 \Rightarrow MO_2 \approx 253{,}9$.

Az O_1MO_2 derékszögű háromszögből: $\cos\varepsilon = \dfrac{76}{265} \Rightarrow \varepsilon \approx 73{,}3°$.

$O_1E_1B\,\Delta \cong O_1E_2B\,\Delta$, mert két-két oldal és az oldalak közül a nagyobbakkal szemközti szög egyenlő (sugár, O_1B közös, és a derékszög) $\Rightarrow$ megfelelő szögeik is egyenlők $\Rightarrow$ E_1KE_2 ívhez és ugyanígy az E_3LE_4 ívhez tartozó középponti szög $\alpha = 360° - 2\varepsilon \approx 213{,}4°$.

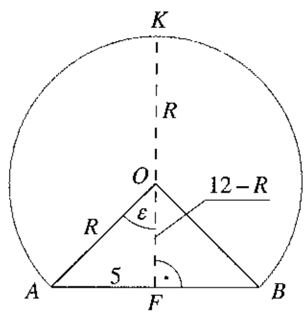
Mivel $O_1BE_1\sphericalangle = E_4BO_2\sphericalangle$ (csúcsszögek) $\Rightarrow O_1E_1B\,\Delta \sim O_2E_4B\,\Delta$, mert két-két szögük egyenlő. A keresett ívek:

$E_1KE_2(\text{ív}) \approx 2\cdot 55\pi\dfrac{213{,}4}{360} \approx 204{,}8$, $\qquad E_3LE_4(\text{ív}) \approx 2\cdot 21\pi\dfrac{213{,}4}{360} \approx 78{,}2$.

$t = 204{,}8 + 78{,}2 + 2\cdot 253{,}9 = 790{,}8$.

A szükséges szíj hossza kb. 790,8 cm.

2341. Mivel $KF = 12 \Rightarrow FO = 12 - R$. Az AOB egyenlő szárú háromszög $\Rightarrow$ alaphoz tartozó magassága felezi az alapot $\Rightarrow AFO$ derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva:



$5^2 + (12 - R)^2 = R^2 \Rightarrow R = \dfrac{169}{24} \approx 7{,}04$ (m).

Az AFO derékszögű háromszögben

$\sin\varepsilon = \dfrac{5}{7{,}04} \Rightarrow \varepsilon \approx 45{,}25°$.

Az AOB háromszög területe: $\dfrac{10\cdot(12-R)}{2} \approx 24{,}8$ (m²).

Az AKB körívhez tartozó körcikk területe: $T_{\text{körcikk}} = R^2\pi\dfrac{360-2\varepsilon}{360} \approx 116{,}56$ (m²).

Az AKB körívhez tartozó körszelet területe:

$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} + T_{AOB} \approx 116{,}56 + 24{,}8 = 141{,}36$ (m²).

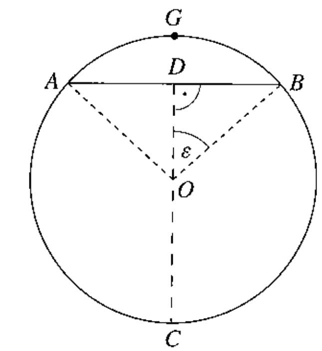
A kitermelt kőzet térfogata $V = T_{\text{körszelet}} \cdot M \approx 141{,}36 \cdot 525 \approx 74214$ (m³).

Mivel 1 m³ kőzet tömege 2,5 tonna, ezért a kitermelt kőzet tömege $m \approx 74214 \cdot 2{,}5 = 185\,535$ (tonna).

Mivel egy teherautó teherbírása 16 tonna $\Rightarrow \dfrac{185535}{16} = 11595{,}93$, azaz 11596 teherautó tudja elszállítani a kitermelt kőzetet.

Attól függően, hogy a számításokban milyen kerekítéssel, hány tizedesjeggyel dolgozunk, továbbá a gyakorlatban előforduló szállítási körülmények miatt (nem pontosan ugyanannyi mennyiség kerül mindegyik teherautóra) a tényleges teherautó-szükséglet a kiszámolt számnál 0,5%-kal (kb. 60) is eltérhet.

2342. $CD = \dfrac{5}{6}\cdot 150 = 125$; $(OC = OB = 75)$; $OD = 50$.



Az ODB derékszögű háromszögben:

$\cos\varepsilon = \dfrac{50}{75} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \varepsilon \approx 48{,}2° \Rightarrow 2\varepsilon = 96{,}4°$.

Az AGB ívhez tartozó AOB körcikk területe:

$T_{AOB\,\text{körcikk}} = 75^2\pi\cdot\dfrac{96{,}4}{360} \approx 4732$ (cm²).

Az AOB háromszög területe:

$T_{AOB\Delta} = \dfrac{75^2\sin 96{,}4°}{2} \approx 2795$ (cm²).

Az ABG körszelet területe:

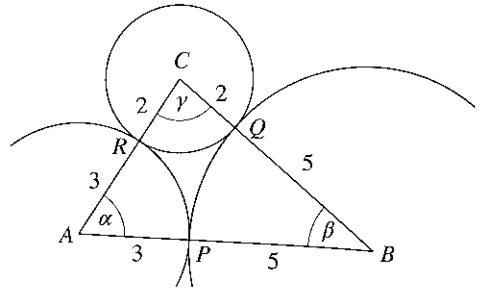
$T_{ABG} = T_{AOB\,\text{körcikk}} - T_{AOB\,\Delta} \approx 1937$ (cm²).

Az ACB ívhez tartozó körszelet területe: $T_{\text{kör}} - T_{ABG} \approx 75^2\pi - 1937 \approx 15\,734$ (cm²).

A kazánban levő víz mennyisége:

$V \approx 15\,734 \cdot 600 = 9\,440\,400$ (cm³) $\approx 9{,}44$ (m³).

2343. A színezett rész területét megkaphatjuk úgy is, hogy az ABC háromszög területéből kivonjuk az α, β, illetve γ középponti szögű körcikkek területét (ábra). A felsorolt szögeket az ABC háromszög oldalainak ismeretében koszinusztétellel is kiszámíthatjuk:



$$\cos\alpha = \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°;$$

$$\cos\beta = \frac{8^2+7^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 7} = \frac{11}{14} \Rightarrow \beta \approx 38{,}21°; \quad \gamma = 180° - \alpha - \beta \Rightarrow \gamma \approx 81{,}79°.$$

Az α középponti szögű körcikk területe: $t_\alpha = \frac{3^2\pi}{6} \approx 4{,}71$ (cm²); a β középponti szögű körcikk területe: $t_\beta = \frac{5^2\pi\cdot 38{,}21°}{360°} \approx 8{,}34$ (cm²); a γ középponti szögű körcikk területe: $t_\gamma = \frac{2^2\pi\cdot 81{,}79°}{360°} \approx 2{,}86$ (cm²); az ABC háromszög területe pedig

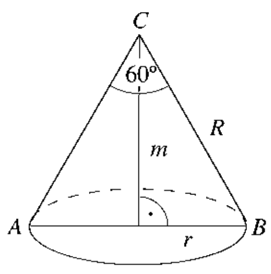
$$t = \frac{8\cdot 5\cdot \sin 60°}{2} \approx 17{,}32 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

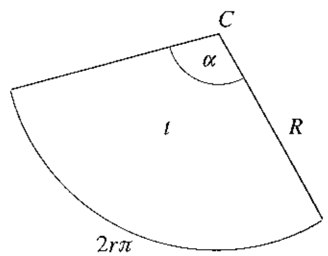
A színezett rész területe:

$t - (t_\alpha + t_\beta + t_\gamma) \approx 17{,}32 - (4{,}71 + 8{,}34 + 2{,}86) = 1{,}41$ (cm²).

2344. A feladat megoldásának gondolatmenetét lásd a 2343. feladatnál. A keresett terület kb. 7,7 cm².

2345. A kúp tengelymetszete, az $ABC\Delta$, a megadott 60°-os nyílásszög miatt szabályos, tehát az alkotó hossza egyenlő az alapkör átmérőjének hosszával, $2r$-rel. A kiterített kúppalást ívével azonos az alapkör kerülete, hossza ezért $2r\pi$. A palást sugara, R, a kúp alkotójával azonos, tehát $R = a = 2r$.





Az $ABC\Delta$ magassága $r\sqrt{3} = 10 \Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

A kiterített palást területe: $t = ar\pi = 2r^2\pi$,

$$t = 2\cdot\frac{100}{3}\pi \approx 209{,}44.$$

A palást területe 209,44 cm².

A kiterített palást középponti szöge α: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{2r\pi}{2R\pi} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 180°$.

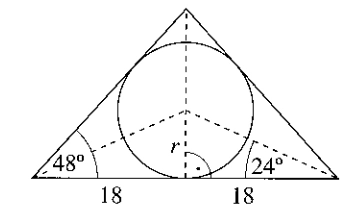
2346. A körcikk sugara a kúp alkotója lesz, a körcikk ívének hossza pedig a kúp alapkörének kerületével azonos. Jelölje az alkotót a, az alapkör sugarát r.

$a = 21$ cm és $2r\pi = \frac{1}{3}\cdot 2a\pi$, vagyis $r = \frac{1}{3}a$.

Ha a kúp nyílásszöge α, akkor $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{a} = \frac{1}{3}$, amiből $\frac{\alpha}{2} \approx 19{,}47°$.

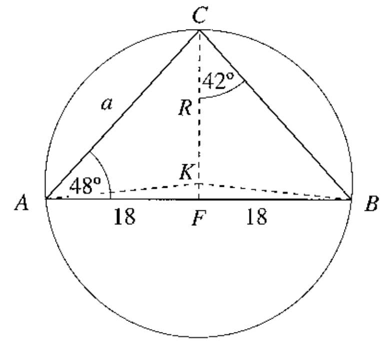
A kúp nyílásszöge tehát kb. 38,94°.

2347. A kúp forgástengelyére illeszkedő sík a kúpot egy 84° szárszögű egyenlő szárú háromszögben, a beírt, illetve körülírt gömböt pedig a háromszög beírt, illetve körülírt körében metszi.

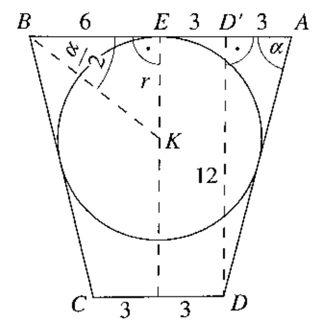


a) A beírt gömb sugara:
$r = 18\cdot \mathrm{tg}\, 24° \approx 8{,}01$ (cm).

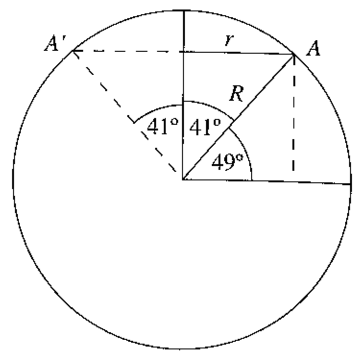
b) Az AFK derékszögű háromszögben $KAF\sphericalangle = 48° - 42° = 6°$, hiszen az AKC háromszög egyenlő szárú és ezért $KAC\sphericalangle = 42°$ (K az ABC háromszög körülírt körének középpontja, a körülírt kör sugara R).
Így $R = \frac{18}{\cos 6°}$ (ami $\frac{18}{\sin 84°}$-kal egyenlő), vagyis $R \approx 18{,}10$ cm.



2348. A csonkakúpot a tengelyére illeszkedő síkkal metszve a mellékelt ábrához jutunk. K az érintőkör középpontja, r a kör sugara (a labda sugara).
A $DD'A$ derékszögű háromszögből
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{3} = 4$, ahonnan $\alpha \approx 75{,}96°$.
A BEK derékszögű háromszögből:
$r = 6\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \approx 6\cdot \mathrm{tg}\, 37{,}98° \approx 4{,}7$ (cm).
A labda átmérője tehát 9,4 cm.



2349. a) Az ábra szerint $\cos 49° = \frac{r}{R}$, ahol R = 6378 km, innen r = 4184,3 km. Tehát a 49°-os szélességi kör sugara 4184,3 km.

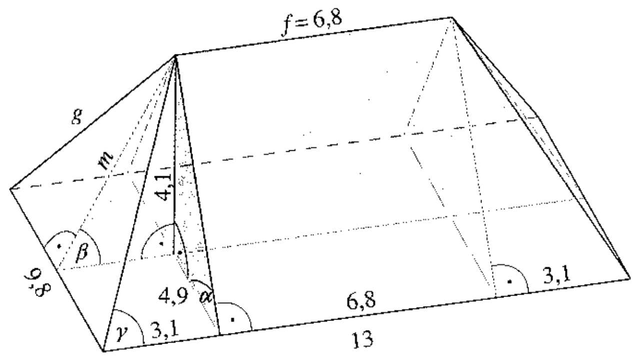


b) Éppen a kör fél kerülete: $4184{,}3\pi \approx 13\,145{,}5$ km. (Az ábrán AA' pontok átellenesek.)

c) A hosszúsági kör mentén az északi sarkon át a rövidebb ív, amelynek hossza az Föld-kerület hosszának $\frac{2 \cdot 41°}{360°}$ része $\frac{2 \cdot 6378 \cdot \pi \cdot 82}{360} = 9128$ (km).

d) Ez a hosszabb útnak 69,4%-a. Ezért a repülőgépek nem a szélességi kör, hanem a mindig rövidebb főkörök (jelen esetben az északi sark felett, egy hosszúsági kör) mentén haladnak.

2350.



a) Az I sík szöge a tető háromszög-keresztmetszetén (lásd ábra) látszik:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4{,}1}{4{,}9} = 0{,}8367$, ahonnan $\alpha \approx 39{,}9°$, a II sík vízszintessel bezárt β szögére

az ábrából: $\operatorname{tg} \beta = \frac{4{,}1}{3{,}1}$, ahonnan $\beta \approx 52{,}9°$.

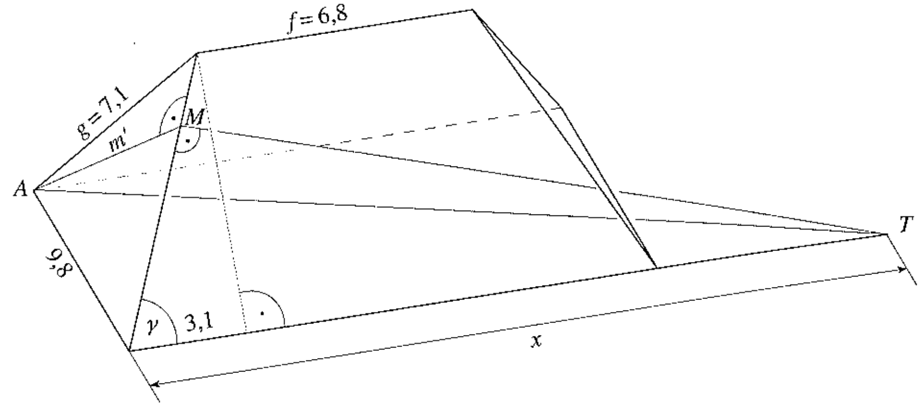
b) A II lap magassága az ábrán m, amire $m = \frac{4{,}1}{\sin 52{,}9°} = 5{,}14$ (m).

Ezután a g él hosszára a Pitagorasz-tétellel kapunk egyenletet:

$g^2 = m^2 + 4{,}9^2 = 50{,}43$, tehát $g \approx 7{,}1$ méter hosszú.

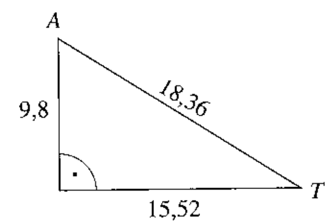
(30 cm-rel hosszabb, mint az f felső gerincél.)

c) Az I és a II sík metszetéhez a közös élükre merőleges síkmetszetet kell készíteni, mert ott lehet valódi méretében látni a bezárt szögüket. Ehhez a tető felülnézeti képén bal felső sarokból – jelöljük A-val – húzzunk merőlegest az I és II metszésvonalára, ami a II háromszögben a szárhoz tartozó m' magasság.



Ennek hosszát kiszámolhatjuk, ha a területre tanult két összefüggést egyenlővé tesszük, azaz: $9{,}8 \cdot m = g \cdot m'$, azaz $m' = 7{,}093$. Ezenkívül a g hosszúságú szárat az m' a csúcstól a Pitagorasz-tétel szerint: $d = \sqrt{g^2 - m'^2} \approx 0{,}3394$ m távolságban metszi.

Ahol ez a magasság eléri a II lap a szintén g hosszúságú szárát, ott kell merőlegest állítani erre az I trapézban, legyen ez az M pont. Ahol ez a merőleges metszi a trapéz alapjának egyenesét, lásd az ábrát, az legyen a T pont. AT hosszát ki tudjuk számolni abból, hogy hol metszi a trapéz oldalélére állított merőleges az alapot. Ebből pedig a két lap közös élére bocsátott merőleges síkban fekvő AMT háromszög három oldalának ismeretében megkaphatjuk a koszinusztételből a keresett szöget.



A trapéz alapon fekvő szögére igaz, hogy $\cos \gamma = \frac{3{,}1}{g}$, másrészt ha x jelöli a trapéz alapján milyen messze lesz a T pont: $\cos \gamma = \frac{g - d}{x}$, ahonnan $x \approx 15{,}49$ m.

Ekkor $MT^2 = x^2 - (g - d)^2$, azaz $MT \approx 13{,}94$ m.

Végül AT távolság a padlás padlósíkjában ismét Pitagorasz-tétellel:

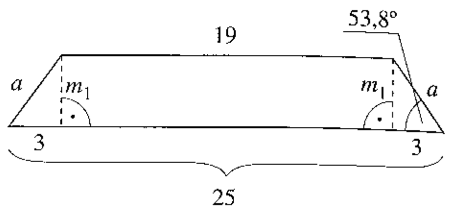
$AT^2 = 9{,}8^2 + x^2$, ahonnan $AT \approx 18{,}33$ m.

Azaz az AMT háromszögben: $AM = m' \approx 7{,}093$; $MT \approx 13{,}94$; $AT \approx 18{,}33$.
Innen koszinusztétellel a keresett AMT szögre:

$$\cos AMT\sphericalangle = \frac{7{,}093^2 + 13{,}94^2 - 18{,}33^2}{2 \cdot 7{,}093 \cdot 13{,}94} \approx -0{,}4625,$$

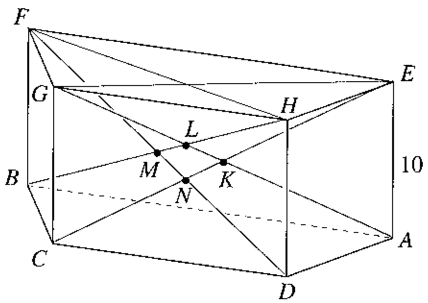
azaz a keresett hajlásszög $117{,}55°$.

2351. Először az alaplapot vizsgáljuk. A trapéz szára: $a = \dfrac{3}{\cos 53{,}8°} \approx 5{,}08$ (cm), magassága: $m_1 = 3 \cdot \operatorname{tg} 53{,}8° \approx 4{,}10$ (cm).



a) A hasáb alapterülete:
$T = \dfrac{25+19}{2} \cdot 4{,}10 \approx 90{,}20$ (cm²),
az alaplap kerülete pedig $k \approx 2 \cdot 5{,}08 + 25 + 19 = 54{,}16$ (cm).
Mivel a hasáb magassága $m = 10$ cm, ezért felszíne $A = 2T + km \approx 722{,}0$ (cm²), térfogata pedig $V = Tm = 902{,}0$ cm³.

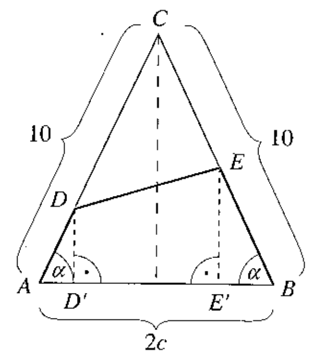
b) Először is megállapíthatjuk, hogy a négy testátló mindegyike egy-egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek egyik befogója a hasáb egy oldaléle, másik befogója pedig az $EFGH$ szimmetrikus trapéz valamelyik átlója (ábra). Mivel a hasáb oldalélei mind 10 cm-esek és a szimmetrikus trapéz átlói egyenlő hosszúak, ezért a testátlók is egyenlő hosszúak. A trapéz átlója a megoldás elején közölt ábra alapján $\sqrt{(25-3)^2 + m_1^2} \approx 22{,}38$ (cm), ezért a testátlók hossza $\sqrt{22{,}38^2 + 10^2} \approx 24{,}51$ (cm).



Megjegyzések:

1. A hasáb mindegyik testátlója a másik három testátló közül pontosan kettőt metsz, a harmadikhoz képest pedig kitérő helyzetű. A metszést pl. az AG testátló esetében a következőképpen is beláthatjuk:
   – Az $ACGE$ négyszög téglalap, amelynek AG és CE átlói metszik egymást (a K pontban, amelyik mindkét átlónak felezőpontja).
   – Az $ABGH$ négyszög szimmetrikus trapéz, melynek AG és BH átlói metszik egymást. Az L metszéspont mindkét átlót $19:25$ arányban osztja ketté, tehát $L \neq K$.
2. A $KLMN$ négyszög csúcsai nincsenek egy síkban, a négyszög torznégyszög.

2352. Az áthaladás ideje egy tetszőleges $ADEB$ úton:
$t = \dfrac{AD}{5} + \dfrac{DE}{3} + \dfrac{EB}{5}$. Legyen D és E merőleges vetülete az AB szakaszon D' és E'.
Az ABC háromszög szimmetriatengelyét meghúzva a hasonló háromszögek alapján felírhatjuk:



$\dfrac{AD}{10} = \dfrac{AD'}{c} \Rightarrow AD = \dfrac{10 \cdot AD'}{c}$ és $\dfrac{BE}{10} = \dfrac{BE'}{c} \Rightarrow$

$BE = \dfrac{10 \cdot BE'}{c}$, tehát $t = \dfrac{10 \cdot AD'}{5c} + \dfrac{DE}{3} + \dfrac{10 \cdot BE'}{5c} =$

$= \dfrac{2(AD'+BE')}{c} + \dfrac{DE}{3} = \dfrac{2(AD'+EB')}{c} + \dfrac{2DE}{6}$.

A vetítés miatt $DE \geq D'E'$, és jelölje a c, illetve a 6 (km) közül a nagyobbik értéket x.

Ekkor $t \geq \dfrac{2(AD'+EB')}{c} + \dfrac{2D'E'}{6} \geq \dfrac{2(AD'+EB')}{x} + \dfrac{2D'E'}{x} =$

$= \dfrac{2(AD'+D'E'+EB')}{x} = \dfrac{2AB}{x}$.

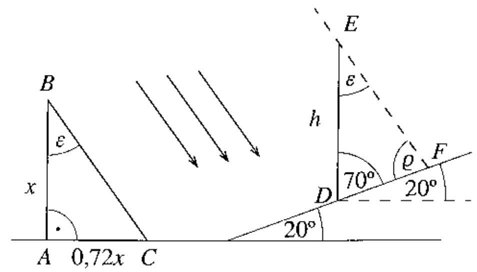
Három eset van:

Ha $c < 6$, akkor a minimális idő $t = \dfrac{2AB}{6} = \dfrac{AB}{3}$, A-ból egyenesen B-be a terepen át. (Ez az idő $AB = 2c$ miatt bizonyosan rövidebb, mint 4 óra.)

Ha viszont $6 < c$, akkor a minimális idő $t = \dfrac{2AB}{c} = \dfrac{4c}{c} = 4$ (óra), A-ból C-be, onnan B-be, végig az úton.

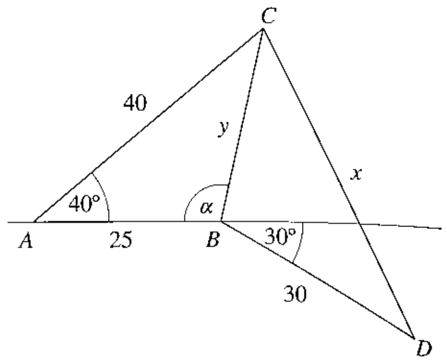
Végül, ha $c = 6$, minden olyan $ADEB$ út jó, amire $DE = D'E'$, vagyis $DE \parallel D'E'$, az-az $AD = EB$ (beleértve magát a közvetlen AB utat, illetve az ACB utat is – ez az idő is pontosan 4 óra).

2353. Kis távolságon belül a napsugarakat párhuzamosnak vehetjük, így $BC \parallel EF$. A vízszintes talajon álló $AB = x$ magasságú ember árnyéka a testmagasságának 72%-a, így $AC = 0{,}72x$, ABC derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}72 \Rightarrow$
$\varepsilon \approx 35{,}8° \Rightarrow DEF\sphericalangle = \varepsilon \approx 35{,}8°$.
Mivel $EDF\sphericalangle = 70° \Rightarrow$
$DFE\sphericalangle =: \varrho = 180° - (70° + \varepsilon) \approx 74{,}2°$.
A feltétel szerint a $DE =: h$ magasságú fa DF árnyéka a lejtőn 1,5 méter hosszú, h nagyságát a DEF háromszögben szinusztétellel meghatározhatjuk:



$\dfrac{\sin\varrho}{\sin\varepsilon} = \dfrac{\sin 74{,}2°}{\sin 35{,}8°} = \dfrac{h}{1{,}5} \Rightarrow h \approx 2{,}47.$ Tehát a lejtőn álló fa kb. 2,47 méter magas.

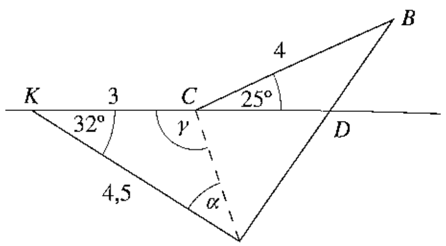
2354. A és B jelöli a két elágazást, C és D pedig a településeket.
Ekkor az ABC háromszögben a koszinusztételt felírva kapjuk y-t, majd ismét koszinusztétellel α-t is kiszámítjuk:
$y^2 = 40^2 + 25^2 - 2 \cdot 40 \cdot 25 \cdot \cos 40°$,
innen $y \approx 26{,}3$ és
$40^2 = 25^2 + 26{,}3^2 - 2 \cdot 25 \cdot 26{,}3 \cdot \cos \alpha$,
innen $\alpha \approx 102°$.
Ekkor a $CBD\sphericalangle = 108°$, így a CBD háromszögben a koszinusztétel segítségével



a keresett x távolság meghatározható: $x^2 = 26{,}3^2 + 30^2 - 2 \cdot 26{,}3 \cdot 30 \cdot \cos 108°$, amiből $x \approx 45{,}6$ adódik, a két település távolsága tehát közelítőleg 45,6 km.

2355. Az AB távolság kiszámításához az alábbi lépések elvégzésével jutunk.

1) Az ACK Δ-ből koszinusztétellel AC kiszámítása.
2) Az ACK Δ-ből szinusztétellel γ kiszámítása.
3) Az $ACB\sphericalangle = 180° - \gamma + 25°$ kiszámítása.
4) Az ABC Δ-ből koszinusztétellel AB kiszámítása.



A megoldás részletezése:

1) $AC^2 = 3^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 32° \approx 6{,}353$; $\quad (AC \approx 2{,}52)$.

2) $\dfrac{\sin \gamma}{\sin 32°} = \dfrac{4{,}5}{AC} \Rightarrow \sin \gamma \approx 0{,}9461 \Rightarrow \gamma_1 \approx 71{,}1°$ vagy $\gamma_2 \approx 108{,}9°$.
Az ezekhez tartozó harmadik szöget is kiszámítva $\alpha_1 \approx 76{,}9°$, illetve $\alpha_2 \approx 39{,}1°$.
Kiderül, hogy $ACK\sphericalangle = \gamma_2 \approx 108{,}9°$, ti. csak így teljesül, hogy az ACK Δ-ben a legnagyobb oldallal szemben van a legnagyobb szög.

3) $ACB\sphericalangle \approx 180° - 108{,}9° + 25° = 96{,}1°$

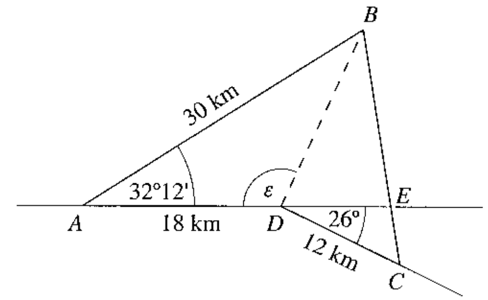
4) $AB^2 = 2{,}52^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2{,}52 \cdot \cos 96{,}1° \approx 24{,}5$. Ebből $AB \approx 4{,}9$.
Az A falu és B község 4,9 km-re van egymástól.

Megjegyzés:
Ha a 2)-es lépésben koszinusztétellel dolgozunk, akkor közvetlenül adódik, hogy $\cos \gamma < 0$. Ez azt jelenti, hogy γ tompaszög. Így szükségtelenné válik az α szögek kiszámítása.

Másik megoldás:
A feladat megoldható a következő lépések alkalmazásával is:

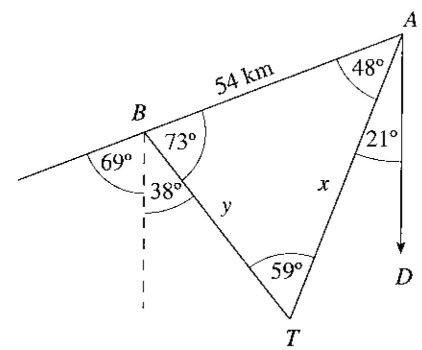
1) $KCB\sphericalangle = 180° - 25° = 155°$
2) KCB Δ-ből koszinusztétellel BK kiszámítása ($BK = 6{,}84$)
3) KCB Δ-ből szinusztétellel $BKC\sphericalangle = \varphi$ kiszámítása ($BKC\sphericalangle = 14{,}3°$)
4) $AKB\sphericalangle = 32° + \varphi$
5) AKB Δ-ből koszinusztétellel AB kiszámítása.

2356.



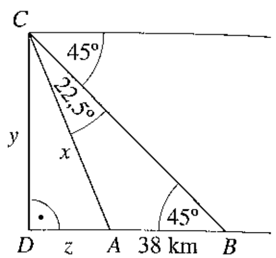
B és C községek távolságát keressük.
Az ADB háromszögben BD, ezután az $ADB\sphericalangle$ (az egyértelműség miatt) is koszinusztétellel számolható:
$BD^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \cos 32°12' \Rightarrow BD \approx 17{,}61$
$30^2 = 18^2 + 17{,}61^2 - 2 \cdot 18 \cdot 17{,}61 \cdot \cos \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \approx 114{,}8°$
A keresett BC távolság a BCD háromszögben koszinusztétellel számolható:
$BDC\sphericalangle = 180° - 114{,}8° + 26° = 91{,}2°$
$BC^2 = 17{,}61^2 + 12^2 - 2 \cdot 17{,}61 \cdot 12 \cdot \cos 91{,}2°$
$BC \approx 21{,}52$
Tehát a két község távolsága kb. 21,52 km.

2357. Az ábra szerinti x és y távolságokat kell meghatározni. A hajó az AB szakasz mentén haladt 1 órát, tehát $AB = 54$ km. A szögeket berajzoltuk az ábrába, ezek vagy adottak, vagy egyszerű alaptulajdonságokból adódnak (egyállású szögek egyenlősége, egyenesszöget vagy háromszöget alkotó szögek összege).



Eszerint a szinusztétel a TAB Δ-ben: $\frac{x}{54} = \frac{\sin 73°}{\sin 59°}$, ebből: $x = 60{,}2$ km.
Hasonlóan, szintén a szinusztételből (vagy akár mindkét esetben koszinusztételből):
$\frac{y}{54} = \frac{\sin 48°}{\sin 59°}$, ahonnan $y = 46{,}8$ km. Tehát a világítótorony kb. 60,2 km-re volt a hajótól, amikor megpillantották, majd 1 óra múlva már csak 46,8 km-re.

2358. A hajó sebességének kiszámításához az alábbi lépések során jutunk el.
1) Az ABC Δ x oldalát szinusztétellel,
2) az ACD Δ y oldalát koszinusz szögfüggvénnyel számítjuk ki.



A megoldás részletezése:
A feladat szövegének értelmében AC felezi a $BCD\sphericalangle = 45°$-os szöget, tehát $ACB\sphericalangle = 22{,}5°$.
1) $\frac{x}{38} = \frac{\sin 45°}{\sin 22{,}5°}$ $\Rightarrow$ $x \approx 70{,}21$.
2) $\cos 22{,}5° = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y = x \cdot \cos 22{,}5° \approx 64{,}87$.
A hajó egy óra alatt 64,9 km utat tett meg, sebessége tehát 64,9 km/óra.

Megjegyzés:
Más megoldás is lehetséges, amivel elkerüljük a szinusztétel alkalmazását.
1) BCD Δ egyenlő szárú, ezért $y = 38 + z$.
2) ACD Δ-ben $\frac{z}{y} = \mathrm{tg}\, 22{,}5° \Rightarrow z = y \cdot \mathrm{tg}\, 22{,}5°$.
3) BCD Δ 1) és 2)-ből álló egyenletrendszer megoldásából y meghatározása.
$y - 38 = y\, \mathrm{tg}\, 22{,}5°$, ebből $y(1 - \mathrm{tg}\, 22{,}5°) = 38$
$y = \frac{38}{1 - \mathrm{tg}\, 22{,}5°} \approx 64{,}87$.

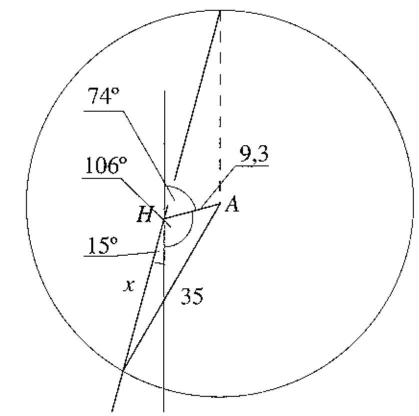
Másik megoldás:
A szögfelezőtétel alkalmazásával is megoldható a feladat.
A BCD Δ oldalai y, y, $y\sqrt{2}$.
Mivel a szögfelezőtétel szerint bármely háromszögben egy belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre,
$\frac{DA}{38} = \frac{y}{y\sqrt{2}}$; $DA = \frac{38}{\sqrt{2}} = 19 \cdot \sqrt{2}$, $y = DA + 38 = 19(\sqrt{2} + 2) \approx 64{,}87$.

2359. a) A megadott szögekből: $A_1A_2H\sphericalangle = 52{,}1° + 22{,}8° = 74{,}9°$;
$A_1HA_2\sphericalangle = 109{,}5° - 52{,}1° = 57{,}4°$.

b) Az A_1HA_2 háromszög harmadik szöge $A_2A_1H\sphericalangle = 180° - 57{,}4° - 74{,}9° = 47{,}7°$.
Szinusztétellel mindkét adótól való távolság kiszámítható:
$\frac{HA_1}{50} = \frac{\sin 74{,}9°}{\sin 57{,}4°}$, amiből $HA_1 = 57{,}3$ km;
$\frac{HA_2}{50} = \frac{\sin 47{,}7°}{\sin 57{,}4°}$, amiből $HA_2 = 43{,}9$ km.

c) Az egyik eljárás a szögek A_1A_2 szakaszra történő felmérése lehet. Ekkor két szögszár metszéspontjaként adódik a hajó helyzete a térképen. A számolás és a távolságok méretarányos felmérése szintén célhoz vezet, de az előzőnél lassúbb eljárás.

2360. Az ábra szerint a hajó olyan távolra mehet, hogy max. 35 km-re legyen az adótól. Ez a szélső helyzet a hajó jelenlegi helyzetével és az adóval olyan háromszöget alkot, amelynek oldalai: 9,3 km, 35 km, x km, és a 35 km-rel szemközti szöge: 121°.

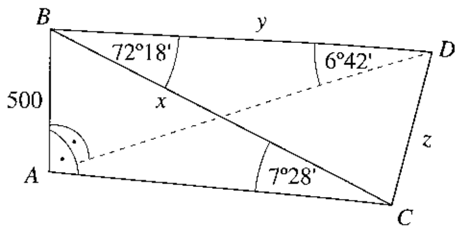


A koszinusztétel szerint:
$35^2 = 9{,}3^2 + x^2 - 18{,}6x \cdot \cos 121°$.
Innen $0 = x^2 + 9{,}58x - 1138{,}51$.
Ennek gyökei 29,29 és −38,87.
Ebből a pozitív gyök jelenti a megoldást, ami $x \approx 29{,}29$ km. A hajó tehát legfeljebb 29,29 km-t haladhat a megadott irányba, ha nem akar kikerülni az adó hatósugarából. (A másik, negatív gyöknek is van jelentése. Ha a hajó ugyanezen egyenes mentén, de az ellenkező, tehát kb. északkeleti irányban haladna 38,87 km-t, akkor érné el szintén az adó hatósugarának határát.)

2361. A PQ távolságot kell meghatározni.
Induljunk ki az ABQ háromszögből, ahol $ABQ\sphericalangle = 180° - 49° - 56° = 75°$.
A szinusztétel szerint ekkor $\frac{AQ}{AB} = \frac{\sin 75°}{\sin 49°}$. Ebből $AQ \approx 2{,}3$ km. Az ABP háromszögben szintén a szinusztétel szerint: $\frac{PA}{AB} = \frac{\sin 34°}{\sin 32°}$, ahonnan $PA \approx 1{,}9$ km.
Most már lehet az APQ háromszögre térni, hiszen AP és AQ ismert, már csak a közbezárt szögük kell, és a koszinusztételből kijön a keresett PQ.
$BAP\sphericalangle = 180° - 32° - 34° = 114°$.
Ebből kell $QAB\sphericalangle$-et levonni, ami 56°, tehát $QAP\sphericalangle = 114° - 56° = 58°$.

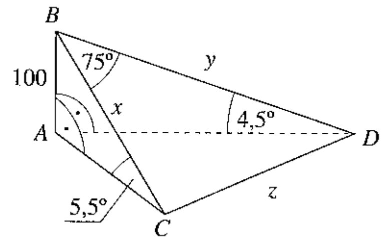
Utolsó lépésünk tehát: $PQ^2 = 1{,}9^2 + 2{,}3^2 - 2 \cdot 1{,}9 \cdot 2{,}3 \cdot \cos 58° \approx 4{,}3$, ahonnan $PQ \approx 2{,}1$ km.
A keresett, közvetlenül nem mérhető távolság tehát kb. 2,1 kilométer.

2362. B és A pontok jelölik a hegy csúcsát és annak merőleges vetületét az alapsíkon, C és D a két helység.
ABC és ADC derékszögű háromszögekből kiszámítható BC és BD szakaszok hossza, majd BCD háromszögben a koszinusztétellel kiszámítjuk a keresett CD távolságot:

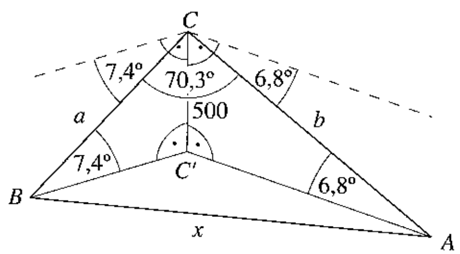


$x = \dfrac{500}{\sin 7°\,28'} \approx 3848$ és $y = \dfrac{500}{\sin 6°\,42'} \approx 4286.$
Tehát $z^2 = 3848^2 + 4286^2 - 2 \cdot 3848 \cdot 4286 \cdot \cos 72°18'$, azaz $z \approx 4811$ vagyis a két helység távolsága körülbelül 4800 m.

2363. A feladatot az előzőhöz hasonlóan oldjuk meg: az ABC és az ADB derékszögű háromszögből $x \approx 1043$, $y \approx 1275$, majd a BCD háromszögben a koszinusztételt felírva adódik: $z \approx 1423$, vagyis az útszakasz hossza körülbelül 1423 m.



2364.



Méterben számolva:

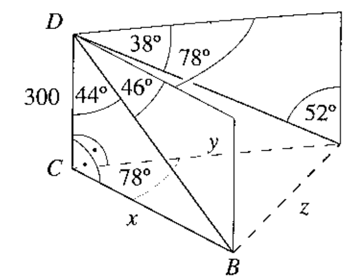
Az $AC'C$ derékszögű háromszögből $b = \dfrac{500}{\sin 6{,}8°} = 4223;$

a $BC'C$ derékszögű háromszögből $a = \dfrac{500}{\sin 7{,}4°} = 3882.$

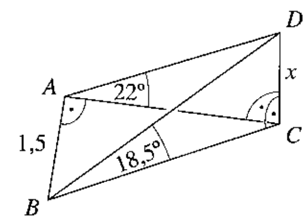
Az ABC háromszögből koszinusztétellel:

$x = \sqrt{4223^2 + 3882^2 - 2 \cdot 4223 \cdot 3882 \cdot \cos 70{,}3°}$, amiből $x \approx 4675$.
A két falu távolsága kb. 4,7 km.

2365. C és D a torony két végpontja, ekkor a BCD és a CAD derékszögű háromszögekből:
$x = 300 \cdot \mathrm{tg}\, 44° \approx 290$ és
$y = 300 \cdot \mathrm{tg}\, 52° \approx 384.$
Így az ABC háromszögben felírva a koszinusztételt:
$z^2 = 290^2 + 384^2 - 2 \cdot 290 \cdot 384 \cdot \cos 78°$,
amelyből a keresett távolság körülbelül 430 m.

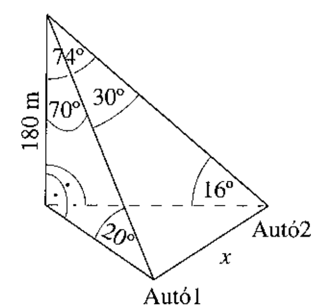


2366. Ha előbb az A, később a B pontban állunk, akkor D pont jelöli a hegy csúcsát, C pedig annak az alapsíkra eső merőleges vetületét.
Jelöljük x-szel a hegy magasságát, ekkor $AC = x \cdot \mathrm{ctg}\, 22°$ és
$BC = x \cdot \mathrm{ctg}\, 18{,}5°$,



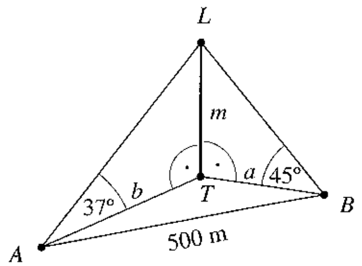
így az ABC háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva:
$(x \cdot \mathrm{ctg}\, 18{,}5°)^2 = 1{,}5^2 + (x \cdot \mathrm{ctg}\, 22°)^2$, amiből $x \approx 0{,}9$ adódik, így
$AD = \dfrac{0{,}9}{\sin 22°} \approx 2{,}4$ és $BD = \dfrac{0{,}9}{\sin 18{,}5°} \approx 2{,}8.$
Vagyis a hegy magassága 900 m, a két pontnak a csúcstól való távolsága 2,4 km és 2,8 km.

2367. Az ábrán láthatjuk az elbeszélt helyzet rajzát. Egy háromszög alapú gúlánk van, amelynek egyik oldaléle merőleges az alapsíkra. Adott a magassága, 180 méter és három szög nagysága. Az autó által megtett x utat kell kiszámítani, amiből a sebesség már adódik, hiszen tudjuk, hogy egy perc alatt tette meg. Az autó két távolságára egyszerűen szögfüggvényekkel lehet következtetni. Az első helyzetben az autó távolsága tőlünk $\dfrac{180}{\sin 20°} \approx 526{,}3$ méter;



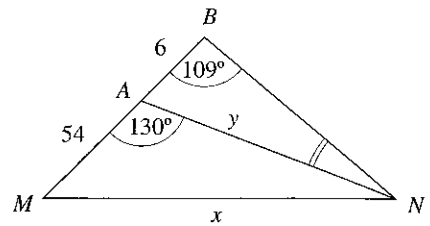
a másodikban $\dfrac{180}{\sin 16°} \approx 653$ méter. Ezután már a koszinusztétellel megkapjuk az autó elmozdulását, hiszen a két távolság közti elfordulás szöge 30°.
Azaz $x^2 = 526{,}3^2 + 653^2 - 2 \cdot 526{,}3 \cdot 653 \cdot \cos 30° = 108\,154$, ahonnan $x \approx 328{,}9$ m. Tehát 60 s alatt haladt 328,9 m-t. Ebből az autó sebessége:
$5{,}48\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 19{,}7\ \dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. A gépkocsi tehát elég lassan halad.

2368. A BTL derékszögű háromszög egyenlő szárú, ezért $a = m$.
Az ATL derékszögű háromszögből:
$b = m \cdot \operatorname{tg} 53°$.
Az ATB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva:
$m^2 + (m \cdot \operatorname{tg} 53°)^2 = 500^2$.



Ebből $m^2 = \dfrac{500^2}{1+\operatorname{tg}^2 53°} \approx 90\,545$,
tehát ($m > 0$ miatt) $m \approx \sqrt{90\,545} \approx 300{,}9$ (m).
A léggömb körülbelül 300 méter magasan lebeg a sík terep fölött.

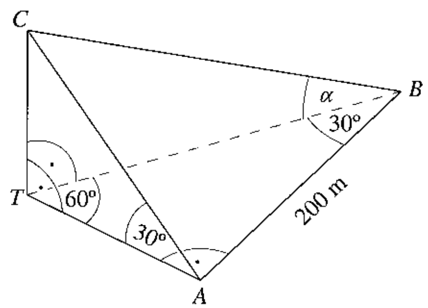
2369. Ha az M pont az AB szakaszon volna, akkor az ABN háromszögnek két tompaszöge lenne. Ez lehetetlen, ezért az M pont az AB szakaszon kívül van (ábra). Ekkor az AB távolság 6 m és az ANB háromszög szögei kiszámíthatók:
$BAN\sphericalangle = 50°$ és $ANB\sphericalangle = 21°$,
így a szinusztételt felírva:
$\dfrac{y}{6} = \dfrac{\sin 109°}{\sin 21°}$, amiből $y \approx 15{,}8$.



Ezután x adódik az AMN háromszögben felírt koszinusztételből:
$x^2 = 54^2 + 15{,}8^2 - 2 \cdot 54 \cdot 15{,}8 \cdot \cos 130°$, innen $x \approx 65{,}3$.
Tehát az M és az N tereppont távolsága körülbelül 65,3 m.

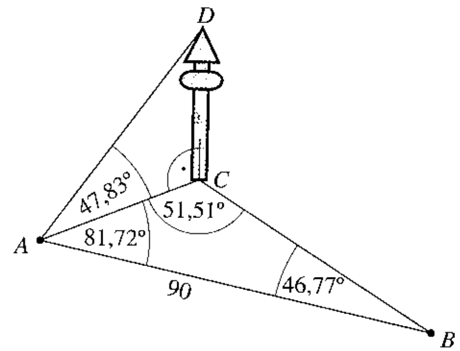
2370. a) Lásd a mellékelt ábrát!
(Az ABT Δ-ben a szögösszeg miatt $BAT\sphericalangle = 90°$.)

b) A torony magasságához először ki kell számolni az A pontnak a torony aljától való távolságát. Az ABT háromszögben:
$\operatorname{tg} 30° = \dfrac{AT}{200\text{ m}}$, ahonnan
$AT \approx 115{,}5$ m. Ezután az ATC Δ-ben:
$\operatorname{tg} 30° = \dfrac{CT}{AT} = \dfrac{CT}{115{,}5\text{ m}}$, ahonnan $CT \approx 66{,}7$ méter.
Tehát a torony magassága kb. 66,7 méter.



c) A B-ből való látószög kiszámításához kell a BT távolság, s azután a keresett szög tangense a torony magasságának és a talppont B ponttól való távolságának hányadosa. $BT = 2AT$ (szabályos háromszög „fele" az ABT háromszög), vagyis $BT = 231$ méter, és akkor $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{66{,}7}{231} \approx 0{,}2887$, ahonnan $\alpha \approx 16{,}1°$.

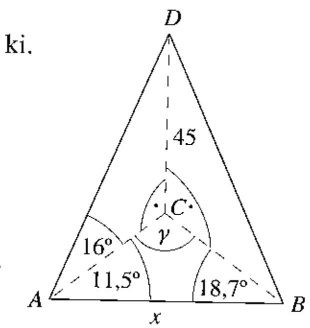
2371. Az ábra szerinti ABC háromszögben ismert két szög és az AB oldal hossza. Ebből szinusztétellel kiszámoljuk az AC távolságot, majd az ACD derékszögű háromszögben az adott szög és AC segítségével megkapjuk a torony CD magasságát. Tehát először az $ABC\Delta$ szögösszegéből $ACB\sphericalangle = 51{,}51°$; majd
$\dfrac{AC}{90} = \dfrac{\sin 46{,}77°}{\sin 51{,}51°}$, ahonnan
$AC \approx 83{,}8$ méter.



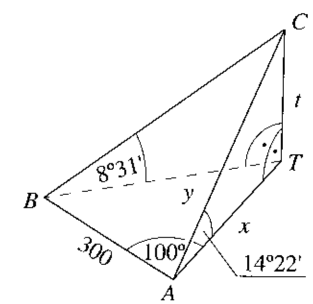
Ezután $\operatorname{tg} 47{,}83° = \dfrac{CD}{83{,}8}$, ahonnan $CD \approx 92{,}5$ méter.
Tehát a torony magassága kb. 92,5 méter.

2372. A megoldás lépései:
1) Az ACD Δ derékszögű, ebből AC tangens szögfüggvénnyel számítható.
2) Az $ACB\sphericalangle = 180° - (11{,}5° + 18{,}7°) = 149{,}8°$.
3) Az $ABC\Delta$ x oldalát a szinusztétellel számíthatjuk ki.

A megoldás részletezése:
1) $AC = \dfrac{45}{\operatorname{tg} 16°} \approx 156{,}9$
2) $\gamma = 149{,}8°$
3) $\dfrac{x}{AC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin 18{,}7°} \Rightarrow x = \dfrac{156{,}9 \sin 149{,}8°}{\sin 18{,}7°} \approx 246{,}2$
A két megfigyelőpont távolsága kb. 246,2 m.

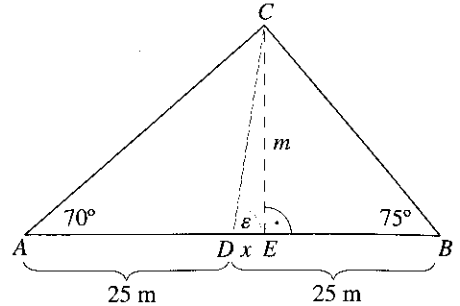


2373. Az ATC derékszögű háromszögben:
$\operatorname{tg} 14°22' = \dfrac{t}{x} \Rightarrow x = \dfrac{t}{\operatorname{tg} 14°22'} \approx 3{,}904 \cdot t$.
BTC derékszögű háromszögben:
$\operatorname{tg} 8°31' = \dfrac{t}{y} \Rightarrow y = \dfrac{t}{\operatorname{tg} 8°31'} \approx 6{,}678 \cdot t$.



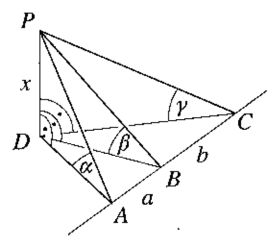
BAT háromszögben a koszinusztételt alkalmazva:
$y^2 = 300^2 + x^2 - 2 \cdot 300 \cdot x \cdot \cos 100°$
$(6{,}678 \cdot t)^2 = 300^2 + (3{,}904 \cdot t)^2 - 2 \cdot 300 \cdot 3{,}904t \cdot \cos 100°$
$29{,}354t^2 - 406{,}753t - 90\,000 = 0$; $t^2 - 13{,}86t - 3066 = 0$
A másodfokú egyenlet pozitív megoldása kb. 62,73.
A torony magassága kb. 62,7 méter.

2374. A DC torony C csúcsának a talajtól való $CE = m$ távolságát és a torony ε dőlési szögét keressük.

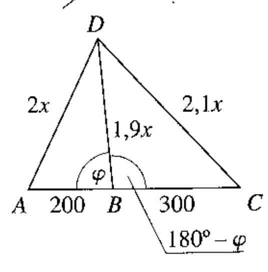


ABC háromszögben a szinusztételt alkalmazva:
$\frac{AC}{50} = \frac{\sin 75°}{\sin 35°} \Rightarrow AC \approx 84{,}3.$
AEC derékszögű háromszögben:
$\sin 70° = \frac{m}{AC} \Rightarrow m \approx 79{,}2.$
Tehát a torony C csúcsának a talajtól való távolsága kb. 79 méter.
Határozzuk meg a BEC derékszögű háromszögben BE távolságot!
$\mathrm{tg}\, 75° = \frac{m}{BE} \Rightarrow BE \approx 21{,}2.$
A torony dőlési szöge CED derékszögű háromszögben:
$\mathrm{tg}\, \varepsilon = \frac{m}{25 - BE} \approx 20{,}84 \Rightarrow \varepsilon \approx 87{,}2°.$

2375. Jelölje D a P csúcs merőleges vetületét az alapsíkon és x a hegy magasságát. Ekkor a megfelelő derékszögű háromszögekből:

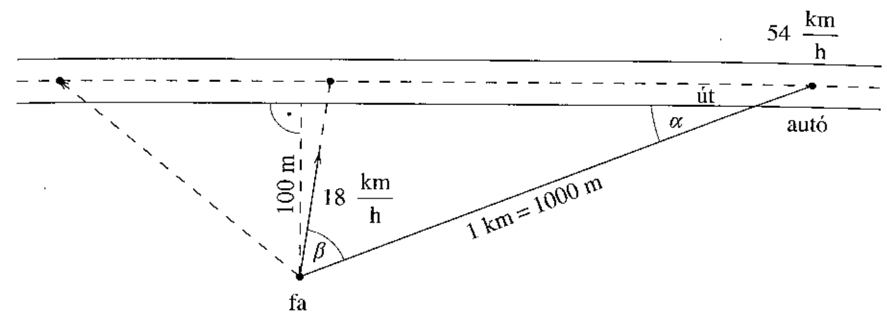


$AD = x \cdot \mathrm{ctg}\, 26{,}5° \approx 2x,$
$BD = x \cdot \mathrm{ctg}\, 27{,}6° \approx 1{,}9x,$
$CD = x \cdot \mathrm{ctg}\, 25{,}3° \approx 2{,}1x.$
Ezután írjunk fel egy-egy koszinusztételt az ABD és BCD háromszögekben a B-nél levő szögekre (2. ábra):



$(2x)^2 = 200^2 + (1{,}9x)^2 - 2 \cdot 200 \cdot 1{,}9x \cdot \cos \varphi$
$(2{,}1x)^2 = 300^2 + (1{,}9x)^2 -$
$- 2 \cdot 300 \cdot 1{,}9x \cdot \cos (180° - \varphi).$
Az első egyenletet 3-mal, a másodikat 2-vel szorozva, ha összeadjuk őket, a $\cos (180° - \varphi) = -\cos \varphi$ összefüggés miatt x kiszámítható a kapott egyenletből: $x \approx 329$.
Tehát a hegy kb. 329 m magas.

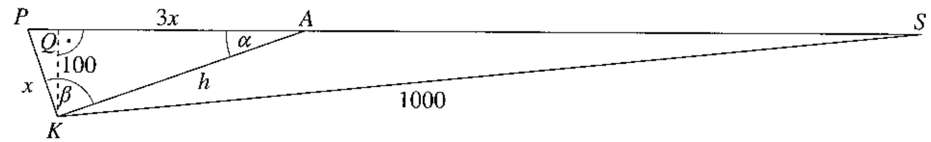
2376. a)



Először is a váltsuk át a két sebességet: az autóé 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a futóé 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Háromszor olyan gyors az autó, tehát ha egyszerre indulnak, éppen háromszor annyi utat tesz meg; függetlenül attól, merre fut a kaszkadőr. Ha éppen az úton találkoznak, akkor a szinusztételből: $\frac{15t}{5t} = 3 = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, ahol β a keresett szög, és a megadott adatok szerint $\sin\alpha = \frac{100}{1000} = 0{,}1$. Tehát $\sin \beta = 0{,}3$, ahonnan β kb. 17,5° vagy 180° – 17,5° = 162,5°. Azaz futhat a kocsi felé, vagy egy másik irányban is, lásd a két szaggatott vonalat az ábrán.

b) Induljon S-ből az autó és legyen A-ban, amikor a kaszkadőr indul K-ból. Ha P-ben „találkoznak", akkor a KAP háromszögből szinusztétellel:
$\sin\beta = \frac{3x}{x}\sin\alpha = 3\sin\alpha.$

Az AQK derékszögű háromszögből: $\sin\alpha = \frac{100}{h}$, tehát $\sin\beta = \frac{300}{h}$.

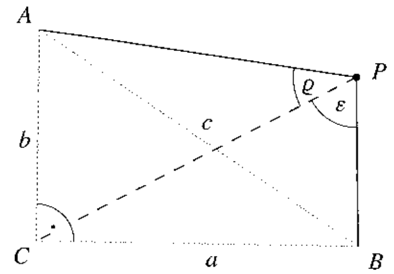


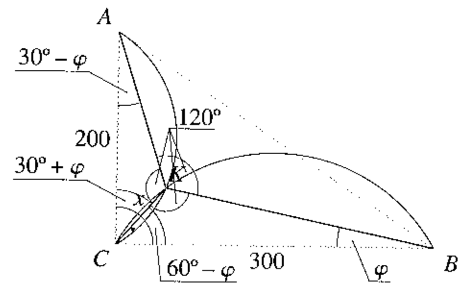
A találkozás akkor valósulhat meg, ha $\sin\beta \le 1$, tehát $h \ge 300$ méter.
Ha a kaszkadőr indulása pillanatában $h = 300$ méter (és így $\sin\beta = 1$, azaz $\beta = 90°$), akkor $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, azaz $\alpha \approx 19{,}47°$ (és ekkor $PKQ\sphericalangle = \alpha \approx 19{,}47°$ is teljesül) és $AQ = h\cos\alpha \approx 283$ méter.
Ha az autó az S ponból indult, akkor $KS \approx 1000$ m miatt az A pontig
$SA = \sqrt{KS^2 - KQ^2} - AQ \approx \sqrt{1000^2 - 100^2} - 283 \approx 712$ méter utat tett meg, ami kb. 47,5 másodpercig tartott.
Tehát a jeladástól számítva legkésőbb 47,5 másodperc múlva el kell indulnia a kaszkadőrnek.

Megjegyzés:

Ha $h > 300$ méter, akkor $AQ > \dfrac{100}{\operatorname{tg} 19{,}47°} = 300 \cdot \cos 19{,}47°$, ezért az autó az indulási helyétől az A pontig 712 méternél rövidebb utat tesz meg, ami 47,5 másodpercnél kevesebb ideig tart. Ilyen esetekben tehát 47,5 másodpercnél kevesebb idő áll rendelkezésre a kaszkadőrnek az induláshoz (viszont $\sin \beta < 1$ miatt két lehetősége is van a feladatának megoldására).

2377.





Ilyen pont a háromszögön kívül nem lehet, mert ha pl. az a oldal egy P pontból ε szög alatt látszik, a b oldal ϱ szög alatt látszik, akkor a c oldal $\varepsilon + \varrho$ szög alatt látszik, és a három oldal a P pontból nem lenne ugyanolyan szög alatt látható. Ugyanígy nem lehet a háromszög semelyik oldalán sem a keresett pont.

A háromszög belsejében levő K pontból a háromszög oldalai egyenlő, 120°-os szög alatt látszanak. Legyen $KBC\sphericalangle = \varphi$, így $KCB\sphericalangle = 60° - \varphi$, $ACK\sphericalangle = 30° + \varphi$, $CAK\sphericalangle = 30° - \varphi$, $CK = x$.

CKB, illetve az AKC háromszögre a szinusztételt felírva:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.}\quad \frac{x}{300} = \frac{\sin\varphi}{\sin 120°} \\ &\text{II.}\quad \frac{x}{200} = \frac{\sin(30° - \varphi)}{\sin 120°} \end{aligned}\right\}$$

Mindkét egyenletből az x-et kifejezve, ezeket az eredményeket egyenlővé téve, egyszerűsítés után: $3 \sin \varphi = 2 \sin (30° - \varphi)$.

A függvénytáblázatból a megfelelő azonosságot és az ismert szögfüggvények értékét behelyettesítve:

$3 \sin \varphi = 2(\sin 30° \cos \varphi - \cos 30° \sin \varphi)$

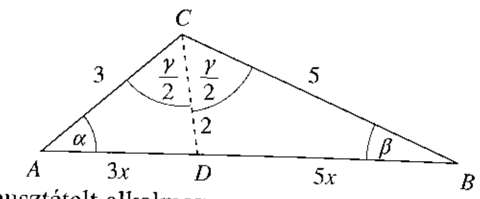
$$3\sin\varphi = 2\left(\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right) \qquad \text{összevonás után}$$

$(3 + \sqrt{3})\sin\varphi = \cos\varphi$

Mivel $\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ nem lehet egyszerre 0, mert nem teljesülne a $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ összefüggés, ezért oszthatunk $\cos\varphi$-vel: $(3 + \sqrt{3})\operatorname{tg}\varphi = 1$; $\varphi \approx 11{,}93°$.

Ezt (I.)-be visszahelyettesítve: $x \approx 71{,}62$ m.

2378. A szögfelezőtétel szerint a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szögfelezőt közrefogó oldalak arányában osztja fel. Így $\dfrac{3}{5} = \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow$ $AD = 3x$; $DB = 5x$.



ACD, illetve BCD háromszögekre koszinusztételt alkalmazva:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.}\quad (3x)^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \\ &\text{II.}\quad (5x)^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \end{aligned}\right\}$$

A (II.) egyenlet 3-szorosából vonjuk ki az (I.) egyenlet 5-szörösét!

$30x^2 = 22 \Rightarrow (x > 0) \quad x \approx 0{,}856$, ezt pl. (I.)-be helyettesítve $\gamma \approx 115{,}54°$.

A háromszög α szöge szinusztétellel: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 115{,}54°} = \dfrac{5}{6{,}85}$.

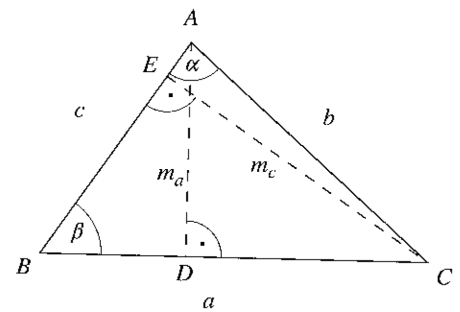
Mivel a háromszög tompaszögű, ezért α csak hegyesszög lehet, így $\alpha \approx 41{,}18°$, ezért $\beta = 23{,}28°$.

2379. A háromszög kétszeres területe

$2T = a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c \Rightarrow$

$10a = 12b = 15c$

Adott területű háromszög oldala és magassága között fordított arányosság van, a leghosszabb oldalhoz tartozik a legrövidebb magasság, így a keresett háromszögben a 10 cm-es magassághoz tartozó (legyen a) oldal a leghosszabb. Fejezzük ki a háromszög oldalait a-val és írjunk fel erre az oldalra egy koszinusztételt!



$$b = \frac{5}{6}a, \quad c = \frac{2}{3}a, \quad a^2 = \left(\frac{5}{6}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}a\frac{2}{3}a\cos\alpha.$$

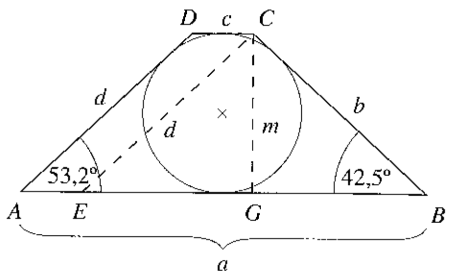
a^2-tel egyszerűsíthetünk (nem nulla), $\alpha \approx 82{,}8°$. Mivel ez a háromszög legnagyobb szöge, (mert nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van) a háromszög hegyesszögű.

Az ACE derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \dfrac{m_c}{b} \Rightarrow b \approx 15{,}1 \Rightarrow a \approx 18{,}1$; $c \approx 12{,}1$.

Az ADB derékszögű háromszögben $\sin\beta = \dfrac{m_a}{c} \Rightarrow \beta \approx 55{,}8° \Rightarrow \gamma \approx 41{,}4°$.

(Mivel a háromszög hegyesszögű, β egyértelmű. A háromszög belső szögeinek összege 180°.) A háromszög területe $T = 90{,}5$ cm², oldalai kb. 18,1 cm, 15,1 cm, 12,1 cm hosszúak, szögei 82,8°; 55,8°; 41,4°.

2380. Toljuk el a trapéz AD szárát CE-be, így $EC = AD = d$, és $DAB\sphericalangle = CEB\sphericalangle = 53{,}2°$.



Az EGC derékszögű háromszögben:

$$\sin 53{,}2° = \frac{m}{d} \Rightarrow$$

$$d = \frac{m}{\sin 53{,}2°} \approx 1{,}2489 \cdot m.$$

BGC derékszögű háromszögben:

$$\sin 42{,}5° = \frac{m}{b} \Rightarrow b = \frac{m}{\sin 42{,}5°} \approx 1{,}4802 \cdot m.$$

A trapéz területe: $T = \frac{(a+c)\cdot m}{2}$.

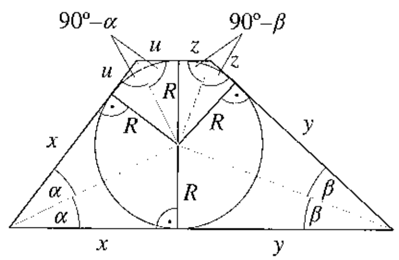
Mivel az adott trapéz érintőnégyszög, ezért a szemközti oldalainak összege egyenlő, azaz $a + c = b + d$. Ennek segítségével a trapéz területe:

$$38 = \frac{(1{,}4802\cdot m + 1{,}2489\cdot m)\cdot m}{2} \Rightarrow m \approx 5{,}28.$$

Mivel $m = 2R$, a beírt kör sugara kb. 2,6 cm.

Másik megoldás:

Kössük össze a kör középpontját a trapéz csúcsaival és az érintési pontokkal. Mivel a körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, a megfelelő szakaszok egyenlők. Másrészt a trapéz egy-egy szárán lévő két belső szög összege 180°, ezért a következő ábrát kapjuk.



Az ábra jelöléseit használva:

$\alpha = 26{,}6°$ $\quad 90° - \alpha = 63{,}4°$

$\beta = 21{,}25°$ $\quad 90° - \beta = 68{,}75°$.

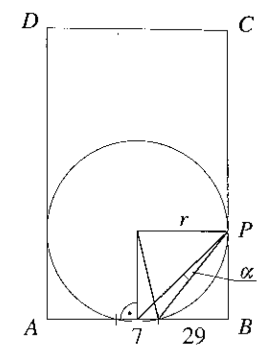
A trapéz területe: $T = \frac{a+c}{2}\cdot 2R = (a+c)R = (x+y+z+u)R.$

A keletkezett derékszögű háromszögekből:

$x = R\,\mathrm{ctg}\,26{,}6°$; $\quad y = R\,\mathrm{ctg}\,21{,}25°$; $\quad z = R\,\mathrm{ctg}\,68{,}75°$; $\quad u = R\,\mathrm{ctg}\,63{,}4°$, vagyis

$38 = R^2(\mathrm{ctg}\,26{,}6° + \mathrm{ctg}\,21{,}25° + \mathrm{ctg}\,68{,}75° + \mathrm{ctg}\,63{,}4°)$, amiből $R \approx 2{,}64$ (cm).

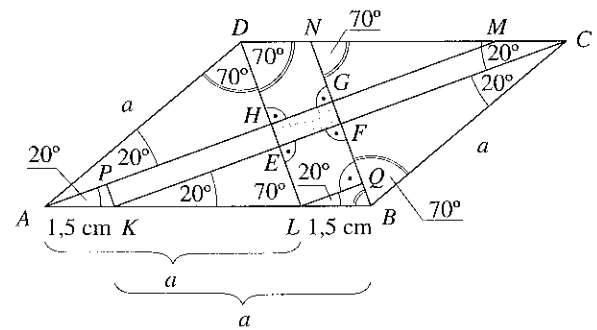
2381. Azt a 7 egység hosszú húr fölé írt lehető legnagyobb szögű látókört keressük, amelynek van közös pontja BC oldallal.



Ha a kör sugara r, akkor ez, mivel α kerületi szög, a középponti szög felével egyenlő: $\sin\alpha = \frac{3{,}5}{r}$, ami nyilván annál nagyobb, minél kisebb az r.

Tehát a maximális látószöget az a kör adja, amely átmegy a két kapufa által meghatározott pontokon és érinti a BC oldalt. Ennek sugara $r = \frac{65}{2}$, így a keresett szög: $\alpha \approx 6{,}18°$ és $BP = \sqrt{\left(\frac{65}{2}\right)^2 - (3{,}5)^2} \approx 32{,}3$ (m).

2382. Húzzuk meg a paralelogramma AM, BN, CK, DL szögfelezőit! Az ezek által határolt $EFGH$ négyszög területét keressük.



A szögek felezése miatt

$DAH\sphericalangle = 20°$;

$ADH\sphericalangle = 70°$, tehát

$AHD\sphericalangle = 90°$.

Ugyanígy belátható, hogy

$KEL\sphericalangle = 90°$ $\Rightarrow$ a párhuzamosság miatt $EFGH$ négyszög téglalap.

Mivel $ADL\sphericalangle = ALD\sphericalangle = 70°$ $\Rightarrow$ a $DAL\,\Delta$ egyenlőszárú $\Rightarrow$ $AD = AL = a$.

Ugyanígy: a $KBC\,\Delta$ egyenlőszárú $\Rightarrow$ $KB = BC = a$ $\Rightarrow$ $AK = LB = 1{,}5$ cm.

Húzzunk párhuzamost L-en keresztül CK-val! Az LQB derékszögű Δ-ben

$$\cos 20° = \frac{LQ}{1{,}5} \Rightarrow LQ = 1{,}5\cos 20°.$$

Húzzunk párhuzamost K-n keresztül LD-vel! $\Rightarrow$ Az APK derékszögű Δ-ben

$$\sin 20° = \frac{PK}{1{,}5} \Rightarrow PK = 1{,}5\sin 20°.$$

Így az $EFGH$ téglalap területe:

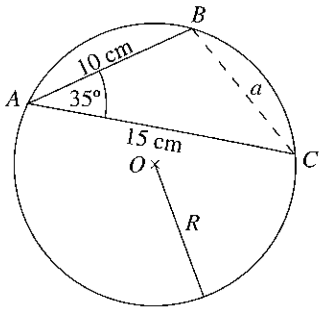
$EH \cdot EF = PK \cdot LQ = 1{,}5 \sin 20° \cdot 1{,}5 \cos 20° \approx 0{,}723$.

Tehát a keresett négyszög területe kb. 0,7 cm^2.

Megjegyzés:

A keresett terület független az a-tól.

2383. Az ABC háromszög BC oldala koszinusztételből számítható ki:
$a^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 35°$,
ebből $a \approx 8{,}9$ cm.
Egy körben a húr, a hozzá tartozó kerületi szög és a kör sugara közötti összefüggés alapján $a = 2R \sin \alpha$, így
$R \approx 7{,}8$ cm.



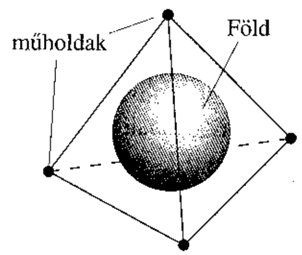
2384. A bizonyítandó állítás: $ab\sqrt{4R^2 - c^2} = R(a^2 + b^2 - c^2)$.

R-rel osztva, a bal oldalt áthozva, c^2-et átvive: $c^2 = a^2 + b^2 - \dfrac{ab\sqrt{4R^2 - c^2}}{R}$.

Ez utóbbi törtet 2-vel bővítve, a $2R$ nevezőt a gyökjel alá vive kapjuk:
$2ab\sqrt{\dfrac{4R^2 - c^2}{4R^2}} = 2ab\sqrt{1 - \dfrac{c^2}{4R^2}}$.
Tudjuk (I. pl. 2273.b)), hogy egy háromszög oldalára, szemközti szögére és a körülírt kör sugarára: $c = 2R \cdot \sin \gamma$, vagyis $\sin \gamma = \dfrac{c}{2R}$. Ekkor – nem tompaszögről lévén szó – $\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\dfrac{c}{2R}\right)^2}$, vagyis az igazolandó állítás egyszerűen a háromszögre felírt koszinusztétel.

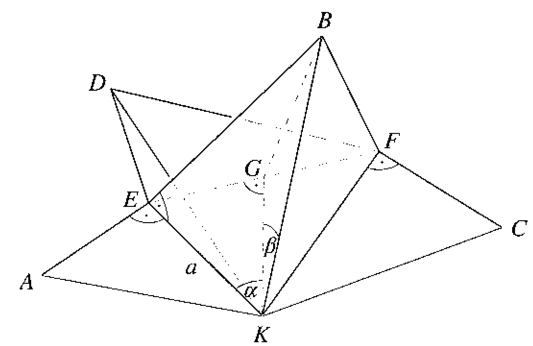
2385. a) Lásd az ábrát!

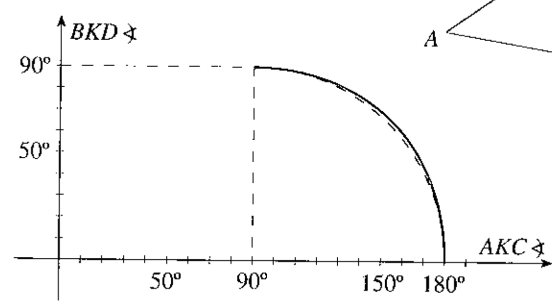
b) Éppen belátják a Földet, ha a négy műhold által meghatározott tetraéder beírt gömbje a Föld. Mivel a földfelszín feletti magasságuk azonos, ezért a tetraéder szabályos. Meg kell határoznunk a műholdak magasságát a Föld felett. Mivel a beírt gömb sugara adott (ez a Föld sugara), valamint ismert, hogy szabályos tetraéderben a súlypont, a beírt és körülírt gömb középpontja egybeesik, továbbá a súlypont 3 : 1 arányban osztja a súlyvonalat, ami egyben magasság is, ebből a beírt gömb átmérője éppen a magasság (súlyvonal) felezőpontig terjedő szakasz. Tehát a csúcs (a műhold pozíciója) és a beírt gömb távolsága a magasság fele, ami az átmérővel egyenlő. Tehát 2 · 6378 km = 12 756 km. Vagyis legalább ilyen magasan kell keringenie a négy műholdnak, hogy éppen belássák a Föld teljes felszínét.



2386. A kétszeres szög szinuszára vonatkozó képlet szerint ekkor:
$$\frac{\sin^2 \alpha}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \beta}{2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta} = \frac{\sin^2 \gamma}{2 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma}.$$
Egy háromszög bármely szöge 0° és 180° közötti, ezeknek a szinusza sosem 0, így mindhárom törtet egyszerűsíthetjük: $\dfrac{\sin \alpha}{2 \cdot \cos \alpha} = \dfrac{\sin \beta}{2 \cdot \cos \beta} = \dfrac{\sin \gamma}{2 \cdot \cos \gamma}$.
Mindegyik törtet 2-vel szorozva, és az ismert összefüggést alkalmazva kapjuk:
$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma$. Mivel a 0° és 180° közötti szögekre a tangens kölcsönösen egyértelmű, ez csak úgy lehet, ha maguk a szögek is egyenlők, azaz a háromszög szabályos.

2387. $AKC\sphericalangle = 45° + EKF\sphericalangle + 45°$, a művelet során 90° és 180° között változik, a $BKD\sphericalangle$ pedig 90° és 0° között. Jelölje $\alpha = EKG\sphericalangle = \dfrac{EKF\sphericalangle}{2} = \dfrac{AKC\sphericalangle - 90°}{2} =$
$= \dfrac{AKC\sphericalangle}{2} - 45°$ és $\beta = BKG\sphericalangle = \dfrac{BKD\sphericalangle}{2}$. $BEK\,\Delta$ derékszögű és egyenlő szárú, így ha $EK = a$, akkor $BK = \sqrt{2}a$. Az EGK (szintén derékszögű) háromszögből $GK = a \cdot \cos \alpha$. A $BGK\,\Delta$ szintén egyenlő szárú, ebből (az egyébként $\sqrt{2}a$ hosszúságú) $BK = 2 \cdot GK \cdot \cos \beta = 2a \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$, így
$$BKD\sphericalangle = 2\beta = 2 \cdot \arccos \frac{\sqrt{2}a}{2a \cdot \cos \alpha} = 2 \cdot \arccos \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \cos\left(\dfrac{AKC\sphericalangle}{2} - 45°\right)}.$$
(A függvény grafikonja hasonlít egy negyedkörre, de mégsem az, annál kicsit „kövérebb”.)





4.5 Koordináta-geometria

2388. Egy ilyen sokszög kerülete csak páros lehet. Hiszen vissza kell térnünk az origóba, vagyis összesen ugyanannyit haladtunk jobbra mint balra, fel mint le. Vagyis 2005 egység kerületű sokszög nincs, így persze a 2004 egység kerületűnek nagyobb a területe.

2389. a) $\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

b) $\overline{CD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

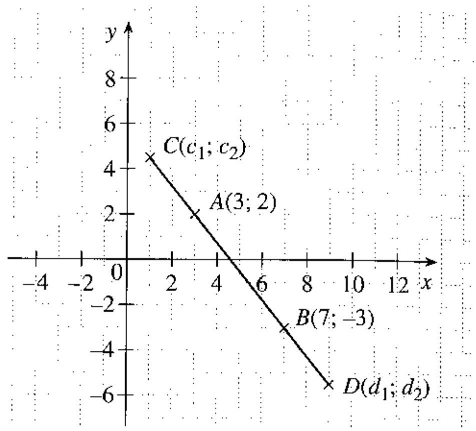
2390. A feltétel szerint $\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{AC} = 2$,
így a szakasz harmadolópontja (vagy osztópont) segítségével felírható:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2d_1 + 3}{3} = 7 \\ \frac{2d_2 + 2}{3} = -3 \end{array}\right\}$$

ebből $d_1 = 9$, $d_2 = -5{,}5$; $D(9; -5{,}5)$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2c_1 + 7}{3} = 3 \\ \frac{2c_2 + (-3)}{3} = 2 \end{array}\right\}$$

ebből $c_1 = 1$; $c_2 = 4{,}5$; $C(1; 4{,}5)$.



2391. Az A tükörképe a B-re $A'(x_1; y_1)$, így AA' felezőpontja B, B-nek az A-ra vonatkozó tükörképe $B'(x_2; y_2)$, így BB' felezőpontja A.
Az ábrán is jelzett adatok alapján:

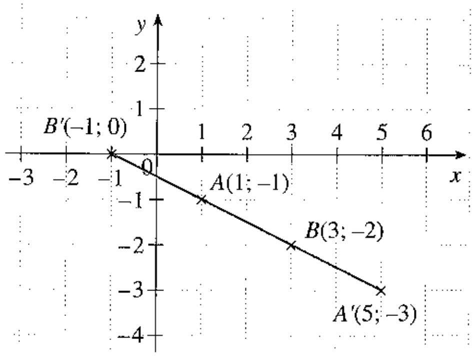
$\frac{x_1 + 1}{2} = 3 \Rightarrow x_1 = 5$;

$\frac{y_1 - 1}{2} = -2 \Rightarrow y_1 = -3$; $A'(5; -3)$.

Ehhez hasonlóan

$\frac{x_2 + 3}{2} = 1 \Rightarrow x_2 = -1$;

$\frac{y_2 - 2}{2} = -1 \Rightarrow y_2 = 0$; $B'(-1; 0)$.



2392. a) A felezőpont koordinátái számtani közepei a két pont megfelelő koordinátáinak, azaz $F(-0{,}5; 4)$.

b) A felezőmerőleges átmegy az F ponton, és normálvektora a $\overrightarrow{BA}(5; 4)$ vektor. Egyenlete tehát: $5x + 4y = 5 \cdot (-0{,}5) + 4 \cdot 4 = 13{,}5$.

c) Ennek a P pontnak a koordinátái kielégítik a felezőmerőleges egyenletét, mivel egyenlő távol van A és B-től. Másrészt pl. az A-tól 5 egységre lévő pontok egy A középpontú, 5 egység sugarú körvonalon vannak.
A megoldandó egyenletrendszer:

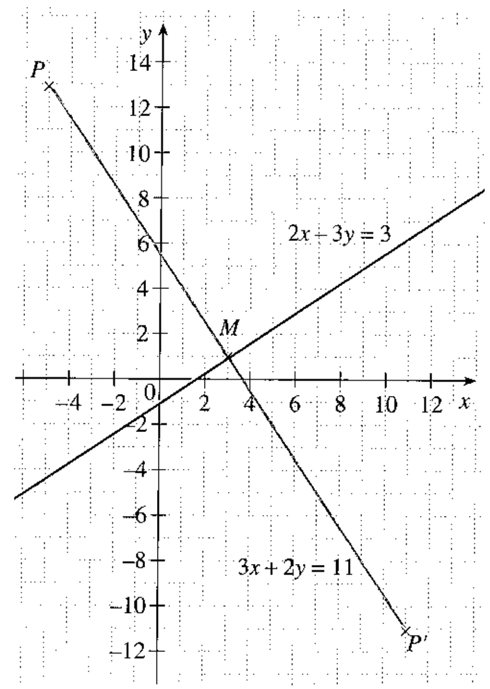
$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 5x + 4y = 13{,}5 \\ (2) & (x-2)^2 + (y-6)^2 = 25 \end{array}\right\}$$

(1)-ből $x = 2{,}7 - 0{,}8y$, amit (2)-be beírva: $(0{,}7 - 0{,}8y)^2 + (y - 6)^2 = 25$.
Rendezve: $1{,}64y^2 - 13{,}12y + 11{,}49 = 0$.
Innen $y_1 \approx 7$; $y_2 \approx 1$. Eszerint $x_1 \approx -2{,}9$; $x_2 \approx 1{,}9$.
Tehát közelítőleg a $P_1(-2{,}9; 7)$, illetve a $P_2(1{,}9; 1)$ a keresett pontok.

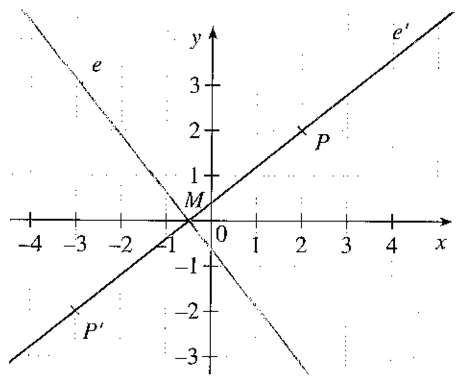
2393. Az adott egyenes egyik normálvektora az $\mathbf{n} = (2; -3)$. Az erre az egyenesre merőleges, P-n átmenő egyenes egyenlete így:
$3x + 2y = 3 \cdot (-5) + 2 \cdot 13 = 11$.
A két egyenes metszéspontját a két egyenletet rendszerként megoldva kapjuk meg:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 3 \\ 3x + 2y = 11 \end{array}\right\}.$$

Az elsőből $x = 1{,}5y + 1{,}5$, ezt beírva a másodikba: $4{,}5y + 4{,}5 + 2y = 11$, azaz $6{,}5y = 6{,}5$, tehát $y = 1$. Visszaírva: $x = 3$. Ekkor a két egyenes metszéspontja $M(3; 1)$. A P pontot az adott egyenesre tükrözni ugyanaz, mint a most megkapott metszéspontra – ez pedig ugyanaz, mint M-et eltolni a $\overrightarrow{PM}$-ral. Ennek koordinátái:
$(3 - (-5); 1 - 13) = (8; -12)$, így végül
$P' = (3; 1) + (8; -12) = (11; -11)$.

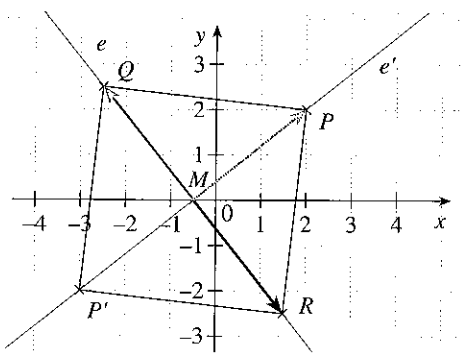


2394. a) *Terv:*
1. Állítsunk merőlegest P-ből az e: $10x + 8y + 5 = 0$ egyenesre (e').
2. Határozzuk meg a két egyenes metszéspontját (M-et).
3. A PP' szakasznak M a felezőpontja; ebből már P' meghatározható.



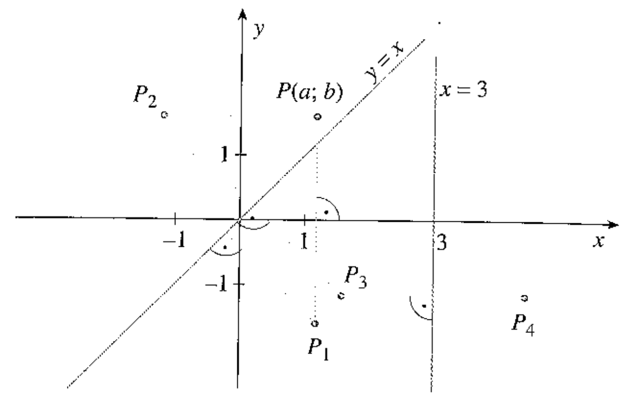
Megvalósítás:
1. Az e egyenletéből kiolvasható egy normálvektora: $\mathbf{n}_e(10; 8)$, ez egyállású az $(5; 4)$ vektorral, ezért az e' egyik normálvektora $\mathbf{n}_{e'}(4; -5)$.
Így a keresett egyenlet: e': $4x - 5y + 2 = 0$.
2. Megoldandó a
$$\left.\begin{aligned} 10x + 8y + 5 &= 0 \\ 4x - 5y + 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ egyenletrendszer.}$$
$M(-0{,}5; 0)$.
3. $P'(-3; -2)$.

b) A négyzet Q, illetve R csúcsába mutató $\overrightarrow{OQ}$, illetve $\overrightarrow{OR}$ helyvektorok koordinátái megegyeznek a végpontjaik koordinátáival. A helyvektorok meghatározásához szükség van az $\overrightarrow{MQ}$, illetve az $\overrightarrow{MR}$ koordinátáira is.
Az $\overrightarrow{MQ}$ az $\overrightarrow{MP}$ $+90°$-os elforgatásával is megkapható, ezért először $\overrightarrow{MP}$-t határozzuk meg:

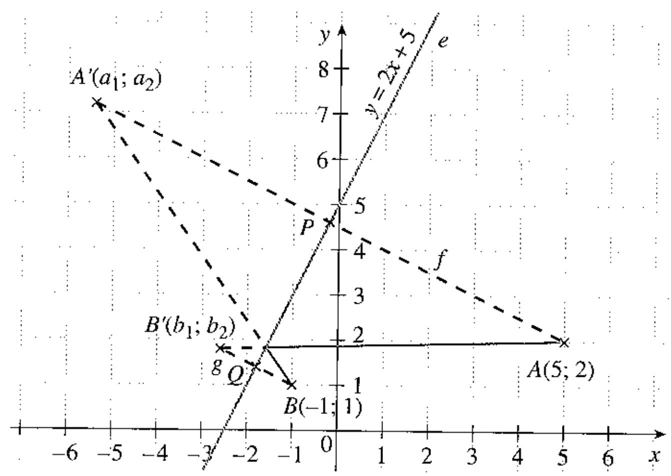


$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = (2; 2) - (-0{,}5; 0)$, azaz $\overrightarrow{MP}(2{,}5; 2)$. Így $\overrightarrow{MQ}(-2; 2{,}5)$.
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ} = (-0{,}5; 0) + (-2; 2{,}5) = (-2{,}5; 2{,}5)$, azaz $Q(-2{,}5; 2{,}5)$.
$\overrightarrow{MR} = -\overrightarrow{MQ}$, ezért $\overrightarrow{MR}(2; -2{,}5)$;
$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MR} = (-0{,}5; 0) + (2; -2{,}5) = (1{,}5; -2{,}5)$, azaz $R(1{,}5; -2{,}5)$.

2395. $P(a; b)$ tükörképe az x tengelyre $P_1(a; -b)$, ennek tükörképe az origóra $P_2(-a; b)$, ennek tükörképe az $y = x$ egyenesre $P_3(b; -a)$, ennek tükörképe az $x = 3$ egyenesre, $P_4(6 - b; -a)$.



2396.



Tükrözzük az A és a B pontot az e egyenesre (A'; B'). A beeső fénysugár az AB', a visszavert fénysugár az $A'B$ egyenes.

Az A pontból, illetve a B-ből az e-re állított merőleges egyenes meredeksége $-\frac{1}{2}$; ezek a merőlegesek illeszkednek az A-ra, illetve a B-re.
Az egyenes $y = mx + b$ egyenletét használva:

f: $y = -\frac{1}{2}x + b \twoheadleftarrow A(5; 2)$, így

$2 = -\frac{1}{2} \cdot 5 + b$; $b = \frac{9}{2}$, az AA' egyenlete $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

g: $y = -\frac{1}{2}x + b' \twoheadleftarrow B(-1; 1)$, így

$1 = -\frac{1}{2}(-1) + b'$; $b' = \frac{1}{2}$, a BB' egyenlete $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Az AA' (f) és az e egyenes metszéspontja P;

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x+5 \\ y &= -\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \end{aligned}\right\} P(-0,2;\ 4,6).$$

Az AA' szakasz felezőpontja P; $A'(a_1;\ a_2)$;

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1+5}{2} &= -0,2 \\ \frac{a_2+2}{2} &= 4,6 \end{aligned}\right\} A'(-5,4;\ 7,2).$$

A BB' és az e egyenes metszéspontja Q;

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x+5 \\ y &= -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} Q(-1,8;\ 1,4).$$

A BB' szakasz felezőpontja Q; $B'(b_1;\ b_2)$;

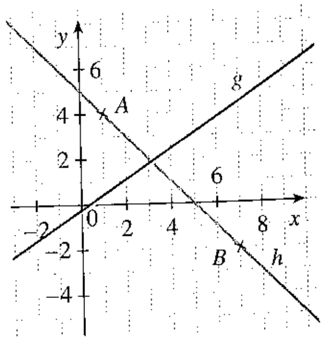
$$\left.\begin{aligned} \frac{b_1+(-1)}{2} &= -1,8 \\ \frac{b_2+1}{2} &= 1,4 \end{aligned}\right\} B'(-2,6;\ 1,8).$$

A beeső fénysugár AB' egyenes: [egy irányvektora $\overrightarrow{AB'}(-7,6;\ -0,2)$] $\mathbf{v}(38;\ 1)$; adott pont $A(5;\ 2)$. A beeső fénysugár egyenlete: $x-38y=-71$

A visszavert fénysugár $A'B$ egyenes [egy irányvektora $\overrightarrow{BA'}(-4,4;\ 6,2)$] $\mathbf{v}'(-22;\ 31)$, adott pont $B(-1;\ 1)$. A visszavert fénysugár egyenlete: $31x+22y=-9$

2397. A két egyenes ε hajlásszöge meghatározható az egyenesek egy-egy normálvektorának hajlásszögéből. Az egyenesek egy-egy normálvektora pl. $\mathbf{n_1}(2;\ -1)$; $\mathbf{n_2}(5;\ 2)$.
A két vektor skalárszorzatát kétféleképpen kiszámolva:
$\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2} = 2\cdot 5+(-1)\cdot 2 = 8$
$\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2} = |\mathbf{n_1}|\cdot|\mathbf{n_2}|\cdot\cos\varepsilon = \sqrt{5}\cdot\sqrt{29}\cdot\cos\varepsilon.$
Ebből $\cos\varepsilon \approx 0,6644 \Rightarrow \varepsilon \approx 48,36°$ a két egyenes hajlásszöge.

2398. A g egyenes meredeksége az egyenletéből $\frac{2}{3}$, azaz az x tengellyel bezárt szöge ε. $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2}{3} \Rightarrow \varepsilon \approx 33,7°$.
A másik egyenes meredeksége a megadott két pontjából: $\frac{-2-4}{7-1} = \frac{-6}{6} = -1$.
Tehát ez az egyenes párhuzamos a II. negyed szögfelezőjével, azaz $-45°$-os szöget zár be az x tengellyel.
A két egyenes szöge tehát $33,7° + 45° = 78,7°$.

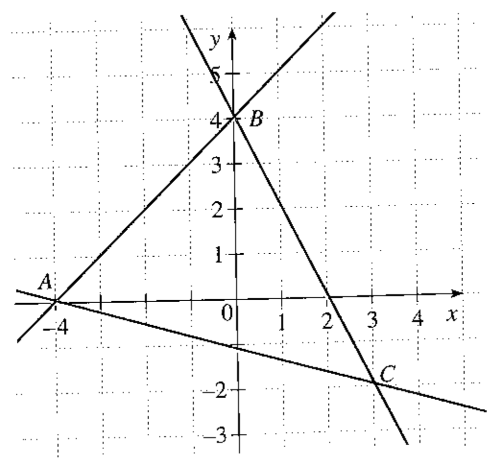


2399. Ha a két egyenes metszéspontját Q-val jelöljük, akkor a keresett egyik irányvektor lehet a $\overrightarrow{PQ}$ is. A Q pont koordinátáit a $2x+3y=7$; $5x+y=-2$ egyenletrendszer megoldásaként kapjuk: $Q(-1;\ 3)$. Tehát $\overrightarrow{PQ} = (-1;\ 3)-(2;\ 1) = (-3;\ 2)$.

2400. A két egyenes metszéspontja a két egyenletből álló rendszer közös megoldása: $5x-4y=14$ és $2x-3y=3$. Vegyük az egyenlő együtthatók módszerét, az első egyenletet 2-vel, a másodikat 5-tel szorozva: $10x-8y=28$ és $10x-15y=15$.
Kivonva egymásból: $7y=13$, amiből $y=\frac{13}{7}$.
Ekkor a második eredeti egyenletbe visszaírva: $2x-\frac{39}{7}=\frac{21}{7}$, ahonnan $x=\frac{30}{7}$.
Tehát a metszéspont $M\left(\frac{30}{7};\ \frac{13}{7}\right)$. A másik pont $P(5;\ 2)$. A két adott ponton átmenő egyenes egyenlete: $y-2=m(x-5)$, ahol $m = \dfrac{2-\frac{13}{7}}{5-\frac{30}{7}} = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{1}{5} = 0,2.$
Átrendezve: $5y-10 = x-5$, ahonnan $x-5y+5=0$.

2401. Adott $P(-4;\ 1)$, $\mathbf{v}(-2;\ 1)$. A $P(x_0;\ y_0)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}(v_1;\ v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete $v_2x-v_1y=v_2x_0-v_1y_0$.
Ezt felhasználva a kérdéses egyenes egyenlete $x+2y=-2$.
Egy pont akkor és csak akkor illeszkedik valamely egyenesre, ha a pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét (a pont koordinátáit behelyettesítve az egyenes egyenletébe, azonosságot kapunk).
Ennek alapján $A(-2;\ 0)$ és $C(6;\ -4)$ illeszkedik az egyenesre, $B(1;\ -5)$ nincs az egyenesen.

2402. $\overrightarrow{AB} = (4;\ 4)$, így AB egyenesének egy normálvektora $(1;\ -1)$, egyenlete ezért: $x-y=-4$.
$\overrightarrow{BC} = (3;\ -6)$, így BC egyenesének egy normálvektora $(2;\ 1)$, egyenlete ezért: $2x+y=4$.
$\overrightarrow{AC} = (7;\ -2)$, így AC egyenesének egy normálvektora $(2;\ 7)$, egyenlete ezért: $2x+7y=-8$.



2403. Adott $P(-3; 2)$, $\mathbf{v}(1; -5)$. Az egyenes egyenlete (a 2401. feladat mintájára) $5x + y = -13$.

a) A 2 abszcisszájú pont: $(2; -23)$.

b) A 7 ordinátájú pont: $(-4; 7)$.

2404. e: $y = 2x + 3$; f: $y = ax + 5$

a) $e \parallel f \Leftrightarrow a = 2$ (ugyanaz a két egyenes iránytangense és itt $e \not\ni f$).

b) $e \perp f \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ (a két egyenes iránytangensének szorzata -1).

2405. Egy pont akkor és csak akkor illeszkedik egy egyenesre, ha a pont koordinátáit az egyenes egyenletébe helyettesítve teljesül az egyenlőség. Jelöljük a keresett egyenest e-vel!

$P \in e \Leftrightarrow \frac{11}{5}A + 8B = -2$

$Q \in e \Leftrightarrow \frac{1}{2}A + \frac{7}{3}B = -2$

Az egyenletrendszer megoldása: $A = 10$, $B = -3$, tehát a keresett egyenes egyenlete: $10x - 3y = -2$.

2406. $mx + 2y = m - 1$.

Például:

ha $m = 0$, akkor az egyenes egyenlete

$2y = -1$; $y = -\frac{1}{2}$;

ha $m = 1$, akkor az egyenes egyenlete

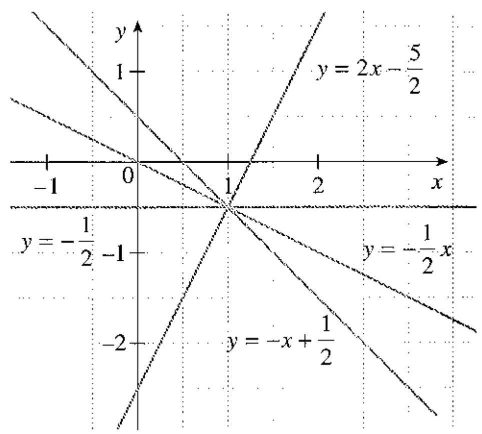
$x + 2y = 0$; $y = -\frac{1}{2}x$;

ha $m = 2$, akkor az egyenes egyenlete

$2x + 2y = 1$; $y = -x + \frac{1}{2}$;

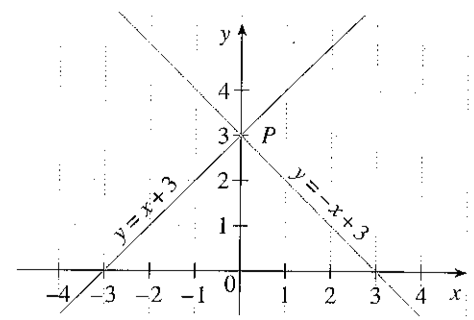
ha $m = -4$, akkor az egyenes egyenlete

$-4x + 2y = -5$; $y = 2x - \frac{5}{2}$.



Az ábrázolt egyenesek közös pontja az $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ pont. E pont koordinátái tetszőleges m esetén kielégítik az $mx + 2y = m - 1$ egyenletet.

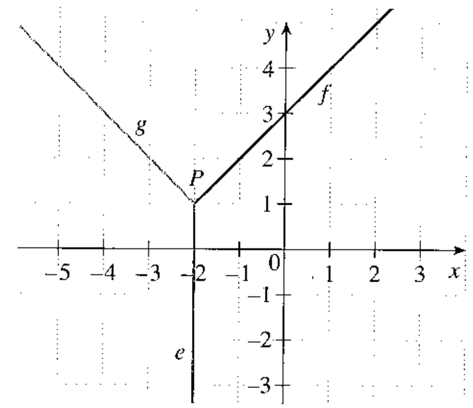
2407. Két ilyen egyenes van:
$x + y = 3$ és $y - x = 3$,
vagy másként
$y = -x + 3$ és $y = x + 3$.



2408. Az egyik félegyenes (f) meredeksége a szöveg alapján 1, a másiké (g) pedig -1. Mindkettőnek pontja a $P(-2; 1)$ pont, így egyenleteik (figyelembe véve, hogy félegyenesekről van szó!):

f: $y = x + 3$; $y \geq 1$

g: $y = -x - 1$; $y \geq 1$.



2409. $A(2; 5)$, $B(5; -3)$, $C(10; -8)$.

Szakasz felezőpontjának koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepe.

Az AB felezőpontja: $C_1\left(\frac{7}{2}; 1\right)$;

a BC felezőpontja: $A_1\left(\frac{15}{2}; -\frac{11}{2}\right)$;

a CA felezőpontja: $B_1\left(6; -\frac{3}{2}\right)$.

A $P_o(x_o; y_o)$ ponton átmenő $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete $v_2x - v_1y = v_2x_o - v_1y_o$.

A $C_1A_1 \parallel AC$ egyenes egyik irányvektora $(8; -13)$.

Így a C_1A_1 egyenes egyenlete: $13x + 8y = \frac{107}{2}$, azaz $26x + 16y = 107$.

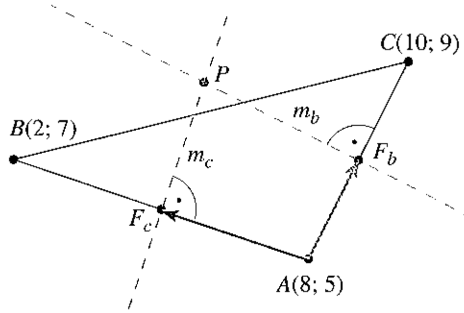
Az $A_1B_1 \parallel AB$ egyenes egyik irányvektora $(-3; 8)$.

Így az A_1B_1 egyenes egyenlete: $8x + 3y = \frac{87}{2}$, azaz $16x + 6y = 87$.

A $C_1B_1 \parallel CB$ egyenes egyik irányvektora $(-5; 5)$, illetve $(-1; 1)$.

Így a C_1B_1 egyenes egyenlete $x + y = \frac{9}{2}$, azaz $2x + 2y = 9$.

2410. Az AB és az AC szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja (P) ilyen pont.
A szakaszfelező pontok:
$F_c(5; 6)$, $F_b(9; 7)$.
A felezőmerőlegesek normálvektorai:
$\mathbf{n}_{m_c} = \overrightarrow{AF_c}(-3; 1)$; $\mathbf{n}_{m_b} = \overrightarrow{AF_b}(1; 2)$;
egyenleteik: m_c: $-3x + y = -9$, illetve m_b: $x + 2y = 23$.
A két egyenes metszéspontja a
$-3x + y = -9$; $x + 2y = 23$
egyenletrendszer megoldása alapján: $P\left(\frac{41}{7}; \frac{60}{7}\right)$.



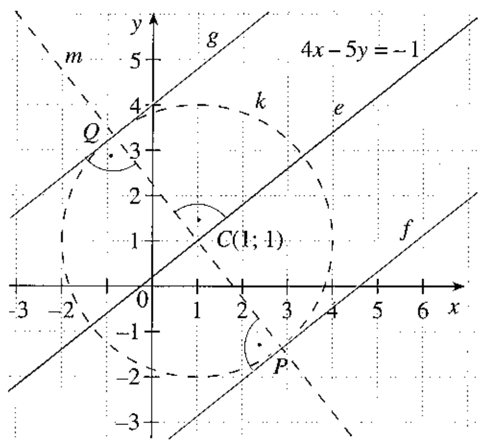
2411. Készítsünk vázlatot! Az ábra jelölései szerint a g, illetve az f egyenes egyenletét kell felírnunk.
Az ábra segítségével követhetők a megoldás egyes lépései:

1. Az adott e egyenes egy pontja: $C(1; 1)$.
2. C középpontú, 3 egység sugarú k kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$.
3. C-n áthaladó, e-re merőleges m egyenes egyenlete: $5x + 4y = 9$.
4. k és m metszéspontjait az

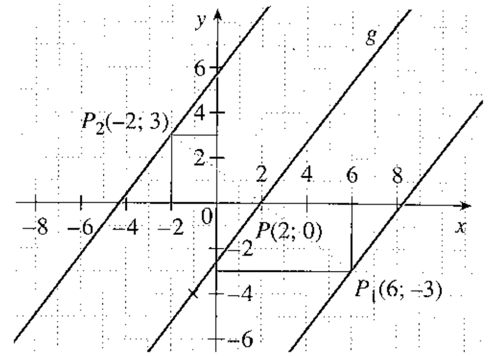
$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9\\ 5x + 4y = 9\end{array}\right\} \text{ egyenletrendszer megoldásai adják:}$$

$$P\left(\frac{41+12\sqrt{41}}{41}; \frac{41-15\sqrt{41}}{41}\right), \text{ illetve } Q\left(\frac{41-12\sqrt{41}}{41}; \frac{41+15\sqrt{41}}{41}\right).$$

5. A P ponton átmenő, e-vel párhuzamos f egyenes egyenlete: $4x - 5y = 3\sqrt{41} - 1$.
6. A Q ponton átmenő, e-vel párhuzamos g egyenes egyenlete: $4x - 5y = -3\sqrt{41} - 1$.



2412. P-ben állítsunk merőlegest g-re, és arra mérjünk fel 5 egységet.
A g normálvektora $(4; -3)$, ennek hossza pontosan 5. Így $P(2; 0)$ 5 egységre fekvő „párjai":
$P_1(2 + 4; 0 - 3) = (6; -3)$, illetve
$P_2(2 - 4; 0 + 3) = (-2; 3)$.
Az elsőt behelyettesítve $4x - 3y = c$ egyenletbe: $24 + 9 = 33$; a másikat: $-8 - 9 = -17$. A keresett két egyenes $4x - 3y = 33$ és $4x - 3y = -17$.



A 2458. megoldásban általánosan, paraméteresen belátjuk, hogy két párhuzamos egyenes, $Ax + By = C_1$ és $Ax + By = C_2$ távolsága $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Ezzel visszafelé számolva szintén könnyen adódik, hogy $|c - 8| = 5 \cdot 5 = 25$, és akkor $c = 8 \pm 25$.

Másik megoldás:

Egy egyenestől adott távolságban levő egyenes párhuzamos kell legyen az adott egyenessel, azaz irány- és normálvektoraik azonosak. Mivel a g egyenes egyenlete adott: $4x - 3y = 8$, a keresett egyenesek egyenlete $4x - 3y = c$, ahol a konstans értékét abból kell meghatározni, hogy éppen 5 egységre vannak az adott egyenestől. Vegyük a $P(2; 0)$ pontot, amely a g egyik pontja. Egy ilyen középpontú, 5 egység sugarú kör éppen érinti a keresett egyeneseket, azaz az egyenletrendszernek pontosan 1 megoldása lehet. Ez ad majd egy feltételt c-re: $(x-2)^2 + y^2 = 25$ és $4x - 3y = c$ egyenletrendszernek csak egy megoldása lehet. $4x - c = 3y$, ahonnan

$9y^2 = 16x^2 - 8xc + c^2$; ezt beírva a kör egyenletének 9-szeresébe:

$9(x-2)^2 + 16x^2 - 8xc + c^2 = 225$.

Rendezve: $25x^2 - 4x(2c + 9) + c^2 - 189 = 0$. Ennek egy megoldása akkor van, ha a diszkrimináns 0, azaz: $16(2c + 9)^2 - 100(c^2 - 189) = 0$.

Felbontva: $-36c^2 + 576c + 20196 = 0$.

Osszunk le -36-tal: $c^2 - 16c - 561 = 0$, azaz $c_1 = 33$; $c_2 = -17$.

Tehát a keresett két egyenes: $4x - 3y = 33$, illetve $4x - 3y = -17$.

2413. Adott: $P(1; 9)$ és e: $3x - 4y + 8 = 0$.
Adott P pontnak adott e egyenestől való távolságát meghatározhatjuk úgy, hogy a P ponton át az e egyenesre merőlegest (f) állítunk. E két egyenes metszéspontjának és az adott pontnak a távolságát határozzuk meg.
A P-n átmenő, e-re merőleges f egyenes egyenlete: $4x + 3y = 31$.

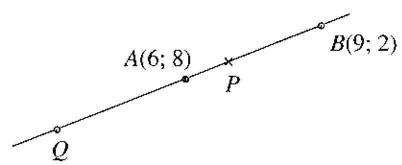
A két egyenes, e és f M metszéspontját az egyenletrendszer megoldása adja:
e: $3x - 4y = -8$;
f: $4x + 3y = 31$.
Az első egyenlet 3-szorosához a második egyenlet 4-szeresét adjuk, ekkor kapjuk: $25x = 100$, innen $x = 4$.
Ezt az egyik egyenletbe helyettesítve adódik: $y = 5$, $M(4, 5)$.
A keresett távolság: $PM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Másik megoldás:
Az e: $Ax + By + C = 0$ egyenletű egyenes és $P_0(x_0, y_0)$ pont távolsága

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Feladatunkban e: $3x - 4y + 8 = 0$, $P(1; 9)$, tehát $d = \left|\frac{3 \cdot 1 - 4 \cdot 9 + 8}{5}\right| = 5$.

2414. Két ilyen pont van: P az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja és Q, amelyet annak alapján kapunk meg könnyen, hogy a BQ szakasz felezőpontja A.



$\overrightarrow{AB} = (3; 6)$; $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1; -2)$,
tehát P koordinátái: $6 + 1 = 7$; $8 - 2 = 6$, vagyis $P(7; 6)$.
Jelöljük Q koordinátáit q_1-gyel, illetve q_2-vel.
Ekkor $\frac{9 + q_1}{2} = 6$; $q_1 = 3$; illetve $\frac{2 + q_2}{2} = 8$, $q_2 = 14$, vagyis $Q(3; 14)$.

Másik megoldás:
Az AB egyenes egyenlete: $2x + y = 20$. Ennek az egyenesnek olyan $P(p; q)$ pontját keressük, melyre igaz, hogy $PB = 2PA$.
P rajta van a $2x + y = 20$ egyenletű egyenesen, ezért igaz, hogy $2p + q = 20$.
Mivel $PB = \sqrt{(p-9)^2 + (q-2)^2}$ és $PA = \sqrt{(p-6)^2 + (q-8)^2}$, ezért igaz az is, hogy $\sqrt{(p-9)^2 + (q-2)^2} = 2\sqrt{(p-6)^2 + (q-8)^2}$.
Megoldandó tehát a

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{(p-9)^2 + (q-2)^2} &= 2\sqrt{(p-6)^2 + (q-8)^2} \\ 2p + q &= 20 \end{aligned}\right\} \text{ egyenletrendszer.}$$

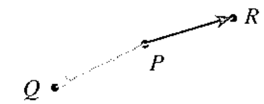
Az első egyenletből ekvivalens átalakítással: $p^2 + q^2 - 10p - 20q + 105 = 0$ adódik, a második egyenletből pedig $q = 20 - 2p$.
Behelyettesítés után az $5p^2 - 50p + 105 = 0$, ebből a $p^2 - 10p + 21 = 0$ egyenlethez jutunk.

Megoldóképlettel: $p_1 = 7$, $p_2 = 3$.
Ezekből: $q_1 = 20 - 2p_1 = 6$, $q_2 = 20 - 2p_2 = 14$.
Két pont felel meg a feltételeknek: $P_1(7; 6)$ és $P_2(3; 14)$.

Ellenőrzés:
$P_1A = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ és $P_1B = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, tehát $P_1B = 2P_1A$;
$P_2A = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ és $P_2B = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$, tehát $P_2B = 2P_2A$.

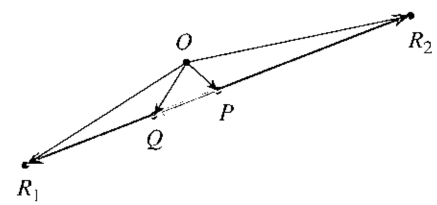
Másik megoldás:
A keresett pontot $P(p; q)$-val jelölve igaz, hogy $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PA}$ vagy $\overrightarrow{PB} = -2\overrightarrow{PA}$.
$\overrightarrow{PA} = (6 - p; 8 - q)$, $\overrightarrow{PB} = (9 - p; 2 - q)$, ezért a $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PA}$ lehetőségből $9 - p = 2(6 - p)$ és $2 - q = 2(8 - q)$, azaz $p = 3$ és $q = 14$ adódik, míg a $\overrightarrow{PB} = -2\overrightarrow{PA}$ lehetőségből $9 - p = -2(6 - p)$ és $2 - q = -2(8 - q)$, azaz $p = 7$ és $q = 6$. Ismét az első megoldásban már megadott $P_1(7; 6)$ és $P_2(3; 14)$ pontokat kaptuk eredményül.

2415. a) A három pont pontosan akkor van egy egyenesen, ha $\overrightarrow{PQ}$ egyállású a $\overrightarrow{PR}$-ral (ábra).



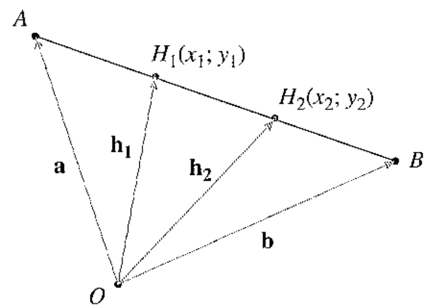
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-5{,}5; -9{,}2) - (5{,}5; -4{,}8) =$
$= (-11; -4{,}4)$; $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (15; -1) - (5{,}5; -4{,}8) = (9{,}5; 3{,}8)$
(ahol O az origó).
El kell tehát dönteni, hogy a $(-11; -4{,}4)$ és a $(9{,}5; 3{,}8)$ vektorok egyállásúak-e.
Mivel $\frac{9{,}5}{-11} = -\frac{95}{110} = -\frac{19}{22}$ és $\frac{3{,}8}{-4{,}4} = -\frac{38}{44} = -\frac{19}{22}$, ezért $(9{,}5; 3{,}8) = -\frac{19}{22} \cdot (-11; -4{,}4)$, azaz $\overrightarrow{PR} = -\frac{19}{22}\overrightarrow{PQ}$, tehát a $\overrightarrow{PQ}$ egyállású a $\overrightarrow{PR}$-ral, így a P, Q, R pontok egy egyenesen vannak.

b) A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy meghatározzuk a keresett pontokba mutató helyvektorok koordinátáit (O az origó, R_1 és R_2 a keresett pontok).



A feladat szövege szerint
$\overrightarrow{PR}_1 = 3 \cdot \overrightarrow{PQ} = 3 \cdot (-11; -4{,}4) = (-33; -13{,}2)$ és
$\overrightarrow{PR}_2 = -3 \cdot \overrightarrow{PQ} = -3 \cdot (-11; -4{,}4) = (33; 13{,}2)$.
$\overrightarrow{OR}_1 = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}_1 = (5{,}5; -4{,}8) + (-33; -13{,}2) = (-27{,}5; -18)$, azaz $R_1(-27{,}5; -18)$;
$\overrightarrow{OR}_2 = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}_2 = (5{,}5; -4{,}8) + (33; 13{,}2) = (38{,}5; 8{,}4)$, azaz $R_2(38{,}5; 8{,}4)$.

2416. A harmadolópontok helyvektorai:
$\overrightarrow{OH_1} = \mathbf{h}_1 = \dfrac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$, ahol $\mathbf{h}_1$ az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontjának helyvektora;
$\overrightarrow{OH_2} = \mathbf{h}_2 = \dfrac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}$, ahol $\mathbf{h}_2$ az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontjának helyvektora.
Innen a harmadolópontok:
$H_1(2; 2)$ és $H_2(0; 5)$.

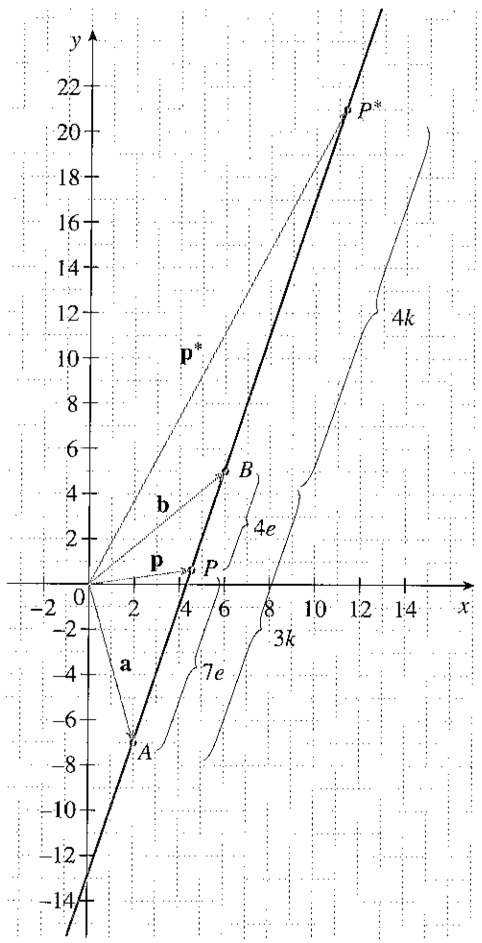


2417. Két ilyen pont van, P és P^*. P az AB szakasz belső pontja, P^* az AB egyenesén, az AB szakaszon kívül, a B ponthoz közelebb helyezkedik el.
A keresett pontok koordinátáit egy szakasz osztópontjaira vonatkozó összefüggés alapján számíthatjuk ki.
$\mathbf{p} = \dfrac{7\mathbf{b}+4\mathbf{a}}{11}$, ez koordinátákra lebontva: ha $P(p_1; p_2)$, akkor

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{7\cdot 6+4\cdot 2}{11} \\ p_2 &= \frac{7\cdot 5+4\cdot(-7)}{11} \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad P\left(\frac{50}{11}; \frac{7}{11}\right).$$

Ehhez hasonlóan:
$\mathbf{b} = \dfrac{3\mathbf{p}^*+4\mathbf{a}}{7}$, ez koordinátákra lebontva: ha $P^*(p_1^*; p_2^*)$, akkor

$$\left.\begin{aligned} 6 &= \frac{3p_1^*+4\cdot 2}{7} \\ 5 &= \frac{3p_2^*+4\cdot(-7)}{7} \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad P^*\left(\frac{34}{3}; 21\right).$$



2418. A P pont rajta van az A és B pontok által meghatározott egyenesen.
$\overrightarrow{AP}(6; 4)$, $\overrightarrow{PB}(3; 2)$
$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$
Tehát P rajta van az A és B pontokra illeszkedő egyenesen. P az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja.

2419. Az A és B pontok által meghatározott egyenes egyenlete $x + 2y = 5$. Ebbe az egyenletbe P koordinátáit behelyettesítve a $-1 + 2\cdot 3 = 5$ igaz kijelentést kapjuk, tehát P rajta van az AB szakasz egyenesén.
$\overrightarrow{AP} = (6; -3)$, $\overrightarrow{PB} = (4; -2)$, ezért $\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{PB}$.
Tehát $AP : PB = 3 : 2$.

Megjegyzés:
Az $\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{PB}$ feleslegessé teszi a fenti megoldás első részét, hiszen ez az összefüggés már elégséges feltétele annak, hogy A, P és B egy egyenesen legyen.

2420. A $\overrightarrow{CB}$ befogóvektor a $\overrightarrow{CA}(4; -2)$ befogóvektor 90°-os elforgatottjának 1,5-szeresével egyenlő.
$\overrightarrow{CA}$ befogóvektor +90°-os elforgatottja: $(2; 4)$, −90°-os elforgatottja: $(-2; -4)$, tehát $\overrightarrow{CB}(3; 6)$ vagy $\overrightarrow{CB}(-3; -6)$.
A B csúcsba mutató helyvektor $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$, tehát $\overrightarrow{OB} = (3; 1) + (3; 6) = (6; 7)$ vagy $\overrightarrow{OB} = (3; 1) + (-3; -6) = (0; -5)$.
A feladatnak két megoldása van: $B(6; 7)$, illetve $B(0; -5)$.

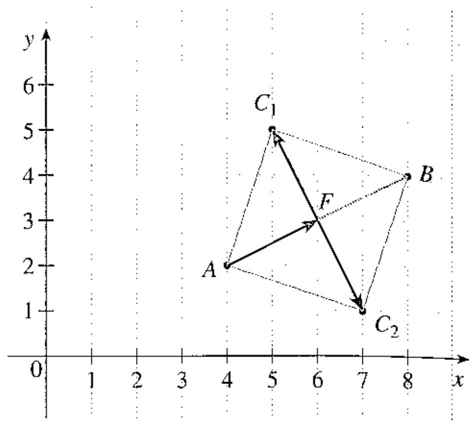
Másik megoldás:
A $\overrightarrow{CA}(4; -2)$ vektor a CB befogó egyenesének egy olyan normálvektora, melynek hossza $2\sqrt{5}$.
A CB befogó egyenesének egyenlete $2x - y = 5$, a B csúcs pedig $\dfrac{3}{2}\cdot 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ távolságra van C-től. A B csúcs ezért rajta van a C középpontú, $3\sqrt{5}$ sugarú körön is. A kör egyenlete: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 45$.
Az

$$\left.\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-1)^2 &= 45 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}\right\} \text{ egyenletrendszer megoldása adja a } B \text{ csúcs koordinátáit.}$$

Mivel az egyenletrendszer megoldásai a $(6; 7)$ és $(0; -5)$ rendezett számpárok, ezért az első megoldásban leírt két lehetséges esetet kaptuk ismét.

2421. Ekkor az átfogó felezőpontja $F = \left(\frac{4+8}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = (6; 3)$, az $\overrightarrow{AF}$ pedig $(6-4; 3-2) = (2; 1)$. A C csúcs lehetséges helyeit úgy (is) kaphatjuk, hogy $\overrightarrow{AF}$ 90°-os elforgatottját felmérjük F-ből. Mivel két ilyen elforgatott van (+90°; −90°), két C adódik.

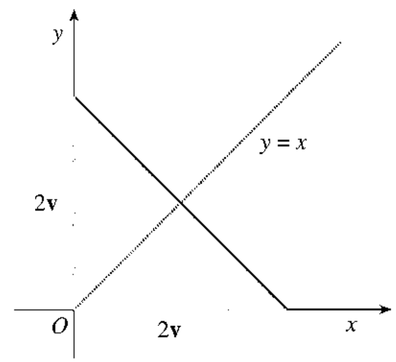
$\overrightarrow{AF}_{+90°} = (-1; 2)$, ezért
$C_1 = (6; 3) + (-1; 2) = (5; 5)$;
$\overrightarrow{AF}_{-90°} = (1; -2)$, ezért
$C_2 = (6; 3) + (1; -2) = (7; 1)$.



2422. A két merőleges egyenes legyen a koordináta-rendszer x és y tengelye. A két pont induljon az origótól a tengelyeken pozitív irányban.

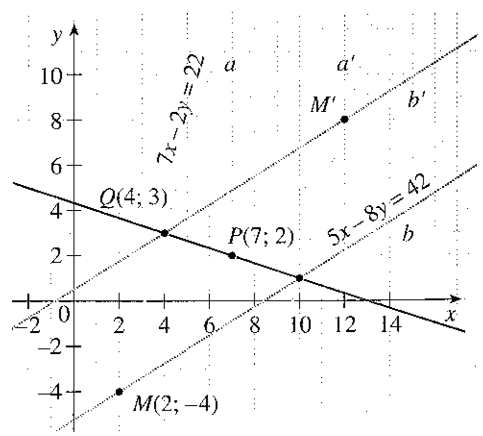
a) A két pont sebességének abszolútértéke: $v\ \frac{\text{hosszegység}}{\text{sec}}$. Így a két pont a derékszög két szárán 2 sec múlva O-tól $2v$ hosszegység távolságra van. A két pont távolsága $d = 2v\sqrt{2}$ hosszegység.

b) A két pontot összekötő szakasz felezőpontjának koordinátái egyenlők, tehát a felezőpont az $y = x$ egyenesen helyezkedik el ($x \geq 0$).



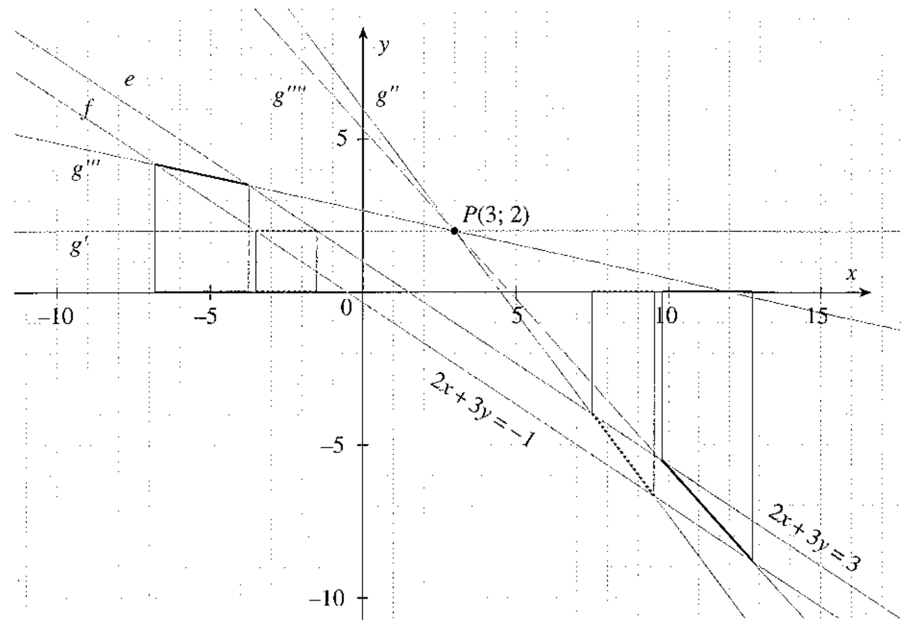
2423. Határozzuk meg az
a: $7x - 2y = 22$ és
b: $5x - 8y = 42$ egyenesek M metszéspontját! (Az egyenletrendszer megoldása) $M(2; -4)$.
Tükrözzük az M pontot P-re, legyen a tükörkép $M'(x_1; y_1)$, a tükrözés miatt $P(7; 2)$ az MM' szakasz felezőpontja, így:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2+x_1}{2} &= 7 \\ \frac{-4+y_1}{2} &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M'(12; 8).$$



Húzzunk párhuzamost M'-n keresztül b-vel, illetve a-val! (b', illetve a') A párhuzamosság miatt a, b, a' és b' egy paralelogramma oldalegyenesei, e paralelogramma középpontja P.
A paralelogramma átlói felezik egymást, így a keresett szelő a paralelogramma M-en át nem haladó átlója.
Mivel $b \parallel b'$; $M'(12; 8) \Rightarrow b'$: $5x - 8y = -4$.
Határozzuk meg az a: $7x - 2y = 22$ és b': $5x - 8y = -4$ egyenesek Q metszéspontját! (Az egyenletrendszer megoldása) $Q(4; 3)$.
A keresett szelő a paralelogramma QP átlója.
$\mathbf{v} = \overrightarrow{QP}(3; -1) \Rightarrow -x - 3y = -4 - 3 \cdot 3$.
A keresett szelő egyenlete: $x + 3y = 13$.
(A megoldáshoz a' egyenletének meghatározása nem szükséges.)

2424.



Keressük a $P(3; 2)$ ponton átmenő egyenesek közül azt, amelyiknek az e és f egyenesek közé eső szakaszának az x tengelyre eső vetülete adott hosszúságú szakasz.
A P-re illeszkedő, m meredekségű g egyenes egyenlete: $y - 2 = m(x - 3)$.
Az m-et keressük.
Meghatározzuk g-nek az e és f egyenessel való metszéspontját $E(x_1; y_1)$-et és $F(x_2; y_2)$-t. E két pont abszcisszái különbségének abszolútértéke kell, hogy a) 2, illetve b) 3 legyen. (*)

$$\left.\begin{aligned} e&:\ 2x+3y=3\\ g&:\ y=mx-3m+2 \end{aligned}\right\}$$

A g egyenletéből y-t behelyettesítjük az e-be:

$2x+3(mx-3m+2)=3$

$(3m+2)x=9m-3$

$x_1=\dfrac{9m-3}{3m+2}$ $\qquad m\neq-\dfrac{2}{3}$

f: $2x+3y=-1$

A g egyenletéből y-t behelyettesítjük az f-be:

$2x+3(mx-3m+2)=-1$

$(3m+2)x=9m-7$

$x_2=\dfrac{9m-7}{3m+2}$

A két abszcissza különbségének abszolútértéke: $\left|\dfrac{9m-3}{3m+2}-\dfrac{9m-7}{3m+2}\right|=\dfrac{4}{|3m+2|}$.

A *-gal jelölt megjegyzésnek megfelelően erre a törtre igaz, hogy

a) szerint $\dfrac{4}{3m+2}=2$, innen $m=0$. Az egyenes egyenlete g': $y=2$,

illetve $\dfrac{4}{3m+2}=-2$, innen $m=-\dfrac{4}{3}$, az egyenes egyenlete g'': $y=-\dfrac{4}{3}x+6$.

b) szerint $\dfrac{4}{3m+2}=3$, innen $m=-\dfrac{2}{9}$, az egyenes egyenlete g''': $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{8}{3}$,

ill. $\dfrac{4}{3m+2}=-3$, innen $m=-\dfrac{10}{9}$, az egyenes egyenlete g'''': $y=-\dfrac{10}{9}x+\dfrac{16}{3}$.

Tehát a megoldás két-két egyenes.

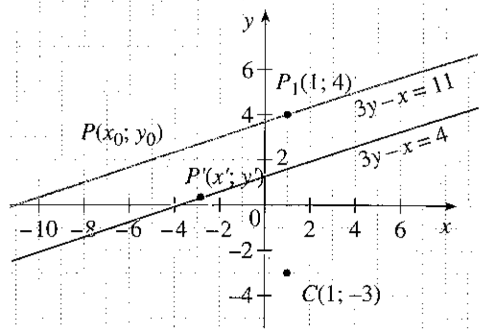
Az a) feladat másik megoldása:

Kiindulunk a $2x+3y=3$ egyenesen lévő $E(0;\,1)$ pontból, megkeressük a másik egyenes -2, illetve 2 abszcisszájú pontját: $A_1(-2;\,1)$; $A_2\left(2;\,-\dfrac{5}{3}\right)$.

Az EA_1 meredeksége $m_1=0$, a P-re illeszkedő, m_1 meredekségű egyenes egyenlete $y=2$.

Az EA_2 meredeksége $m_2=-\dfrac{1+\dfrac{5}{3}}{2}=-\dfrac{4}{3}$, a P-re illeszkedő m_2 meredekségű egyenes egyenlete $y-2=-\dfrac{4}{3}(x-3)$; $4x+3y=18$.

2425. Ha a $C(1;\,-3)$ pontot összekötjük az adott e egyenes egy tetszőleges $P(x_0;\,y_0)$ pontjával és vesszük az így keletkezett CP szakasz C-től távolabbi $P'(x';\,y')$ harmadolópontját, akkor teljesül: $\dfrac{CP'}{CP}=\dfrac{2}{3}$.



Tehát a keresett P' pontokat egy C középpontú $\lambda=\dfrac{2}{3}$ arányú középpontos kicsinyítéssel kapjuk. A középpontos hasonlóság a középponton át nem haladó egyeneshez egy vele párhuzamos egyenest rendel. Így elegendő az adott e egyenes egy $P(x_0;\,y_0)$ pontjának a középpontos megfelelőjét megkeresni, és ezen keresztül párhuzamost húzni az eredeti egyenessel. Például: $P_1(1;\,4)$ pont rajta van az adott e egyenesen. Mivel a C pont abszcisszája is 1, ezért a keletkezett CP_1 szakasz hossza leolvasható a pontok 2. koordinátáiból. A szakasz 7 egység, így a CP_1 szakasz C-től távolabbi harmadolópontja $P_1'\left(1;\,\dfrac{5}{3}\right)$. Ezen a ponton áthaladó, e-vel párhuzamos egyenes egyenlete: $3y-x=3\cdot\dfrac{5}{3}-1\ \Rightarrow\ 3y-x=4$.

2426. A mozgás pályájának egy irányvektora a $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(7{,}3;\,0{,}5)-(2{,}3;\,6{,}5)=$ $=(5;\,-6)$ vektor. A pálya egyenesének egyenlete tehát e: $6x+5y=46{,}3$.

Az abszcisszatengelyt az $M(m;\,0)$ pontban metszi az e, ezért $6m+5\cdot0=46{,}3$, amiből $m=\dfrac{463}{60}$, tehát $M\left(\dfrac{463}{60};\,0\right)$.

Az ordinátatengelyt az $N(0;\,n)$ pontban metszi az e, ezért $6\cdot0+5n=46{,}3$, amiből $n=\dfrac{463}{50}$, tehát $N\left(0;\,\dfrac{463}{50}\right)$.

Másik megoldás:

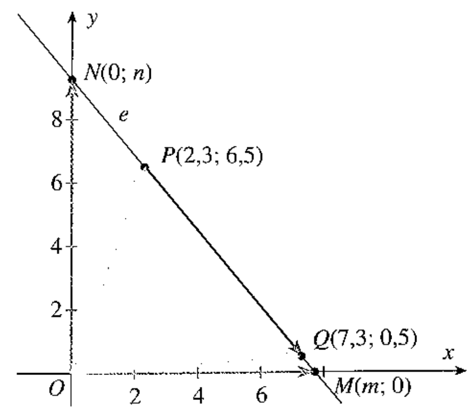
A $\overrightarrow{PQ}$ vektor párhuzamos a $\overrightarrow{PM}$ vektorral, ezért $(m-2{,}3;\,-6{,}5)=$ $=k\cdot(5;\,-6)=(5k;\,-6k)$.

Ebből egyrészt $-6k=-6{,}5$, ezért

ezért $k=\dfrac{13}{12}$, másrészt $m-2{,}3=5k$,

amiből $m=5k+2{,}3=\dfrac{65}{12}+\dfrac{23}{10}=\dfrac{463}{60}$,

tehát $M\left(\dfrac{463}{60};\,0\right)$.



A $\overrightarrow{PQ}$ vektor párhuzamos a $\overrightarrow{PN}$ vektorral, vagyis $(-2,3;\ n-6,5) =$
$= p\cdot(5;-6) = (5p;-6p)$.

Ebből egyrészt $5p = -2,3$, vagyis $p = -\frac{23}{50}$, másrészt $n - 6,5 = -6p$, amiből

$$n = -6p + 6,5 = \frac{138}{50} + \frac{65}{10} = \frac{463}{50}, \text{ tehát } N\left(0;\ \frac{463}{50}\right).$$

2427. Helyezzünk el koordináta-rendszert úgy, hogy origója az A város, abszcisszatengelye NY–K irányú, ordinátatengelye pedig D–É irányú legyen. Az egység hossza a tengelyeken 1 km. Ilyen feltételek mellett az ágyú helyét a $G(5;3)$ a másik város helyét pedig a $B(3;6)$ pont jelzi.

A G középpontú, 3,2 sugarú kör egyenlete: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10,24$, az AB egyenesének egyenlete pedig $2x - y = 0$. Ha a kör és az egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszernek nincs valós megoldása, akkor a két város között haladó egyenes út biztonságos.

$$\left.\begin{array}{l}(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10,24\\ y = 2x\end{array}\right\}$$

A 2. egyenletet az elsőbe helyettesítve, majd a négyzetre emeléseket és összevonásokat elvégezve az $5x^2 - 22x + 23,76 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek diszkriminánsa $22^2 - 4\cdot 5\cdot 23,76 = 8,8 > 0$, tehát az egyenletnek (és így az egyenletrendszernek is) két megoldása van. Az AB egyenesének egy szakasza tehát nem biztonságos.

Az egyenletrendszer megoldásai: (1,90; 3,81) és (2,50; 4,99). Mindkét megoldásnak megfelelő pont az AB szakasz belső pontja, ezért maga az AB szakasz sem biztonságos.

Másik megoldás:

Határozzuk meg, hogy az AB egyenesének melyik (P) pontja van legközelebb az ágyúhoz. Ehhez állítsunk G-ből merőlegest (m) az AB egyenesére (e), majd határozzuk meg a két egyenes metszéspontját.

$\overrightarrow{AB}(3;6)$ az e-nek egy irányvektora, m-nek pedig egy normálvektora.

e egyenlete: $2x - y = 0$, m egyenlete: $x + 2y = 11$. Metszéspontjukat a

$$\left.\begin{array}{l}2x - y = 0\\ x + 2y = 11\end{array}\right\} \text{ egyenletrendszer megoldásából kapjuk: } P(2,2;\ 4,4).$$

A P pont az AB szakasz belső pontja, továbbá $GP = \sqrt{2,8^2 + 1,4^2} = \sqrt{9,8}$
$\sqrt{9,8} < 3,2$, tehát az AB szakasz nem biztonságos.

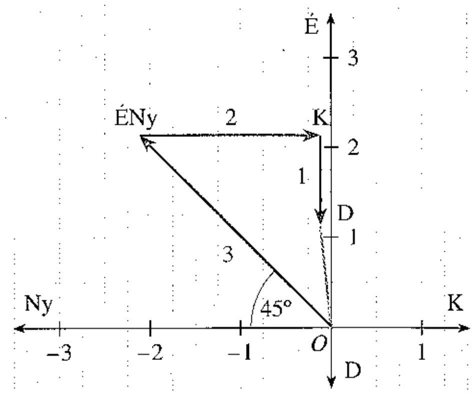
2428. a) Lásd az ábrát, ahol felhasználjuk, hogy $\cos 45° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

A keresett pontok:

$$\text{ÉNy}\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\text{K}\left(2 - \frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\text{D}\left(2 - \frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right).$$



b) Mivel az origóból indult, végül is OD szakasz hossza a kérdés, aminek a négyzete: $\left(2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 = 8,5 - 6\sqrt{2} + 5,5 - 3\sqrt{2} = 14 - 9\sqrt{2} \approx 1,272$;

azaz $OD \approx 1,13$ (km), mivel minden távolság km-ben volt megadva.

Összesen tehát 6 km-t haladt, de a kezdőponttól csak 1,13 km-re jutott a vitorlás.

2429. Legközelebb a két négyzet P-vel, illetve Q-val jelölt csúcsa van: eltérésük vízszintesen 8 cm, függőlegesen 12 cm, azaz a távolságuk a térképen:

$\sqrt{64 + 144} = \sqrt{208} \approx 14,4$ (cm).

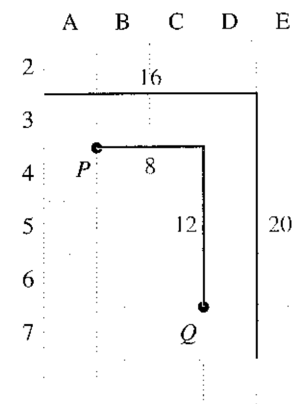
Mivel a térkép léptéke 1 : 25 000, ezért ez 361 000 cm lesz a valóságban, azaz kb. 3,6 km legalább a két utca légvonalbeli távolsága.

A két átellenes csúcs távolsága: vízszintesen 16 cm, függőlegesen 20 cm, azaz légvonalban a térképen:

$\sqrt{256 + 400} = \sqrt{656} \approx 25,6$ (cm),

ami 640 000 cm, kb. 6,4 km a valóságban.

Tehát kilométerben mérve a [3,6; 6,4] intervallumban lesz a két utca távolsága légvonalban.



2430. a) A két egyenes metszéspontja a várható átlépési hely.

Ezt a pontot az $x - 3y + 14 = 0 \ \wedge\ 3x + y - 18 = 0$ egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg: $M(4;6)$.

b) A kérdezett helyeket az e: $x - 3y + 14 = 0$ egyenes és az $M(4;6)$ középpontú, 30 sugarú kör metszéspontjai adják.

Megoldandó tehát az $x - 3y + 14 = 0 \ \wedge\ (x-4)^2 + (y-6)^2 = 30^2$ egyenletrendszer.

Ez ekvivalens a következőkkel:

$x = 3y - 14;\ \ (3y - 18)^2 + (y - 6)^2 = 900$

$x = 3y - 14;\ \ 10(y - 6)^2 = 900$

$x = 3y - 14;\ \ (y - 6)^2 = 90$

$x = 3y - 14;\ \ (y \approx -3{,}5 \text{ vagy } y \approx 15{,}5)$

$(x \approx -24{,}5;\ y \approx -3{,}5)$ vagy $(x \approx 32{,}5;\ y \approx 15{,}5)$

Tehát a $H_1(-24{,}5; -3{,}5)$, illetve a $H_2(32{,}5; 15{,}5)$ határpontig be kell jelenteni a repülést (hogy konkrétan melyik pontig, az attól függ, melyik pont van az ország területén kívül).

2431. a) Félegyenesek egyenletét kell felírni!

f_1: $y = -2;\ x \geq 1$

Az f_2 irányszöge 60°, tehát iránytangense $\sqrt{3}$, ezért

f_2: $y = \sqrt{3}(x - 1) - 2;\ x \leq 1$, ami más alakban írható így is:

$y = \sqrt{3}x - 2 - \sqrt{3};\ x \leq 1.$

Az f_3 irányszöge $-60°$, tehát iránytangense $-\sqrt{3}$, ezért

f_3: $y = -\sqrt{3}(x - 1) - 2;\ x \leq 1$, ami más alakban írható így is:

$y = -\sqrt{3}x - 2 + \sqrt{3};\ x \leq 1.$

b) Csak az f_3 félegyenesnek van 4 ordinátájú pontja. A $P(p; 4)$ pont illeszkedik az f_3-ra, ezért $4 = -\sqrt{3}p - 2 + \sqrt{3}$.

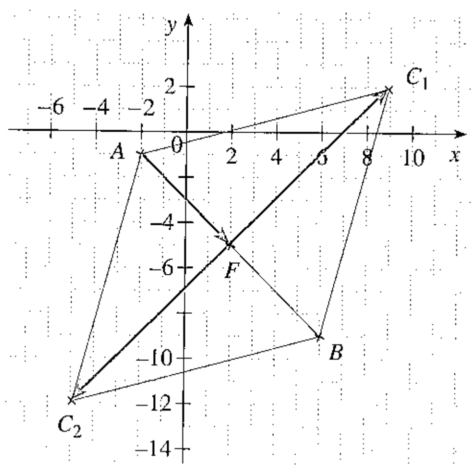
Rendezve: $\sqrt{3}p = \sqrt{3} - 6$, amiből $p = 1 - 2\sqrt{3}$ (ez teljesíti a $p \leq 1$ feltételt is).

A jelzett pont abszcisszája tehát $1 - 2\sqrt{3}$ (az ionizálás a $P(1 - 2\sqrt{3};\ 4)$ pontban történt).

2432. Az AB szakasz felezőpontja

$$F = \left(\frac{-2+6}{2};\ \frac{-1-9}{2}\right) = (2; -5),$$

az $\overrightarrow{AF}$ pedig $(2 - (-2);\ -5 - (-1)) = (4; -4)$. A C csúcs lehetséges helyeit úgy (is) kaphatjuk, hogy $\overrightarrow{AF}$ 90°-os elforgatottjának $\sqrt{3}$-szorosát felmérjük F-ből, hiszen a szabályos háromszög magassága az oldal felének $\sqrt{3}$-szorosa. Mivel két ilyen elforgatott van $(+90°; -90°)$, két C adódik.



$\sqrt{3} \cdot \overrightarrow{AF}_{+90°} = \sqrt{3}(4;\ 4)$, ezért

$C_1 = (2; -5) + (4\sqrt{3};\ 4\sqrt{3}) = (2 + 4\sqrt{3};\ -5 + 4\sqrt{3}) \approx (8{,}93;\ 1{,}93;),$

$\sqrt{3} \cdot \overrightarrow{AF}_{-90°} = \sqrt{3}(-4;\ -4)$, ezért

$C_2 = (2; -5) + (-4\sqrt{3};\ -4\sqrt{3}) = (2 - 4\sqrt{3};\ -5 - 4\sqrt{3}) \approx (-4{,}93;\ -11{,}93).$

2433. a) Első megoldás:

$AB = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \approx 8{,}94;$

$AC = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} \approx 9{,}49;$

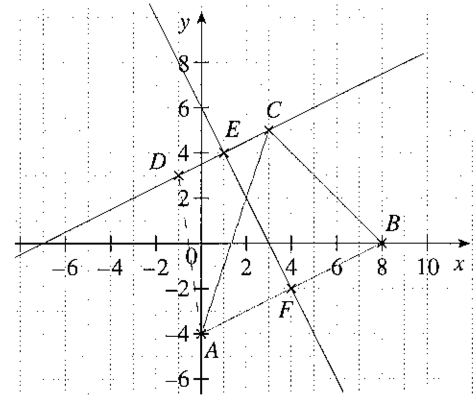
$BC = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}07.$

Egy koszinusztételből:

$$\cos CAB\sphericalangle = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} =$$

$$= \frac{80 + 90 - 50}{2\sqrt{80}\sqrt{90}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ ami miatt}$$

$CAB\sphericalangle = 45°.$



Második megoldás:

$\overrightarrow{AB} = (8; 4)$, iránytangense $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{8} = 0{,}5$ (irányszöge így kb. 26,57°);

$\overrightarrow{AC} = (3; 9)$, iránytangense $\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{3} = 3$ (irányszöge így kb. 71,57°).

Szükségünk van a $\beta - \alpha$ szögre. (A közelítő eredményekből: $71{,}57° - 26{,}57° \approx \approx 45°$; kérdés, mennyire azonosak a két szög tizedesei.)

Addíciós tétel: $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{3 - 0{,}5}{1 + 3 \cdot 0{,}5} = \frac{2{,}5}{2{,}5} = 1$, ezért a keresett szög pontosan 45°.

b) Keressük meg az alapok közös felező merőlegesét. AB felezőpontja:

$F = \left(\frac{0+8}{2};\ \frac{-4+0}{2}\right) = (4; -2)$; $\overrightarrow{AB} = (8; 4)$ ezért a felezőmerőleges egyik normálvektora $(2; 1)$, egyenlete pedig: $2x + y = 2 \cdot 4 + (-2) = 6$. Húzzunk C-n át párhuzamost AB-vel, ez lesz a másik alap egyenese. Ennek egy normálvektora az előzőnek 90°-os elforgatottja, $(1; -2)$, egyenlete így: $x - 2y = 3 - 2 \cdot 5 = -7$. A két egyenes metszéspontja a CD felezőpontja, E. Rendszerként megoldva:

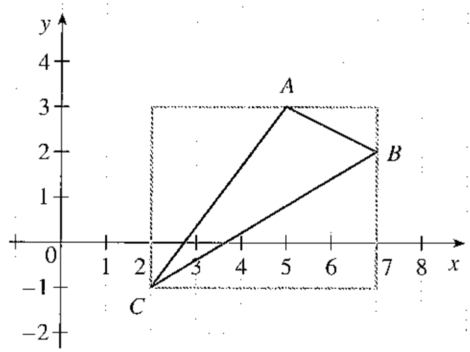
$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x - 2y &= -7 \end{aligned}\right\}.$$

A másodikból $x = 2y - 7$, beírva az elsőbe: $2(2y - 7) + y = 6$, ahonnan $5y = 20$, azaz $y = 4$. Visszaírva: $x = 2 \cdot 4 - 7 = 1$, tehát $E = (1; 4)$.

D-t megkapjuk, ha E-ből felmérjük a $\overrightarrow{CE}$-t:

$(1 - 3;\ 4 - 5) = (-2; -1)$, ezért $D = (1; 4) + (-2; -1) = (-1; 3)$.

2434. a) $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \approx 2,24;$



$CA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5;$

$CB = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5,83.$

A koszinusztételből meghatározzuk a legnagyobb szöget, ami természetesen a legnagyobb oldallal szemben van (lásd pl. 2277.-es megoldás):

$\cos CAB\sphericalangle = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} =$

$= \dfrac{5 + 25 - 34}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 5} \approx -0,1789$, ami miatt $CAB\sphericalangle \approx 100,30°$. Szinusztétellel meghatározunk egy következő szöget: $\dfrac{\sin ABC\sphericalangle}{AC} = \dfrac{\sin CAB\sphericalangle}{BC}$, amiből

$\sin ABC\sphericalangle = \dfrac{AC \cdot \sin CAB\sphericalangle}{BC} \approx \dfrac{5 \cdot \sin 100,30°}{\sqrt{34}} \approx 0,8437$, ezért $ABC\sphericalangle \approx 57,53°$.

Végül a harmadik szöget a szögösszegből számoljuk ki:
$ACB\sphericalangle = 180° - CAB\sphericalangle - ABC\sphericalangle \approx 22,17°$.

b) $T = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin CAB\sphericalangle}{2} \approx \dfrac{\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \sin 100,30°}{2} \approx 5,5.$

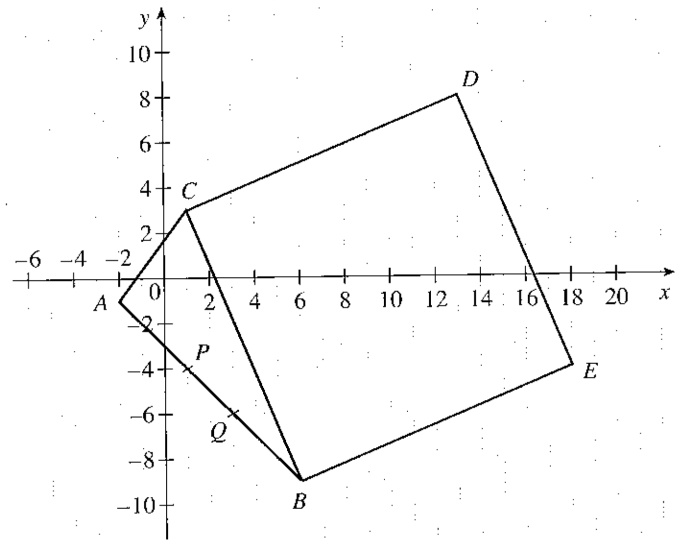
(Jobb számológéppel számolva, a megkapott értékeket a memóriába mentve pontosan 5,5 jön ki; kérdés, valóban egzaktul ennyi-e a terület. Ennek eldöntésére szolgál a másik megoldás.)

Másik megoldás:

Foglaljuk téglalapba háromszögünket, és a téglalap területéből hagyjuk el a kimaradó (derékszögű!) háromszögek területét. Mivel minden lényeges pont koordinátája egész, most egyszerű leolvasással ezt megtehetjük. A téglalap területe (mindig „vízszintes méretszer függőleges méret” sorrendben felsorolva az adatokat) $5 \cdot 4 = 20$ egység. Ebből elhagyandó az AC oldalra illeszkedő („bal felső”) háromszög területe: $\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$; az AB oldalra illeszkedő („jobb felső”) háromszög területe: $\dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$; és a BC oldalra illeszkedő („jobb alsó”) háromszög területe: $\dfrac{5 \cdot 3}{2} = 7,5$.

Az $ABC\,\Delta$ területe tehát $20 - 6 - 1 - 7,5 = 5,5$ (valóban pontosan).

2435.



a) Két ilyen pont is van: $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{5}{3}$.

Ekkor $P = \left(\dfrac{5 \cdot (-2) + 3 \cdot 6}{5+3}; \dfrac{5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-9)}{5+3}\right) = (1; -4)$ és

$Q = \left(\dfrac{3 \cdot (-2) + 5 \cdot 6}{3+5}; \dfrac{3 \cdot (-1) + 5 \cdot (-9)}{3+5}\right) = (3; -6)$.

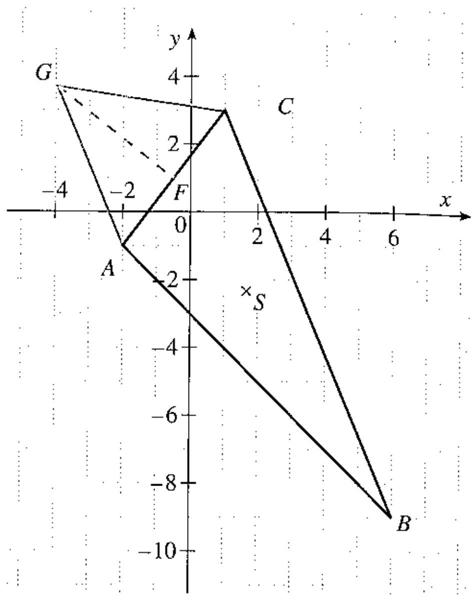
b) $\overrightarrow{CB} = (6 - 1; -9 - 3) = (5; -12)$. Ennek $+90°$-os elforgatottjait kell felmérni B-ből és C-ből, hogy megkapjuk a négyzet csúcsait. Az elforgatott vektor: $(12; 5)$, ezt C-ből felmérve: $(1; 3) + (12; 5) = (13; 8) = D$, illetve B-ből felmérve: $(6; -9) + (12; 5) = (18; -4) = E$.

2436. a) A súlypont mindkét koordinátája a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe, így:

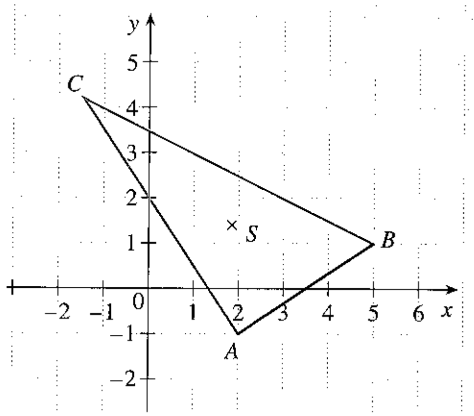
$S = \left(\dfrac{-2 + 6 + 1}{3}; \dfrac{-1 - 9 + 3}{3}\right) = \left(\dfrac{5}{3}; -\dfrac{7}{3}\right)$.

b) Mivel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, így maga $\overrightarrow{AC} = (3; 4)$ és $\overrightarrow{CB} = (5; -12)$ a keresett két összetevő.

c) Legyen AC felezőpontja
$F = \left(\frac{-2+1}{2};\ \frac{-1+3}{2}\right) = (-0,5;\ 1).$
Innen felmérve az $\overrightarrow{AF}$ $+90°$-os elforgatottjának $\sqrt{3}$-szorosát, kapjuk a háromszög G csúcsát. (Hiszen egy szabályos háromszög magassága $\sqrt{3}$-szorosa az oldal felének.)
Mivel
$\overrightarrow{AF} = (-0,5-(-2);\ 1-(-1)) =$
$= (1,5;\ 2)$, ezért
$\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{AF}_{+90°} = (-2\sqrt{3};\ 1,5\sqrt{3})$.
Ezt felmérve F-ből, kapjuk:
$G = (-0,5;\ 1) + (-2\sqrt{3};\ 1,5\sqrt{3}) =$
$= (-0,5-2\sqrt{3};\ 1+1,5\sqrt{3}) \approx$
$\approx (-3,96;\ 3,60).$



2437. a) Ez tehát a nevezetes 30°-60°-90°-os háromszög. AC oldala $\sqrt{3}$-szorosa AB-nek, így C-t megkapjuk, ha A-ból felmérjük az $\overrightarrow{AB}$ $+90°$-os elforgatottjának $\sqrt{3}$-szorosát.
Mivel $\overrightarrow{AB} = (3;\ 2)$, ezért
$\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{AB}_{+90°} = (-2\sqrt{3};\ 3\sqrt{3})$.
Ezt felmérve A-ból, kapjuk:
$C = (2;\ -1) + (-2\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}) =$
$= (2-2\sqrt{3};\ -1+3\sqrt{3}) \approx$
$\approx (-1,46;\ 4,20).$



b) A súlypont mindkét koordinátája a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe, így: $S = \left(\frac{2+5+2-2\sqrt{3}}{3};\ \frac{-1+1-1+3\sqrt{3}}{3}\right) = \left(3-\frac{2\sqrt{3}}{3};\ -\frac{1}{3}+\sqrt{3}\right) \approx$
$\approx (1,85;\ 1,40).$

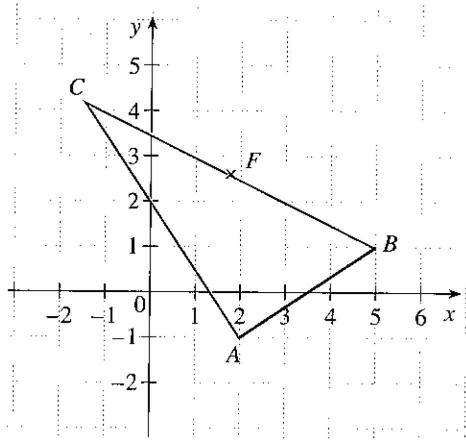
c) Derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának fele. Lévén a háromszög nevezetes, hosszabbik befogója $\sqrt{3}$-szorosa a rövidebbiknek:

$AB = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \approx 3,61$ és $AC = \sqrt{3}AB = \sqrt{39} \approx 6,24.$
A terület tehát $T = \frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{3}\sqrt{13}}{2} = 6,5\sqrt{3} \approx 11,26.$

Megjegyzés:
Ha a körüljárási irány pozitív voltát nem kötjük meg, természetesen C-nek, illetve S-nek AB-re tükrözött képei is megoldások.

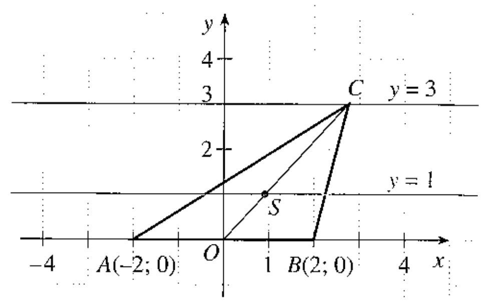
2438. a) E háromszög harmadik, C csúcsát az előző feladatban kerestük meg, lásd ott. A Thalész-tétel miatt a körülírható kör középpontja a BC átfogó felezőpontja:
$F = \left(\frac{5+2-2\sqrt{3}}{2};\ \frac{1-1+3\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= (3,5-\sqrt{3};\ 1,5\sqrt{3}) \approx (1,77;\ 2,60).$

Megjegyzés:
Természetesen az AB egyenesre való tükörkép is megoldása a feladatnak.



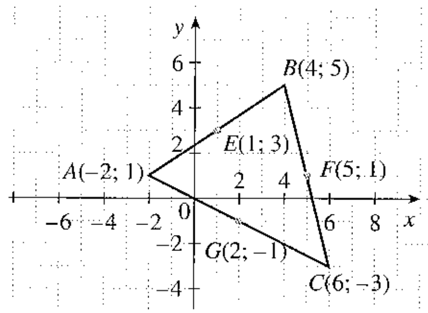
b) A körülírható kör sugara (pl.) az FB szakasz, hossza:
$R = \sqrt{(1,5+\sqrt{3})^2+(1-1,5\sqrt{3})^2} =$
$= \sqrt{2,25+3\sqrt{3}+3+1-3\sqrt{3}+6,75} = \sqrt{13} \approx 3,61.$
(Másképp az átfogó fele a sugár, de az a háromszög nevezetes volta miatt épp a rövidebbik befogó, így $R = AB = \sqrt{13}$, lásd előző feladat megoldása.) A beírható kör sugarát a háromszög területén keresztül határozzuk meg. Ez egyrészt a befogók szorzatának fele (az előző feladat c) részében meghatároztuk); másrészt rs, ahol s a fél kerület. Lévén a háromszög nevezetes, átfogója a rövidebb befogó kétszerese: $BC = 2AB = 2\sqrt{13} \approx 7,21.$
A fél kerület: $s = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{3}\sqrt{13}+2\sqrt{13}}{2} = \frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{13}}{2} \approx 8,53.$
A beírható kör sugara így $r = \frac{T}{s} = \frac{6,5\sqrt{3}\cdot 2}{(3+\sqrt{3})\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{3+\sqrt{3}} \approx 1,32.$

2439. A háromszög S súlypontja a CO súlyvonal O-hoz közelebbi harmadoló pontja. $O(0; 0)$ rögzített, C az $y = 3$ egyenes tetszőleges pontja. C-ből a hozzátartozó S-hez úgy jutunk, hogy egy O középpontú, $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóságot alkalmazunk. Ez az $y = 3$ egyenest az $y = 1$ egyenesbe viszi át.

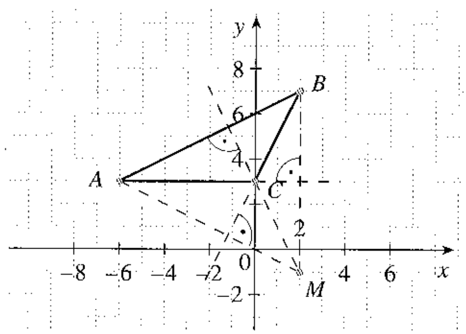


Megfordítva:
Az $y = 1$ egyenes tetszőleges S^* pontja egy, a feladatban szereplő $ABC\ \Delta$ súlypontja. Az O középpontú, 3 arányú hasonlóság S^*-ot olyan C^* pontba viszi, amelynek ordinátája 3.
Tehát a keresett ponthalmaz az $y = 1$ egyenes.

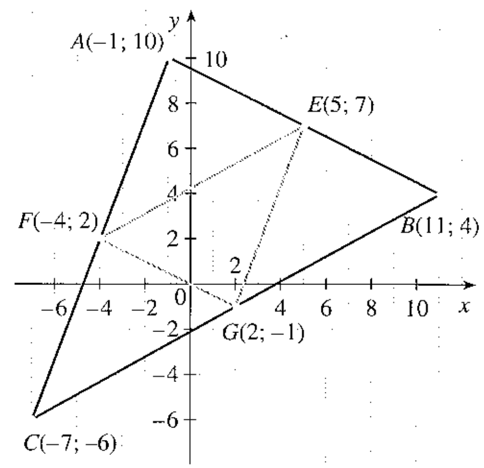
2440. A háromszög csúcsaiba mutató helyvektorok:
$\mathbf{a} = \mathbf{e} + \overrightarrow{FG} = (1; 3) + (-3; -2) = (-2; 1)$;
$\mathbf{b} = \mathbf{e} + \overrightarrow{GF} = (1; 3) + (3; 2) = (4; 5)$;
$\mathbf{c} = \mathbf{f} + \overrightarrow{EG} = (5; 1) + (1; -4) = (6; -3)$.



2441. Írjuk fel a háromszög a oldalának egyenletét egy pontja – $B(2; 7)$ – és normálvektora – $\overrightarrow{AM}(8; -4)$ – segítségével!
a: $8x - 4y = -12$; $2x - y = -3$.
Mivel m_b merőleges az x tengelyre, ezért b oldalegyenes párhuzamos az x tengellyel, és illeszkedik az A pontra, egyenlete: b: $y = 3$.
A háromszög C csúcspontja az a és b egyenesek metszéspontjaként adódik: $C(0; 3)$.



2442. a) Írjuk fel a háromszög a oldalának egyenletét egy pontja – $G(2; -1)$ – és egy irányvektora – $\overrightarrow{FE}(9; 5)$ – segítségével!
Az egyenes irányvektoros egyenlete: $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$
a: $5x - 9y = 19$
Írjuk fel a háromszög b oldalának egyenletét egy pontja – $F(-4; 2)$ – és egy irányvektora – $\overrightarrow{GE}(3; 8)$ – segítségével!
b: $8x - 3y = -38$
Írjuk fel a háromszög c oldalának egyenletét egy pontja – $E(5; 7)$ – és egy irányvektora – $\overrightarrow{FG}(6; -3)$ – segítségével!
c: $x + 2y = 19$

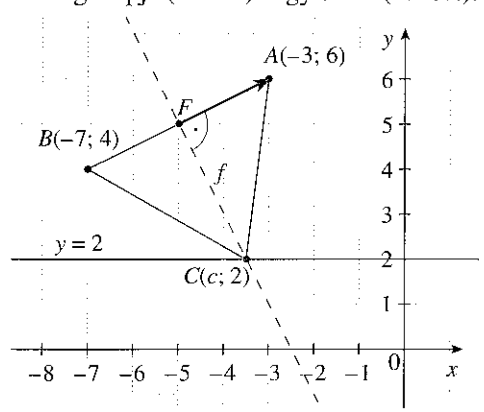


b) A háromszög csúcsaiba mutató helyvektorok:
$\mathbf{a} = \mathbf{e} + \overrightarrow{GF} = (5; 7) + (-6; 3) = (-1; 10)$
$\mathbf{b} = \mathbf{e} + \overrightarrow{FG} = (5; 7) + (6; -3) = (11; 4)$
$\mathbf{c} = \mathbf{g} + \overrightarrow{EF} = (2; -1) + (-9; -5) = (-7; -6)$

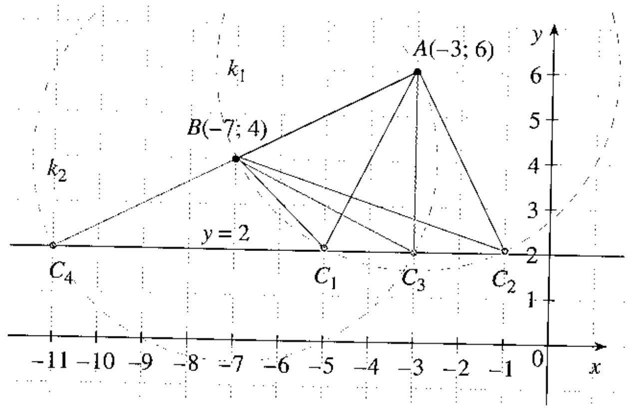
Megjegyzés:
A, B, C pontok koordinátáit az oldalegyenesek metszéspontjaként is meghatározhatjuk (ez terjedelmesebb).

2443. Az AB szakasz lehet az egyenlő szárú háromszög alapja (1. eset) vagy szára (2. eset).

1. eset:
Az AB felezőmerőlegese (f) kimetszi az adott egyenesből a keresett harmadik csúcsot (C-t).
AB felezőpontja $F(-5; 5)$, az f felezőmerőleges egyik normálvektora az $\overrightarrow{FA}(2; 1)$ vektor.
Fentiek alapján f: $2x + y = -5$.
Ennek 2 ordinátájú pontja a $C(c; 2)$, tehát $2c + 2 = -5$. Ebből $c = -3{,}5$, tehát a háromszög harmadik csúcsa a $C(-3{,}5; 2)$ pont.



2. eset:
Ezen az eseten belül két lehetőség is van, hiszen a háromszög alapjának egyik végpontja lehet az A vagy a B pont is. Ezekben az esetekben egy-egy A, illetve B középpontú, AB sugarú kör és a megadott egyenes közös pontja lehet a háromszög harmadik csúcsa (ábra).



Az AB szakasz hossza $\sqrt{20}$, így a k_1 kör egyenlete: $(x+3)^2+(y-6)^2=20$, a k_2 kör egyenlete: $(x+7)^2+(y-4)^2=20$.

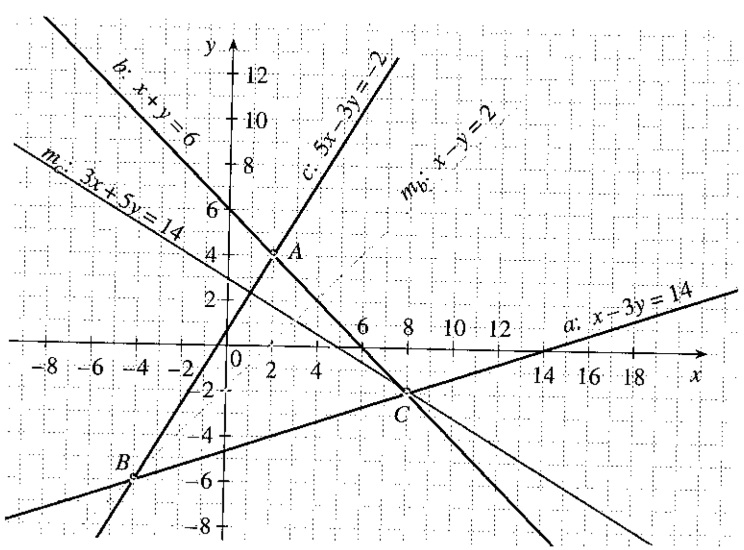
A k_1 és az $y=2$ egyenes metszéspontjait az $(x+3)^2+(y-6)^2=20;\ y=2$ egyenletrendszer megoldásai adják: $C_1(-5;2)$, $C_2(-1;2)$.

A k_2 és az $y=2$ egyenes metszéspontjait az $(x+7)^2+(y-4)^2=20;\ y=2$ egyenletrendszer megoldásai adják: $C_3(-3;2)$, $C_4(-11;2)$.

Négy pontot kaptunk, azonban a C_4 pont nem ad megoldást, hiszen a C_4A szakasznak B éppen a felezőpontja, így az ABC_4 háromszög nem létezik.

A feladatnak összesen négy megoldása van:
a keresett harmadik csúcs lehet a $(-3{,}5;2)$, a $(-5;2)$, a $(-1;2)$ és a $(-3;2)$ pont is.

2444.



Az adott a: $x-3y=14$ oldalegyenes és a megfelelő magasságok egyenesének metszéspontja adja a háromszög két csúcspontját:

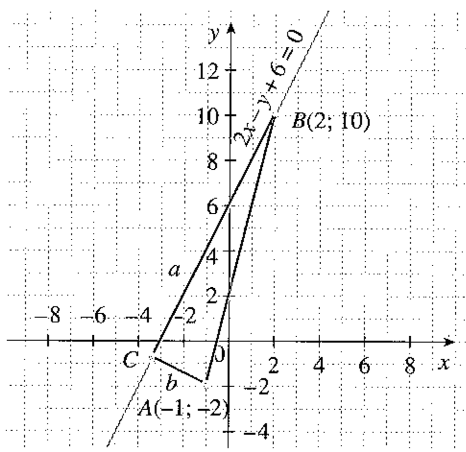
$$a\cap m_b=\{B\}\quad \begin{aligned} a:&\quad x-3y=14\\ m_b:&\quad x-y=2\end{aligned}\Bigg\}\Rightarrow B(-4;\ -6).$$

$$a\cap m_c=\{C\}\quad \begin{aligned} a:&\quad x-3y=14\\ m_c:&\quad 3x+5y=14\end{aligned}\Bigg\}\Rightarrow C(8;\ -2).$$

B csúcsponton átmenő, m_c-re merőleges a háromszög c oldal egyenese, ennek egy irányvektora $\mathbf{v}(3;5)\Rightarrow c$: $5x-3y=-2$.
C csúcsponton átmenő, m_b-re merőleges a háromszög b oldal egyenese, ennek egy irányvektora $\mathbf{v}^*(1;-1)\Rightarrow b$: $x+y=6$.

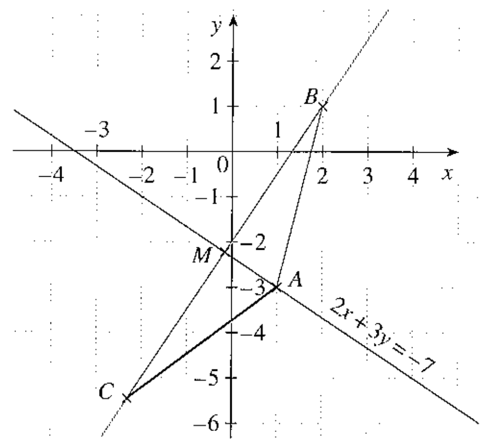
$$b\cap c=\{A\}\quad \begin{aligned} b:&\quad x+y=6\\ c:&\quad 5x-3y=-2\end{aligned}\Bigg\}\Rightarrow A(2;\ 4).$$

2445. Az adott $A(-1;-2)$ pont nem illeszkedik az adott egyenesre, mert A koordinátái nem elégítik ki az egyenes egyenletét: $2\cdot(-1)-(-2)+6\neq 0\Rightarrow$ jelöljük az adott egyenest a-val!
A háromszög B csúcspontja illeszkedik az a egyenesre, a feltétel szerint B pont abszcisszája $2\Rightarrow$
$2\cdot 2-y+6=0\Rightarrow y=10\Rightarrow$
$B(2;10)$.
Állítsunk A-ból merőlegest a-ra, a kapott egyenes (b) lesz a háromszög másik befogójának egyenese. Mivel a két befogó merőleges egymásra, ezért



$\mathbf{n}_a(2;-1)\Rightarrow \mathbf{v}_b(2;-1)$ b egyenes egy irányvektora, egy pontja: $A(-1;-2)$
$v_2x-v_1y=v_2x_0-v_1y_0\Rightarrow -x-2y=-(-1)-2\cdot(-2)$,
így b egyenlete: $x+2y=-5$.
a és b egyenes metszéspontja a háromszög C csúcspontja.
a: $2x-y=-6$
b: $x+2y=-5$
Az egyenletrendszert megoldva kapjuk: $C(-3{,}4;-0{,}8)$.

2446. Az A pont az adott szögfelezőn fekszik, abszcisszájából meghatározzuk ordinátáját: $2 \cdot 1 + 3y = -7$, amiből $y = -3$, tehát $A = (1; -3)$. Innen tovább



Első megoldás:
Az alap egyik csúcsa B, a másik ennek tükörképe az adott szögfelezőre. Állítsunk merőlegest B-ből a szögfelezőre: $3x - 2y = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$. Az egyenletrendszert megoldva az M metszéspont koordinátáit kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= -7 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned}\right\}.$$

Az első másfélszereséből kivonva a másodikat x kiesik, kapjuk: $6{,}5y = -14{,}5$, azaz $y = -\frac{29}{13}$. Átalakítva pl. az első egyenletet: $x = -1{,}5y - 3{,}5$, beírva y-t: $x = -\frac{2}{13}$.

Tehát $M = \left(-\frac{2}{13}; -\frac{29}{13}\right)$. Ha a $\overrightarrow{BM}$-t felmérjük az M-ből, megkapjuk a C-t.

$$\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{2}{13} - 2; -\frac{29}{13} - 1\right) = \left(-\frac{28}{13}; -\frac{42}{13}\right),$$

$$C = \left(-\frac{2}{13}; -\frac{29}{13}\right) + \left(-\frac{28}{13}; -\frac{42}{13}\right) = \left(-\frac{30}{13}; -\frac{71}{13}\right).$$

Ekkor a felírandó egyenes egy irányvektora

$$\overrightarrow{CA} = \left(1 - \left(-\frac{30}{13}\right); -3 - \left(-\frac{71}{13}\right)\right) = \left(\frac{43}{13}; \frac{32}{13}\right),$$ egy normálvektora pl. $(32; -43)$, egyenlete pedig $32x - 43y = 32 \cdot 1 - 43 \cdot (-3) = 161$.

Másik megoldás:
Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok összege épp az adott szögfelező irányába mutat, mivel a háromszög egyenlő szárú. A szögfelező egyenletéből leolvassuk egyik irányvektorát: $(3; -2)$ – ennek valahányszorosa a két oldalvektor összege.

$\overrightarrow{AB} = (2 - 1; 1 - (-3)) = (1; 4)$, a még ismeretlen $\overrightarrow{AC} = (x; y)$, így $(1; 4) + (x; y) = t(3; -2)$, ahol t paraméter. A két koordinátára külön felírva az összefüggést: $1 + x = 3t$, $4 + y = -2t$. Ekkor $x = 3t - 1$ és $y = -2t - 4$.
Mivel a két oldalvektor egyforma hosszú:

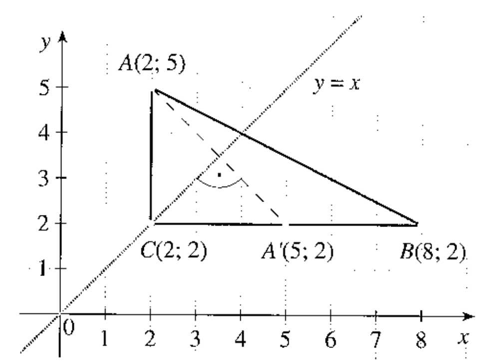
$$AB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} = AC = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3t - 1)^2 + (-2t - 4)^2}.$$

Ekkor $17 = (3t - 1)^2 + (-2t - 4)^2 = 9t^2 - 6t + 1 + 4t^2 + 16t + 16 =$ $= 13t^2 + 10t + 17$, vagyis $0 = 13t^2 + 10t$. Mivel ezúttal $t \neq 0$ (ekkor $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ összege nullvektor volna, de akkor nem alkotnának háromszöget), $t = -\frac{10}{13}$.

Vagyis $x = 3\left(-\frac{10}{13}\right) - 1 = -\frac{43}{13}$ és $y = -2\left(-\frac{10}{13}\right) - 4 = -\frac{32}{13}$.

Tehát $\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{43}{13}; -\frac{32}{13}\right)$, ekkor egyenesének egy normálvektora pl. $(32; -43)$, egyenlete pedig $32x - 43y = 32 \cdot 1 - 43 \cdot (-3) = 161$.

2447. Tükrözzük az $A(2; 5)$ pontot az $y = x$ egyenesre (a pont koordinátái felcserélődnek): $A'(5; 2)$. A háromszög oldalegyenesének egyik pontját a szögfelezőre tükrözve a másik oldal egyenesének egyik pontját kapjuk. Így A' illeszkedik az a oldal egyenesére, s a B és A' pontok által meghatározott a oldalegyenes és az $y = x$ szögfelező metszéspontja adja a háromszög C csúcspontját.



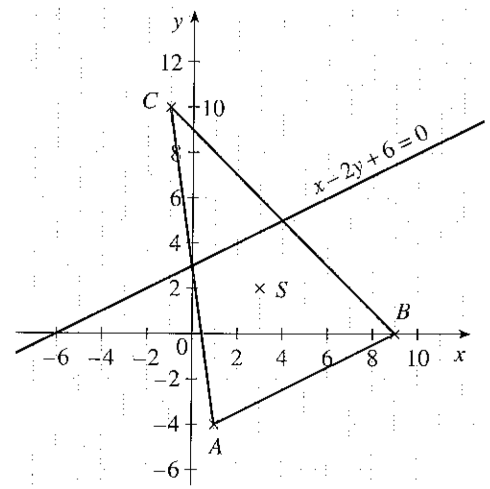
Mivel A' és B pontok második koordinátája 2, BA' egyenes egyenlete $y = 2$. Ezért a háromszög harmadik csúcspontja: $C(2; 2)$.

2448. Legyen $A = (x; y)$ és $B = (b; 0)$, mivel az x tengelyen van. A súlypont mindkét koordinátája a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe, így:

$$S = (3; 2) = \left(\frac{x + b - 1}{3}; \frac{y + 0 + 10}{3}\right).$$

Az abszcisszákból $x + b = 10$ $(*)$, az ordinátákból pedig $y = -4$.

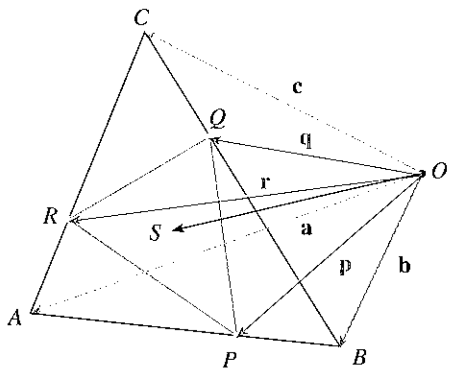
Az $\overrightarrow{AB} = (b - x; 0 - (-4)) = (b - x; 4)$ párhuzamos az $x - 2y + 6 = 0$ egyenessel, vagyis annak irányvektorával, pl. a $(2; 1)$ vektorral. Párhuzamos vektorok megfelelő koordinátáinak hányadosa egyenlő, így $\frac{b - x}{2} = \frac{4}{1}$, azaz



$b - x = 8$. Hozzáadva ezt a $(*)$ egyenlethez x kiesik, és kapjuk $2b = 18$, azaz $b = 9$.

Visszaírva (*)-ba: $x = 1$. Tehát $A = (1; -4)$ és $B = (9; 0)$. (A megoldáshoz magához nem kell ábra, persze befejezésül rajzolhatunk egyet, hogy szemléletesen is meggyőződjünk az eredmények hihetőségéről.)

2449. Egy tetszőleges O pontból indítsunk helyvektorokat az egyes pontokhoz az ábra szerint. Legyen S az ABC háromszög súlypontja.



A tanult tételek szerint

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3},$$

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{b}+2\mathbf{c}}{3} \text{ és } \mathbf{r} = \frac{\mathbf{c}+2\mathbf{a}}{3}.$$

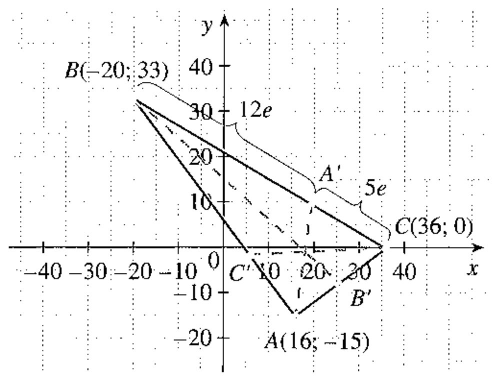
A PQR háromszög súlypontját S_1-gyel jelölve igaz, hogy $\overrightarrow{OS_1} = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}}{3}$.

Az előbbi összefüggések felhasználásával:

$$\overrightarrow{OS_1} = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}}{3} = \frac{\frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}+\frac{\mathbf{b}+2\mathbf{c}}{3}+\frac{\mathbf{c}+2\mathbf{a}}{3}}{3} = \frac{3\mathbf{a}+3\mathbf{b}+3\mathbf{c}}{9} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}.$$

Igaz tehát, hogy $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS_1}$, vagyis $S = S_1$, azaz a két háromszög súlypontja megegyezik. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

2450.



A háromszög belső szögfelezői a szemközti oldalt a szögfelezőt közrefogó oldalak arányában osztja. Számítsuk ki a háromszög oldalainak hosszát!

$\overrightarrow{BC}(56; -33) \Rightarrow a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{56^2+(-33)^2} = 65;$

$\overrightarrow{AC}(20; 15) \Rightarrow b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{20^2+15^2} = 25;$

$\overrightarrow{AB}(-36; 48) \Rightarrow c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-36)^2+48^2} = 60.$

Az A csúcsból induló szögfelező a szemközti a oldalt A', B csúcsból induló szögfelező a szemközti b oldalt B', C csúcsból induló szögfelező a szemközti c oldalt C' pontban metszi. Így az osztópontra vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5} \Rightarrow A'\left(\frac{12\cdot 36+5\cdot(-20)}{17}; \frac{12\cdot 0+5\cdot 33}{17}\right) \Rightarrow$$

$A'(19{,}5;\ 9{,}7);$

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} = \frac{60}{65} = \frac{12}{13} \Rightarrow B'\left(\frac{12\cdot 36+13\cdot 16}{25}; \frac{12\cdot 0+13\cdot(-15)}{25}\right) \Rightarrow$$

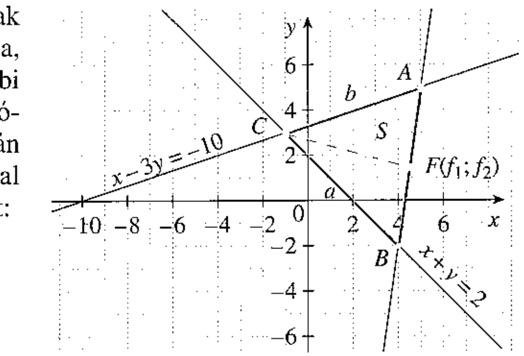
$B'(25{,}6;\ -7{,}8);$

$$\frac{BC'}{C'A} = \frac{BC}{AC} = \frac{65}{25} = \frac{13}{5} \Rightarrow C'\left(\frac{13\cdot 16+5\cdot(-20)}{18}; \frac{13\cdot(-15)+5\cdot 33}{18}\right) \Rightarrow$$

$C'\left(6;\ -\frac{5}{3}\right).$

2451. Az a: $x + y = 2$ és b: $x - 3y = -10$ egyenesek metszéspontja (az egyenletrendszer megoldása) adja a háromszög C csúcspontját $\Rightarrow C(-1; 3)$.

A háromszög súlypontja a súlyvonalak csúcstól távolabbi harmadoló pontja, ezért S a CF szakasz F-hez közelebbi harmadoló pontja. Így a harmadolópontra vonatkozó összefüggés alapján ki tudjuk számítani az AB oldal $F(f_1; f_2)$ felezőpontjának koordinátáit:



$$\left.\begin{aligned} \frac{2f_1+(-1)}{3} &= \frac{8}{3} \\ \frac{2f_2+3}{3} &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(4{,}5;\ 1{,}5).$$

Jelöljük a csúcspontok koordinátáit $A(a_1; a_2)$, illetve $B(b_1; b_2)$-vel!

Az F pont az AB szakasz felezőpontja, így $\left.\begin{aligned} \frac{a_1+b_1}{2} &= 4{,}5 \\ \frac{a_2+b_2}{2} &= 1{,}5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \text{I.}\quad a_1+b_1 &= 9 \\ \text{II.}\quad a_2+b_2 &= 3 \end{aligned}\right\}.$

Mivel az $A(a_1; a_2)$ pont illeszkedik b egyenesre, ezért koordinátái kielégítik a b egyenes egyenletét: $a_1 - 3a_2 = -10$ (III.).

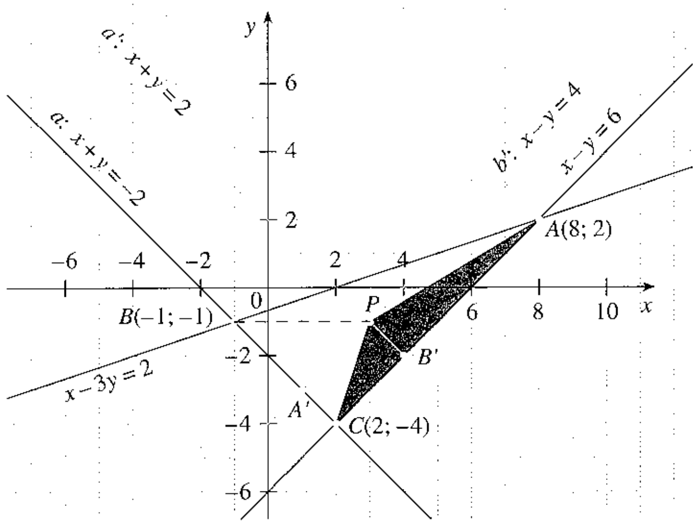
Mivel a $B(b_1; b_2)$ pont illeszkedik az a egyenesre, ezért koordinátái kielégítik az a egyenes egyenletét: $b_1 + b_2 = 2$ (IV.).

Az (I.) és a (II.) egyenletet összeadva, ebbe (IV.)-et behelyettesítve kapjuk:

$a_1 + a_2 = 10$ (V.).

(III.) és (V.) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva: $A(5; 5)$, ezt a megfelelő (I.), illetve (II.) egyenletbe helyettesítve kapjuk a háromszög B csúcspontjának koordinátáit: $B(4; -2)$.

2452.



Az a: $x + y = -2$ és b: $x - y = 6$ egyenesek metszéspontja (az egyenletrendszer megoldása) adja a háromszög C csúcspontját $\Rightarrow$ $C(2; -4)$.
Az a: $x + y = -2$ és c: $x - 3y = 2$ egyenesek metszéspontja (az egyenletrendszer megoldása) adja a háromszög B csúcspontját $\Rightarrow$ $B(-1; -1)$.
A b: $x - y = 6$ és c: $x - 3y = 2$ egyenesek metszéspontja (az egyenletrendszer megoldása) adja a háromszög A csúcspontját $\Rightarrow$ $A(8; 2)$.
Az a oldalegyenes meredeksége -1, b oldalegyenes meredeksége 1, a két egyenes meredekségének szorzata -1 $\Rightarrow$ a és b egymásra merőleges egyenesek $\Rightarrow$ ABC derékszögű háromszög, C csúcsnál van a derékszöge.
A derékszögű háromszög területe kiszámítható pl. befogóikból. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a háromszög oldalait: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$-val. Így a háromszög területe $T = \dfrac{a \cdot b}{2}$.
A feladat feltétele szerint a háromszög belsejében keresnünk kell olyan P pontot, amelyet a csúcsokkal összekötve három egyenlő (T') területű háromszöget kapunk

$$T' = \frac{T}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\frac{a}{3} \cdot b}{2} = \frac{a \cdot \frac{b}{3}}{2}.$$

Tehát a keresett P pont az a oldal egyenesétől $\dfrac{b}{3}$, b oldal egyenesétől $\dfrac{a}{3}$ távolságra van. Az a oldal egyenesétől $\dfrac{b}{3}$ távolságra haladó egyenes AC oldalt is harmadolja,

ugyanígy b oldal egyenesétől $\dfrac{a}{3}$ távolságra haladó egyenes BC oldalt is harmadolja. Keressük meg BC, illetve AC oldal C-hez közelebbi A', illetve B' harmadolópontját!

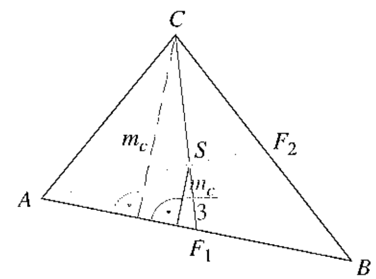
$$A'\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{3}; \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1)}{3}\right) \Rightarrow A'(1; -3);$$

$$B'\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 8}{3}; \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot 2}{3}\right) \Rightarrow B'(4; -2).$$

Húzzunk párhuzamost A', illetve B' pontokon keresztül b-vel (b'), illetve a-val (a')! Ezek metszéspontja (az egyenletrendszer megoldása) adja a keresett P pontot.

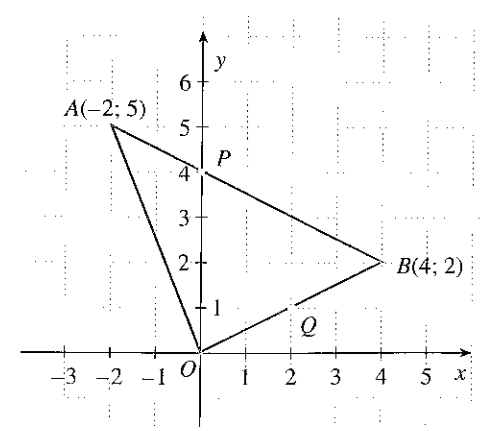
$$\left.\begin{aligned} a'&: x + y = 2 \\ b'&: x - y = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(3; -1).$$

Másik megoldás:
Ha egy háromszög súlypontját összekötjük a háromszög csúcsaival, akkor három egyenlő területű háromszöget kapunk. Ez következik abból, hogy a súlypont a súlyvonal (csúcstól távolabbi) oldalhoz közelebbi harmadolópontja, s így a háromszög oldalától való távolsága az oldalhoz tartozó magasság harmada.



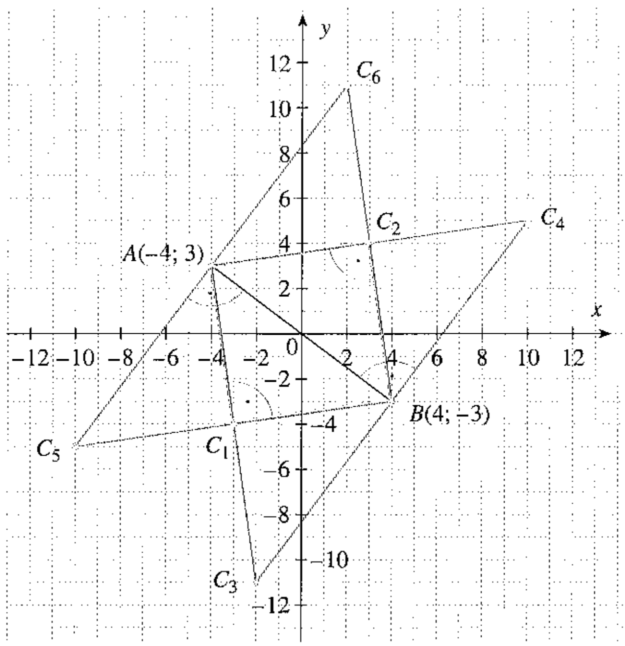
Az is könnyen belátható, hogy egyedül a súlypont rendelkezik ezzel a terület harmadoló tulajdonsággal.
Így a feladat a csúcspont koordinátáinak kiszámítása után a súlypont koordinátáinak kiszámítására egyszerűsödik.

2453. P illeszkedik az AB-re,
Q illeszkedik az OB-re.
A feladat szövege szerint OP és PQ egyenes az OAB háromszöget három egyenlő területű részre bontja az ABC háromszög területét.
Mivel $T(OAP) = \dfrac{1}{3} T(OAB)$ és a háromszögek AP, illetve AB oldalához tartozó magassága azonos, ezért $AP = \dfrac{1}{3} AB$, tehát P az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja.



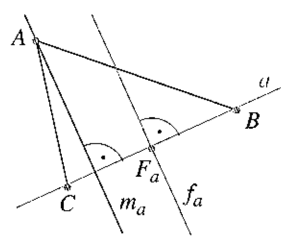
A $POB\,\Delta$ területét PQ-nak feleznie kell. Ez csak akkor teljesülhet, ha Q az OB szakasz felezőpontja. $\overrightarrow{AB} = (6; -3)$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (0; 4)$, $P(0; 4)$, $Q(2; 1)$

2454. Az ábrán látható módon két különböző eset lehet: hogy AB átfogó, vagy befogó. Utóbbi esetben kapjuk C_3, C_4, C_5, C_6 pontokat, míg ha átfogó, akkor C_1-et és C_2-t. A koordináták meghatározása: $AB = 10$ egység. Ekkor C_3, C_4 pontok B-től 10 egységre vannak, míg C_5, C_6 pontok pedig A-tól 10 egységnyire. $\overrightarrow{BA} = (-8; 6)$, akkor 90 fokos elforgatottjai $(-6; -8)$, illetve $(6; 8)$. Ezzel $C_3(4-6; -3-8) =$ $= (-2; -11)$, illetve $C_4(4+6; -3+8) =$ $= (10; 5)$. Hasonlóan C_5, illetve C_6 az A-ból indulva: $(-4-6; 3-8) = (-10; -5)$, illetve $(-4+6; 3+8) = (2; 11)$. Marad a másik eset, ha AB az átfogó. Ilyenkor az $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (4; -3)$ vektorok $+90°$-os és $-90°$-os elforgatottját kell felmérni az origóból, tehát $C_1(-3; -4)$, illetve $C_2(3; 4)$.



2455. Vázlaton tüntessük fel az adatokat és a kérdezett objektumokat.

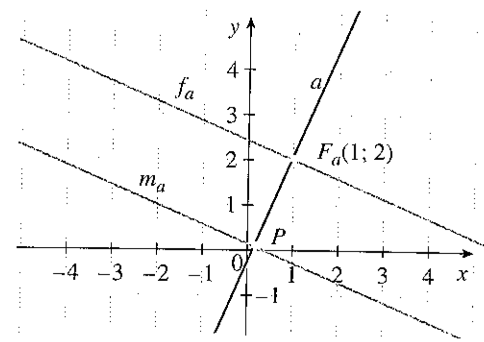
a) A BC oldal egyenese (a háromszög a oldalegyenese) az $F_a(1; 2)$ ponton áthaladó, m_a-ra merőleges egyenes. Az m_a egyenes egyenletéből kiolvasható normálvektora a $(3; 7)$ vektor, ez az a egyenesnek irányvektora.
Az a egyenes egyenlete tehát: $7x - 3y = 1$.
A BC oldal felezőmerőlegese (az f_a egyenes) párhuzamos az m_a egyenessel, így egyenlete: $3x + 7y = 17$.



b) Megoldandó az a és az m_a egyenesek egyenletéből alkotott egyenletrendszer:

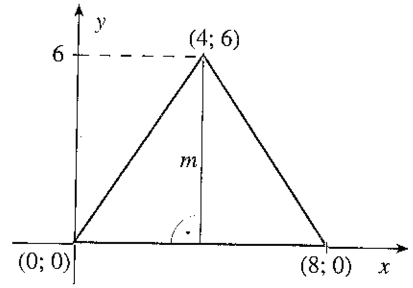
$$\left.\begin{aligned} 3x + 7y &= 1 \\ 7x - 3y &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

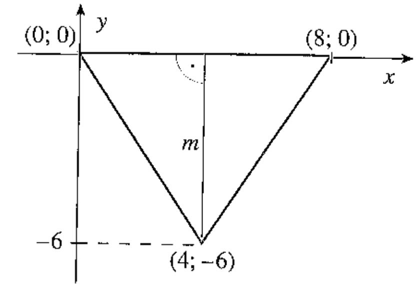
A megoldás után kapjuk, hogy a metszéspont $P\left(\frac{5}{29}; \frac{2}{29}\right)$.



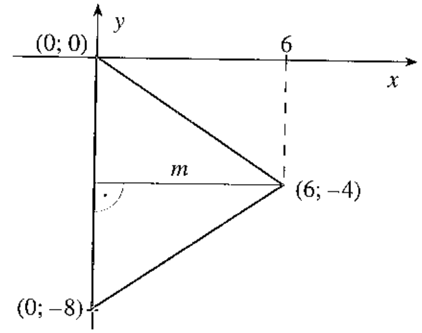
2456. Mind a négy feladatnak két megoldása van.

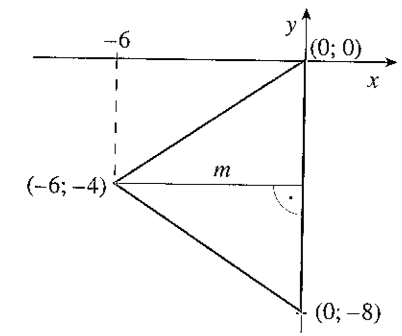
a)



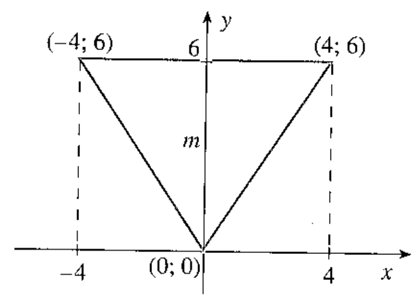


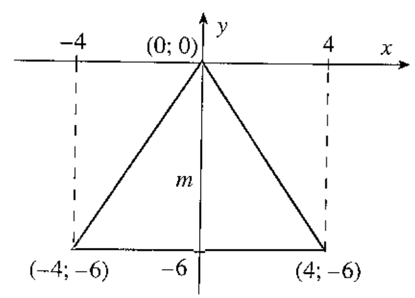
b)



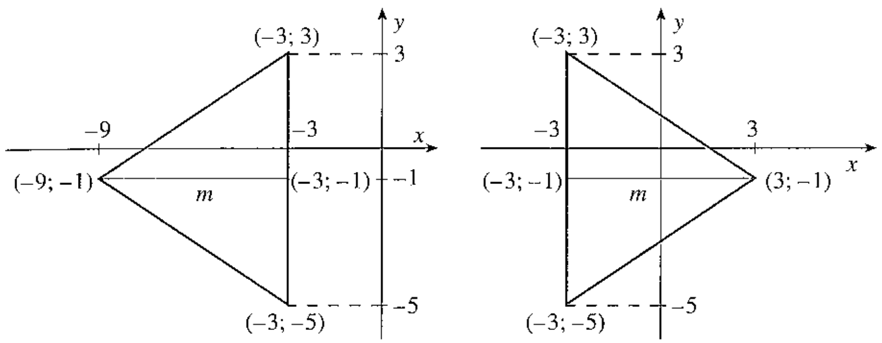


c)





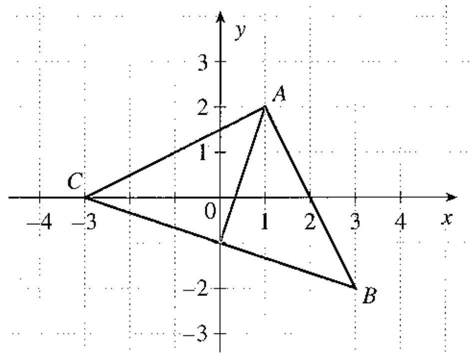
d)



2457. a) $A(1;\,2)$, $B(3;\,-2)$, $C(-3;\,0)$

Az A-ból induló súlyvonal átmegy a BC oldal F felezőpontján, $F(0;\,-1)$.
A súlyvonal egyik irányvektora:
$\overrightarrow{AF} = (-1;\,-3)$, egyenlete
$3x - y = 1$, azaz $y = 3x - 1$.

Ez az x tengelyt az $\left(\frac{1}{3};\,0\right)$, az y tengelyt a $(0;\,-1)$ pontban metszi.



b) A B-ből induló magasságvonal merőleges a $\overrightarrow{CA}$ vektorra. Ez tehát a magasságvonal normálvektora, $\overrightarrow{CA} = (4;\,2)$.
A B-ből induló magasságvonal egyenlete $2x + y = 4$.
Ez az egyenes az x tengelyt a $(2;\,0)$, az y tengelyt a $(0;\,4)$ pontban metszi.

Megjegyzés:
m_b éppen az AB.

2458. A két adott egyenes persze párhuzamos (másként nem is volna egyértelműen meghatározott a kérdéses négyzet), egyforma alakra hozva őket ez jól látszik: $3x - 5y = 4$ és $3x - 5y = 5$. Egy rájuk merőleges, tetszőleges egyenessel való metszéspontjaik távolsága a négyzet oldala. Ha már lehetőségünk van, válasszunk kényelmesen számolható merőlegest: azt, amely az origón halad át: $5x + 3y = 0$. A párhuzamosok egyenletének jobb oldali konstansát jelöljük c-vel az egyszerre számolhatóság érdekében:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= c \\ 5x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Az első háromszorosát és a második ötszörösét összeadva y kiesik, és kapjuk:

$34x = 3c$, azaz $x = \dfrac{3c}{34}$.

Átalakítva a második egyenletet: $y = -\frac{5}{3}x$, beírva: $y = -\frac{5c}{34}$.

Az első egyenesen tehát $\left(\frac{12}{34};\,-\frac{20}{34}\right)$ a metszéspont, a másodikon $\left(\frac{15}{34};\,-\frac{25}{34}\right)$.

Ezek távolsága a négyzet oldala: $\sqrt{\left(\frac{15}{34}-\frac{12}{34}\right)^2 + \left(-\frac{25}{34}-\left(-\frac{20}{34}\right)\right)^2} =$

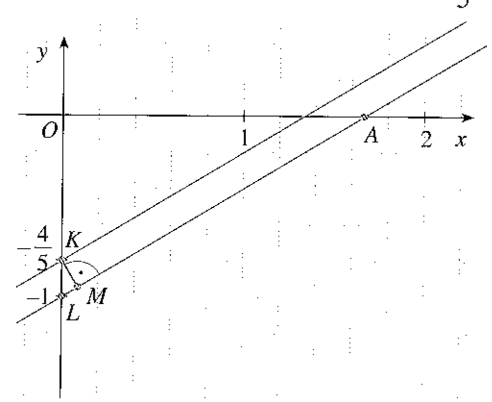
$$= \sqrt{\left(\frac{3}{34}\right)^2 + \left(-\frac{5}{34}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+25}{1156}} = \sqrt{\frac{34}{1156}} = \sqrt{\frac{1}{34}} = \frac{1}{\sqrt{34}}.$$

A négyzet területe eszerint $\frac{1}{34}$. (Ha paraméteresen végigkövetjük az iménti számítást, kiderül, hogy az $Ax + By = C_1$ és az $Ax + By = C_2$ párhuzamos egyenesek távolsága $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.)

Másik megoldás:

Az adott egyenesek egyenlete $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$, illetve $y = \frac{3}{5}x - 1$ alakba írható, tehát az y tengelyt a $-\frac{4}{5}$, illetve a -1 jelzésű pontjában metszik. E két pont távolsága $\frac{1}{5}$.

A KLM derékszögű háromszög KM oldala a keresett négyzet oldalával egyenlő. A $KLM\,\Delta \sim AOL\,\Delta$ (L-nél lévő szögük közös és van derékszögük), ezért a megfelelő befogóik aránya egyenlő, mégpedig $3:5$, mert $\frac{3}{5}$ az adott egyenesek iránytangense.
Jelöljük a KM szakasz hosszát a-val, ekkor $LM = \frac{3}{5}a$.
Felírjuk a $KLM\,\Delta$-re a Pitagorasz-tételt:



$$a^2 + \left(\frac{3}{5}a\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2; \quad 25a^2 + 9a^2 = 1; \quad a^2 = \frac{1}{34},$$

s ez éppen az a oldalú négyzet keresett területe.

2459. Ekkor az $\overrightarrow{AB}$ 90°-os elforgatottjának felét felmérve B-ből, kapjuk C-t. Mivel két ilyen elforgatott van (+90°, −90°), két eredmény adódik.

$\overrightarrow{AB} = (7-1; 7-(-3)) = (6; 10)$.

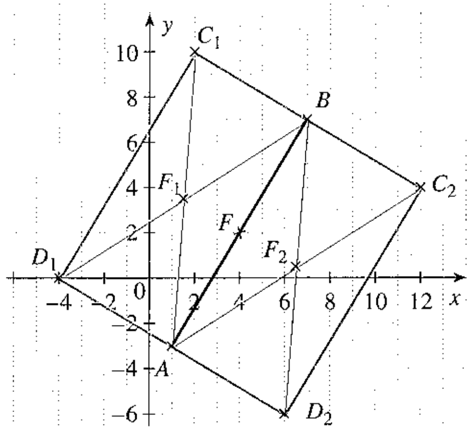
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_{+90°} = (-5; 3)$, ezért

$C_1 = (7; 7) + (-5; 3) = (2; 10)$;

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_{-90°} = (5; -3)$, ezért

$C_2 = (7; 7) + (5; -3) = (12; 4)$.

Az átlók metszéspontja egyúttal a felezőpontjuk is, így



$$F_1 = \left(\frac{1+2}{2}; \frac{-3+10}{2}\right) = (1,5; 3,5) \text{ és } F_2 = \left(\frac{1+12}{2}; \frac{-3+4}{2}\right) = (6,5; 0,5).$$

(Ugyanígy megoldható a feladat a D csúcsok és BD felezőpontok meghatározásával.)

Másik megoldás:

Az AB szakasz $F(4; 2)$ felezőpontjából felmérjük az $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (1,5; 2,5)$ vektor +90°-os és −90°-os elforgatottját:

$\overrightarrow{OF_1} = \overrightarrow{OF} + (-2,5; 1,5) = (1,5; 3,5)$;

$\overrightarrow{OF_2} = \overrightarrow{OF} + (2,5; -1,5) = (6,5; 0,5)$.

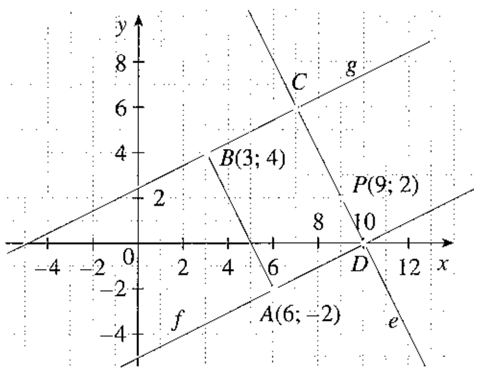
2460. Húzzunk párhuzamost az adott $P(9; 2)$ ponton keresztül AB-vel! Ennek az egyenesnek egy irányvektora például $\overrightarrow{AB}(-3; 6)$ vagy $\mathbf{v}(-1; 2)$

$\Rightarrow e$: $2x + y = 20$.

Állítsunk merőlegest AB-re az A, illetve a B pontban! E merőlegeseket jelölje f, illetve g; egy normálvektoruk pl. $\mathbf{n}(-3; 6)$ vagy $\mathbf{n}^*(-1; 2)$

$\Rightarrow f$: $-x + 2y = -10$

g: $-x + 2y = 5$.



A megfelelő egyenesek metszéspontja adja a téglalap hiányzó csúcsait:

$$e \cap f = \{D\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + y &= 20 \\ -x + 2y &= -10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D(10; 0).$$

$$e \cap g = \{C\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + y &= 20 \\ -x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C(7; 6).$$

2461.* A két adott pont legyen $A(-1; 4)$ és $B(2; -2)$.

A $B(2; -2)$ pont koordinátái elégítik ki az átló egyenletét, ezért a téglalap átlója átmegy a B ponton.

Az AD egyenes egyik normálvektora $\overrightarrow{AB}(3; -6)$, illetve $(1; -2)$. Az AD egyenes egyenlete $x - 2y = -9$.

A D csúcspontot az alábbi egyenletrendszer megoldása adja meg.

$$\left.\begin{aligned} &AD \text{ oldal egyenese:} && x - 2y = -9 \\ &DB \text{ átló egyenese:} && y = 3x - 8 \end{aligned}\right\}.$$

Ebből: $D(5; 7)$.

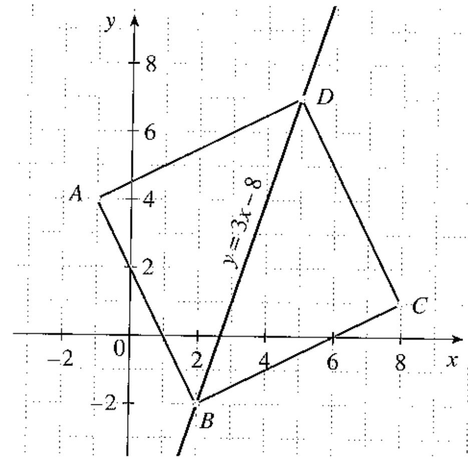
A DB szakasz felezőpontja $F\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Ez egyúttal a másik átló, AC felezőpontja is. Ezt felhasználva kapjuk meg a $C(c_1; c_2)$ csúcspontot is.

$\frac{c_1 - 1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow c_1 = 8.$

$\frac{c_2 + 4}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow c_2 = 1.$

Tehát $C(8; 1)$.



Megjegyzés:

A feladatot természetesen többféleképpen is megoldhatjuk. D meghatározása után, B-ből mérjük fel az $\overrightarrow{AD}$-t.

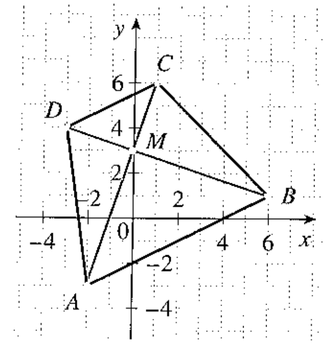
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = (2; -2) + (6; 3) = (8; 1)$; tehát $C(8; 1)$.

2462. a) A trapézban az átlók (metszéspontjuk: M) két hasonló háromszöget hoznak létre: $ABM\triangle \sim CDM\triangle$. A trapéz átlói e két háromszög hasonlóságának arányában osztják egymást, ami pedig a két alap arányával egyenlő. Ezért $AB = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \approx 8,94$,

$DC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$, arányuk:

$$\frac{DC}{AB} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{20}{80}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Tehát az átlók is $1:2$ arányban osztják egymást.



b) Az átlók metszéspontja megkapható az AC és a BD egyenesek metszéspontjaként – de jóval egyszerűbb az előző pont szerint megkeresni az AC (vagy BD) szakasz „felső" harmadoló pontját. Ez $M = \left(\frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{1+2}; \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6}{1+2}\right) = (0;\ 3)$.

c) A trapéz átlói egyenlők, hosszúságuk $AC = BD = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90}$.
A két átló merőleges egymásra, mert az $\overrightarrow{MC}(1;\ 3)$ az $\overrightarrow{MD}(-3;\ 1)$-nek a 90°-os elforgatottja. Ezért $T_{ABCD} = T_{ABD} + T_{BCD} = \frac{BD \cdot AM}{2} + \frac{BD \cdot MC}{2} =$
$= \frac{BD}{2}(AM + MC) = \frac{BD}{2} \cdot AC = \frac{\sqrt{90}}{2} \cdot \sqrt{90} = \frac{90}{2} = 45.$

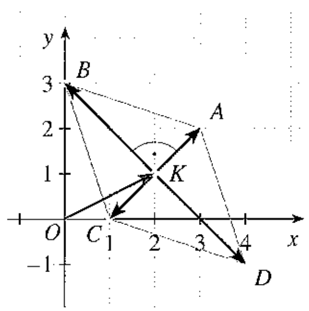
Másik megoldás:

Egy trapéz területe: $T = \frac{a+c}{2} m$, amiből a két alapot már ismerjük (l. a) pont).
A magassághoz szükség van a két alap mint párhuzamos egyenesek távolságára, l. 2458.-as megoldás. $\overrightarrow{AB} = (8;\ 4)$, így AB egyenese: $x - 2y = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 1 = 4$; a vele párhuzamos CD egyenes pedig: $x - 2y = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 6 = -11$.

Távolságuk így $m = \frac{|4 - (-11)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$.

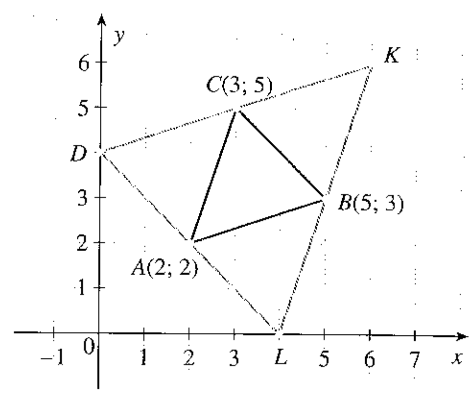
A terület így: $T = \frac{\sqrt{80} + \sqrt{20}}{2} 3\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{20}}{2} 3\sqrt{5} = \frac{9\sqrt{100}}{2} = 45.$

2463. A rombusz csúcsaiba mutató helyvektorok (és így maguk a csúcsok is) könnyen megadhatók.

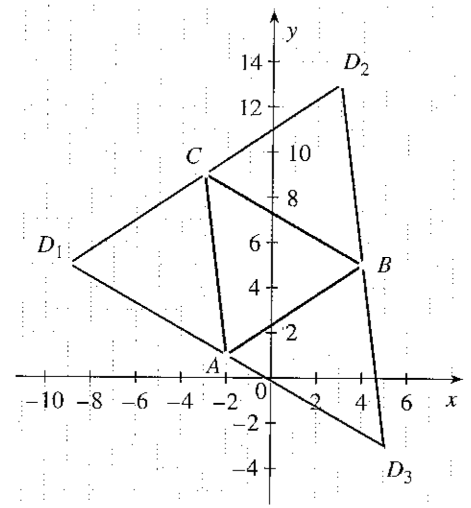


$\overrightarrow{KA} = (3;\ 2) - (2;\ 1) = (1;\ 1)$.
$\overrightarrow{KC} = -\overrightarrow{KA} = (-1;\ 1)$.
$\overrightarrow{KB}$ a $\overrightarrow{KA}$ +90°-os elforgatottjának kétszerese:
$\overrightarrow{KB} = 2 \cdot (-1;\ 1) = (-2;\ 2)$, $\overrightarrow{KD} = -\overrightarrow{KB} = (2;\ -2)$.
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB} = (2;\ 1) + (-2;\ 2) = (0;\ 3)$,
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KC} = (2;\ 1) + (-1;\ -1) = (1;\ 0)$ és
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD} = (2;\ 1) + (2;\ -2) = (4;\ -1)$.
Tehát a rombusz hiányzó csúcsai: $B(0;\ 3)$, $C(1;\ 0)$ és $D(4;\ -1)$.

2464. $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} =$
$= (5;\ 3) + (1;\ 3) = (6;\ 6) \Rightarrow K(6;\ 6)$
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} =$
$= (2;\ 2) + (-2;\ 2) = (0;\ 4) \Rightarrow D(0;\ 4)$
$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} =$
$= (2;\ 2) + (2;\ -2) = (4;\ 0) \Rightarrow L(4;\ 0)$
Három különböző megoldás van.

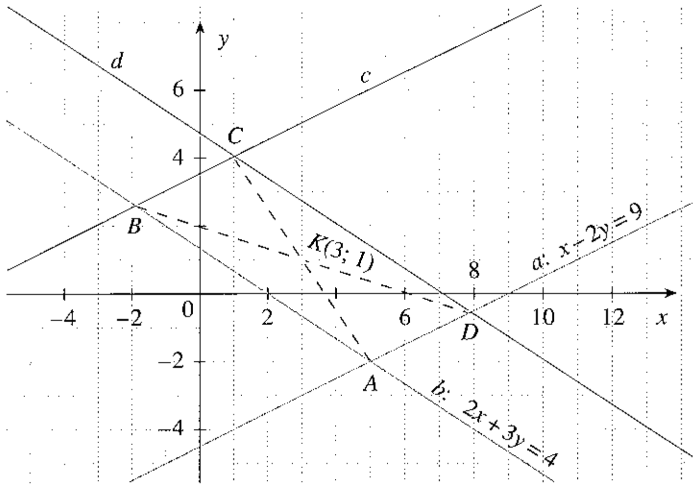


2465. Bármely pontból felmérve a másik két pontot (bármilyen sorrendben) összekötő vektort, alkalmas pontot kapunk. Nincs azonban $3 \cdot 2 = 6$ megoldás, mert mindegyik kétféle módon is előáll, tehát 3 alkalmas pont van.
Ha $A = (-2;\ 1)$, $B = (4;\ 5)$ és
$C = (-3;\ 9)$; akkor $\overrightarrow{AB} = (6;\ 4)$, és
$\overrightarrow{OD_1} = (-3;\ 9) - (6;\ 4) = (-9;\ 5)$,
$\overrightarrow{OD_2} = (-3;\ 9) + (6;\ 4) = (3;\ 13)$.
Továbbá $\overrightarrow{CB} = (7;\ -4)$, és
$\overrightarrow{OD_3} = (-2;\ 1) + (7;\ -4) = (5;\ -3)$.
Mindhárom paralelogramma területe az $ABC\,\Delta$ területének kétszerese, amit pedig (egész koordinátájú csúcsokról lévén szó) legkényelmesebben talán a „befoglaló téglalap" módszerével számíthatunk ki (l. 2434.-es megoldás).



Ekkor a téglalap területe $7 \cdot 8 = 56$, az elhagyandó háromszögek területe pedig rendre
$\frac{1 \cdot 8}{2} = 4$, $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$, $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$.
Az $ABC\,\Delta$ területe így $56 - 4 - 14 - 12 = 26$,
a paralelogrammá(k)é pedig $2 \cdot 26 = 52$.

2466.



Használjuk az ábra jelöléseit! A paralelogramma A csúcsát a megadott egyenesek metszéspontja adja:

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=9 \\ 2x+3y&=4 \end{aligned}\right\}$$

megoldása $(5; -2)$, tehát $A(5; -2)$.
Az A csúcsot a paralelogramma K középpontjára tükrözve kapjuk a C csúcsot.
A felezőpont koordinátáiról tanultak alapján $C(1; 4)$.
A C ponton átmenő, a-val párhuzamos c oldalegyenes egyenlete: $x - 2y = -7$.
A b és a c oldalegyenes metszéspontjaként kapjuk a B csúcsot:

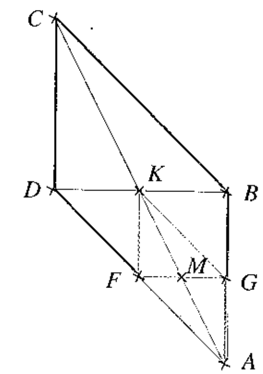
$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=4 \\ x-2y&=-7 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldása a $\left(-\frac{13}{7}; \frac{18}{7}\right)$ rendezett számpár, tehát $B\left(-\frac{13}{7}; \frac{18}{7}\right)$.
A B csúcs K-ra vonatkozó tükörképe a paralelogramma D csúcsa:

$$D\left(2\cdot 3-\left(-\frac{13}{7}\right); 2\cdot 1-\frac{18}{7}\right), \text{ tehát } D\left(\frac{55}{7}; -\frac{4}{7}\right).$$

A paralelogramma csúcsai: $A(5; -2)$, $B\left(-\frac{13}{7}; \frac{18}{7}\right)$, $C(1; 4)$ és $D\left(\frac{55}{7}; -\frac{4}{7}\right)$.

2467. A paralelogramma középpontja $K(0; 2)$, két szomszédos oldalának felezőpontja $F(2; 4)$, $G(0; 6)$.
Az A, F, K, G paralelogrammát határoz meg, melynek átlói felezik egymást. Ezért, ha FG-nek M felezőpontjára tükrözzük K-t, megkapjuk A-t. Az eredeti paralelogramma B, C, illetve D csúcspontja hasonlóan kapható meg, ha A-t tükrözzük G-re, K-ra, illetve F-re.
FG felezőpontja $M(1; 5)$ egyúttal AK felezőpontja is.



$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{k}}{2} \Rightarrow \mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{k}$, ennek megfelelően $A(2; 8)$.

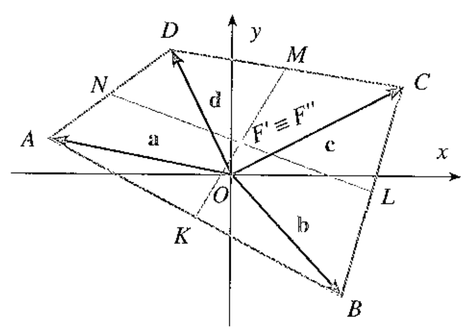
AB felezőpontja G $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \Rightarrow \mathbf{b} = 2\mathbf{g} - \mathbf{a}$,
ennek megfelelően $B(-2; 4)$.

AC felezőpontja K $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2} \Rightarrow \mathbf{c} = 2\mathbf{k} - \mathbf{a}$, ennek megfelelően $C(-2; -4)$.

AD felezőpontja F $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2} \Rightarrow \mathbf{d} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a}$, ennek megfelelően $D(2; 0)$.

Ellenőrzésként megvizsgáljuk, hogy pl. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{AD} = (0; -8)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -8)$
(Természetesen e feladat másként is megoldható, pl a paralelogramma más meghatározó tulajdonságainak felhasználásával.)

2468. Állításunkat igazoljuk pl. vektorokkal! Legyenek a koordináta-rendszerünk kezdőpontjából az $ABCD$ négyszög csúcsaiba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Ekkor az $ABCD$ négyszög AB oldalának K felezőpontjába mutató helyvektor $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, BC oldalának L felezőpontjába mutató helyvektor $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, CD oldalának M felezőpontjába mutató helyvektor $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$, AD oldalának N felezőpontjába mutató helyvektor $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}$.



Írjuk fel a KM szakasz F', illetve az LN szakasz F'' felezőpontjába mutató helyvektorokat!

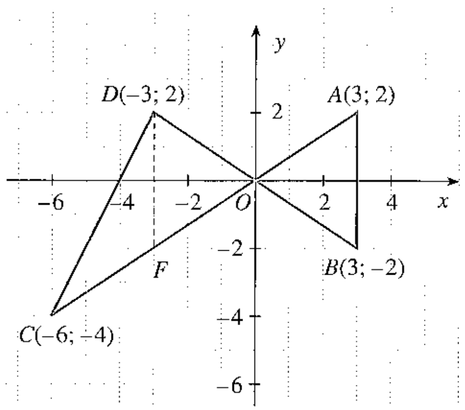
$$F'\text{-be mutató helyvektor: } \frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}.$$

F''-be mutató helyvektor: $\dfrac{\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}+\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}}{2}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$.

Beláttuk, hogy KM szakasz, illetve az LN szakasz felezőpontjába mutató helyvektorok egyenlők, azaz a két felezőpont egybeesik, tehát a két szakasz felezi egymást.

2469. a) Az O a BD szakasz felezőpontja, illetve az AC szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontja. Így O rajta van a BD és az AC egyenesen.

b) Legyen F a CO felezőpontja. DF az $OCD\,\Delta$ súlyvonala, tehát felezi a háromszög területét, másrészt $OFD\,\Delta \cong OAB\,\Delta$ (O-ra vonatkozó tükörképek), ezért $T_{OCD}=2T_{OAB}$.

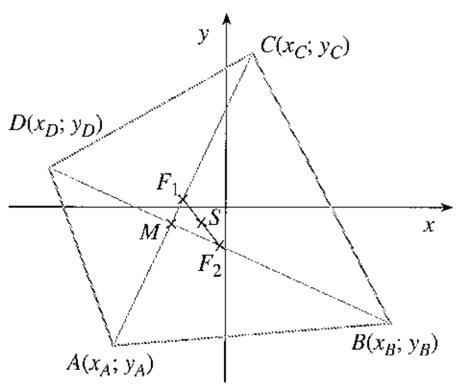


Megjegyzés:
A feladat b) része természetesen megoldható más területszámítási módszerekkel is $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}$ továbbá a két háromszög O-nál lévő szögei csúcsszögek, ezért a háromszög trigonometriai területképletéből adódik, hogy $T_{OCD}=2T_{OAB}$.

2470. A súlypont koordinátáit úgy is lehet képezni, hogy előbb AC átló felezőpontját vesszük, majd a BD átlóét, és ezen szakasz felezőpontja lesz a súlypont, hiszen az x koordináták esetén igaz, hogy $\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}=$

$=\dfrac{\dfrac{x_A+x_C}{2}+\dfrac{x_B+x_D}{2}}{2}$; és hasonlóan

az y koordinátákra is. Azaz az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontja a súlypont. Ha ez az átlók metszéspontja is egyben, akkor az átlók felezik egymást, tehát paralelogrammáról van szó. Fordítva, ha paralelogramma, akkor az átlók felezik egymást, tehát metszéspontjuk egyben a súlypont is. Ezzel beláttuk az állítást.



2471. $ABD\,\Delta \sim AHK\,\Delta$ (2-2 oldal aránya $\frac{1}{3}$ és az A-nál lévő szögük egyenlő), az arány $3:1$, tehát $HK=\frac{1}{3}BD$, és $HK \parallel BD$. Hasonlóan $BCD\,\Delta \sim ICJ\,\Delta$, az arány $3:2$, tehát $IJ=\frac{2}{3}BD$ és $IJ \parallel BD$. Ezek szerint $HK \parallel IJ$ és $IJ=2HK$.

$KHM\,\Delta \sim IJM\,\Delta$ (megfelelő szögeik egyenlők). Az arány $1:2$, tehát a keresett szakaszok $1:2$ arányban osztják egymást.

Másik megoldás:

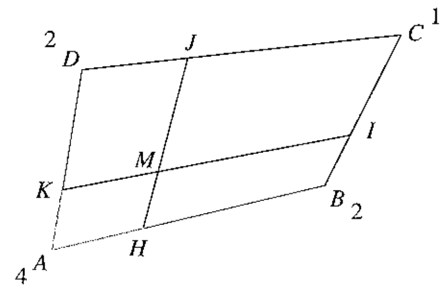
A kérdés a $\dfrac{HM}{MJ}$ arány. A harmadoló pontok koordinátáit fel tudjuk írni, így a négy pont H, I, J, K megadható a csúcsok koordinátáival. Ezután HJ és KI egyenesek metszéspontja az M pont. Megmutatjuk, hogy a KI szakasz K-hoz közelebbi harmadolópontja, és a HJ szakasz H-hoz közelebbi harmadolópontja egybeesik, ez tehát az M pont. Az első lépés:

$H\left(\dfrac{2x_A+x_B}{3};\ \dfrac{2y_A+y_B}{3}\right)$,

$I\left(\dfrac{2x_B+x_C}{3};\ \dfrac{2y_B+y_C}{3}\right)$,

$J\left(\dfrac{2x_D+x_C}{3};\ \dfrac{2y_D+y_C}{3}\right)$,

$K\left(\dfrac{2x_A+x_D}{3};\ \dfrac{2y_A+y_D}{3}\right)$.



KI szakasz K-hoz közelebbi harmadolópontja:

$$\left(\frac{2\dfrac{2x_A+x_D}{3}+\dfrac{2x_B+x_C}{3}}{3};\ \frac{2\dfrac{2y_A+y_D}{3}+\dfrac{2y_B+y_C}{3}}{3}\right)=$$

$$=\left(\frac{4x_A+2x_B+x_C+2x_D}{9};\ \frac{4y_A+2y_B+y_C+2y_D}{9}\right).$$

HJ H-hoz közelebbi harmadolópontja:

$$\left(\frac{2\dfrac{2x_A+x_B}{3}+\dfrac{2x_D+x_C}{3}}{3};\ \frac{2\dfrac{2y_A+y_B}{3}+\dfrac{2y_D+y_C}{3}}{3}\right)=$$

$$=\left(\frac{4x_A+2x_B+x_C+2x_D}{9};\ \frac{4y_A+2y_B+y_C+2y_D}{9}\right).$$

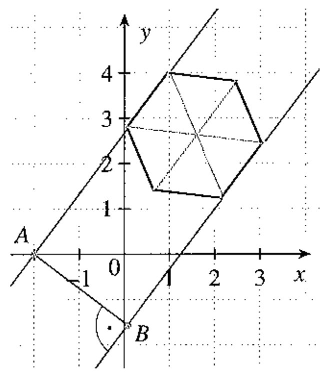
A két harmadolópont koordinátái azonosak, tehát ez az M pont, ami eszerint harmadolja a két szakaszt: $\dfrac{HM}{MJ} = \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{KM}{MI}\right)$.

Azaz a HJ szakaszt az IK szakasz $1:2$ arányban osztja.

További megoldás:

Helyezzünk A-ba egy 4, B-be egy 2, C-be egy 1, és D-be egy 2 egységnyi tömeget. Kétféleképpen fogjuk kiszámítani a rendszer tömegközéppontját, amely éppen az M pont lesz. Először AB és CD tömegközéppontját határozzuk meg, majd ezekből az egészét. Másodszor AD és BC tömegközéppontjaival kezdünk, majd ezekéből adódik az egészé. A két módszernek ugyanoda kell vezetnie, a rendszer tömegközéppontjához. A és B tömegközéppontja a $2:1$ tömegarány miatt H lesz, C és D-é pedig J. Mivel H-ban kétszer akkora tömeg van, mint J-ben, hiszen $4+2$ éppen kétszerese $2+1$-nek, ezért a rendszer tömegközéppontja ezen az úton HJ H-hoz közelebbi harmadoló pontja. Hasonlóan a másik úton A és D tömegközéppontja K, B és C-é pedig I, ismét K-ban kétszer akkora tömeg van, mint I-ben, tehát KI K-hoz közelebbi harmadoló pontja lesz a rendszer tömegközéppontja. Mivel a két módszer ugyanoda vezet, ezért HJ és KI harmadolják egymást.

2472. A $3y - 4x - 8 = 0$ egyenletű egyenes egy pontja $A(-2; 0)$. Ebből merőlegest állítunk az adott egyenesekre: $3x + 4y = -6$. Ez a $4x - 3y = 5$ egyenletű egyenest a B pontban metszi. B-t, a $3x + 4y = -6$; $4x - 3y = 5$ egyenletrendszerből kapjuk meg: $B\left(\dfrac{2}{25};\ -\dfrac{39}{25}\right)$.



A két adott egyenes távolsága:

$$d = AB = \sqrt{\left(2\frac{2}{25}\right)^2 + \left(\frac{39}{25}\right)^2} = 2,6.$$

Egy szabályos hatszög két szemközti oldalának távolsága az oldalél $\sqrt{3}$-szorosa. (A hatszöget alkotó szabályos háromszögek magasságának kétszerese.)

Egy szabályos hatszög területe 6 db szabályos háromszög területével egyenlő:

$T = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$ (l. pl. 1943.-as megoldás).

Tehát $2,6 = \sqrt{3}a$, amiből $a = \dfrac{2,6}{\sqrt{3}} (\approx 1,50)$, így $T = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2,6}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{3 \cdot 6,76}{2\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{10,14}{\sqrt{3}} \approx 5,85.$

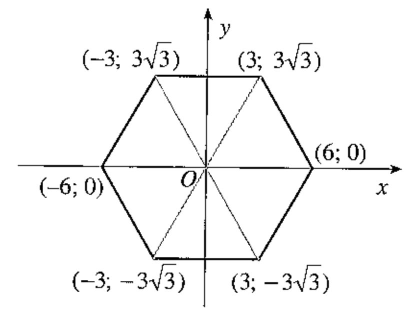
A megoldás elejének másik lehetséges módja:

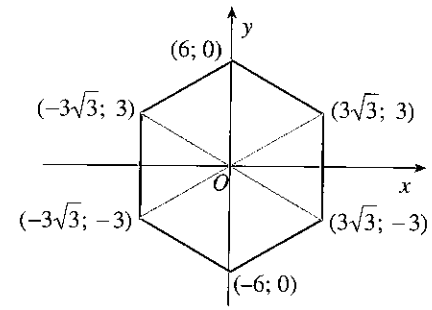
Lásd a 2458.-as feladat megoldását!

A két egyenes párhuzamos: $4x - 3y = 5$ és $4x - 3y = -8$.

Ekkor távolságuk $d = \dfrac{|5-(-8)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{13}{5} = 2,6.$

2473. A szabályos hatszögek csúcspontjainak koordinátái leolvashatók a két ábráról. Meghatározásuknál kihasználtuk, hogy az a oldalú szabályos háromszögek magassága $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.





2474. A $PQQ_1P_1Q_2P_2$ hatszög oldalainak hossza rendre

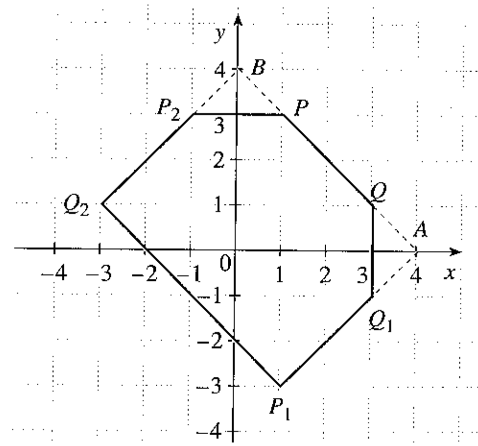
$2\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 2.$

A hatszög kerülete: $4 + 10\sqrt{2}$.

A hatszög területét megkapjuk az AP_1Q_2B téglalap és két egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszög területének különbségeként (l. ábra).

A téglalap területe $(4\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2}) = 24$, a két egyenlő szárú derékszögű háromszög együttes területe pedig $(\sqrt{2})^2 = 2$.

A hatszög területe tehát $24 - 2 = 22$.



2475. Az $x^2 + y^2 + 4x + 10y + a = 0$ egyenletet teljes négyzetté kiegészítéssel $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ alakra hozzuk, ahol a kör középpontja, $K(u; v)$, sugara r.

$(x+2)^2 + (y+5)^2 = -a + 4 + 25$, ahol $r^2 = -a + 4 + 25$, ezért $29 - a > 0$.

Tehát az adott egyenlet akkor és csak akkor kör egyenlete, ha $a < 29$.

2476. A másodfokú kétismeretlenes egyenlet akkor és csak akkor állít elő kört, ha

a) négyzetes tagjaik együtthatója egyenlő, így $A = 4$;

b) az egyenlet nem tartalmaz xy-os tagot, így $B = 0$;

c) $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ alakra írva $r^2 > 0$ teljesül, tehát:
$4x^2 + 4y^2 - 32x + 24y + C = 0$;
osszuk el 4-gyel

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + \frac{C}{4} = 0;$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16 + 9 - \frac{C}{4}.$$

Ez a $(4; -3)$ középpontú $r = \sqrt{25 - \frac{C}{4}}$ sugarú kör egyenlete, ha $25 - \frac{C}{4} > 0$ így $C < 100$.

2477. Ha egy kör középpontja az y tengelyen van, akkor a középpontja $K(0; v)$, $v \in \mathbf{R}$. Minthogy $r = 15$, a körök egyenlete $x^2 + (y-v)^2 = 225$.

2478. Minthogy $d(AB) = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, tehát AB hossza a kör sugarának $\sqrt{2}$-szöröse. Így az AB átmérőjű k Thalész-kör – és AB f felezőmerőlegesének metszéspontja adja a keresett körök középpontját.

Az AB szakasz felezőpontja $F\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$, az erre illeszkedő f egyenes normálvektora egyenlő az AB egyenes irányvektorával: $n_f = (7; -1)$.
Ebből f egyenlete $7x - y = 15$.

A k Thalész-kör középpontja F, sugara $\frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

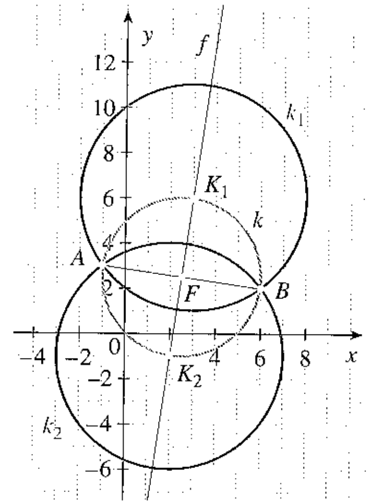
Így k kör egyenlete $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

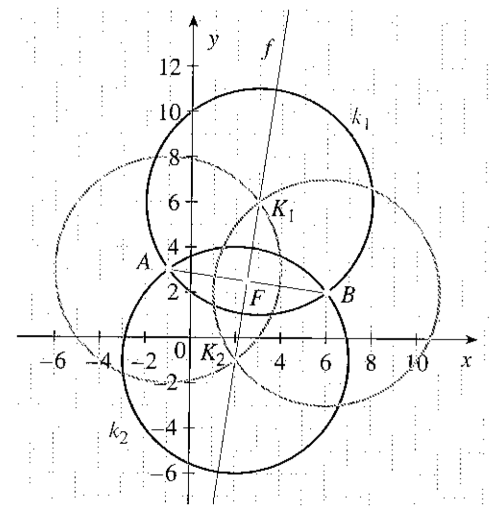
Négyzetre emelés és rendezés után kapjuk: $x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0$.
Az f-re és a k-ra felírt egyenletből álló egyenletrendszer megoldása: $K_1(3; 6)$, illetve $K_2(2; -1)$. (Ábra)

A feladatnak két megoldása van: $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$,
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Megjegyzés:
A kör középpontja és sugara ismeretében felírható a kör egyenlete. Ha a sugár adott, a középpontot kell meghatároznunk.

A feladat többféle módon oldható meg.
1) Az A középpontú, 5 egység sugarú kör és az AB felezőmerőlegesének metszéspontjai megadják a keresett körök középpontját. (ábra)
2) Az A és a B középpontú, 5 egység sugarú kör metszéspontjaként számítjuk ki a körök középpontját.





2479. a) Az első egyenletben nincs x^2-es tag, ez nem lehet kör (hanem parabola). A második és harmadik egyenletben nem egyenlő x^2 és y^2 együtthatója, ezek sem körök (hanem ellipszis, illetve hiperbola). Az ötödik egyenletben vegyes tag (xy) szerepel, ez sem kör (sőt, az egyenletnek a koordinátasík egyetlen pontja sem felel meg).

A negyedik egyenletet viszont rendezve: $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 40 = 0$,
2-vel végigosztva: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$,
átalakítva: $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 20 = 0$,
megfelelően rendezve: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ – ez valóban kör.

b) Az előző pontban kapott végső egyenletből leolvassuk, hogy a kör középpontja $(2; -1)$, sugara 5.

2480. a) Az első egyenletben nincs x^2-es tag, ez nem lehet kör (hanem parabola). A harmadik és ötödik egyenletben nem egyenlő x^2 és y^2 együtthatója, ezek sem körök (hanem hiperbola, illetve ellipszis). A negyedik egyenletben vegyes tag (xy) szerepel, ez sem kör (hanem két párhuzamos egyenes).
A második egyenletben teljes négyzetté alakítunk:
$(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0$, azaz $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ – ez kör;

a hatodik egyenletet 2-vel végigosztva: $x^2 + y^2 - 18x - 16y + 80 = 0$,
teljes négyzetté alakítva: $(x-9)^2 - 81 + (y-8)^2 - 64 + 80 = 0$,
megfelelően rendezve: $(x-9)^2 + (y-8)^2 = 65$ – ez is kör.

b) Az előző pontban kapott végső egyenletekből leolvassuk, hogy az első kör középpontja (2; 1), sugara 3; a másodiké (9; 8), illetve $\sqrt{65}(\approx 8,06)$.

2481. A kör középpontja a KM szakasz felezőpontja: $C(-639; -308{,}5)$. A kör sugara a CM szakasz hossza: $r = \sqrt{(-78+639)^2 + (-588+308{,}5)^2} = \sqrt{392\,841{,}25}$.
Mekkora a CL távolság?
$CL = \sqrt{(-752+639)^2 + (308+308{,}5)^2} = \sqrt{392841{,}25}$,
azaz $CL = r$. Az L pont tehát rajta van a CM átmérőjű körön.

Másik megoldás:
A kör középpontjának és sugarának meghatározása után a kör egyenlete:
$(x+639)^2 + (y+308{,}5)^2 = 392\,841{,}25$. Az L pont koordinátáit behelyettesítve:
$(-752+639)^2 + (308+308{,}5)^2 = 392\,841{,}25$, ami igaz kijelentés; az L pont tehát a kör pontja.

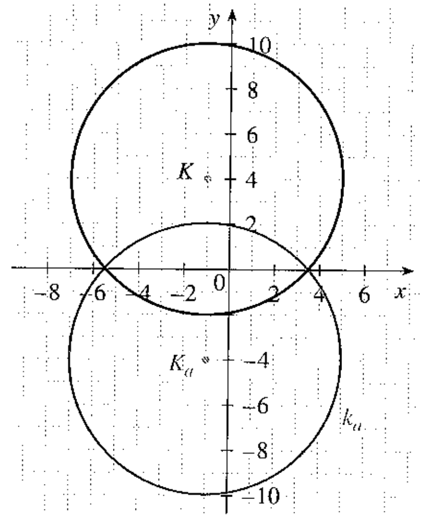
2482. A P, Q, S pontok nincsenek egy egyenesen; a PQS háromszög körülírt körének egyenletét kell tehát felírni.
A kör középpontját két oldalfelező merőleges metszéspontjaként kaphatjuk meg.
A PQ oldal felezőpontja $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$; $\overrightarrow{PQ} = (5; 1)$ normálvektora a PQ oldal felezőmerőlegesének, ezért a felezőmerőleges egyenlete: $5x + y = 9$.
A QS oldal felezőpontja $(4; -1)$, $\overrightarrow{QS} = (0; -6)$, így a (0; 1) vektor a QS oldal felezőmerőlegesének normálvektora; a felezőmerőleges egyenlete: $y = -1$ (ezt rövidebb úton is megkaphatjuk, ha az adatok alapján felfedezzük, hogy a háromszög QS oldala párhuzamos az y tengellyel, így a QS felezőmerőlegese természetesen párhuzamos az x tengellyel). A két felezőmerőleges metszéspontja a $C(2; -1)$ pont. A kör sugarát megkaphatjuk például a CP szakasz hosszaként is: $r = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.
A keresett kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 13$.

2483. Az előző feladatban is bemutatott úton eljuthatunk az ABC háromszög körülírt körének egyenletéhez.
AB felezőmerőlegesének egyenlete: $x + y = 3$, BC felezőmerőlegese: $x = 2$.
A körülírt kör középpontja a $C(2; 1)$ pont, a kör sugara $r = \sqrt{20}$, egyenlete pedig:
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

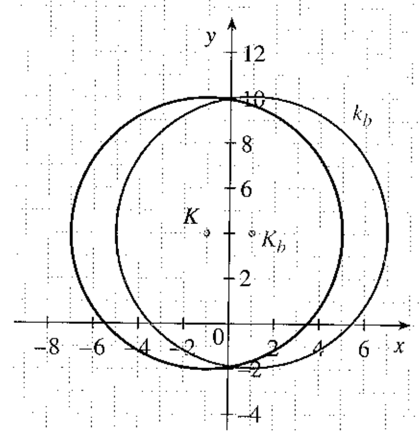
Ez a kör az ordinátatengelyt a $P(0; p)$ pontban metszi. Mivel P a körnek is pontja, ezért igaz a következő kijelentés: $(0-2)^2 + (p-1)^2 = 20$.
Ez ekvivalens a $p^2 - 2p - 15 = 0$ másodfokú egyenlettel, amelynek gyökei a -3 és az 5. A kör tehát két pontban metszi az ordinátatengelyt, a $P_1(0; -3)$ és a $P_2(0; 5)$ pontban.

2484. A kör középpontját tükrözzük, a sugár változatlan marad.

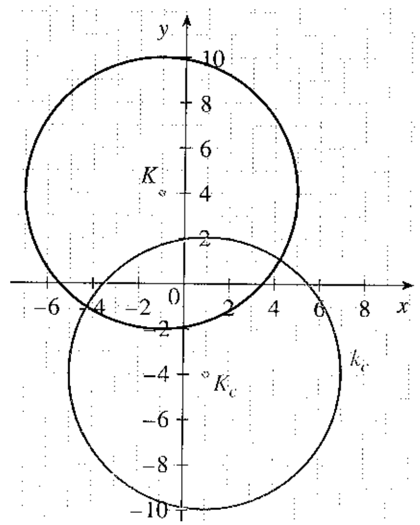
a) $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 36$



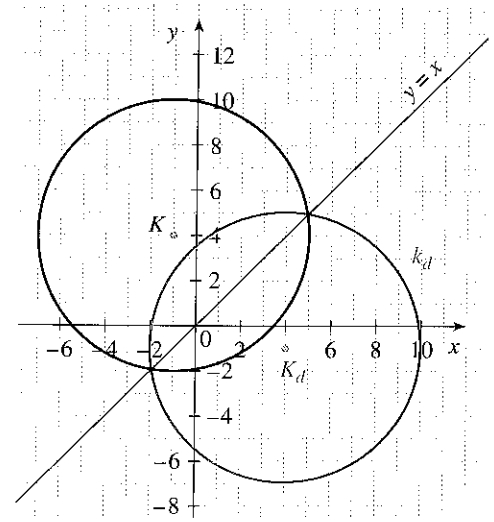
b) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 36$



c) $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 36$



d) $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 36$

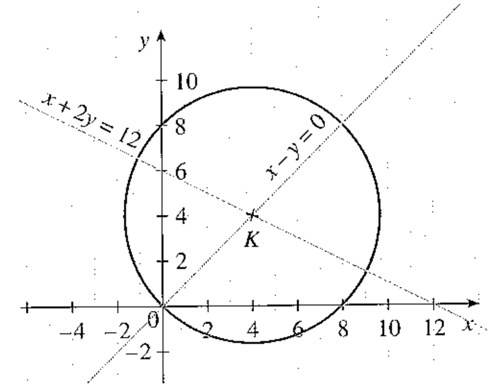


2485. A középpontot a két egyenes metszéspontjaként kapjuk meg. A két egyenletet rendszerként megoldva:

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=12 \\ x-y&=0 \end{aligned}\right\},$$

a másodikból: $y = x$, beírva az elsőbe: $x + 2x = 12$, ahonnan: $x = 4$, ezért $y = 4$. A kör középpontja tehát a $K(4; 4)$ pont, s ha a kör átmegy az origón, sugara e két pont távolsága:

az OK szakasz hossza: $4\sqrt{2}$.

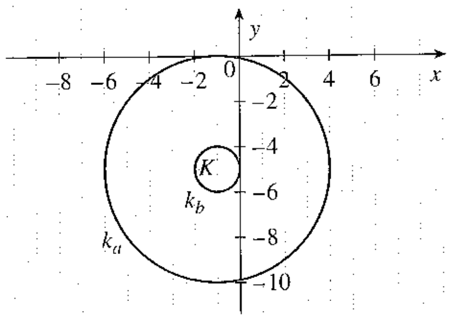


A kör egyenlete így:

$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 32$, vagy felbontva: $x^2 + y^2 - 8x - 8y = 0$.

2486. a) A kör az x tengelyt a $(-1; 0)$ pontban érinti, $r = 5$, $K(-1; -5)$, egyenlete: $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 25$.

b) A kör az y tengelyt a $(0; -5)$ pontban érinti, $r = 1$, $K(-1; -5)$, egyenlete: $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 1$.



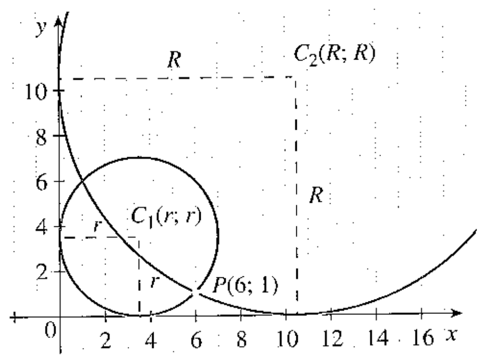
2487. Mivel a keresett kör mindkét koordináta-tengelyt érinti, és P az I. síknegyedben van, így a kör középpontja is az I. síknegyedben van, középpontja $C(r, r)$.

A kör egyenlete (ha középpontja $C(u; v)$, sugara r):

$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$.

Mivel $P(6; 1)$ illeszkedik a körre, így koordinátái kielégítik a kör egyenletét:

$(6-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$.



Ebből $r^2 - 14r + 37 = 0$ egyenlet megoldásai:

$r_1 = 7 + 2\sqrt{3} \approx 10{,}5\ (R)$; $\quad r_2 = 7 - 2\sqrt{3} \approx 3{,}5\ (r)$.

A feladatnak két megoldása van:

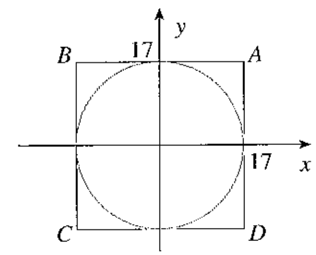
$(x - 7 - 2\sqrt{3})^2 + (y - 7 - 2\sqrt{3})^2 = (7 + 2\sqrt{3})^2$;

$(x - 7 + 2\sqrt{3})^2 + (y - 7 + 2\sqrt{3})^2 = (7 - 2\sqrt{3})^2$.

2488. A keresett kör sugarát jelöljük r-rel. A kör C középpontja mindkét koordinátatengelytől r távolságra van, ezért mindkét koordinátájának abszolútértéke r.
A fentiek miatt $C(r; -r)$, hiszen a kör biztosan a negyedik síknegyedben van.
A kör egyenlete: $(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$.
A $P(9; -2)$ pont rajta van a körön, tehát a $(9; -2)$ rendezett számpár megoldása a kör egyenletének: $(9-r)^2 + (-2+r)^2 = r^2$.
A négyzetre emelések elvégzése és rendezés után: $r^2 - 22r + 85 = 0$.
Ennek megoldásai az 5 és a 17.
Két megfelelő kör van tehát: $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$, illetve
$(x-17)^2 + (y+17)^2 = 289$.

2489. Ha a kör középpontja a $C(0; 5)$ pont, akkor egyenlete: $x^2 + (y-5)^2 = r^2$. Ez érinti az $5x + 3y = -19$ egyenletű egyenest. Azaz olyan r kell, amelyre a rendszernek csak 1 megoldása van. Egyszerűbb azonban, ha meghatározzuk a C pont távolságát az egyenestől, mert érintés esetén az lesz a sugár. C-ből merőlegest állítunk az adott egyenesre: $3x - 5y = -25$. Ez az eredeti egyenest az $M(-5; 2)$ pontban metszi.
A keresett kör sugara: $r = CM = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.
A kör egyenlete tehát: $x^2 + (y-5)^2 = 34$.

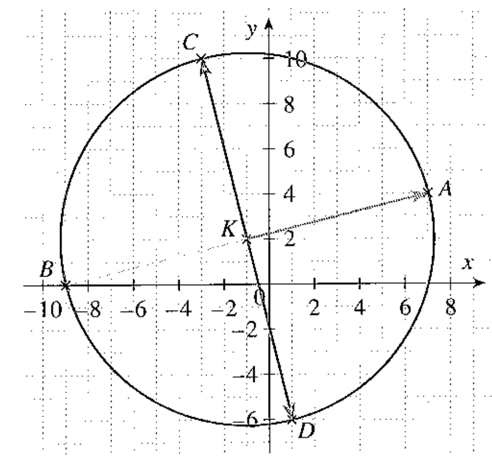
2490. Csak egy ilyen négyzetet kell megadnunk, nyilván végtelen sok van, mivel az origó körül lehet forgatni.
A kör sugara 17, mivel $17^2 = 289$, középpontja az origó. Emiatt az a legegyszerűbb négyzet, amelynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel:
$A(17; 17)$, $B(-17; 17)$, $C(-17; -17)$, $D(17; -17)$.
Lásd az ábrát!



2491. a) Legyen a középpont $K = (-1; y)$ és $B = (x; 0)$. Mivel átellenes pontokról van szó, AB felezőpontja K.

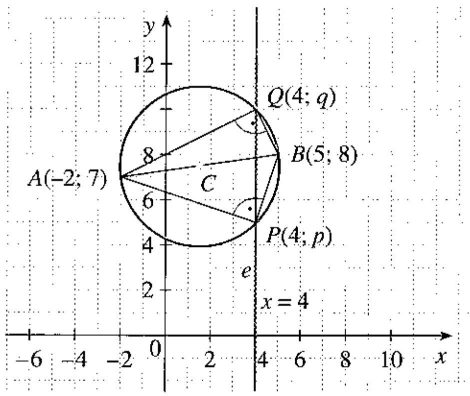
Ekkor $(-1; y) = \left(\dfrac{7+x}{2}; \dfrac{4+0}{2}\right)$.

Ebből (a tulajdonképpen két egyenletből): $x = -9$ és $y = 2$. A középpont így $K = (-1; 2)$, a sugár pedig például $KA = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$.
A kör egyenlete tehát:
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 68$.



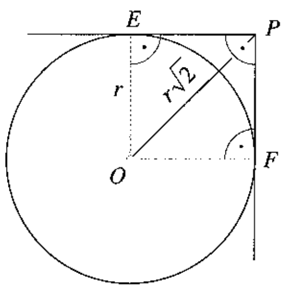
b) Ezeket megkapjuk, ha K-ból felmérjük a $\overrightarrow{KA}$ 90°-os elforgatottjait.
$\overrightarrow{KA}_{+90°} = (-2; 8)$, ezért
$\overrightarrow{OC} = (-1; 2) + (-2; 8) = (-3; 10)$;
$\overrightarrow{KA}_{-90°} = (2; -8)$, ezért $\overrightarrow{OD} = (-1; 2) + (2; -8) = (1; -6)$.
Tehát $C(-3; 10)$ és $D(1; -6)$.

2492. A Thalész-tétel szerint azok a pontok, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik, egy AB átmérőjű kört alkotnak (A és B kivételével).
Ezért az AB átmérőjű k kör és az adott egyenletű e egyenes közös pontjai lehetnek csak a keresett pontok (ábra).



A k középpontja $C\left(\frac{3}{2}; \frac{15}{2}\right)$,
sugarának négyzete:
$$r^2 = \left(5 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(8 - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}.$$
A kör egyenlete: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.
A kör és az egyenes metszéspontjainak első koordinátája 4, ezért második koordinátáikat a $\left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$ egyenlet megoldásai adják.
Rendezve: $y^2 - 15y + 50 = 0$. Megoldóképlettel kapjuk: $y = 5$ vagy $y = 10$.
A keresett pontok tehát $P(4; 5)$ és $Q(4; 10)$, s ezek valóban meg is felelnek a megfogalmazott követelményeknek.

2493. Egy kör valamely külső P pontból α szögben látszik, ha a P-ből húzott érintőszakaszok hajlásszöge α. Ha e szög derékszög, akkor $PEOF$ négyszög négyzet. Egy kör derékszögben látszik azokból és csak azokból a pontokból, amely pontok az adott körrel koncentrikus körön vannak és sugaruk az adott kör r sugarának $\sqrt{2}$-szerese, azaz $PO = r\sqrt{2}$.

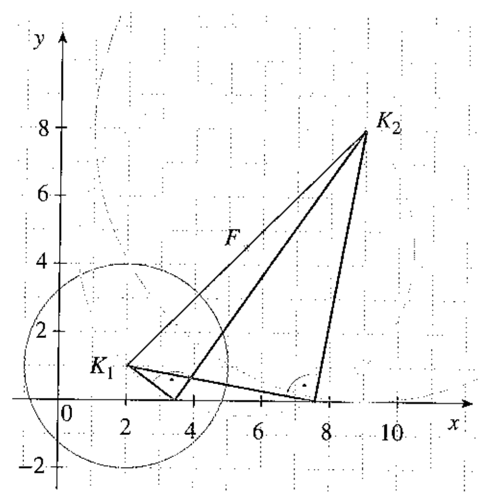


Ha P-t az O körül körbeforgatjuk, P kört ír le, melynek minden pontjából a kör derékszögben látszik.
Tehát a keresett ponthalmaz O középpontú, $r\sqrt{2}$ sugarú kör.

Az adott kör középponti egyenlete $K(2; -5)$, $r = 3$ ismeretében:
$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$.
A keresett ponthalmaz egyenlete $K(2; -5)$, $r = 3\sqrt{2}$ ismeretében:
$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 18$.

Megjegyzés:
Ha $r < OP < r\sqrt{2}$, a kör látószöge P pontból 90°-nál nagyobb.
Ha $OP > r\sqrt{2}$, a kör látószöge P pontból 90°-nál kisebb.

2494. Először meghatározzuk a körök középpontját.
Az első egyenletet átalakítva:
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$;
a másodikat pedig:
$(x-9)^2 + (y-8)^2 = 65$.
A két középpont tehát a $K_1 = (2; 1)$ és a $K_2 = (9; 8)$. A K_1K_2 szakasz a rá mint átmérőre rajzolt Thalész-kör pontjaiból látszik derékszögben. Annak középpontja a szakasz felezőpontja,

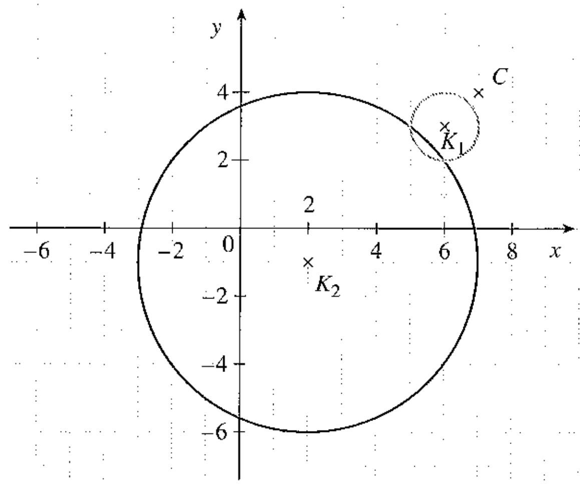


$$F = \left(\frac{2+9}{2}; \frac{1+8}{2}\right) = (5,5; 4,5);$$
sugara pedig a szakasz hosszának fele, vagyis pl. az FK_2 szakasz hossza:
$$R = \sqrt{(9-5,5)^2 + (8-4,5)^2} = \sqrt{3,5^2 + 3,5^2} = \sqrt{24,5}.$$
A Thalész-kör egyenlete tehát: $(x-5,5)^2 + (y-4,5)^2 = 24,5$.
Keressük ennek az abszcisszatengelyen lévő pontját, vagyis amire $y = 0$.
Ekkor $(x-5,5)^2 + (-4,5)^2 = 24,5$, amiből $(x-5,5)^2 = 4,25 = \frac{17}{4}$, ezért
$$x = 5,5 \pm \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{17}}{2} \approx \begin{cases} 7,56 \\ 3,44 \end{cases}.$$

Másik megoldás:
Ha a keresett pont $P(p; 0)$, akkor $\overrightarrow{K_1P} \perp \overrightarrow{PK_2}$, vagyis $\overrightarrow{K_1P} \cdot \overrightarrow{PK_2} = 0$,
$(p-2; -1) \cdot (9-p; 8) = 0$; $(p-2)(9-p) - 8 = 0$.
Átrendezve:
$$p^2 - 11p - 26 = 0; \quad p_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-104}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

2495. A kisebbik kör középpontját és sugarát leolvassuk az egyenletből: $K_1(6; 3)$, $R_1 = 1$.

a) A nagyítás centruma $C(7; 4)$. A nagyobb kör K_2 középpontjára:
$\overrightarrow{CK_2} = 5\overrightarrow{CK_1} = 5 \cdot (6-7; 3-4) =$
$= 5 \cdot (-1; -1) = (-5; -5)$, ezért
$\overrightarrow{OK_2} = (7; 4) + (-5; -5) = (2; -1)$.
Természetesen $R_2 = 5R_1 = 5$.
A nagyított kör egyenlete tehát:
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

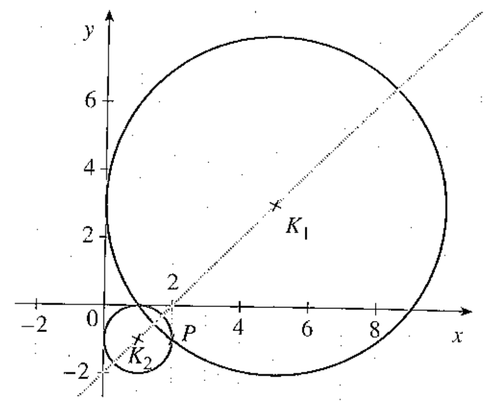


b) Az első egyenletet átalakítva: $x^2 - 12x + y^2 - 6y = -44$,
a másodikat: $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 20$. Kivonva ebből az elsőt, a másodfokú tagok kiesnek: $8x + 8y = 64$. Ebből $y = 8 - x$. Beírva ezt bármelyik (pl. az első) köregyenletbe: $(x-6)^2 + (8-x-3)^2 = 1$, azaz $(x-6)^2 + (5-x)^2 = 1$.
Felbontva: $x^2 - 12x + 36 + 25 - 10x + x^2 = 1$, rendezve: $2x^2 - 22x + 60 = 0$.
Megoldva: $x_1 = 6$; $x_2 = 5$; visszaírva: $y_1 = 8 - x = 2$; $y_2 = 3$.
A két kör közös pontjai tehát: (6; 2) és (5; 3).

2496.
$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2 + y^2 = 25 \\ \text{II.} & x^2 + y^2 - 14x + 17 = 0 \end{array}\right\}.$$
Ennek az egyenletrendszernek a megoldása adja a körök metszéspontjait.
I. – II. $14x = 42$, innen: $x = 3$. Ezt I.– be helyettesítve $y_1 = 4$, $y_2 = -4$.
A metszéspontok: (3; 4) és (3; –4).
A metszéspontokon átmenő egyenes egyenlete $x = 3$, a közös húr hossza 8.

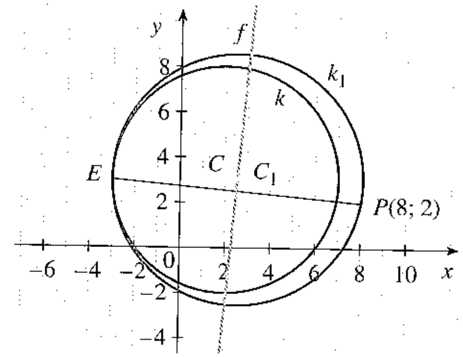
2497. Keressük a kört $(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2$ alakban. A három feltétel a következő három egyenlet felírását teszi lehetővé:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & (2-u)^2 + (-1-v)^2 = R^2 \\ \text{(II)} & u = R \\ \text{(III)} & u - v = 2 \end{array}\right\}.$$



(Mivel a körön lévő (2; –1) pont a IV. síknegyedben, azaz az ordinátatengelytől „jobbra" van, ezért e tengelyt érintő kör egésze, és így középpontja is erre van. Ezért a (II) egyenletben u előjele is pozitív, ezért magával R-rel egyenlő.
Ha ezt az elhelyezkedést nem tudnánk, úgy az érintés csak az $|u| = R$ egyenletet jelentené.) A (II)-t beírva (III)-ba, és átrendezve: $v = R - 2$; ezt és (II)-t beírva (I)-be:
$(2-R)^2 + (-1-(R-2))^2 = R^2$, azaz: $(2-R)^2 + (1-R)^2 = R^2$.
Felbontva: $4 - 4R + R^2 + 1 - 2R + R^2 = R^2$, rendezve: $R^2 - 6R + 5 = 0$, megoldva: $R = 5$ vagy 1. Így $u = 5$ vagy 1 és $v = 3$ vagy -1. Két megfelelő kört kaptunk tehát, egyenletük: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$, illetve $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

2498. Alakítsuk át az adott (k) kör egyenletét!
$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$, így ennek középpontja és sugara $C(2; 3)$, illetve $r = 5$.
E kör legkisebb abszcisszájú pontja $E(-3; 3)$, ez a keresett (k_1) kör egy olyan pontja is, melyben érinti az adott k kört.
Az érintési pont és a 2 kör középpontja egy egyenesen van, így k_1 kör C_1 középpontjának 2. koordinátája 3. EP a k_1 kör húrja. A húr (f) felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján. Így a C_1 középpont az f és az $y = 3$ egyenes metszéspontja.



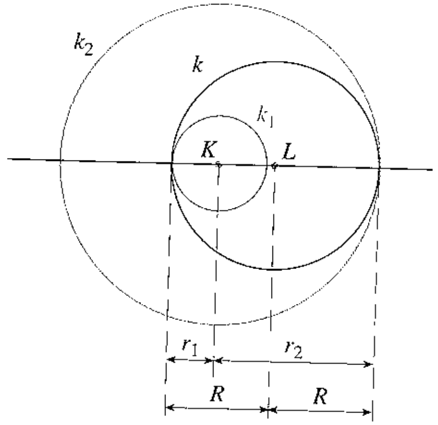
f: EP felezőpontja $F(2{,}5; 2{,}5)$ egy normálvektora $(11, -1)$, egyenlete
$11x - y = 25$, ha $y = 3$, $x = \frac{28}{11}$.

A keresett kör középpontja $C_1\left(\frac{28}{11}; 3\right)$, sugara $r = C_1E = \frac{28}{11} + 3 = 5\frac{6}{11}$.

A kör egyenlete: $\left(x - \frac{28}{11}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{61}{11}\right)^2$.

Megjegyzés:
Az adott feltételek miatt a keresett kör az adott kört csak kívülről érintheti.

2499. A keresett érintő körök középpontja a $K(0; -3)$ pont, az érintett kör (k) középpontja az $L(2; 3)$ pont, sugara pedig $R = \sqrt{136}$.



Mivel $KL = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} < R$, ezért K az R sugarú körön belül van. Ismert, hogy az érintkező körök középpontjainak távolsága a sugaraik összege, vagy különbsége. A sugarak összege csak akkor lehetséges, ha az érintő kör középpontja az érintett körön kívül van. Most tehát csak $KL = |R - r|$ lehetséges.

Ha $r < R$, akkor $KL = R - r$, tehát $r = R - KL = \sqrt{136} - \sqrt{40}$.
Ha $r > R$, akkor $KL = r - R$, azaz $r = KL + R = \sqrt{136} + \sqrt{40}$.
Két érintő kör van tehát:

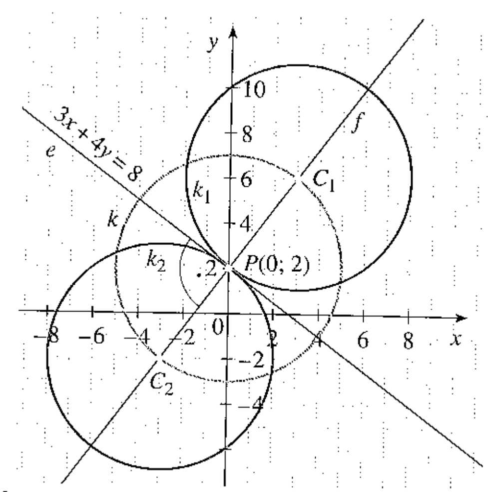
k_1: $x^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{136} - \sqrt{40})^2$, illetve k_2: $x^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{136} + \sqrt{40})^2$.

Megjegyzés:
A feladat megoldható a fent vázoltnál kevesebb geometriai megfontolást tartalmazó utakon is.

- Az egyik lehetséges úton szükség lehet arra a geometriai ismeretre, hogy az érintkező körök centrálisának egyenesén (a mindkét kör középpontján áthaladó egyenesen) rajta van az érintési pontjuk. Ebben az esetben az érintési pontokat egy egyenes (ti. a centrális egyenese) és a k metszéspontjaként kapjuk meg. (A KL egyenes egyenlete: $3x - y = 3$, az érintési pontok
$$E_1\left(\frac{10+\sqrt{340}}{5}; \frac{15+3\cdot\sqrt{340}}{5}\right) \text{ és } E_2\left(\frac{10-\sqrt{340}}{5}; \frac{15-3\cdot\sqrt{340}}{5}\right).)$$
- Egy másik lehetséges út, ha a keresett érintő kör egyenletét $x^2 + (y+3)^2 = p$ alakban írjuk fel és algebrai feltételt adunk az érintkezésre:
A p (pozitív) paraméter értékét úgy kell meghatározni, hogy az
$$\left.\begin{array}{l} x^2 + (y+3)^2 = p \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 136 \end{array}\right\}$$
egyenletrendszernek egyetlen rendezett számpár legyen a megoldása.
Ebből a feltételből végül arra a következtetésre jutunk, hogy p lehetséges értékeit a $p^2 - 352p + 9216 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei szolgáltatják.

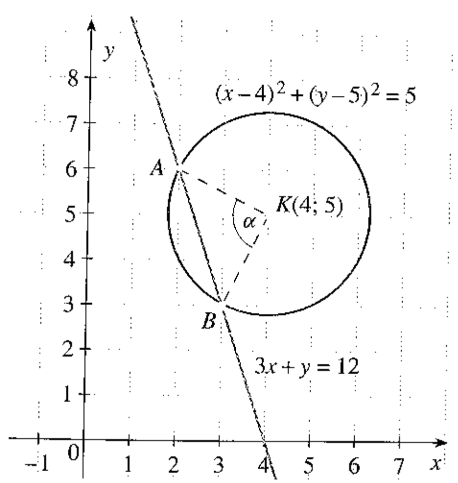
Ezt az utat (amely a leginkább „koordináta-geometriai"-nak nevezhető) csak akkor érdemes választanunk, ha kellően járatosak vagyunk másodfokú egyenletrendszerek megoldásában és az algebrai kifejezések „kezelésében".

2500. A megadott e egyenes 0 abszcisszájú pontja a $P(0; 2)$ pont.
A keresett érintő körök középpontja rajta van az e-t P-ben metsző, e-re merőleges f egyenesen, mert az érintési pontba vezető sugár merőleges az érintőre. Másrészt az érintő körök sugara 5 egység, ezért a körök középpontja a P-től 5 egységnyire, vagyis a P középpontú, 5 egység sugarú k körön van (ábra).
Az érintő körök középpontja ezek szerint eleme az $f \cap k$ halmaznak.
Az e egyenes (3; 4) normálvektora az f egyenesnek egy irányvektora, így f egyenlete: $4x - 3y = -6$. A P középpontú, 5 egység sugarú kör egyenlete: $x^2 + (y-2)^2 = 25$.



A metszéspontok koordinátáit a $4x - 3y = -6 \wedge x^2 + (y-2)^2 = 25$ egyenletrendszer megoldáshalmaza szolgáltatja: $C_1(3; 6)$ és $C_2(-3; -2)$.
Két érintő kör van (az ábrán k_1 és k_2), ezek egyenlete: $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$, illetve $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$.

2501. A kör AB húrja két körszeletet hoz létre, ezek területét kell meghatározni.
Az egyenes és a kör metszéspontjait az
$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 12 \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 5 \end{array}\right\}$$
egyenletrendszer megoldásai adják: $A(2; 6)$, $B(3; 3)$.
Mivel $\overrightarrow{KA} = (-2; 1)$ és $\overrightarrow{KB} = (-1; -2)$, ezért $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = 0$, vagyis az α középponti szög pontosan 90°.
A kisebbik körszelet területe megkapható tehát egy negyedkör és egy egyenlő szárú derékszögű háromszög



területének különbségeként is: $t_1 = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{5})^2\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5})^2 = \frac{5\cdot(\pi-2)}{4} \approx 1,43.$
A nagyobbik körszelet területét megkapjuk, ha a teljes kör területéből levonjuk az imént kiszámított területet: $t_2 = (\sqrt{5})^2\pi - \frac{5\cdot(\pi-2)}{4} = \frac{5\cdot(3\pi+2)}{4} \approx 14,28.$

2502. A feladat első részének megoldásához azt kell megmutatnunk, hogy az egyenes és a kör egyenletéből alkotott

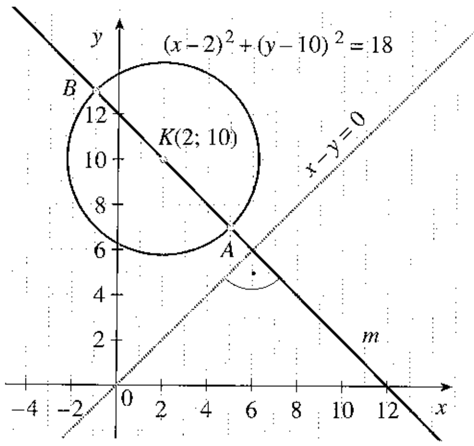
$$\left.\begin{aligned} y &= x \\ (x-2)^2+(y-10)^2 &= 18 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszernek nincs valós megoldása.

Az első egyenletből kifejezett y-t beírva a másodikba: $(x-2)^2+(x-10)^2 = 18$, amiből $x^2-12x+43 = 0$ adódik. Ennek a diszkriminánsa: $144-172<0$, tehát a másodfokú egyenletnek és így az egyenletrendszernek sincs megoldása.
A körnek és az egyenesnek tehát valóban nincs közös pontja.

Az adott egyeneshez legközelebbi (A) és attól legtávolabbi (B) pontot a kör középpontjából (K-ból) az egyenesre állított merőleges (m) metszi ki a körből (ld. a vázlatot).
m: $x+y=12$, tehát a metszéspontokat az

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 12 \\ (x-2)^2+(y-10)^2 &= 18 \end{aligned}\right\}$$

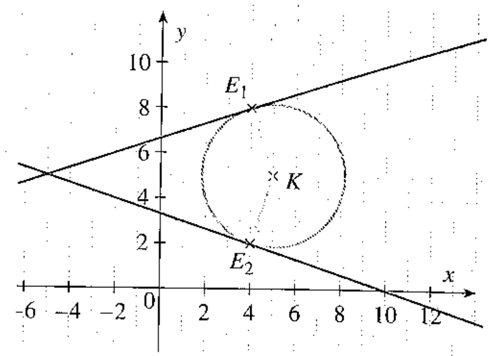
egyenletrendszer megoldásából kapjuk.
A megoldások (5; 7) és (–1; 13).
Az m egyenes a (6; 6) pontban metszi az $y=x$ egyenletű egyenest, tehát a körnek az $y=x$ egyenletű egyeneshez legközelebbi pontja $A(5; 7)$, a legtávolabbi pedig $B(-1; 13)$.



2503. A kör érintője merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra.
$x^2+y^2=25;\ P(-4;-3).$
Az érintő normálvektora $\overrightarrow{OP}(-4;-3)$.
A kör érintőjének egyenlete: $-4x-3y=25$, azaz $4x+3y+25=0$.

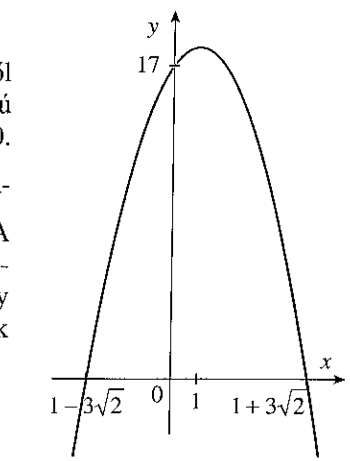
2504. Az $x^2+y^2=100$ egyenletű kör 6 ordinátájú pontjai $E_1(8; 6)$, $E_2(-8; 6)$.
Az E_1-hez tartozó érintő egyik normálvektora $\overrightarrow{OE}_1(8; 6)$.
Az érintő egyenlete $8x+6y=100$.
Az E_2-höz tartozó érintő egyik normálvektora $\overrightarrow{OE}_2(-8; 6)$.
Az érintő egyenlete $-8x+6y=100$.

2505. Átrendezzük a köregyenletet:
$x^2-10x+y^2-10y+40=0$, azaz
$(x-5)^2-25+(y-5)^2-25+40=0$,
tehát $(x-5)^2+(y-5)^2=10$.
Leolvassuk a középpontját: $K=(5; 5)$.
Meghatározzuk a 4 abszcisszájú pontjait: $(4-5)^2+(y-5)^2=10$, vagyis $(y-5)^2=9$, tehát $y=5\pm3$, azaz 8 vagy 2. A két érintési pont tehát $E_1=(4; 8)$ és $E_2=(4; 2)$.



Az ezen pontokbeli érintők normálvektora $\overrightarrow{KE_1}=(4-5; 8-5)=(-1; 3)$, illetve $\overrightarrow{KE_2}=(4-5; 2-5)=(-1;-3)$. Az érintők egyenlete tehát:
$-x+3y=-4+3\cdot8=20$, illetve $-x-3y=-4-3\cdot2=-10$.
(Vagy, ami ugyanaz, $x-3y=-20$, illetve $x+3y=10$.)

2506. Az 1 iránytangensű egyenesek egyenlete: I. $y=x+b$.
Az egyenes érinti a kört, ha egy közös pontjuk van.
II. $x^2+y^2+2x-8=0$.
Az I.-ből y-t a II.-be helyettesítve: $x^2+(x+b)^2+2x-8=0$.
Ebből: III. $2x^2+2(b+1)x+b^2-8=0$.
Az egyenletrendszernek egy megoldása van, ha a III. egyenlet diszkriminánsa nulla:
$D=4(b+1)^2-8(b^2-8)=0$. Innen $-b^2+2b+17=0$.
Ennek gyökei: $b_1=1+3\sqrt{2}$
$b_2=1-3\sqrt{2}$.
A két érintő egyenlete: $y=x+1+3\sqrt{2}$
$y=x+1-3\sqrt{2}$.
A kört metsző egyeneseket kapunk, ha az I. és II.-ből álló egyenletrendszernek, illetve a III. másodfokú egyenletnek két gyöke (megoldása) van, azaz $D>0$.
Az $\frac{1}{4}D$-re kapott másodfokú függvény vázlatos grafikonját a zérushelyek ismeretében készítettük el. A függvény maximummal rendelkezik, mert a másodfokú tag előjele negatív. Ebből állapítható meg, hogy b mely értéke esetén lesz $D>0$. Ez akkor következik be, ha $y=x+b$ egyenes egyenletében
$1-3\sqrt{2}<b<1+3\sqrt{2}$.



2507. a) A kör sugara a két pont távolsága, mivel P rajta van a körvonalon. Innen $\overrightarrow{PC}(-4; 4)$, azaz a távolság $\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, ennyi lesz a kör sugara.

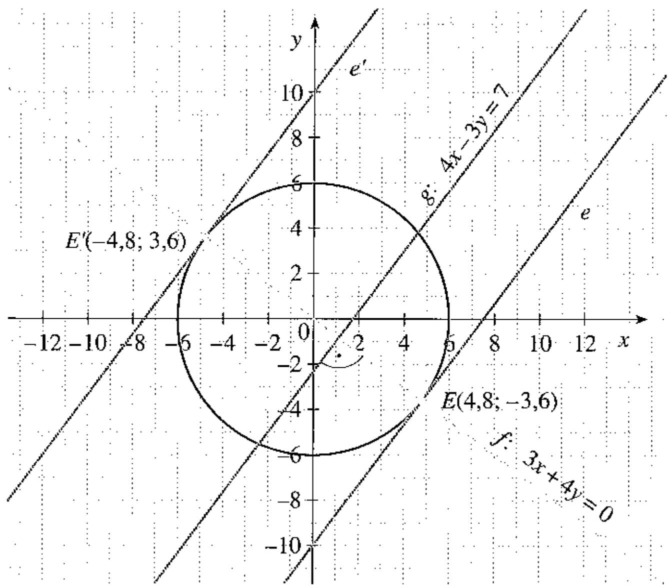
b) A kör egyenlete: $(x+1)^2+(y-2)^2=32$.

c) A $\overrightarrow{PC}(-4; 4)$ az érintő normálvektora, tehát az egyenlet:
$-4x+4y=-4\cdot 3+4\cdot(-2)=-20$.
Egyszerűbb alakban: $x-y=5$.

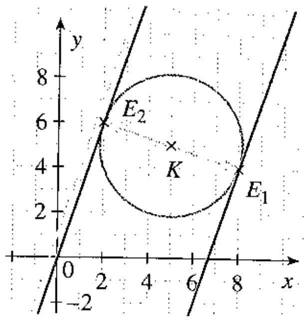
2508. Húzzunk a kör $O(0; 0)$ középpontján keresztül az adott g egyenesre merőleges f egyenest! Ennek egy irányvektora: $\mathbf{v}(4; -3) \Rightarrow f\colon\ 3x+4y=0$.
Az f egyenes és az adott kör metszéspontja adja a keresett érintési pontokat:

$$\left.\begin{matrix} 3x+4y=0 \\ x^2+y^2=36 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y=-0,75x \\ \ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ \\ x^2+(-0,75x)^2=36 \end{cases} \Rightarrow \quad x=\pm 4,8.$$

Tehát az érintési pontok: $E(4,8; -3,6)$, illetve $E'(-4,8; 3,6)$.
A keresett érintők párhuzamosak az eredeti g: $4x-3y=7$ egyenessel.
Így egyenletük: e: $4x-3y=4\cdot 4,8-3\cdot(-3,6) \Rightarrow e$: $4x-3y=30$
e': $4x-3y=4\cdot(-4,8)-3\cdot 3,6 \Rightarrow e'$: $4x-3y=-30$.

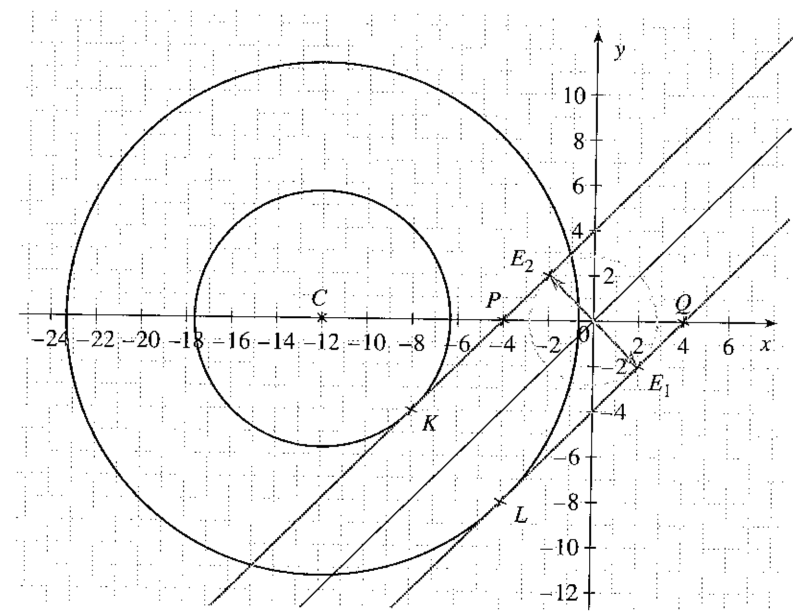


2509. Átrendezzük a köregyenletet:
$x^2-10x+y^2-10y+40=0$, azaz
$(x-5)^2-25+(y-5)^2-25+40=0$, tehát
$(x-5)^2+(y-5)^2=10$.
Leolvassuk középpontját és sugarát:
$K(5; 5)$, $R=\sqrt{10}$.



A körnek a $3x-y=-1$ egyenessel párhuzamos érintőkkel való közös pontjaiba a középpontból az egyenesre merőleges, $\sqrt{10}$ hosszú vektorok mutatnak. Az egyenes egy normálvektora a $(3; -1)$ vektor, az egyenesre merőleges vektorok mind ennek számszorosai. A $(3; -1)$ maga alkalmas az egyik ilyen vektornak, hiszen hossza éppen $\sqrt{10}$. A két érintési pont egymás átellenese a körön, tehát a középpontból ezekbe mutató vektorok egymás ellentettjei. Így az érintési pontok $\overrightarrow{OE_1}=(5; 5)+(3; -1)=(8; 4)$ és $\overrightarrow{OE_2}=(5; 5)+(-3; 1)=(2; 6)$. A megfelelő érintők egyenlete pedig: $3x-y=3\cdot 8-4=20$ és $3x-y=3\cdot 2-6=0$.

2510.



Az $x^2+y^2=8$ egyenletű kör középpontja az origó, sugara $2\sqrt{2}$. Ennek az $x-y=0$ egyenessel párhuzamos érintőivel való közös pontjaiba a középpontból az egyenesre merőleges, $2\sqrt{2}$ hosszú vektorok mutatnak. Az egyenes egy normálvektora az $(1; -1)$ vektor, az egyenesre merőleges vektorok mind ennek számszorosai. Az $(1; -1)$ hossza $\sqrt{2}$, így a $(2; -2)$ alkalmas az egyik ilyen vektornak, hiszen hosz-

sza $2\sqrt{2}$. A két érintési pont egymás átellenese a körön, tehát a középpontból ezekbe mutató vektorok egymás ellentettjei. Így az érintési pontok:
$\overrightarrow{OE_1} = (0; 0) + (2; -2) = (2; -2)$ és $\overrightarrow{OE_2} = (0; 0) + (-2; 2) = (-2; 2)$.
A megfelelő érintők egyenlete pedig: $x - y = 2 - (-2) = 4$ és $x - y = -2 - 2 = -4$.
A $C(-12; 0)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete $(x + 12)^2 + y^2 = r^2$, aminek a fenti egyenesek valamelyike akkor érintője, ha azzal egy közös pontja van, azaz kettejük egyenletét rendszerként megoldva egy megoldás adódik.

Az első érintő esetén a rendszer: $\left.\begin{aligned} x - y &= 4 \\ (x+12)^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}\right\}.$

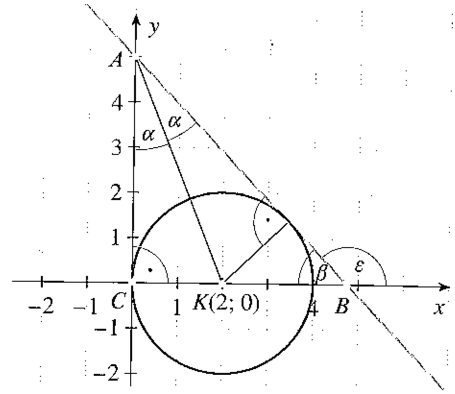
Az elsőből $y = x - 4$, ezt beírva a másodikba: $(x + 12)^2 + (x - 4)^2 = r^2$.
Felbontva, rendezve: $2x^2 + 16x + 160 - r^2 = 0$.
Ennek egy gyöke van, ha diszkriminánsa 0, azaz $16^2 - 4 \cdot 2 \cdot (160 - r^2) = 0$.
Rendezve: $8r^2 = 1024$, amiből (figyelembe véve, hogy a kör sugara nem lehet negatív) $r = 8\sqrt{2} \approx 11,31$.

A második érintő esetén a rendszer: $\left.\begin{aligned} x - y &= -4 \\ (x+12)^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}\right\}.$

Az elsőből $y = x + 4$, ezt beírva a másodikba: $(x + 12)^2 + (x + 4)^2 = r^2$.
Felbontva, rendezve: $2x^2 + 32x + 160 - r^2 = 0$.
Ennek egy gyöke van, ha diszkriminánsa 0, azaz $32^2 - 4 \cdot 2 \cdot (160 - r^2) = 0$.
Rendezve: $8r^2 = 256$, amiből (figyelembe véve, hogy a kör sugara nem lehet negatív) $r = 4\sqrt{2} \approx 5,66$.

Másik megoldás:
Az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör középpontja az origó, sugara $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Az $y = x$ egyenes irányszöge 45°, ezért a rá merőleges E_1E_2 egyenes is 45°-os szöget alkot az x tengellyel, vagyis az $OE_2P\,\Delta$ egyenlőszárú és derékszögű, átfogója $\sqrt{2}E_2O = \sqrt{2}r = 4$. Ezért $CP = 8$.
$CKP\,\Delta \sim OE_2P\,\Delta$ (szögeik 45°, 45°, 90°) a nagyítási arány $CP:PO = 8:4 = 2$, vagyis a keresett körök közül a kisebbiknek a sugara $OK = 2r = 4\sqrt{2}$.
Hasonlóan: $CLQ\,\Delta \sim CKP\,\Delta$, a nagyítási arány $CQ:CP = 16:8 = 2$, ezért a nagyobbik kör sugara $CL = 2CK = 8\sqrt{2}$. ($CQ = 16$, mert $OQ = OP = 4$).

2511. A kör egyenlete teljes négyzetté alakítás után: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, tehát a kör középpontja és sugara: $K(2; 0)$, $r = 2$.
Az e: $y = mx + 5$ egyenletű egyenesek mindegyike az y tengelyt $+5$-ben metszi. Az ezen a ponton áthaladó egyenesek közül az y tengely érintője a körnek (*ennek az egyenesnek azonban nincs meredeksége, tehát a feladatnak nem megoldása*), mivel a másik érintő is ezen a ponton megy át, a két külső érintő metszéspontja (0; 5).



Egy körhöz egy külső pontból húzott érintő szakaszok egyenlők (ez itt 5 egység), és a külső pontot a kör középpontjával összekötő egyenes felezi az érintők hajlásszögét, ezért α és ε, továbbá ebből a meredekség kiszámítható. *

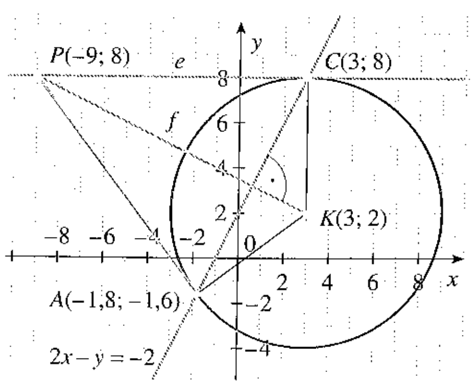
ACK derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha \approx 21,8°$.
ε az ABC háromszög külső szöge, tehát $\varepsilon = 90° + 2\alpha \approx 133,6°$.
Tehát $m = \operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg} 133,6° = -1,05$.

Másik megoldás:
*-tól: ACO derékszögű háromszögben

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{2}{5}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{20}{21}.$$

Így ACB derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{20}{21} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{21}{20}$,
ezért a keresett egyenes meredeksége $m = \operatorname{tg}(180° - \beta) = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{21}{20} = -1,05$.

2512. A kör egyenlete teljes négyzetté alakítás után $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 36 \Rightarrow$ a kör középpontja $K(3; 2)$, sugara $r = 6$.
Mivel a körhöz egy külső pontból húzott érintő szakaszok egyenlők, ezért az érintési pontokat összekötő húr szakaszfelező merőlegese átmegy az érintők metszéspontján és a kör középpontján. ($APCK$ deltoid, átlói merőlegesek egymásra, a szimmetriatengelye – PK átló – felezi a másik átlót.)



Határozzuk meg az érintési pontokon átmenő szelő és a kör metszéspontját!

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = -2 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2x + 2 \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \\ (x-3)^2 + (2x)^2 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$x_1 = 3;\quad x_2 = -1{,}8.$

Az érintési pontok: $A(-1{,}8; -1{,}6)$; $C(3; 8)$.

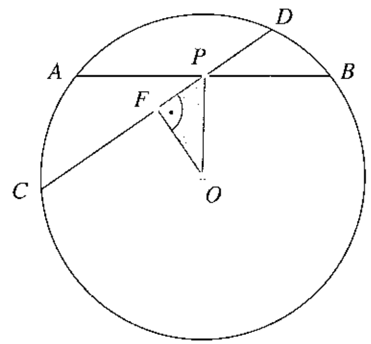
Mivel CK párhuzamos az y tengellyel, ezért a C-ben húzható érintő párhuzamos az x tengellyel, egyenlete: e: $y = 8$.

A keresett P külső pontot az érintő és AC szakaszfelező (f) merőlegesének (amely átmegy a középponton) metszéspontja adja.

f: egy normálvektora pl. $\overrightarrow{AC}(4{,}8; 9{,}6)$ vagy $\mathbf{n}(1; 2)$ $\Rightarrow$ f: $x + 2y = 7$.

$$e \cap f = \{P\};\ \left.\begin{array}{l} e\colon\ y = 8 \\ f\colon\ x + 2y = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow P(-9; 8).$$

2513. A $P(3; 1)$ pont az $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ egyenletű kör belső pontja.



Egy körben a párhuzamos húrok közül az a húr a rövidebb, amelyik a kör középpontjától távolabb van.

Ha a két húr párhuzamos, akkor ez nyilvánvaló. Más esetben, ha valamelyik húrt a kör középpontja körül elforgatjuk, a két húr párhuzamos helyzetbe hozható.

A P pontra illeszkedő húrok közül az a legrövidebb, amelyik merőleges PO-ra. (P az AB húr felezőpontja).

Ez belátható az ábra segítségével. Legyen egy P-re illeszkedő tetszőleges húr CD. Az O középpontból a húrra állított merőleges talppontja F (Ez egyúttal a húr felezőpontja). Az OPF derékszögű háromszögnek átfogója az OP, tehát $OP > OF$. Tehát a P-re illeszkedő húrok közül valóban AB a legrövidebb.

Az adott kör középponti egyenlete: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$; $O(1; -1)$.

A félhúr hosszát az OPB derékszögű háromszögből számíthatjuk ki:

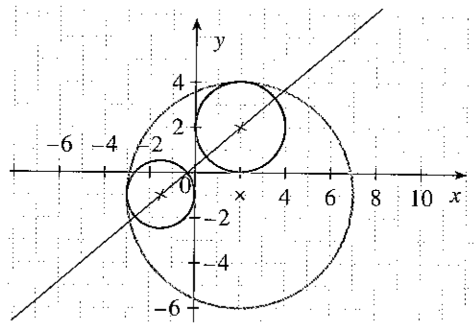
$OP = \sqrt{8}$, $r = 4$, $\dfrac{1}{2}AB = \sqrt{16-8} = \sqrt{8}$.

Innen a húr hossza $AB = 4\sqrt{2}$.

2514. Az ismert kör egyenletét átrendezve: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$, amiből $K = (2; -1)$, $R = 5$. Az ismeretlen kört keressük $(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2$ alakban. A három feltétel a következő három egyenlet felírását teszi lehetővé:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & \sqrt{(2-u)^2 + (-1-v)^2} = 5 - R \\ \text{(II)} & |u| = R \\ \text{(III)} & 6u - 7v = -2 \end{array}\right\}.$$

(Két kör akkor érinti belülről egymást, ha középpontjaik távolsága a sugarak különbségével egyenlő.) Két eset van aszerint, hogy a kör az ordinátatengelyt pozitív oldalról (az I. és IV. síknegyed felől, „jobbról"), vagy negatív oldalról (a II. és III. síknegyed felől, „balról") érinti – ekkor a (II) egyenlet: $u = R$, illetve $u = -R$. Kezelhetjük egyben is e két esetet: $u = \pm R$, és csak akkor választjuk szét őket, amikor már feltétlenül szükséges.



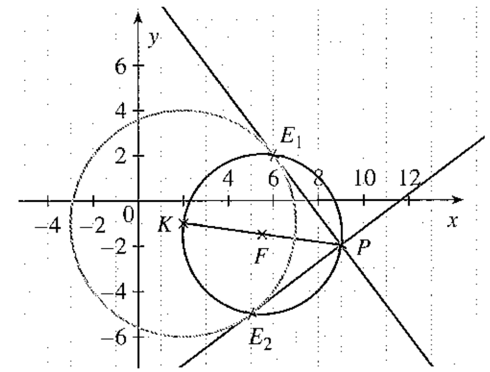
Beírva ezt a (III)-ba: $\pm 6R - 7v = -2$, innen: $v = \dfrac{\pm 6R + 2}{7}$.

Beírva mindkettőt az (I)-be: $\sqrt{(2 \mp R)^2 + \left(-1 - \dfrac{\pm 6R + 2}{7}\right)^2} = 5 - R$.

Elvégezhetjük a négyzetre emelést, ha kikötjük, hogy $R < 5$ (ami a belülről érintés miatt amúgy is követelmény), ekkor (a második tagban a lehetséges összevonásokat már végrehajtva): $(2 \mp R)^2 + \left(\dfrac{-9 \mp 6R}{7}\right)^2 = (5 - R)^2$.

Felbontva: $4 \mp 4R + R^2 + \dfrac{81}{49} \pm \dfrac{108R}{49} + \dfrac{36R^2}{49} = 25 - 10R + R^2$, ahol a két-két előjel közül vagy csak a felsők, vagy csak az alsók érvényesek. Összevonva és 49-cel szorozva: $36R^2 + (490 \mp 88)R - 948 = 0$. A fölső előjel („jobbról" érintés) esetén a $36R^2 + 402R - 948 = 0$ egyenlet gyökei: 2 és $-13{,}1\dot{6}$; az alsó előjel („balról" érintés) esetén a $36R^2 + 578R - 948 = 0$ egyenlet gyökei: 1,5 és $-17{,}\dot{5}$ – mindkét esetben a pozitív gyök lehetséges, a negatív nem. Ekkor az első esetben $u = R = 2$ és $v = \dfrac{6R+2}{7} = 2$, tehát az alkalmas kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$; a második esetben $u = -R = -1{,}5$ és $v = \dfrac{-6R+2}{7} = -1$, tehát a másik alkalmas kör egyenlete: $(x+1{,}5)^2 + (y+1)^2 = 2{,}25$.

2515. A köregyenletet átalakítva:
$(x-2)^2+(y+1)^2=25$, amiből
$K=(2;-1)$, $R=5$.
A PK szakaszra mint átmérőre Thalész-kört rajzolunk, megkeressük a két kör metszéspontjait, ezek lesznek az érintési pontok, és ezeken és P-n át egyenest fektetünk. A PK felezőpontja a Thalész-kör középpontja:



$$F=\left(\frac{2+9}{2};\ \frac{-1-2}{2}\right)=(5,5;\ -1,5),$$

a Thalész-kör sugara $r=KF=\sqrt{(5,5-2)^2+(-1,5-(-1))^2}=\sqrt{12,5}$, egyenlete így: $(x-5,5)^2+(y+1,5)^2=12,5$. Felbontva: $x^2+y^2-11x+3y=-20$.
Kivonva ezt a másik kör eredeti egyenletéből a másodfokú tagok kiesnek, és kapjuk: $7x-y=40$. Ebből $y=7x-40$, amit beírva az eredeti kör átalakított egyenletébe: $(x-2)^2+(7x-40+1)^2=25$. Összevonás után felbontva:
$x^2-4x+4+49x^2-546x+1521=25$, rendezve: $50x^2-550x+1500=0$.
Ennek gyökei: 6 és 5, visszahelyettesítve: $y=7x-40$; $y_1=2$; $y_2=-5$. A két érintési pont tehát $E_1=(6;2)$ és $E_2=(5;-5)$. $\overrightarrow{PE_1}=(6-9;2-(-2))=(-3;4)$, így a PE_1 érintő egyenlete: $4x+3y=4\cdot6+3\cdot2=30$;
$\overrightarrow{PE_2}=(5-9;-5-(-2))=(-4;-3)$,
így a PE_2 érintő egyenlete: $3x-4y=3\cdot5-4\cdot(-5)=35$.

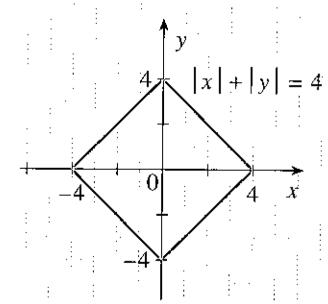
Megjegyzés:
Mint a normálvektorokból látható, a két érintő merőleges egymásra.

Másik megoldás:
Írjuk fel az összes P-n átmenő egyenes egyenletét paraméteresen $y=a(x-9)-2$ alakban. A „függőleges", vagyis az y tengellyel párhuzamos egyenest ugyan nem tudjuk ilyen alakban felírni, de az adatokból ki- (vagy az ábráról le-)olvasható – P abszcisszája nagyobb, mint K-é plusz a sugár –, hogy jelen esetben nem lehet ilyen érintőről szó. Keressük ezen egyenesek közül azokat, amelyeknek a körrel egy közös pontjuk van, vagyis amelyekre a két egyenletből álló rendszernek egy gyöke van. Beírva az egyenes egyenletéből már úgyis kifejezett y-t a kör egyenletébe: $(x-2)^2+(a(x-9)-2+1)^2=25$, összevonva: $(x-2)^2+(ax-9a-1)^2=25$.
Felbontva: $x^2-4x+4+a^2x^2+81a^2+1-18a^2x-2ax+18a=25$, rendezve: $(a^2+1)x^2-(18a^2+2a+4)x+81a^2+18a-20=0$. Ennek egy gyöke van, ha diszkriminánsa nulla: $(18a^2+2a+4)^2-4(a^2+1)(81a^2+18a-20)=0$.
Felbontva: $324a^4+4a^2+16+72a^3+144a^2+16a-324a^4-72a^3+80a^2-$
$-324a^2-72a+80=0$. Rendezéskor a negyed- és harmadfokú tagok kiesnek (eb-

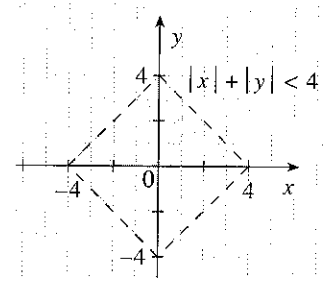
ben a megoldástípusban mindig), és kapjuk: $-96a^2-56a+96=0$. Ennek gyökei: $-\frac{4}{3}$ és $\frac{3}{4}$. Az ilyen meredekségű, P-n átmenő egyeneseknek van tehát egy közös pontjuk a körrel, vagyis ezek az érintők. Visszaírva a paraméteres alakba:
$y=-\frac{4}{3}(x-9)-2=-\frac{4}{3}x+10$, illetve $y=\frac{3}{4}(x-9)-2=\frac{3}{4}x-8,75$.

Megjegyzés:
Ez a megoldástípus a többi másodrendű görbe – ellipszis, hiperbola, parabola – esetén is ugyanígy alkalmazható a külső pontból húzott érintők meghatározására.

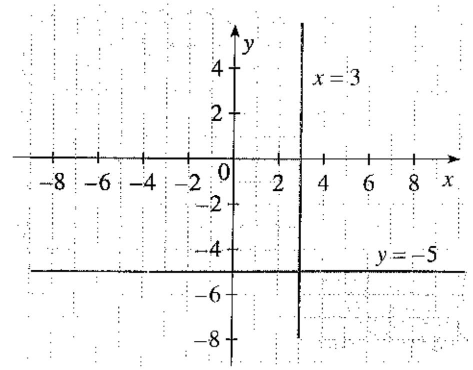
2516. I. síknegyed:
$x\ge0;\quad y\ge0;\quad x+y=4;\quad (y=-x+4)$.
II. síknegyed:
$x\le0;\quad y\ge0;\quad -x+y=4;\quad (y=x+4)$.
III. síknegyed:
$x\le0;\quad y\le0;\quad -x-y=4;\quad (y=-x-4)$.
IV. síknegyed:
$x\ge0;\quad y\le0;\quad x-y=4;\quad (y=x-4)$.
A keresett pontok egy négyzet határoló vonalát alkotják.



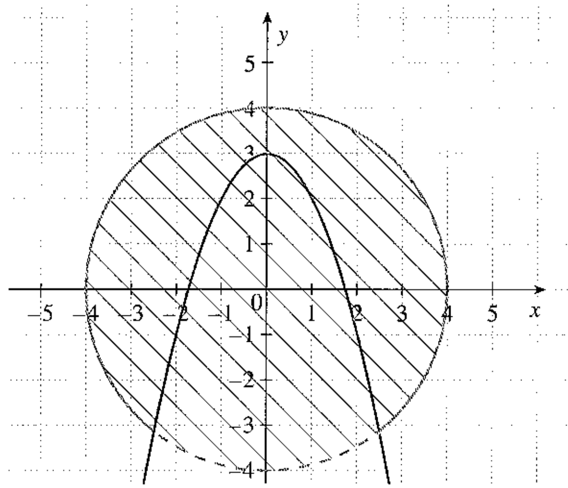
2517. I. síknegyed:
$x\ge0;\quad y\ge0;\quad x+y<4;\quad (y<-x+4)$.
II. síknegyed:
$x\le0;\quad y\ge0\quad -x+y<4;\quad (y<x+4)$.
III. síknegyed:
$x\le0;\quad y\le0;\quad -x-y<4;\quad (y>-x-4)$.
IV. síknegyed:
$x\ge0;\quad y\le0;\quad x-y<4;\quad (y>x-4)$.



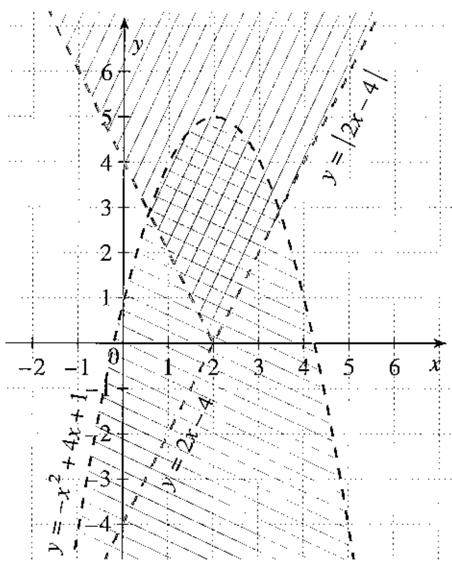
2518. $(x-3)(y+5)\le0$
I. $x-3\le0$
$y+5\ge0$
$x\le3$ és $y\ge-5$
II. $x-3\ge0$
$y+5\le0$
$x\ge3$ és $y\le-5$



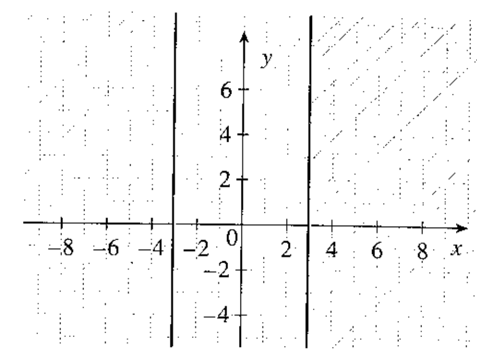
2519. Lásd az ábrát! Egy 4 egység sugarú kör belseje és határa az egyik egyenlőtlenség megoldása, míg egy fordított parabola feletti rész a másiké, így a megoldáshalmaz a közös rész.



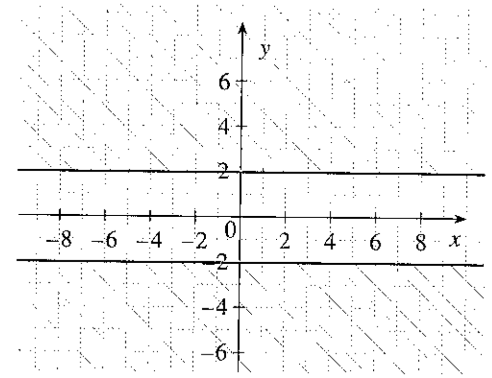
2520. Lásd az ábrát! Egy abszolútérték-függvény képe feletti, és egy parabola alatti tartomány közös része (az ábrán rózsaszínnel jelölt) a megoldáshalmaza a két egyenlőtlenségből álló rendszernek. (A határolóvonalak nem tartoznak a megoldáshoz, a ponthalmaz nyílt.)



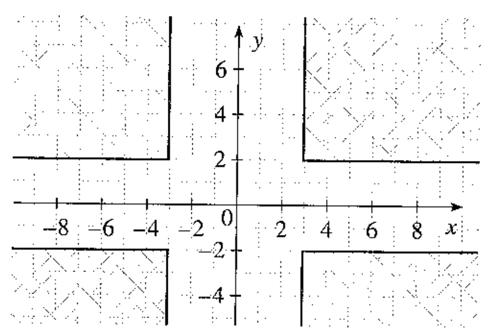
2521. a) A H_1 ponthalmaz csak olyan pontokat tartalmazhat, amelyek két feltételnek is megfelelnek (az „és" miatt). Az első feltétel szerint csak olyan pontok tartozhatnak hozzá a H_1-hez, amelyeknek első koordinátáját négyzetre emelve legalább 9-et kapunk. Ez mindazokra a $P(x; y)$ pontokra teljesül, amelyekre $|x| \geq 3$, azaz $x \geq 3$ vagy $x \leq -3$. Ezeket a pontokat az első ábra szemlélteti.



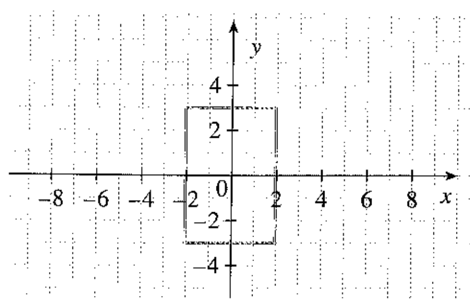
A második feltétel szerint csak olyan pontok tartozhatnak hozzá a H_1-hez, amelyeknek második koordinátáját négyzetre emelve legalább 4-et kapunk. Ez mindazokra a $P(x; y)$ pontokra teljesül, amelyekre $|y| \geq 2$, azaz $y \geq 2$ vagy $y \leq -2$. Ezeket a pontokat a második ábra szemlélteti.



A H_1 halmazhoz a mindkét előbbi halmazhoz hozzá tartozó pontok, azaz a két halmaz metszetének elemei alkotják (az ábrán mindkét irányban vonalkázott síkrészek).



b) A H_2 ponthalmaz azokat a pontokat tartalmazza, amelyek két feltétel közül legalább az egyiknek megfelelnek (a „vagy" miatt).
Az a) részben leírtakhoz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a H_2 a mellékelt ábra szerinti pontok halmaza.



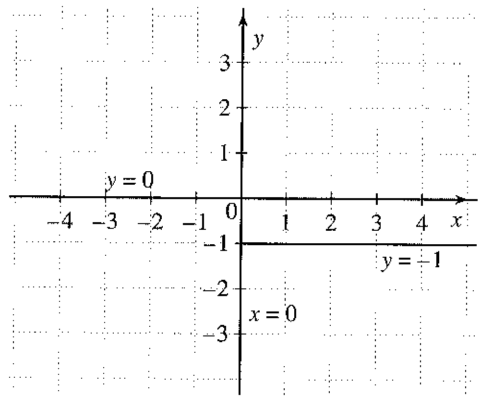
2522. a) $y \geq |x|$ b) $y \leq -x+3$ c) $x^2+y^2 \leq 25$ d) $y \geq -x^2+4$

2523. A 2521. feladat a) részének megoldása mutatja, hogy az $x^2 \geq 1$; $y^2 \geq 1$ egyenlőtlenségrendszernek éppen az adott ponthalmaz felel meg.

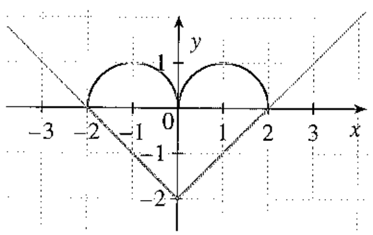
2524. Részleteiben könnyebb megadni a ponthalmazt.
Az $y \geq \frac{3}{2} \cdot |x|$ egyenlőtlenség megadja a ponthalmaz „felső” részét, az $y \leq -\frac{3}{2} \cdot |x|$ egyenlőtlenség pedig az „alsót”.
A két rész unióját az $y \geq \frac{3}{2} \cdot |x| \vee y \leq -\frac{3}{2} \cdot |x|$ feltételrendszerrel adhatjuk meg.

Megjegyzés:
A feltételrendszerrel ekvivalens az $|y| \geq \frac{3}{2} \cdot |x|$ egyenlőtlenség, de az $y^2 \geq \frac{9}{4} \cdot x^2$ egyenlőtlenség is, ezért ezek is a megadott ponthalmaz egy-egy algebrai leírását adják.

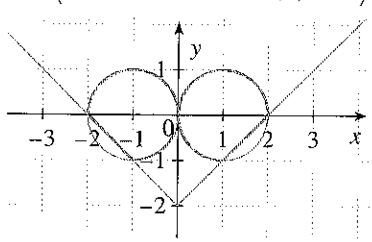
2525. Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.
$xy(y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0 \vee y = 0 \vee y = -1$
Mivel $(y+1)^2 \geq 0$ $\forall y \in \mathbf{R}$ esetén $\Rightarrow$ $xy \geq 0$, ha x és y azonos előjelű.



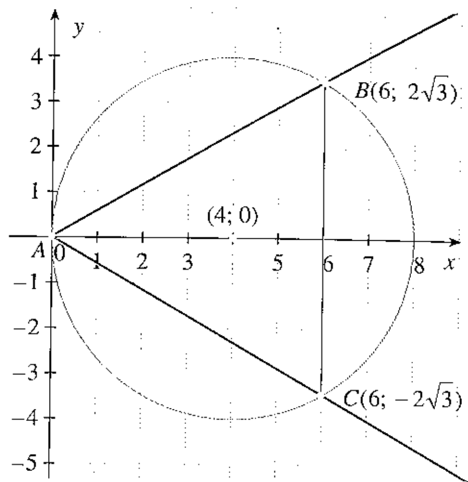
2526.* $|x| - 2 \leq y \leq \sqrt{2|x| - x^2}$



$\left(|x| - 2 \leq y \wedge y^2 \leq 2|x| - x^2\right)$



2527. Az adott kör középpontja (4; 0). A szabályos háromszög szimmetrikus bármely magasságvonalának egyenesére. Mivel a keresett háromszög egyik csúcsa az origó, a szimmetria miatt a háromszög egyik magasságvonala az x tengely, az origón átmenő két oldala egyenesének irányszöge $+30°$, illetve $-30°$, meredekségük $m_1 = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, illetve $m_2 = \operatorname{tg}(-30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, az oldalegyenesek egyenlete:
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, illetve $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.



A kör és az oldalegyenesek metszéspontja adja a keresett háromszög csúcspontjait.

Ezek az $\left.\begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ (x-4)^2 + y^2 = 16 \end{array}\right\}$, illetve $\left.\begin{array}{l} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \\ (x-4)^2 + y^2 = 16 \end{array}\right\}$ egyenletrendszerek megfelelő megoldása.

Az egyenletrendszerek első egyenleteit négyzetre emelve behelyettesítjük y^2-et a második egyenletbe.

Így kapott másodfokú egyenlet mindkét esetben: $(x-4)^2 + \frac{1}{3}x^2 = 16$.

Ennek megoldásai 0, illetve 6, a megfelelő egyenletrendszerekbe visszahelyettesítve a háromszög csúcspontjai: $A(0; 0)$; $B(6; 2\sqrt{3})$; $C(6; -2\sqrt{3})$.
Mivel a B és C csúcspontok abszcisszája megegyezik, távolságuk közvetlenül leolvasható, a háromszög oldalának hossza: $a = BC = 4\sqrt{3}$.
A háromszög kerülete: $K = 3a = 12\sqrt{3}$ (hosszúságegység).
A háromszög területe: $T = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ (területegység).

Másik megoldás:

Egy a oldalú szabályos háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, a körülírt kör sugara ennek $\frac{2}{3}$ része: $r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Feladatunkban a kör sugara 4, ezért $4 = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $a = 4\sqrt{3}$.

A háromszög kerülete: $3a = 12\sqrt{3}$, területe: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$.

2528. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-0{,}8; -4{,}8) - (-1{,}8; 0{,}2) = (1; -5)$;
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (9{,}2; -2{,}8) - (-1{,}8; 0{,}2) = (11; -3)$;
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (9{,}2; -2{,}8) - (-0{,}8; -4{,}8) = (10; 2)$.
A merőlegesség igazolásához a skaláris szorzás alkalmazása kínálkozik:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (1; -5)(10; 2) = 10 + (-10) = 0$, tehát AB és BC merőleges szakaszok.
Az ABC háromszög tehát a B csúcsánál derékszögű.

b) Az A csúcsnál fekvő α hegyesszög mindegyik szögfüggvénye kiszámítható.

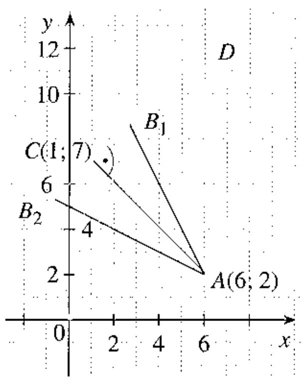
Például $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{10^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \sqrt{\dfrac{104}{26}} = \sqrt{4} = 2$, amiből $\alpha = 63{,}43°$.

A másik hegyesszög 26,57° nagyságú.

c) A derékszögű háromszög köré írható kör középpontja az átfogó (most az AC szakasz) felezőpontja: $F(3{,}7; -1{,}3)$.

A kör sugara az átfogó hosszának fele: $r = FA = \sqrt{5{,}5^2 + (-1{,}5)^2} = \sqrt{32{,}5}$.
A körülírt kör egyenlete tehát: $(x - 3{,}7)^2 + (y + 1{,}3)^2 = 32{,}5$.

2529. a) Vektorokkal dolgozunk. A háromszög harmadik csúcsának meghatározásához elegendő az ebbe a csúcsba mutató helyvektor koordinátáit megadni. A feladat szövege szerint a harmadik csúcs megkapható úgy is, hogy az A csúcsot 90°-kal elforgatjuk a C csúcs körül, majd az elforgatással kapott pontot C-ből a harmadára kicsinyítjük. Mivel a forgatás kétféle irányban is történhet, ezért a feladatnak két megoldása van. Mi a +90°-os forgatással adódó megoldást részletezzük (ábra).



$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (6; 2) - (1; 7) = (5; -5)$,
ennek +90°-os elforgatottja a $\overrightarrow{CD}(5; 5)$ vektor.

Ezt C-ből harmadára kicsinyítve: $\overrightarrow{CB_1} = \dfrac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{3} \cdot (5; 5) = \left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

A B_1 pontba mutató helyvektor: $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB_1} = (1; 7) + \left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}\right) = \left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{26}{3}\right)$.

A helyvektor koordinátái megegyeznek a végpontjának koordinátáival, ezért a harmadik csúcs: $B_1\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{26}{3}\right)$.

A −90°-os elforgatáshoz tartozó lépések:
$\overrightarrow{CB_2} = -\dfrac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CD} = -\dfrac{1}{3} \cdot (5; 5) = \left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$,

$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB_2} = (1; 7) + \left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{5}{3}\right) = \left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{16}{3}\right)$, tehát $B_2 = \left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{16}{3}\right)$.

Az AB_1C háromszög súlypontja $S_1\left(\dfrac{29}{9}; \dfrac{53}{9}\right)$,

az AB_2C háromszög súlypontja $S_2\left(\dfrac{19}{9}; \dfrac{43}{9}\right)$.

Megjegyzés:
Vektorok nélkül is dolgozhatunk. Felírjuk az AC-re merőleges, C-n áthaladó egyenes egyenletét: $x - y = -6$. Felírjuk a C középpontú, $\dfrac{1}{3}AC$ sugarú kör egyenletét is: $(x-1)^2 + (y-7)^2 = \dfrac{50}{9}$, majd megoldjuk a két alakzat egyenletéből alkotott egyenletrendszert.

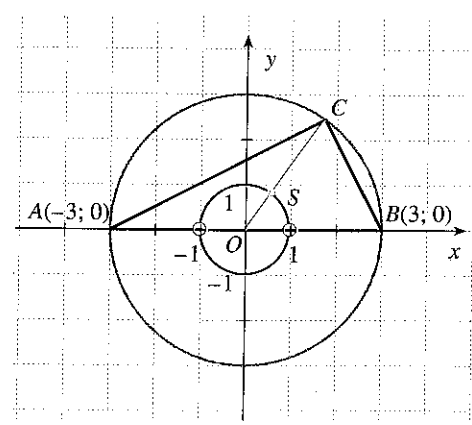
A megoldásként adódó rendezett számpárok $\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{26}{3}\right)$ és $\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{16}{3}\right)$.

b) Derékszögű háromszög körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja, sugara pedig az átfogó hosszának fele.

Az AB_1C háromszög körülírt körének egyenlete: $\left(x - \dfrac{13}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{16}{3}\right)^2 = \dfrac{125}{9}$,

az AB_2C háromszögé pedig: $\left(x - \dfrac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{11}{3}\right)^2 = \dfrac{125}{9}$.

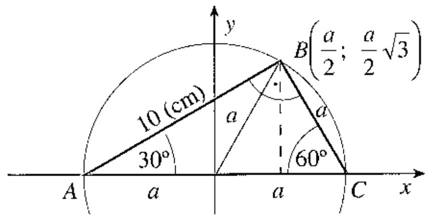
2530. C a kör tetszőleges (A-tól és B-től különböző) pontja. Az $ABC\Delta$ S súlypontja az OC szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja. S-hez egy O középpontú, $\dfrac{1}{3}$ arányú kicsinyítéssel juthatunk. Az O középpontú, $r = 3$ sugarú kör $\dfrac{1}{3}$ arányú kicsinyített képe az O középpontú, egységsugarú kör. E körnek az x tengelyen lévő pontjain kívül minden pontja a keresett ponthalmazhoz tartozik, ui., ha S az O középpon-



tú, egységsugarú körön van, akkor az O középpontú, 3 arányú nagyítás az eredeti kör egy pontjába viszi át.

Tehát a súlypontok halmaza az $x^2 + y^2 = 1$ kör, elhagyva ebből a $(-1; 0)$ és a $(1; 0)$ pontot.

2531. a) Az ábrán a-val jelölt szakaszra felírva a Pitagorasz-tételt: $(2a)^2 = 10^2 + a^2$, ahonnan $a = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5{,}8$.



Tehát úgy célszerű felvenni a három települést a koordináta-rendszerben (gondolva a b) részre is, ahol legjobb, ha a kör középpontja az origó!), hogy $A(-5{,}8; 0)$, $C(5{,}8; 0)$, és végül a B pont koordinátáira az ábra alapján $(2{,}9; 5)$ adódik. Ezt ábrázoljuk.

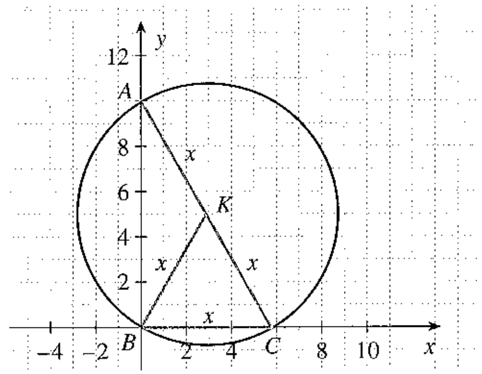
b) A Thalész-kör egyenlete: $x^2 + y^2 = \frac{100}{3}$, azaz $3x^2 + 3y^2 = 100$.

Másik lehetőség az elhelyezésre, ha a derékszöget tesszük az origóba, az oldalakat pedig a tengelyekre, pl. így:

$A(0; 10)$; $B(0; 0)$; ekkor $C\left(\frac{10}{\sqrt{3}}; 0\right)$.

A kör egyenlete most:

$$\left(x - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + (y-5)^2 = \frac{100}{3}.$$



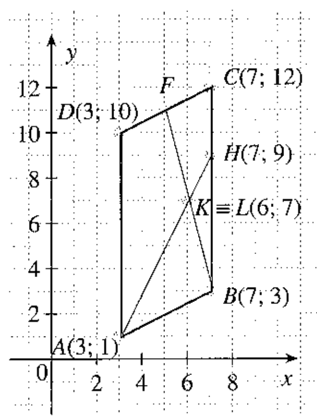
2532. BC oldal C-hez közelebbi H harmadolópontja: $H(7; 9)$, CD oldal F felezőpontja $F(5; 11)$

BF felezőpontja: $K\left(\frac{7+5}{2}; \frac{3+11}{2}\right) \Rightarrow K(6; 7)$.

AH szakasz H-hoz közelebbi negyedelőpontja:

$L\left(\frac{3 \cdot 7 + 1 \cdot 3}{4}; \frac{3 \cdot 9 + 1 \cdot 1}{4}\right) \Rightarrow L(6; 7)$.

Tehát K és L egybeesik, vagyis AH felezi BF-et, és BF negyedeli AH-t.



2533. $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{3} \Rightarrow P\left(\frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{5}; \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 0}{5}\right) \Rightarrow P(5{,}8; 1{,}2)$.

D és P pontokon átmenő egyenes egyenlete: egy irányvektora $\mathbf{v} = \overrightarrow{DP}(3{,}8; -1{,}8)$ és áthalad $D(2; 3)$ ponton, egyenlete:

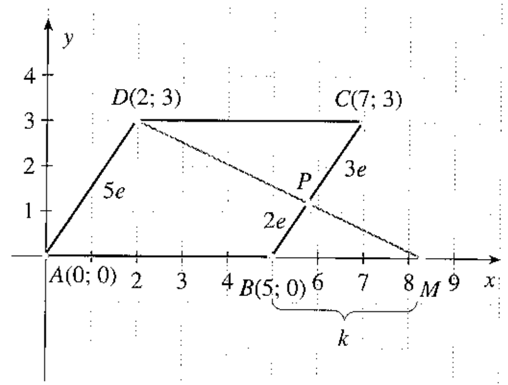
$1{,}8x + 3{,}8y = 1{,}8 \cdot 2 + 3{,}8 \cdot 3$

$0{,}9x + 1{,}9y = 7{,}5.$

Ez az egyenes az AB egyenesét (az x tengelyt) ott metszi, ahol

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{3} = 8{,}\dot{3}$.

Tehát DP egyenes AB egyenesét az $M(8{,}\dot{3}; 0)$ pontban metszi.



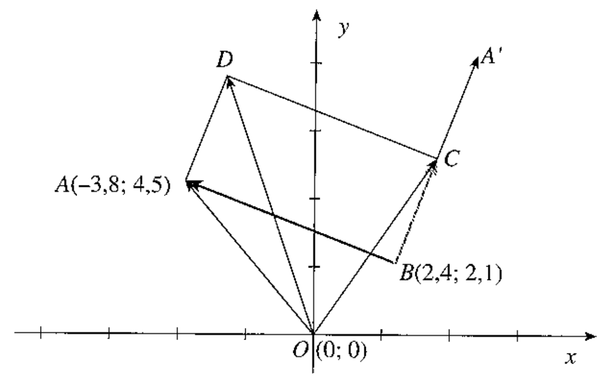
Másik megoldás:

$BPM\,\Delta \sim ADM\,\Delta$, mert két-két szögük egyenlő $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő: $\frac{BP}{AD} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{k}{5+k} \Rightarrow k = \frac{10}{3} = 3{,}\dot{3}$, így AM szakasz hossza $8{,}\dot{3}$.

Tehát DP egyenes AB egyenesét az $M(8{,}\dot{3}; 0)$ pontban metszi.

2534. a) Vektorokkal dolgozunk. A téglalap hiányzó csúcsának meghatározásához elegendő az ebbe a csúcsba mutató helyvektor koordinátáit megadni.

A feladat szövege szerint a C csúcs megkapható úgy is, hogy az A csúcsot $-90°$-kal elforgatjuk a B csúcs körül, majd az elforgatással kapott pontot B-ből a felére kicsinyítjük:



$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-3{,}8; 4{,}5) - (2{,}4; 2{,}1) = (-6{,}2; 2{,}4)$, ennek $-90°$-os elforgatottja a $\overrightarrow{BA'} = (2{,}4; 6{,}2)$ vektor. Ezt B-ből felére kicsinyítve:

$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA'} = \frac{1}{2} \cdot (2{,}4;\ 6{,}2) = (1{,}2;\ 3{,}1)$.

A C pontba mutató helyvektor:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (2{,}4; 2{,}1) + (1{,}2; 3{,}1) = (3{,}6; 5{,}2)$.

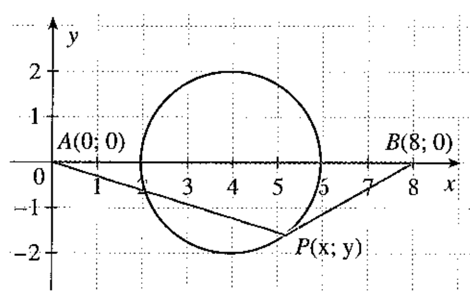
A helyvektor koordinátái megegyeznek a végpontjának koordinátáival, ezért a harmadik csúcs: $C(3,6; 5,2)$.
A téglalap D csúcsába mutató helyvektor:
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = (-3,8; 4,5) + (1,2; 3,1) = (-2,6; 7,6)$.
A helyvektor koordinátái megegyeznek a végpontjának koordinátáival, ezért a negyedik csúcs: $D(-2,6; 7,6)$.

Megjegyzés:
Vektorok nélkül is dolgozhatunk. Felírjuk az AB-re merőleges, B-n áthaladó egyenes egyenletét: $3,1x - 1,2y = 4,92$. Felírjuk a B középpontú, $\frac{1}{2}AB$ sugarú kör egyenletét is: $(x-2,4)^2 + (y-2,1)^2 = 11,05$, majd megoldjuk a két alakzat egyenletéből alkotott egyenletrendszert. A megoldásként adódó rendezett számpárok: $(3,6; 5,2)$ és $(1,2; -1)$. A téglalap pozitív körüljárású, ezért csak a $(3,6; 5,2)$ rendezett számpár felel meg. Tehát $C(3,6; 5,2)$. A téglalap középpontja az AC átló felezőpontja: $F(-0,1; 4,85)$. Mivel a BD átlónak ugyancsak F a felezőpontja, ebből már D meghatározható: $D(-2,6; 7,6)$.

b) Az AB szakasz hossza $\sqrt{44,2}$, a BC oldal hossza ennek a fele, tehát a téglalap kerülete $3 \cdot \sqrt{44,2} = 19,94$, területe pedig $\frac{44,2}{2} = 22,1$.

c) A körülírt kör középpontja az AC átló felezőpontja: $F(-0,1; 4,85)$, a kör átmérője az AC átló. $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 44,2 + \frac{1}{4} \cdot 44,2 = 55,25$, tehát a körülírt kör területe $\frac{55,25\pi}{4} = 43,39$.

2535. Vegyünk fel úgy egy koordináta-rendszert, hogy abban az AB szakasz egyik végpontja az origó, másik végpontja pedig az abszcisszatengely pontja legyen: $A(0;0)$, $B(8; 0)$.
A sík egy tetszőlegesen kiválasztott $P(x; y)$ pontja pontosan akkor tartozik hozzá a keresett halmazhoz, ha
$AP^2 + BP^2 = 40$.

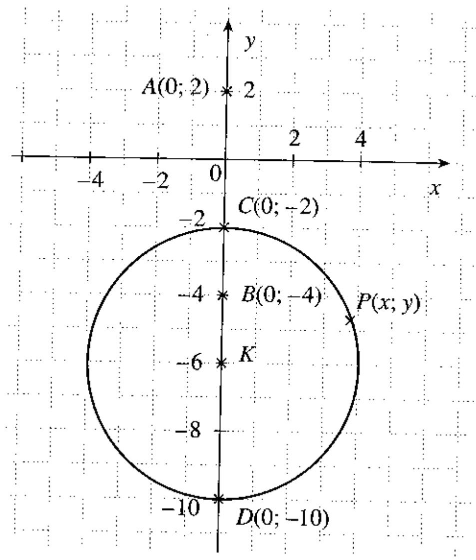


A tanult távolságképlet felhasználásával: $x^2 + y^2 + (8-x)^2 + y^2 = 40$.
Rendezés után: $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$, illetve $(x-4)^2 + y^2 = 4$ alakba írható.
Ez a keresett ponthalmaz egy egyenlete.
A keresett pontok halmaza tehát a $(4; 0)$ középpontú, 2 sugarú kör.
(Az alkalmazott átalakítások mind megfordíthatók voltak, ezért a megadott kör minden pontja valóban hozzá tartozik a keresett halmazhoz.)

2536. Alkalmazzuk az előző feladat módszerét! A felvett koordináta-rendszerben a szakasz végpontjai: $A(0; 0)$ és $B(6; 0)$.
A sík egy tetszőlegesen kiválasztott $P(x; y)$ pontja pontosan akkor tartozik hozzá a keresett halmazhoz, ha $PA = 2PB$, azaz igaz, hogy $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2 + y^2}$.
Ez tehát a keresett pontok halmazának egy egyenlete. A ponthalmaz tulajdonságait ebből az alakból nem látjuk, ezért az egyenletét ekvivalens átalakításokkal más alakra hozzuk:
$x^2 + y^2 = 4(x-6)^2 + 4y^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 48x + 144 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$.
Ez ekvivalens az $(x-8)^2 + y^2 = 16$ egyenlettel, tehát a keresett ponthalmaz a $(8; 0)$ középpontú, 4 sugarú kör. (Az alkalmazott átalakítások mind megfordíthatók voltak, ezért a megadott kör minden pontja valóban hozzá tartozik a keresett halmazhoz.)

2537. a) Az $A(0; 2)$ és a $B(0; -4)$ ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az AB szakasz felezőmerőlegese. Ennek egyenlete: $y = -1$.

b) A $P(x; y)$ pont pontosan akkor van kétszer akkora távolságra A-tól, mint B-től, ha
$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y+4)^2}$.
Minthogy az egyenlet mindkét oldala pozitív, ezért az egyenlet ekvivalens az
$x^2 + (y-2)^2 = 4[x^2 + (y+4)^2]$
egyenlettel.
Ezt átrendezve
$3(x^2 + y^2) + 36y + 60 = 0$ és 3-mal osztva jutunk az alábbi egyenlethez:

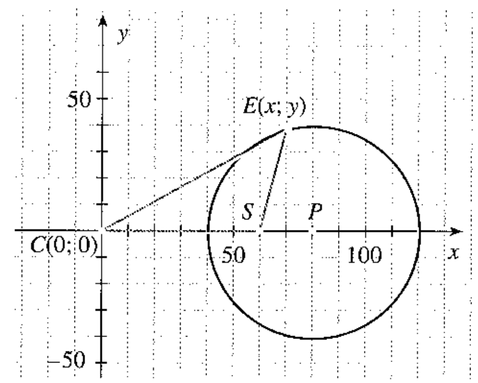


$x^2 + y^2 + 12y + 20 = 20$. E kör középponti egyenlete $x^2 + (y+6)^2 = 16$.
E kör minden pontja megfelel, mert végig ekvivalens lépésekkel dolgoztunk.
A keresett ponthalmaz a $K(0; -6)$ középpontú, 4 egység sugarú kör.

c) $P(x; y)$ pont feleakkora távolságra van A-tól, mint B-től pontosan akkor, ha
$2\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y+4)^2}$.
A b) pontban leírt úton (ekvivalens átalakításokkal) a következő kör egyenletéhez jutunk: $x^2 + (y-4)^2 = 16$.
A keresett ponthalmaz tehát egy $O(0; 4)$ középpontú, 4 egység sugarú kör.

Megjegyzés:
Általában is igaz, hogy ha adott A és B pont és $\lambda > 0$ ($\lambda \neq 1$) valós szám, akkor azon P pontok halmaza, amelyekre $PA = \lambda PB$ egy kör. Ezt a kört Apollonioszféle körnek nevezik.

2538. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert, amelyben Cuki a $C(0; 0)$, Szotyi pedig az $S(60; 0)$ pontban van. A gazda az eledelt az $E(x; y)$ pontba tette, tehát Cukitól $CE = \sqrt{x^2 + y^2}$ távolságra, Szotyitól pedig $ES = \sqrt{(x-60)^2 + y^2}$ távolságra. A szöveg szerint a kutyák egyszerre érkeznek az eledelhez, ezért $CE = 2 \cdot SE$, vagyis az $E(x; y)$ koordinátáira igaz, hogy $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-60)^2 + y^2}$.



Ez a kétismeretlenes egyenlet ekvivalens a következőkkel:

$x^2 + y^2 = 4 \cdot (x^2 - 120x + 3600 + y^2)$

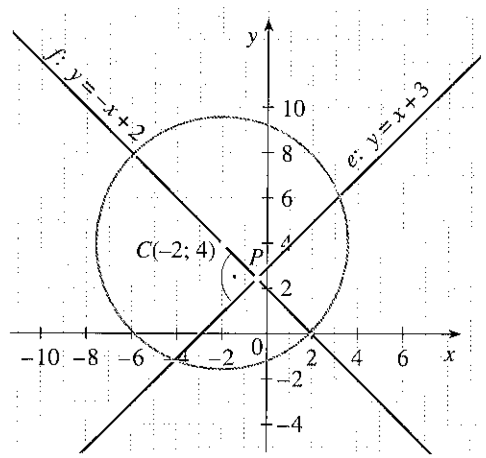
$3x^2 + 3y^2 - 480x + 14\,400 = 0$

$x^2 + y^2 - 160x + 4800 = 0$

$(x-80)^2 + y^2 = 1600.$

Az eledel tehát bármelyik olyan $E(x; y)$ pontban lehet, amelynek koordinátái igazzá teszik az utolsónak kapott egyenletet. Ezek a pontok egy olyan kört alkotnak, amelynek középpontja a $P(80; 0)$ pont, sugara pedig 40 (méter).

2539. Határozzuk meg a kör középpontját: osszuk el az egyenletet 4-gyel és alakítsunk teljes négyzetté! A kör egyenlete: $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 31$.
Így a kör középpontja $C(-2; 4)$. *
Állítsunk (f) merőlegest C-ből az adott (e) egyenesre. E két egyenes P metszéspontjának és C-nek a távolságát kell meghatározni.
Mivel f merőleges e-re, meredekségeik szorzata -1, e meredeksége $1 \Rightarrow f$ meredeksége -1 és f illeszkedik C-re $\Rightarrow f\colon\ y = -x + 2$.



$e \cap f = \{P\}$ $\quad \left.\begin{array}{l} e\colon\ y = x + 3 \\ f\colon\ y = -x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow P(-0{,}5;\ 2{,}5).$

C és e távolsága, azaz a CP távolság: $\sqrt{(-2+0{,}5)^2 + (4-2{,}5)^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$

Másik megoldás:
*-tól: A pont és egyenes távolságképletébe C koordinátáit behelyettesítve:

$$d = \left|\frac{x - y + 3}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{-2 - 4 + 3}{\sqrt{2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2540. a) A szabályos háromszög körülírt körének sugara a háromszög magasságának két harmada: $r = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 4.$

b) A nagyított kör középpontja a $C_1(2; 4)$ pont, sugara $r_1 = 8$, tehát a kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 64.$

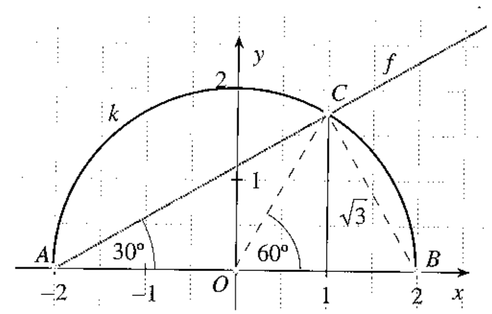
c) Az eredeti körbe írt szabályos háromszög területének négyszerese:

$$4 \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3} \approx 83{,}14.$$

2541. A két alakzat egyenlete:

$k\colon\ y = \sqrt{4 - x^2}$ és $f\colon\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2).$

A k alakzat egy origó középpontú félkör, melynek sugara 2.
Az f alakzat egy egyenes, mely az x tengelyt az $A(-2; 0)$ pontban metszi, meredeksége $m = \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$



Az egyenes pozitív irányszöge tehát 30°. Egy pontja és iránya ismeretében az egyenes megszerkeszthető. A rajzról leolvashatók a két közös pont koordinátái (az egyik érték csak közelítőleg): $(-2; 0)$, $(1; 1{,}7)$.
Ha kiegészítjük az ábrát, akkor a létrejött $COB\sphericalangle = 60°$, mert ez az AOC egyenlő szárú háromszög külső szöge, továbbá $OC = OB$, ezért a $COB\,\Delta$ egyenlő oldalú. A BOC szabályos háromszög magassága $\sqrt{3}$. Ez egyúttal a C ordinátája. Így a C második koordinátája is pontosan megállapítható.
Az egyenletrendszer megoldásai: $A(-2; 0)$, $C(1; \sqrt{3})$.

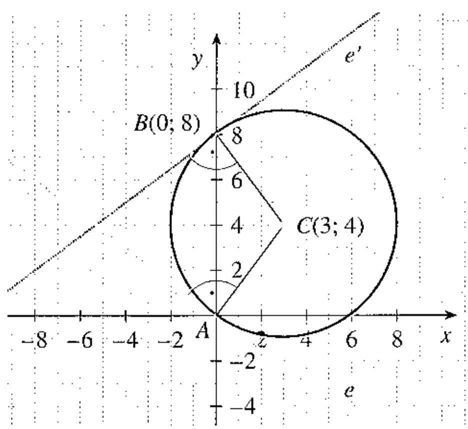
Ezt megoldva, majd a kapott gyököket visszahelyettesítve adódik az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$M=\left\{\left(\frac{15+3\sqrt{15}}{10};\ \frac{-25-\sqrt{15}}{10}\right);\ \left(\frac{15-3\sqrt{15}}{10};\ \frac{-25+\sqrt{15}}{10}\right)\right\}$$

Három tizedesjegyre kerekítve a közös pontok koordinátái tehát: $P_1(2{,}662; -2{,}887)$, $P_2(0{,}338; -2{,}113)$.

2546. A K középpontú kör P pontbeli érintőjének normálvektora $\overrightarrow{KP}$.
Az adott körnél $K(-4; -3)$, $P(-1; 1)$, $\overrightarrow{KP} = (3; 4)$.
Az érintő egyenlete $3x + 4y = 1$.
P-ből indulva ezen az egyenesen mozog tovább a pont.

2547. A körpálya középpontja $C(3; 4)$, sugara 5, a kör egyenlete:
$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$
A kör az y tengelyt ott metszi, ahol $x = 0$. $\Rightarrow$ A metszéspontok:
$A(0; 0)$, $B(0; 8)$.
Az A pontbeli érintő egy normálvektora $\overrightarrow{AC}(3; 4)$ és áthalad az $A(0; 0)$ ponton, így az érintő egyenlete:
e: $3x + 4y = 0$.
A B pontbeli érintő egy normálvektora $\overrightarrow{BC}(3; -4)$ és áthalad a $B(0; 8)$ ponton, így az érintő egyenlete:
e': $3x - 4y = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 8 \Rightarrow 3x - 4y = -32$.



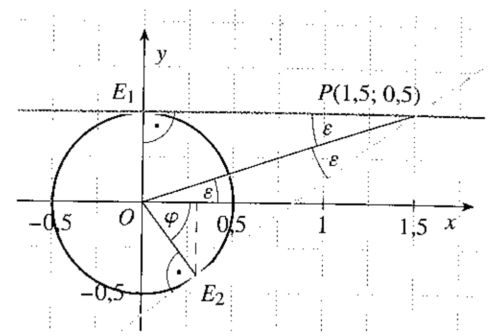
2548. a) A körpálya középpontja az origó, sugara pedig 0,5 méter.
A megadott képletbe helyettesítve:

$$v=\frac{r\cdot B\cdot Q}{m}=\frac{0{,}5\cdot 2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{1{,}67\cdot 10^{-27}}=\frac{1{,}6}{1{,}67}\cdot 10^{8}=9{,}581\cdot 10^{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

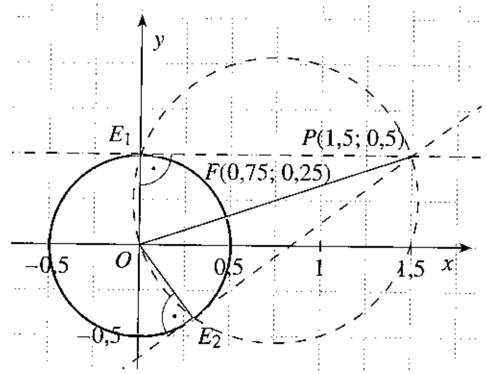
(azaz a fénysebességnek kb. 32%-a).

b) *Első megoldás:*
Az adatok alapján világos, hogy az egyik pont az $E_1(0; 0{,}5)$ lehet. Az E_2 koordinátáit az ábra alapján is megállapíthatjuk az OE_2 átfogójú, φ hegyesszögű derékszögű háromszög segítségével: $E_2(0{,}5\cos\varphi; -0{,}5\sin\varphi)$.
Az ábrán ε-nal jelölt szögek valóban egyenlők, egyrészt az OP egyenesére vonatkozó szimmetria miatt, másrészt pedig amiatt, mert PE_1 párhuzamos az abszcisszatengellyel, így az origónál fekvő xOP szög és a P-nél fekvő OPE_1 szög váltószögek.

Az OE_1P derékszögű háromszögből
$\mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}$, tehát $\varepsilon = 18{,}435°$.
Az OE_2P derékszögű háromszögből
$\varphi + 2\varepsilon = 90°$, vagyis
$\varphi = 90° - 2\varepsilon = 53{,}13°$.
Ezért $\cos\varphi = 0{,}600$ és
$\sin\varphi = 0{,}800$.
Tehát $E_2(0{,}300; -0{,}400)$ a másik pont, ahol a proton elhagyhatta a pályát.



Másik megoldás:
Az OP átmérőjű kör kimetszi a körpályából mindkét érintési pontot (Thalész-tétel).
Az OP szakasz felezőpontja $F(0{,}75; 0{,}25)$,
$OF^2 = 0{,}75^2 + 0{,}25^2 = 0{,}625$,
így a Thalész-kör egyenlete:
$(x-0{,}75)^2 + (y-0{,}25)^2 = 0{,}625$,
ami átalakítva
$x^2 + y^2 - 1{,}5x - 0{,}5y = 0$.



A két kör metszéspontjait az egyenleteikből alkotott egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg.

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=0{,}25\\x^2+y^2-1{,}5x-0{,}5y&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=0{,}25\\0{,}25-1{,}5x-0{,}5y&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=0{,}25\\y&=0{,}5-3x\end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x^2+(0{,}5-3x)^2&=0{,}25\\y&=0{,}5-3x\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}10x^2-3x&=0\\y&=0{,}5-3x\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x(10x-3)&=0\\y&=0{,}5-3x\end{aligned}\right\}.$$

Ebből a $(0; 0{,}5)$ és a $(0{,}3; -0{,}4)$ rendezett számpár adódik az egyenletrendszer megoldásaként. A körpályát a proton az $E_1(0; 0{,}5)$ vagy az $E_2(0{,}3; -0{,}4)$ pontban hagyhatta el.

2549. Az a kérdés, hogy a két alakzatnak van-e közös pontja. Ha van ilyen, akkor az ütközés lehetséges.
A két alakzat egyenletéből alkotott egyenletrendszer (az egyenletek átalakítása után):

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=\frac{1}{4}\\x&=\frac{16y+1}{12}\end{aligned}\right\}.$$

Behelyettesítés után:

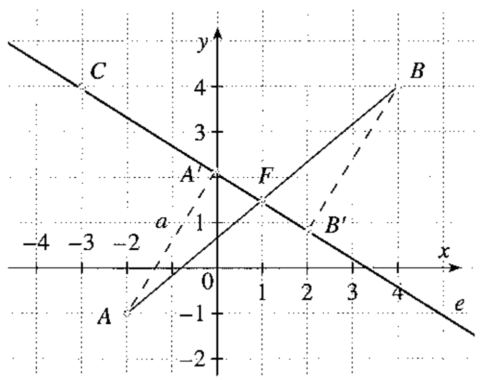
$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{16y+1}{12}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\\&x=\frac{16y+1}{12}\end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletben a négyzetre emelést elvégezve és 144-gyel mindkét oldalát szorozva:

$$\left.\begin{aligned}&256y^2+32y+1+144y^2=36\\&x=\frac{16y+1}{12}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&400y^2+32y-35=0\\&x=\frac{16y+1}{12}\end{aligned}\right\}.$$

Mivel az y-ban másodfokú egyenlet diszkriminánsa $(32^2+4\cdot400\cdot35)$ pozitív, ezért az egyenletnek van megoldása (két különböző), így az egyenletrendszernek is van megoldása, vagyis a két alakzatnak (a körnek és az egyenesnek) is van közös pontja. A foton tehát eltalálhatja részecskét.
(A megoldáshoz ugyan nem tartozik hozzá, de megadjuk a közös pontokat is: $P_1(0{,}428;\ 0{,}258)$, $P_2(-0{,}368;\ -0{,}338)$.)

2550. a) A C-n átmenő, A-tól és B-től egyenlő távolságra két egyenes van:
1. C-re és AB felezőpontjára, F-re illeszkedő egyenes.
2. C-re illeszkedő, AB-vel párhuzamos egyenes.



Minthogy az autóbusz-járatnak a két falu között kell haladnia, ezért csak az 1. esetnek megfelelő e egyenes a feladat megoldása.
Részletezve:

$$F\left(1;\ \frac{3}{2}\right),\quad \overrightarrow{FC}=\left(-4;\ \frac{5}{2}\right).$$

Az $\overrightarrow{FC}$ irányvektorú, C-re illeszkedő e egyenes egyenlete

$$\frac{5}{2}x+4y=-\frac{15}{2}+16,\text{ illetve } 5x+8y=17\quad(e).$$

b) Az autóbusz állomást F-ben építik fel.

c) Ha az e út megépítése után két buszállomás is építhető, s ezeknek A-hoz, illetve B-hez is a lehető legközelebb kell lenniük, a két állomás helyét az A-ból, illetve B-ből az e-re állított merőlegeseknek, a-nak és b-nek, az e-vel való metszéspontja, A' és B' adja meg.

Az A-ra illeszkedő, e-re merőleges

$$\left.\begin{aligned}&a\text{ egyenes egyenlete: } -8x+5y=11\\&e\text{ egyenes egyenlete: } 5x+8y=17\end{aligned}\right\}.$$

Ezen egyenletrendszer megoldása adja az egyik buszállomás, A' koordinátáit.

$$x=-\frac{3}{89}\ (\approx-0{,}034)$$

$$y=\frac{191}{89}\ (\approx 2{,}15).$$

Az egyik buszállomás helye $A'(-0{,}03;\ 2{,}15)$.
A B-re illeszkedő, e-re merőleges
b egyenes egyenlete: $-8x+5y=-12$,
e egyenes egyenlete: $5x+8y=17$.
Ezen egyenletrendszer megoldása adja a busz másik megállójának, B' koordinátáit:

$$x=\frac{181}{89}\ (\approx 2{,}03),$$

$$y=\frac{76}{89}\ (\approx 0{,}85).$$

A másik buszállomás helye $B'(2{,}03;\ 0{,}85)$.

2551. Vegyünk fel egy alkalmas koordináta-rendszert. Illeszkedjen az e egyenesre az abszcisszatengely és legyen az A pont az ordinátatengelyen: $A(0;\ a)$, legyen továbbá $B(b;\ c)$. Mivel az e egyenes és a két pont adottak voltak, ez az algebra nyelvén azt jelenti, hogy az a, b és c valós számok adottak.
Vegyünk fel egy tetszőleges pontot az e egyenesen (az abszcisszatengelyen): $P(x;\ 0)$. Erre a pontra nézve:

$$PA^2=(x-0)^2+(0-a)^2=x^2+a^2,$$

$$PB^2=(x-b)^2+(0-c)^2=x^2-2bx+b^2+c^2,\text{ tehát}$$

$$PA^2+PB^2=2x^2-2bx+a^2+b^2+c^2.$$

Ha az e egyenes összes pontjára képeztük ezt az összeget, akkor a feladat kérdése így is megfogalmazható:
„Melyik számot írjuk az x helyébe, hogy $2x^2-2bx+a^2+b^2+c^2$ a másodfokú polinom helyettesítési értéke a legkisebb legyen?”.
Alakítsuk át a másodfokú polinomot a teljes négyzetté kiegészítés módszerével:

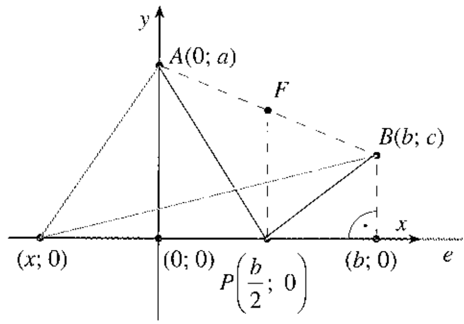
$$2x^2-2bx+a^2+b^2+c^2=2(x^2-bx)+a^2+b^2+c^2=$$

$$=2\left(x-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{2}+a^2+b^2+c^2,\quad\text{tehát}$$

$$2x^2-2bx+a^2+b^2+c^2=2\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+a^2+\frac{b^2}{2}+c^2.$$

Mivel $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$, ezért a legkisebb értéket akkor kapjuk, ha $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 = 0$, vagyis ha az x helyébe a $\frac{b}{2}$ számot írjuk.

A $PA^2 + PB^2$ összeg tehát az abszcisszatengely $P\left(\frac{b}{2};\ 0\right)$ pontjára minimális.

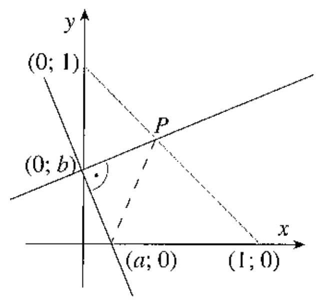


Megjegyzés:

A minimum-tulajdonsággal rendelkező $P\left(\frac{b}{2};\ 0\right)$ pont az AB szakasz F felezőpontjának a merőleges vetülete az e egyenesen.

2552. a) Lásd az ábrát!

b) c) Az alsó befogó egyenese a egység „vízszintes" haladás alatt b egységet süllyed „függőlegesen", tehát meredeksége $-\frac{b}{a}$, az ordinátatengelyen lévő metszete a létrehozás miatt b, tehát egyenlete: $y = -\frac{b}{a}x + b$.



Erre merőleges, másik befogónak alkalmas egyenes (mivel merőleges egyenesek meredekségének szorzata -1) az $y = \frac{a}{b}x + b$. Ennek az $x + y = 1$ egyenletű átfogóval való metszéspontját megkapjuk a két egyenlet rendszerként való megoldásával.

A befogó egyenletében már kifejezett y-t beírjuk az átfogó egyenletébe:

$$x + \frac{a}{b}x + b = 1,\ \text{amiből}\ \left(1+\frac{a}{b}\right)x = 1 - b,\ \text{azután:}\ x = \frac{1-\mathrm{b}}{\frac{b+a}{b}} = \frac{b-b^2}{a+b}.$$

$$\text{Visszaírva: } y = 1 - x = 1 - \frac{b-b^2}{a+b} = \frac{a+b-(b-b^2)}{a+b} = \frac{a+b^2}{a+b}.$$

A metszéspont tehát $P\left(\frac{b-b^2}{a+b};\ \frac{a+b^2}{a+b}\right)$. A befogók akkor egyenlők, ha a végpontok koordinátái különbségének négyzetösszegei egyenlők, azaz:

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{b-b^2}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a+b^2}{a+b} - b\right)^2.$$

A jobb oldal átalakítva:

$$\left(\frac{b-b^2}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a+b^2-ab-b^2}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{b-b^2}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a-ab}{a+b}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{b(1-b)}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a(1-b)}{a+b}\right)^2.$$

Négyzetre emelve, a nevezővel átszorozva:

$(a^2+b^2)(a+b)^2 = b^2(1-b)^2 + a^2(1-b)^2$.

A jobb oldalon $(1-b)^2$-et kiemelve, az egyenlet – a nyilván nem nulla – a^2+b^2-tel elosztható, és így: $(a+b)^2 = (1-b)^2$.

Felbontva: $a^2 + 2ab + b^2 = 1 - 2b + b^2$, átrendezve: $2ab + 2b = 1 - a^2$, vagyis $b = \frac{1-a^2}{2a+2} = \frac{(1+a)(1-a)}{2(a+1)}$.

Mivel a megadott határok miatt $a \neq -1$, egyszerűsíthetünk, és így kapjuk: $b = \frac{1-a}{2}$. (Avagy: $a + 2b = 1$.)

d) Mivel mindkét befogó hossza $\sqrt{a^2+b^2}$, a terület:

$$T = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a^2 + \left(\frac{1-a}{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2 + \frac{1-2a+a^2}{4}}{2} = \frac{5a^2-2a+1}{8} =$$

$$= 0{,}625a^2 - 0{,}25a + 0{,}125.$$

e) Az iménti eredményt átalakítva kapjuk: $T = 0{,}625(a^2 - 0{,}4a + 0{,}2) = 0{,}625((a-0{,}2)^2 - 0{,}04 + 0{,}2) = 0{,}625(a-0{,}2)^2 + 0{,}1$, aminek van minimuma, mégpedig akkor, ha $a = 0{,}2$. Ekkor $b = \frac{1-a}{2} = 0{,}4$, a terület pedig 0,1 (vagyis az eredeti háromszög területének ötöde).

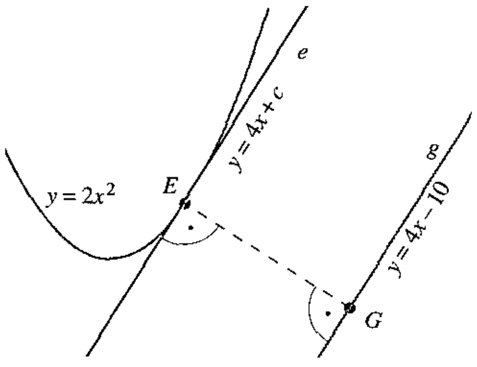
Másik megoldás:

$T = \frac{5a^2-2a+1}{8}$ minimális, ha $5a^2 - 2a$ minimális.

$5a^2 - 2a = a(5a-2)$, ez minimális az $a = 0{,}2$ esetén (az $a \mapsto a(5a-2)$ függvény két zérushelyének a számtani közepével). Ekkor $b = \frac{1-a}{2} = 0{,}4$, a terület pedig 0,1 (vagyis az eredeti háromszög területének ötöde).

2553. A pálya az y tengelyt az $x = 0$ helyen, azaz az $y = -4$ pontban metszi. Az x tengelyt pedig ott, ahol $y = 0$, tehát a $-2x^2 + 8x - 4 = 0$ egyenlet gyökeiben.
-2-vel való osztás után: $x^2 - 4x + 2 = 0$, ahonnan $x_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41$ és $x_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$ helyeken.

2554. Az ábra szerinti jelölést használjuk (ellenőrizhető, hogy a megadott g egyenesnek és a parabolának nincs közös pontja és g nem párhuzamos a parabola tengelyével).
A g egyeneshez a parabolának az az E pontja van legközelebb, amelyben a g-vel párhuzamos e egyenes érinti.
Az $y = 4x + c$ egyenletű egyenes pontosan akkor érinti a parabolát, amikor c értékét úgy választjuk meg, hogy az egyenes és a parabola egyenletéből alkotott



$\left.\begin{array}{l} y = 4x + c \\ y = 2x^2 \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek egyetlen valós számpár megoldása van.

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x + c \\ y = 2x^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x^2 = 4x + c \\ y = 2x^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x^2 - 4x - c = 0 \\ y = 2x^2 \end{array}\right\}.$$

Az utolsónak kapott egyenletrendszer ekvivalens az eredetivel, és pontosan akkor van egy megoldása, ha a $2x^2 - 4x - c = 0$ másodfokú egyenletnek egy valós megoldása van, vagyis az egyenlet diszkriminánsa nulla: $16 + 8c = 0$, azaz $c = -2$.

Az e egyenes egyenlete tehát $y = 4x - 2$, és ez a parabolát az $\left.\begin{array}{l} y = 4x - 2 \\ y = 2x^2 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer egyetlen megoldásának megfelelő $E(1; 2)$ pontban érinti.
$E(1; 2)$ és a g egyenes távolsága kiszámítható pl. az E-n áthaladó merőleges segítségével is.
A merőleges egyenlete $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$, ennek metszéspontja az $y = 4x - 10$ egyenessel a $G\left(\frac{49}{17}; \frac{26}{17}\right)$ pont.
A keresett legkisebb távolság tehát

$$EG = \sqrt{\left(\frac{17-49}{17}\right)^2 + \left(\frac{34-26}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{32^2 + 8^2}{17^2}} = \frac{\sqrt{1088}}{\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{17} \approx 1{,}94.$$

5. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉG

5.1. Statisztika

2555. a)

jegy (x_i)	1	2	3	4	5
db (n_i)	4	3	6	5	2

b) Az átlag:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_5 n_5}{n_1 + n_2 + \ldots + n_5} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2}{4 + 3 + 6 + 5 + 2} = \frac{58}{20} = 2{,}9;$$

a szórás pedig $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + \ldots + (x_5 - \bar{x})^2 n_5}{n_1 + n_2 + \ldots + n_5}} =$

$$= \sqrt{\frac{(1-2{,}9)^2 \cdot 4 + (2-2{,}9)^2 \cdot 3 + (3-2{,}9)^2 \cdot 6 + (4-2{,}9)^2 \cdot 5 + (5-2{,}9)^2 \cdot 2}{4+3+6+5+2}} =$$

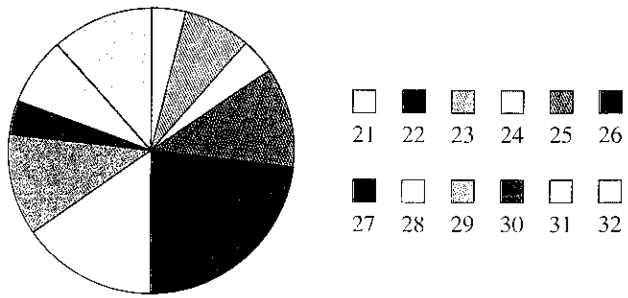
$$= \sqrt{\frac{31{,}8}{20}} = \sqrt{1{,}59} \approx 1{,}26.$$

2556. Az átlag: $\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_5 n_5}{n_1 + n_2 + \ldots + n_5} = \frac{1 \cdot 6 + 15 \cdot 7 + 10 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 10}{30} = 7{,}6.$
A pontszámok minimuma 6, maximuma 10, tehát a terjedelem 4.
A szórás: $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + \ldots + (x_5 - \bar{x})^2 n_5}{n_1 + n_2 + \ldots + n_5}} \approx 0{,}8406.$
Az átlagos abszolút eltérés:

$$S_n(x) = \frac{|x_1 - \bar{x}| n_1 + |x_2 - \bar{x}| n_2 + |x_3 - \bar{x}| n_3 + |x_4 - \bar{x}| n_4 + |x_5 - \bar{x}| n_5}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5} \approx 0{,}7067.$$

2557. a)

kor	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
db	1	0	2	1	3	4	2	4	3	1	2	3



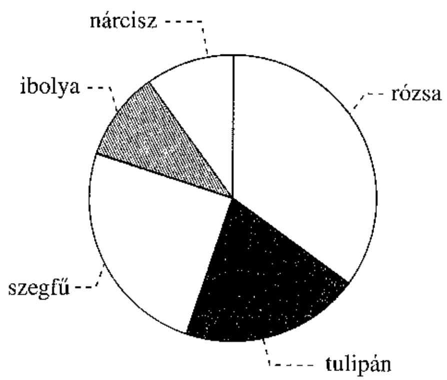
b) Az átlag $\bar{x} = \dfrac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_{12} n_{12}}{n_1 + n_2 + \ldots + n_{12}} = \dfrac{711}{26} \approx 27,35;$

a szórás $\sigma = \sqrt{\dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + \ldots + (x_{12} - \bar{x})^2 n_{12}}{n_1 + n_2 + \ldots + n_{12}}} = \sqrt{\dfrac{149994}{26^3}} =$

$= \sqrt{\dfrac{5769}{676}} \approx 2,92;$ a sokaságnak két módusza van: 26 és 28 (ezek fordulnak elő a leggyakrabban, egyaránt 4-szer); a medián pedig 27,5. (Ha felsoroljuk nagyság szerint rendezve mind a 26 adatot, a páros számosság miatt „középső" nincs, a 13. adat 27, a 14. pedig 28, ezek átlaga most a medián.)

2558. a), c)

virág	rózsa	tulipán	szegfű	ibolya	nárcisz
válasz (db)	7	4	5	2	2

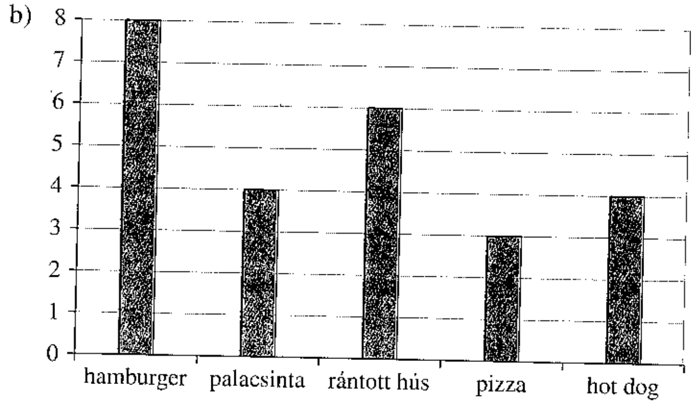


b) Az egyes válaszok gyakorisága épp a fenti táblázat alsó sorában látható.
A relatív gyakoriságot ezekből a számokból kapjuk, az összes válasz számával $(7 + 4 + 5 + 2 + 2 = 20)$ való osztás után.
Így ezek rendre: $\dfrac{7}{20} = 0,35;$ $\dfrac{4}{20} = 0,2;$ $\dfrac{5}{20} = 0,25;$ $\dfrac{2}{20} = 0,1;$ $\dfrac{2}{20} = 0,1.$

2559. a)

étel	hamburger	palacsinta	rántott hús	pizza	hot dog
válasz (db)	8	4	6	3	4

b)



2560. A grafikon havi adatokat közöl. A viszonyítási alap ekkor az össznépesség „1 hónapra jutó része", azaz kb. $\dfrac{10 \text{ millió}}{12} \approx 833$ ezer fő. (Pontosabban szökőévben a 31 napos 847 ezer, a 30 napos 820 ezer, a 29 napos 792 ezer (792,3). Nem szökőévben a 31 napos 850 ezer (849,3), a 30 napos 822 ezer, a 28 napos 767 ezer fő).

a) 2000 februárjában kb. $792 \cdot 0,004 \approx 3,2$ ezerrel csökkent az össznépesség.

b) Egyikben sem.

c) Mindegyikben.

d) Gyors becsléshez nem megfelelő mind a 19 havi adat kiszámítása és ezek összeadása. Ehhez célszerű inkább egy átlagos havi csökkenési ütemet választani – esetünkben ez kb. 3,5 ezrelék – és ezzel számolni.
A becsült érték így: $833 \cdot 0,0035 \cdot 19 \approx 55,4$ ezer. Körülbelül ennyi fővel csökkent az ország népessége a vizsgált időszakban.
Megjegyzés:
Óvatosabb közelítést adhatunk alsó és felső becslések segítségével. A havi csökkenési ütem átlaga 3 ezreléknél nagyobb volt, hiszen a 19 hónap közül „ránézésre" is mindössze 5-6-ban volt kisebb (de nem jelentősen kisebb) a csökkenés üteme. A 4 ezrelék hasonló okoskodással felülről becsli az átlagos havi csökkenés ütemét. Így azt mondhatjuk, hogy a vizsgált 19 hónap alatt a népesség csökkenése $833 \cdot 0,003 \cdot 19 \approx 47,5$ ezer és $833 \cdot 0,004 \cdot 19 \approx 63,3$ ezer fő között volt. A grafikon szerint inkább a 47,5 ezerhez lehetett közelebb a valódi érték (ami egyébként 54,5 ezer volt).

e) A maximum értéke kb. –2,2, ezrelék, ami a 2001. VII. hónaphoz tartozik.
Ez azt jelenti, hogy a vizsgált hónapok között a népesség csökkenése 2001 júliusában volt a legkisebb arányú. (adatforrás: www.ksh.hu)

2561. a) A megkérdezett nők száma kb. $2000 \cdot \frac{1090}{2090} \approx 1040$, a megkérdezett férfiak száma pedig kb. 960 fő volt.

b) $1040 \cdot 0{,}111 \approx 115$. A megkérdezett nők közül körülbelül ennyien szoktak le a dohányzásról.

c) A megkérdezett 2000 felnőtt között kb. $1040 \cdot 0{,}236 + 960 \cdot 0{,}4 \approx 630$ rendszeresen dohányzó volt. Ha a minta reprezentatív volt, akkor a 8,1 millió felnőtt között ugyanolyan arányban voltak a rendszeresen dohányzók, mint a 2000 megkérdezett között. $8{,}1 \cdot \frac{630}{2000} \approx 2{,}55$, tehát kb. 2,55 millió rendszeres dohányos volt 1995-ben Magyarországon (a felnőtt lakosság 31,5%-a).

2562. a) Születési arányszámok ezrelékben:

	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Magyarország	14,7	18,4	13,9	12,4	12,1	11,0
Finnország	14	14	13,2	12,8	13,2	12,4

Halálozási arányszámok ezrelékben:

	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Magyarország	11,6	12,4	13,6	13,9	14,1	14,2
Finnország	9,6	9,4	9,3	9,7	10	9,7

b)

	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Magyarország	3,1	6	0,3	–1,5	–2,0	–3,2
Finnország	4,4	4,6	3,9	3,1	3,2	2,7

2563. a)

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Magyarország	3200	3200	3500	3800	4000	4100	4300	4600	4900
Görögország	8000	8500	9000	8500	9000	11000	12000	11500	n.a.
%	**40**	**38**	**39**	**45**	**44**	**37**	**36**	**40**	**n.a.**

b) 1989-ben kb. 3000, 1998-ban kb. 4900 USD volt, ez $\frac{4900 - 3000}{3000} \cdot 100\% \approx 63\%$-os növekedést jelent.

c) A Magyarországra megadott grafikon eltolással leginkább a Portugáliára megadott grafikon 1973 és 1982 közötti részével hozható fedésbe. Ha a magyarországi értékeket tekintjük, akkor ezek a megfelelő portugáliai értékekhez képest mintegy 10 éves „késésben" vannak.

d) Finnországban 1985 és 1990 között; 11 ezer USD-ről 27 ezerre, azaz kb. 2,45-szörösére nőtt a mutató értéke.

2564. a) Magyarországon a vizsgált 28 éves időtartam alatt a születéskor várható élettartam gyakorlatilag változatlan maradt; 1993-tól kismértékű (de elég nagy „sebességű") növekedés figyelhető meg, ez azonban 1998-ban megtorpan.
A másik négy országban a születéskor várható élettartam a vizsgált 28 év alatt 4—8 évet növekedett; a legtöbbet Portugáliában, ahol 1976-ig még a magyarországinál is alacsonyabb értékek voltak.
Finnországban 70,4-ről 76,8 évre növekedett a születéskor várható élettartam. 1982-ig szinte egyenletes, átlagosan évi 0,37 éves növekedés volt, ez 1982—90 között évi 0,1-re csökkent, majd 1990—96 között évi 0,33 évre nőtt. Magyarországon mindvégig 70 év körül maradt a születéskor várható élettartam, 1995-re azonban már 7 évvel maradt el ez az érték a finnországitól, holott 1970-ben még csak 1 év volt a „lemaradás".

b) A születéskor várható élettartammal szemben a 45 éves kort megértek élethossz-kilátásai romlottak Magyarországon a vizsgált időszakban. Míg 1970-ben egy 45 éves ember még további 29,5 év életre számíthatott, addig 1993-ban már csak további 27,8 évre, de 1998-ban is csak további 28,9 évre.
A bemutatott országok közül csak Magyarországon romlottak a 45 éves kort megértek további élethossz-kilátásai, a többi országban 2,5—4 évet nőtt ez a mutató: 1996-ban a 45 évet megért emberek átlagosan 78-80 éves korukig fognak élni, szemben a magyarok kb. 74 évével.

2565. a) Magyarországon 1977-ig kismértékben csökkent, majd 1980-ra újra az eredeti szintre emelkedett a mutatószám. Csak 1985-ben indult meg jelentősebb csökkenés; 1995-re 6 ezrelék alá került a keringési betegségben elhunytak teljes népességhez viszonyított aránya (az összes elhalálozások teljes népességhez viszonyított aránya 14 ezrelék körül volt a vizsgált időszakban, tehát ennek igen jelentős hányada a keringési betegségben elhunytak aránya).
A magyarországi mutatók mind tendencia, mind abszolútérték szempontjából lényegesen kedvezőtlenebbek, mint a másik négy országban, ahol mindenütt 3,5 ezrelék alá került a mutatószám. Görögország kivételt jelent abból a szempontból, hogy – az összes között a legalacsonyabbról induló – mutató 1987-ig növekedett, s bár a tendencia ekkor megfordult és kb. a magyarországival megegyező mértékű csökkenés mutatkozott, a kezdeti értéknél magasabb maradt.

b) A 0-64 éves korban (tehát viszonylag fiatalon) keringési betegségben elhunytak adatai Magyarország szempontjából még az előzőnél is kedvezőtlenebb képet mutatnak. Míg a többi vizsgált országban 1996-ra sikerült ezt a mutatót 5-7 ezrelék körüli értékre leszorítani, addig Magyarországon a kezdeti 14 ezrelékről 16 ezrelékre nőtt úgy, hogy közben évekig még 18 ezrelék felett is volt.

2566. a) Százalékban megadott értékek:

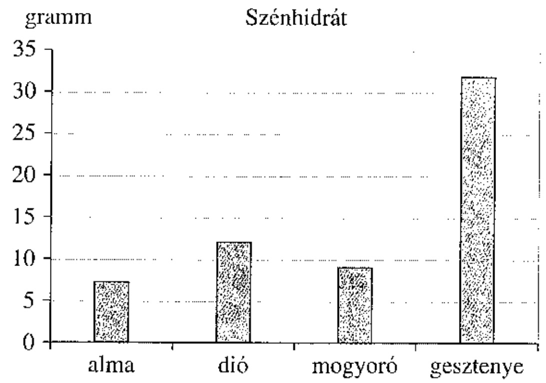
	18–24	25–29	30–39	40–49	50–59	60–69	69–
DDP	30	28	29	21	23	16	19
DLP	15	17	20	27	30	36	26

b) Nem.
Az egyes életkori csoportok létszáma nem ismert, ezért a támogatók létszáma sem állapítható meg a százalékos adatokból.

c) Az „apák" (kb. 40 évtől) közül többen a DLP, míg a fiúk (18—39 évesek) közül többen a DDP párttal szimpatizálnak.

2567.

Élelmiszer	Szénhidrát (gramm)
Alma	7,2
Dió	12
Mogyoró	9
Gesztenye	31,8



2568.

100 g élelmiszerben

Élelmiszer	Kalória
Búzaliszt	345
Búzadara	340
Rizs	345
Fehérkenyér	257
Zsúrkenyér	303
Kétszersült	388
Száraz tészta	382

A felsorolt élelmiszerek kalóriatartalmának átlaga: 337,14,
mediánja: 345,

szórása: $\sqrt{\dfrac{2(345-337{,}14)^2+(340-337{,}14)^2+\ldots+(382-337{,}14)^2}{7}} \approx 41{,}95.$

2569. A normális szívfrekvencia (pulzusszám) minimumának átlaga: 85,
mediánja: 80.
A normális szívfrekvencia maximumának átlaga: 154,
mediánja: 160.

2570. a) A kördiagram szerint a művelt terület 1200 km^2, egyúttal 160°-os cikk. Eszerint, mivel a szög a területtel arányos, ezért 1°-nak megfelel $\frac{1200}{160} = 7{,}5$ (km^2).
Eszerint az erdő, amely a diagramon 88°-os cikk, 660 km^2 területű.

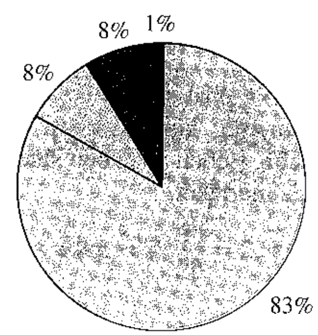
b) Mivel a lakott terület 30 km^2, ezért $\frac{30}{7{,}5} = 4$ fokos szög reprezentálja.

c) A körzet teljes területe $360 \cdot 7{,}5 = 2700$ (km^2).

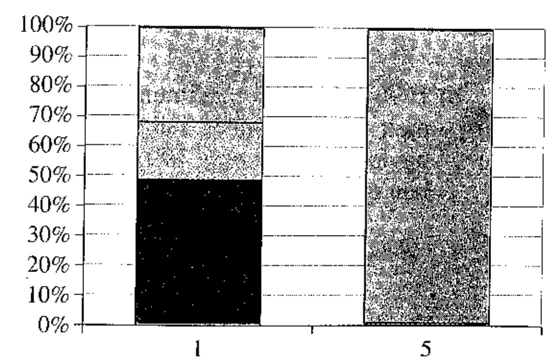
2571. Az első és második sor között van átfedés: 5,6%, ez 32 000-es létszám esetén 1792 fő. Az egyes sorokat megjelölők százalékos arányát átszámítva létszámra, sorban 27 200, 3136, 3008, 448 fő adódik. A kétszer számolt 1792 tanuló felét az első, felét a második sorból fogjuk elhagyni, így ott 26 304 és 2240 fős létszámmal számolunk.

a) Eszerint 1-es jegyet szerzett:
az első sorban ($26\,304 \cdot 0{,}001 \approx$) 26,
a másodikban ($2240 \cdot 0{,}007 \approx$) 16,
a harmadikban ($3008 \cdot 0{,}01 \approx$) 30
és a negyedikben ($448 \cdot 0{,}023 \approx$) 10 fő, összesen 82 tanuló.
Hasonlóan 2-es jegyet $5471 + 1284 + 2106 + 303$, összesen tehát 9164 tanuló szerzett. Ugyanígy 3-as jegyet $7786 + 735 + 761 + 118 = 9400$; 4-es jegyet: $6129 + 159 + 93 + 16 = 6397$; és végül 5-t: $6892 + 47 + 18 + 1 = 6958$ tanuló kapott. (Ha ezeket összeadjuk, 32001-et kapunk összegül, mert bár mindenki pontosan egyszer, valamelyik sorban, valamelyik jegynél szerepel, de a kerekítésből adódik ennyi eltérés.)

b) A hármas jegyet szerzők négy kategória (sor) szerinti megoszlása: 7786; 735; 761; 118. Ez százalékosan: 83%, 8%, 8%, 1%.



c)



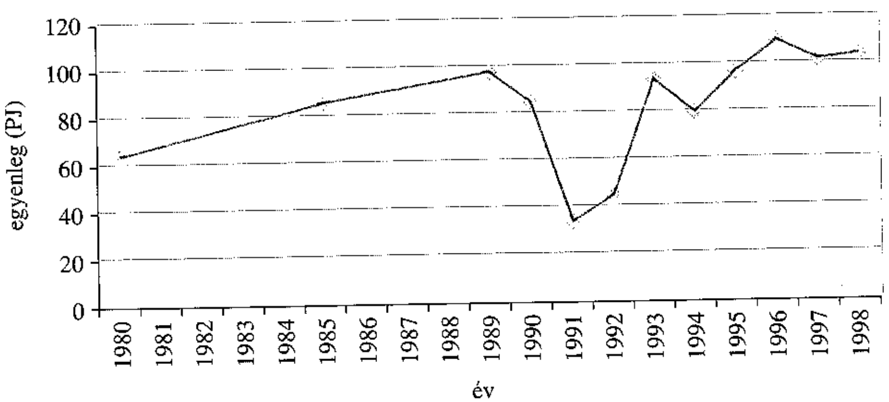
Az elégtelenek megoszlása: 26; 16; 30; 10 (31,7%; 19,5%; 36,6%; 12,2%), a jeleseknél: 6892; 47; 18; 1 (99,1%; 0,7%; 0,3%; 0,0%) – az utóbbinál lényegében biztos, hogy egyetemre, főiskolára menőé a jeles, hiszen 1%-ot tesz ki az összes többi!

2572. a) A legnagyobb *létszámú* kisebbségek: Ukrajnában az oroszok, Spanyolországban a katalánok, Romániában a magyarok és Jugoszláviában az albánok. (Az országok eltérő összlakossága miatt nem biztos, hogy ugyanezek, vagy ugyanebben a sorrendben a legnagyobb *arányú* kisebbségek. Az adatokból ez azonban nem válaszolható meg.)

b) Mert itt rajzolódott át a térkép a Szovjetunió és Jugoszlávia felbomlásával. Ez a magyarázata a sok ukrán orosznak és jugoszláv albánnak. A magyarkérdés még az első világháború utánra vezethető vissza, amikor nagy magyarlakta területek is a szomszédos országokhoz kerültek.

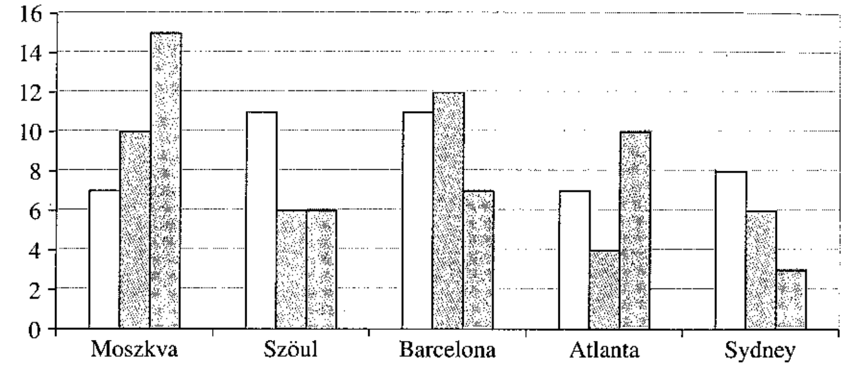
Megjegyzés:
A feladat jól mutatja a statisztika alkalmazásánál mindig fellépő tantárgyi integrációt. Igaz, itt a b) kérdés inkább történelem, mint matematika, ezért vizsgán vagy dolgozatban természetesen ez így nem adható fel, legalábbis amíg önálló matematika-érettségi van.

2573. a)



b) 1996-ban volt a maximum; ebben az évben volt tehát a rendelkezésre álló (termelt + importált) és felhasznált energiamennyiség különbsége a legnagyobb, ugyanez a különbség 1991-ben volt a legkisebb. Ebben az évben sikerült legjobban előre megbecsülni az energiafelhasználás mértékét.

2574. a)



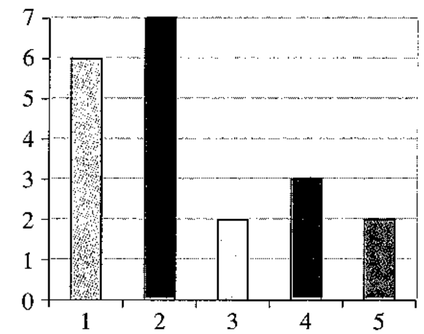
b) Moszkvában $7 + 10 + 15 = 32$, Szöulban $11 + 6 + 6 = 23$, Barcelonában $11 + 12 + 7 = 30$, Atlantában $7 + 4 + 10 = 21$, Sydneyben $8 + 6 + 3 = 17$ érmet nyertünk.
Ezen adatok átlaga: $\dfrac{32+23+30+21+17}{5} = \dfrac{123}{5} = 24,6.$

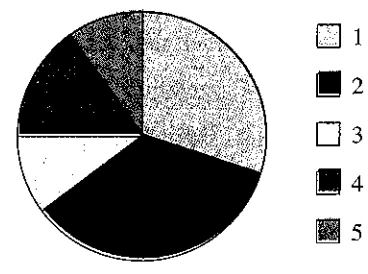
c) Az aranyérmek száma összesen $7 + 11 + 11 + 7 + 8 = 44$, az ezüstöké $10 + 6 + 12 + 4 + 6 = 38$, a bronzoké $15 + 6 + 7 + 10 + 3 = 41$.
Ezek átlaga rendre 8,8; 7,6; 8,2.
(Ezen átlagok összege természetesen megegyezik a b) pontbeli eredménnyel.)

2575. a)

jegy	1	2	3	4	5
db	6	7	2	3	2

Az összesítést a táblázat tartalmazza, diagramból mutatunk kétfélét is.

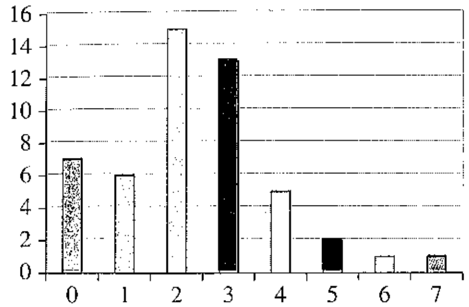


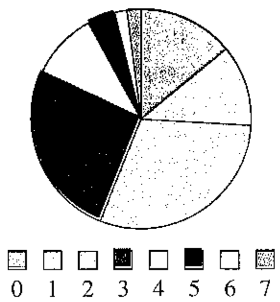


b) Az átlag $\bar{x} = \dfrac{48}{20} = 2,4$; a szórás pedig $\sigma = \sqrt{\dfrac{34,8}{20}} = \sqrt{1,74} \approx 1,32.$

2576. a)

gól	0	1	2	3	4	5	6	7
meccs	7	6	15	13	5	2	1	1





b) A gólok átlaga $\bar{x} = \dfrac{118}{50} = 2,36$; a módusz 2 (ez fordul elő leggyakrabban, 15-ször), a medián 2 (ha felsoroljuk nagyság szerint rendezve mind az 50 adatot, a páros számosság miatt „középső" nincs, de a 25. és a 26. is ez lesz).

2577. a) A 12 csapat mindegyike 22 meccset játszott, de mindegyiken 2 csapat vett részt, így a mérkőzések száma $\dfrac{12 \cdot 22}{2} = 132$.

b) A győzelmek (vagy vereségek) oszlopában összeadva a számokat, 98-at kapunk eredményül – ennyi meccs végződött valamelyik csapat győzelmével, ez a meccsek $\dfrac{98}{132} = \dfrac{49}{66} = 0,7\overline{42}$ része. A többi $(132 - 98) = 34$ meccs döntetlenül végződött, ez a meccsek $\dfrac{34}{132} = \dfrac{17}{66} = 0,2\overline{57}$ része.
(A döntetlenek oszlopában a számok összege 68, annak megfelelően, hogy mind a 34 döntetlen meccs mind a két résztvevő csapat „elszámolásában" feltűnik.)

c) Ha összeadjuk a megszerzett pontok oszlopának számait, 362 az eredmény, így a 12 csapat által megszerzett pontok csapatonkénti átlaga: $\dfrac{362}{12} = \dfrac{181}{6} = 30,1\dot{6}$;
a 132 meccsen megszerzett pontok meccsenkénti átlaga: $\dfrac{362}{132} = \dfrac{181}{66} = 2,7\overline{42}$.

d) Minden eldőlt meccsen 3 + 0, azaz 3, és minden döntetlenül végződöttön 1 + 1, azaz 2 pont „talál gazdára", ezért a megszerzett pontok összege $3 \cdot 98 + 2 \cdot 34 = 362$ – amiből bármelyik fenti átlag ugyanúgy kiszámítható. A meccsenkénti még közvetlenebbül kijön: a mérkőzések $\dfrac{49}{66}$ részén 3, $\dfrac{17}{66}$ részén 2 pont kerül kiosztásra, tehát az átlag: $3 \cdot \dfrac{49}{66} + 2 \cdot \dfrac{17}{66} = \dfrac{181}{66}$.

2578. a) Amint azt akár a rúgott, akár a kapott gólok oszlopának összegzésével megkaphatjuk, 398 gól született összesen az őszi szezonban, ez a 132 meccsen (l. előző megoldás a) része) átlagban $\dfrac{398}{132} = \dfrac{199}{66} = 3,0\overline{15}$ gólt jelent.

b) A 12 csapat által rúgott 398 gól csapatonként átlagban $\dfrac{398}{12} = \dfrac{199}{6} = 33,1\dot{6}$ gólt jelent.

c) Mivel a kapott gólok összege ugyancsak 398, ez az átlag az előzővel megegyezik. (Ami természetes is, hiszen minden berúgott gólt be is kapott valamely csapat.)

d)

0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	közötti gólt
0	0	5	4	3	csapat rúgott
0	1	3	3	5	csapat kapott

2579. a) Naponta $20 + 40 + 60 = 120$ kazetta készül. (Az első oszlop számainak összege.)

b) A pincében naponta $20 + 40 + 10 = 70$ hanghordozó készül. (Az első sor számainak összege.)

c) CD-ből $40 + 40 + 80 = 160$, minidiszkből $10 + 0 + 30 = 40$ készül naponta – ez az a) pont eredményével együtt azt jelenti, hogy CD-ből a legnagyobb a napi termelés.

d) A sufniban $40 + 40 + 0 = 80$, a garázsban $60 + 80 + 30 = 170$ hanghordozó a napi termelés – ez a b) pont eredményével együtt azt jelenti, hogy a pincében a legkisebb a napi termelés.

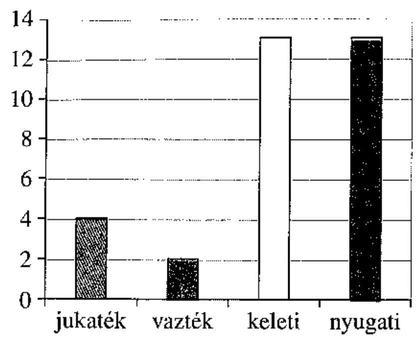
2580. a) A haszon az eladási ár és a költségek (nyersanyag, munkabér, egyéb) különbsége.
Ez egy kazetta esetén $100 - (20 + 20 + 3) = 57$,
egy CD esetén $300 - (40 + 13 + 4) = 243$,
egy minidiszk esetén $200 - (150 + 30 + 1) = 19$ picula.
Tehát a CD haszna a legnagyobb darabonként.

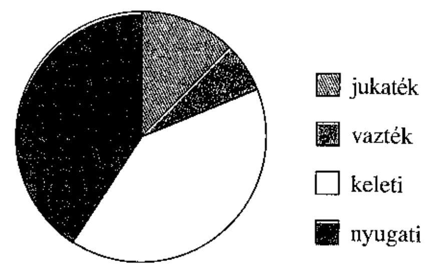
b) Az összes napi haszon a darabonkénti hasznok és a darabszámok szorzatának összege, azaz $57 \cdot 120 + 243 \cdot 160 + 19 \cdot 40 = 46\,480$ picula.

2581. a)

ág	jukaték	vazték	keleti	nyugati
nyelvek száma	4	2	13	13

b)





2582. a)

	közös költség	fűtés
M.	7 644	10 234
J.	2 756	3 706
E.	5 096	7 412
S.	8 034	10 030
P.	2 470	2 618
Σ	**26 000**	**34 000**

b) Az összes befizetéseket egyrészt a fenti táblázat oszlopainak összegzésével számíthatjuk ki – másrészt, mivel minden százalékra 260, illetve 340 Ft befizetés jut, természetesen az összes befizetés, vagyis a 100% százszor ennyi, tehát 26 000, illetve 34 000 Ft.

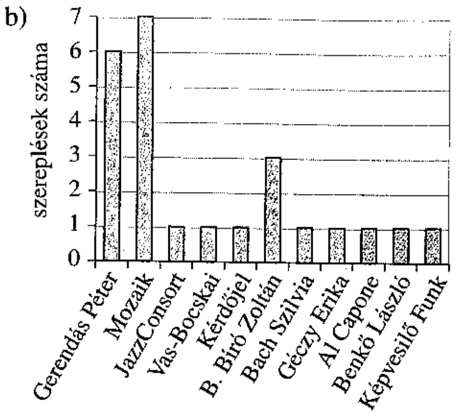
c) Mindkét oszlopban az arányok átlaga 20%, hiszen az összest, vagyis a 100%-ot osztjuk 5 felé.

2583. Kezdjük azzal, hogy táblázatba foglaljuk az egyes produkciók szerepléseinek számát.

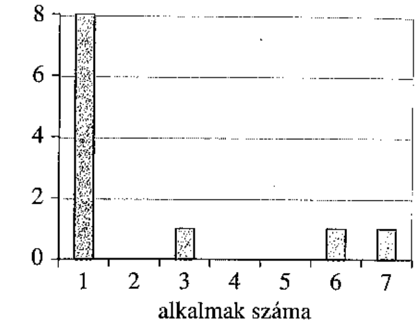
Gerendás Péter	6	Kérdőjel	1	Al Capone	1
Mozaik	7	B. Bíró Zoltán	3	Benkő László	1
JazzConsort	1	Bach Szilvia	1	Képviselő Funk	1
Vas-Bocskai	1	Géczy Erika	1		

a) A produkciók egyszerű megszámlálásával: 11.

b)

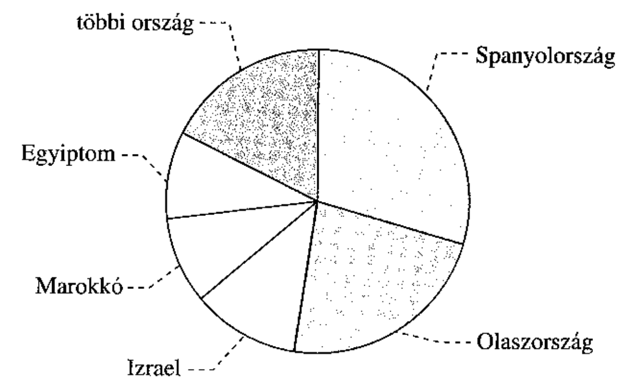


c)



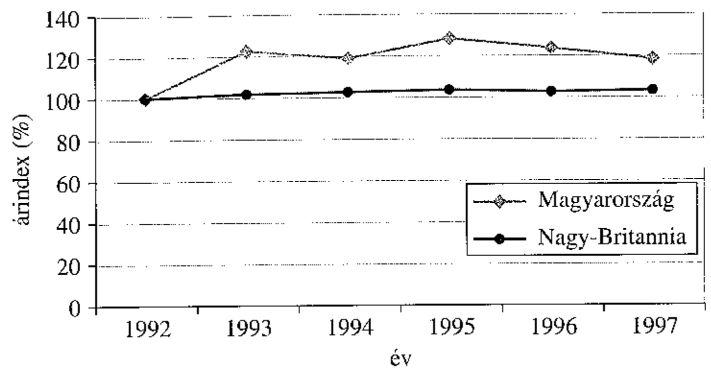
2584. a) Az össztermelés 85,2 millió mázsa.

	százalék	középponti szög
Spanyolország	29,3	105,5°
Olaszország	23,0	82,8°
Izrael	11,7	42,1°
Marokkó	9,2	33,1°
Egyiptom	9,2	33,1°
többi ország	17,6	63,4°



b) 51%, illetve 33%. (1 tonna = 10 mázsa)

2585. a)

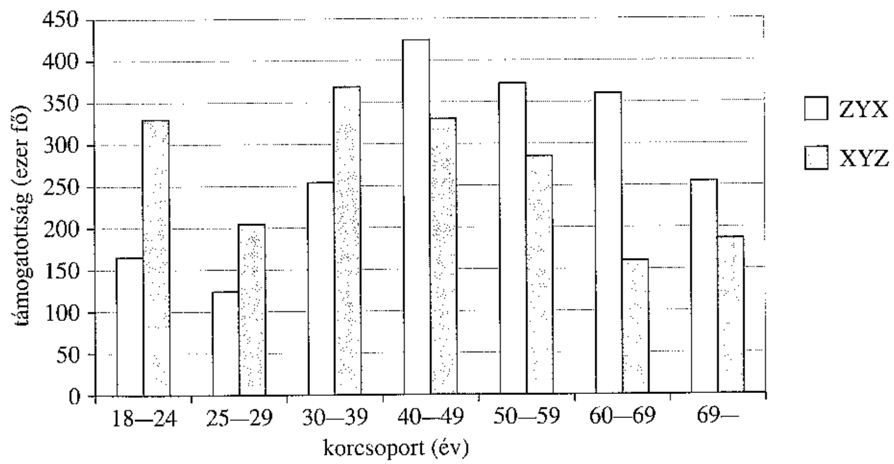


b) Magyarország: $1{,}225 \cdot 1{,}188 \cdot 1{,}282 \cdot 1{,}236 \cdot 1{,}183 \approx 2{,}728$, tehát az 1992-höz viszonyított árszínvonal 272,8% volt.
Nagy-Britannia: $1{,}016 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}034 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}031 \approx 1{,}138$, tehát az 1992-höz viszonyított árszínvonal 113,8% volt.

c) Magyarország: $x^5 = 2{,}728$, amiből $x \approx 1{,}222$. Átlagosan évi 22,2%-os volt az árszínvonal emelkedése.

Nagy-Britannia: $y^5 = 1{,}138$, amiből $y \approx 1{,}026$. Átlagosan évi 2,6%-os volt az árszínvonal emelkedése.

2586. a)

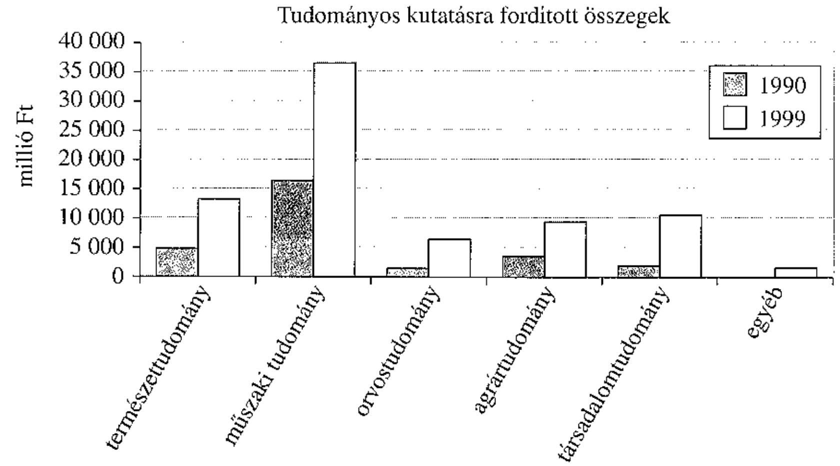


b) A teljes szavazókorú népesség 7,89 millió fő.
ZXY támogatottsága 1,954 millió fő (24,8%),
XYZ támogatottsága 1,864 millió fő (23,6%).

2587. a)

	1990	1999	a növekedés %-ban kifejezve:
természettudomány	4 803	13 281	176,51
műszaki tudomány	16 512	36 486	120,97
orvostudomány	1 482	6 346	328,21
agrártudomány	3 567	9 429	164,34
társadalomtudomány	1 955	10 613	442,86
egyéb		1 599	értelmetlen

b)



2588.

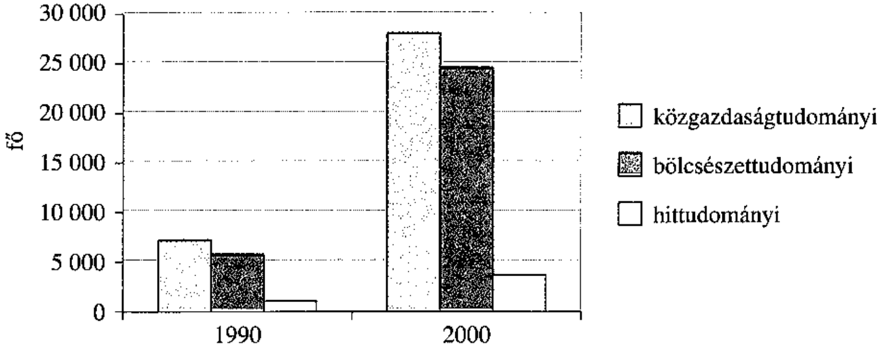
	1990	2000	a változás	százalékban kifejezve
műszaki	18 136	42 831	24 695	136,17
mezőgazdasági	4 524	11 127	6 603	145,95
közgazdaságtudományi	7 184	28 073	20 889	290,77
orvosi	6 464	7573	1 109	17,16
gyógyszerészi	1 193	1401	208	17,44
egyéb egészségügyi	1 430	4 807	3 377	236,15
állatorvosi	517	928	411	79,50
bölcsészettudományi	5 712	24 563	18 851	330,02
jogtudományi és államigazgatási	3 594	10 303	6 709	186,67
természettudományi	4 991	11 537	6 546	131,16
tanárképző főiskolai	9 856	12 992	3 136	31,82
tanítóképző főiskolai	5 607	8 513	2 906	51,83
óvodapedagógusi	1 597	2 030	433	27,11
testnevelési	472	723	251	53,18
művészeti	2 156	3 107	951	44,11
hittudományi	1 068	3 731	2 663	249,34
egyéb	2 100	1 964	−136	−6,48

a) Az „egyéb” tanulmányi ágban tapasztalható csak csökkenés.

b) Létszámban a legnagyobb növekedés a műszaki területen tapasztalható.

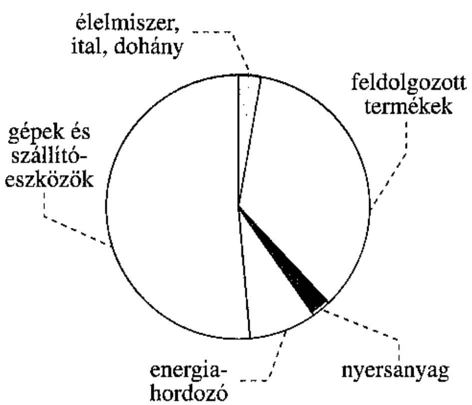
c) %-osan legnagyobb növekedés a bölcsészettudományi ágban volt. Ezt követi a közgazdaságtudományi és a hittudományi ágban tanulók számának százalékos növekedése.

d)

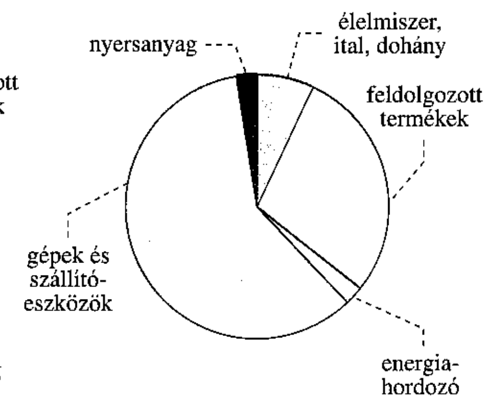


2589. A kördiagram készítésekor az egyes termékeknek megfelelő középponti szöget megkapjuk, ha a megadott százalékérték század részével megszorozzuk a teljes szöget. Például: a feldolgozott termékeknek megfelelő középponti szög az első ábrán $0{,}353 \cdot 360^\circ \approx 127^\circ$.

Behozatal



Kivitel

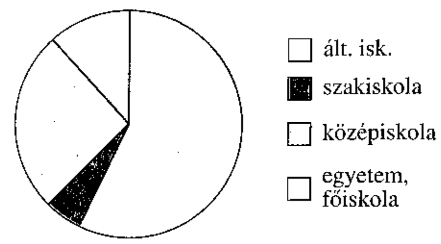


2590. a) A kördiagram készítéséhez a teljes szöget – 360°-ot – a különféle iskolatípusba járók arányában osztjuk fel.

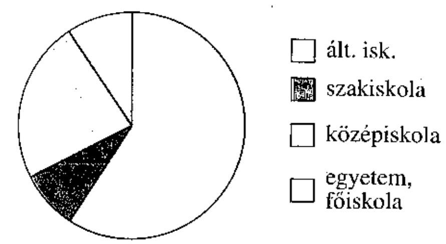
Pl.: Közép-Magyarországon (241 000 + 22 000 + 109 000 + 49 000 =) 421 000 tanuló jár iskolába. $\frac{241\,000}{421\,000} \cdot 360^\circ \approx 0{,}5724 \cdot 360^\circ \approx 206^\circ$, így az általános iskolásokat szemléltető körcikk középponti szöge $\approx 206^\circ$.

STATISZTIKA

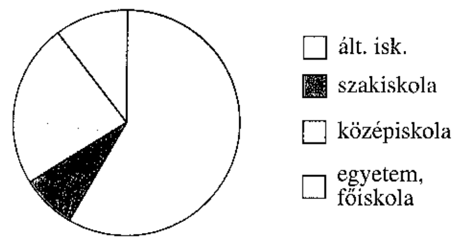
Közép-Magyarország



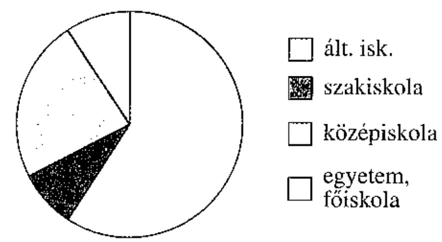
Közép-Dunántúl



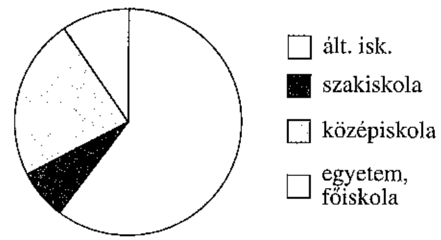
Nyugat-Dunántúl



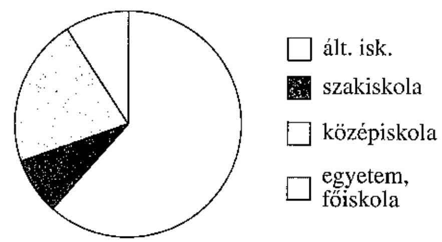
Dél-Dunántúl



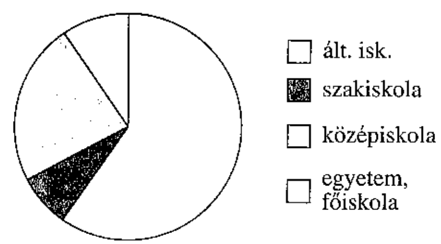
Észak-Magyarország



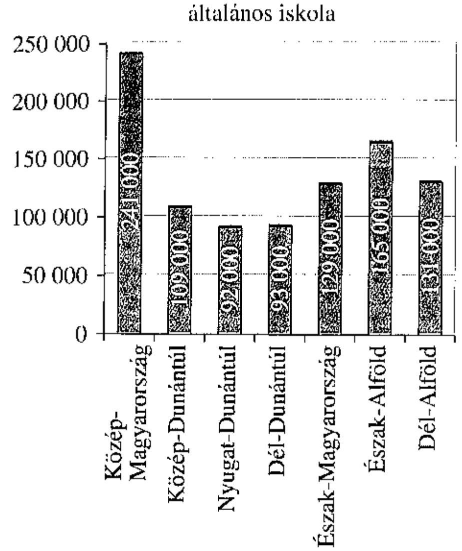
Észak-Alföld

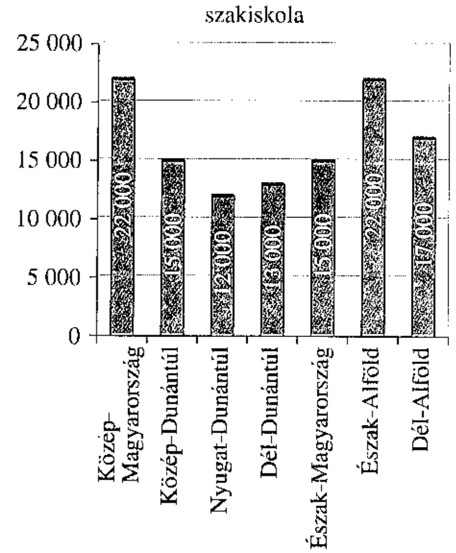


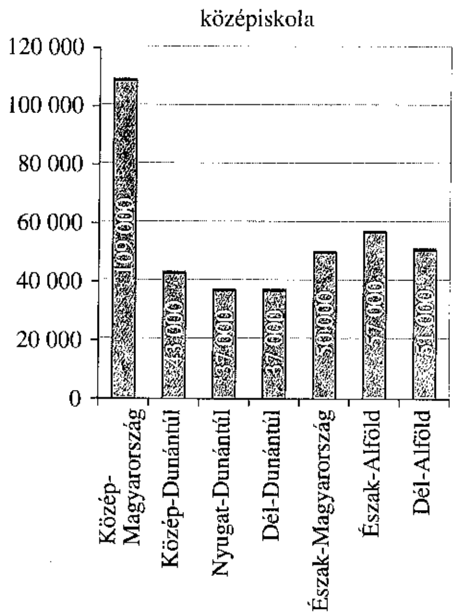
Dél -Alföld

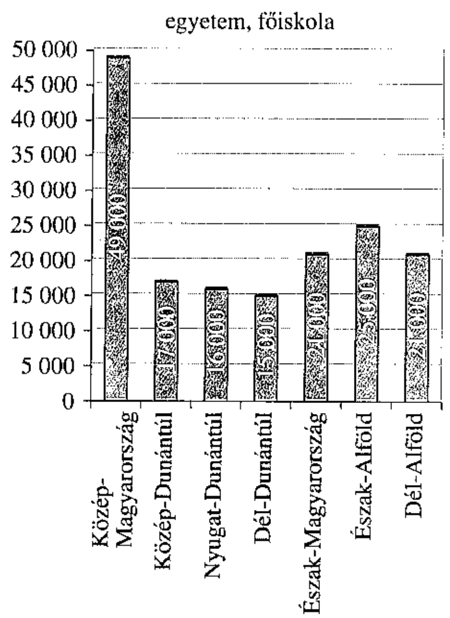


b)

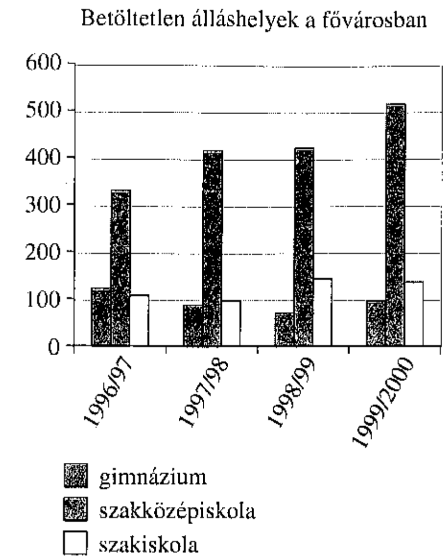

általános iskola
250 000
200 000
150 000
100 000
50 000
0
241 000
109 000
92 000
93 000
129 000
165 000
131 000
Közép-Magyarország
Közép-Dunántúl
Nyugat-Dunántúl
Dél-Dunántúl
Észak-Magyarország
Észak-Alföld
Dél-Alföld

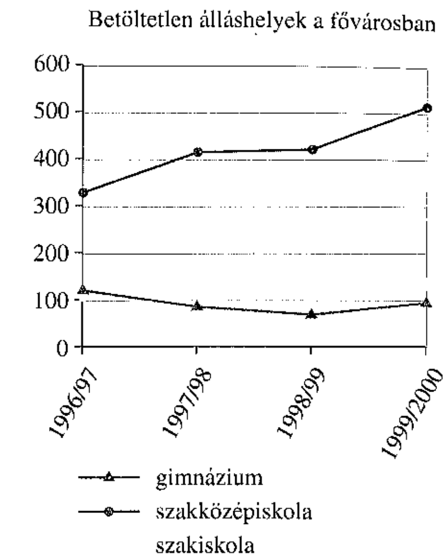

szakiskola
25 000
20 000
15 000
10 000
5 000
0
22 000
15 000
12 000
13 000
15 000
22 000
17 000
Közép-Magyarország
Közép-Dunántúl
Nyugat-Dunántúl
Dél-Dunántúl
Észak-Magyarország
Észak-Alföld
Dél-Alföld


középiskola
120 000
100 000
80 000
60 000
40 000
20 000
0
Közép-Magyarország
Közép-Dunántúl
Nyugat-Dunántúl
Dél-Dunántúl
Észak-Magyarország
Észak-Alföld
Dél-Alföld

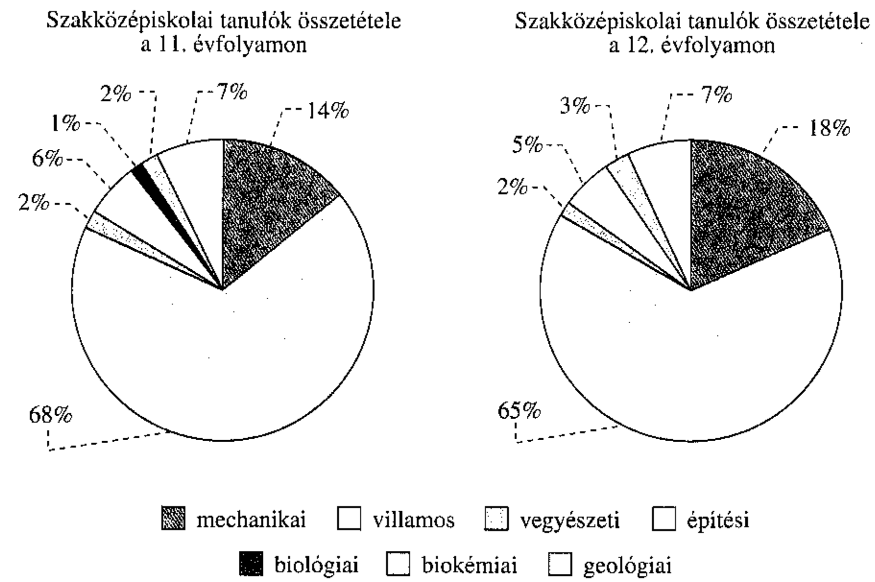

egyetem, főiskola
50 000
45 000
40 000
35 000
30 000
25 000
20 000
15 000
10 000
5 000
0
Közép-Magyarország
Közép-Dunántúl
Nyugat-Dunántúl
Dél-Dunántúl
Észak-Magyarország
Észak-Alföld
Dél-Alföld

2591.

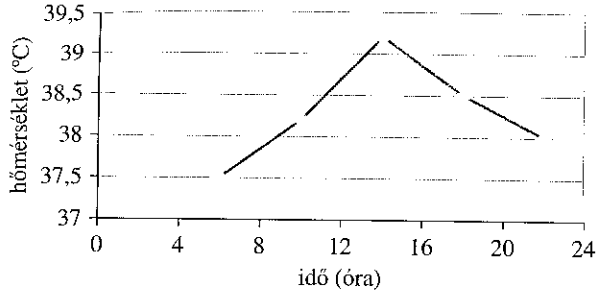

Betöltetlen álláshelyek a fővárosban
600
500
400
300
200
100
0
1996/97
1997/98
1998/99
1999/2000
gimnázium
szakközépiskola
szakiskola


Betöltetlen álláshelyek a fővárosban
600
500
400
300
200
100
0
1996/97
1997/98
1998/99
1999/2000
gimnázium
szakközépiskola
szakiskola

2592.


Szakközépiskolai tanulók összetétele a 11. évfolyamon
2%
7%
14%
1%
6%
2%
68%
Szakközépiskolai tanulók összetétele a 12. évfolyamon
3%
7%
18%
5%
2%
65%
mechanikai
villamos
vegyészeti
építési
biológiai
biokémiai
geológiai

2593. a)



b) A szomszédos pontokat összekötő szakasz pontjaihoz nem tartozik tényleges lázérték.

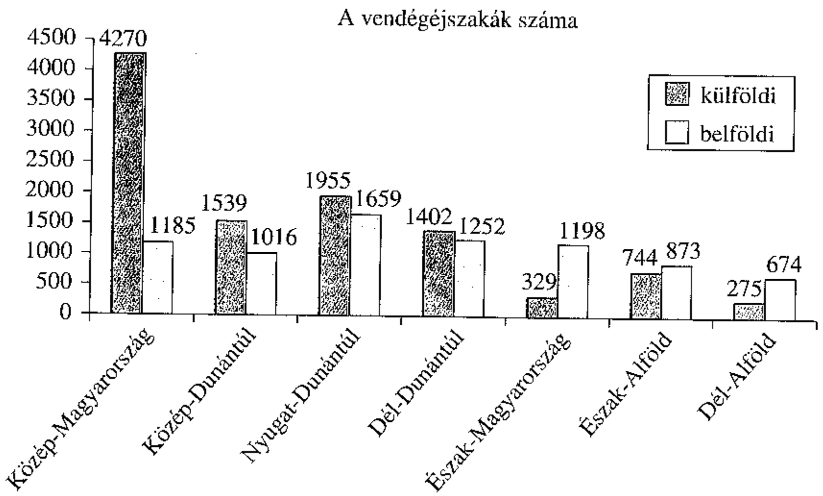
c) A lázgörbe alapján nem állapítható meg, hogy déli 12 órakor mennyi volt a tényleges hőmérséklet. Pl.: lehet, hogy felugrott a láza, de az is lehet, hogy lázcsillapító hatására alacsonyabb lett a beteg hőmérséklete annál, mint ami a grafikonról leolvasható.

2594.

	külföldi	belföldi	összesen
összesen	10 514	7 857	18 371

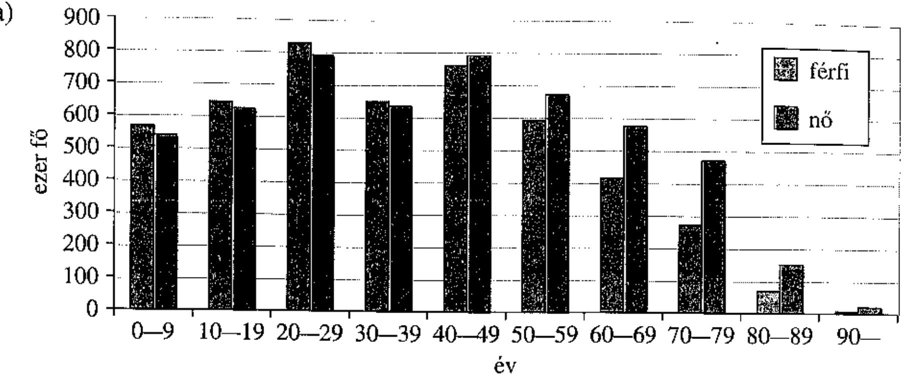
a) Az összes kereskedelmi szálláshelyen töltött vendégéjszakák 57,2%-át foglalták el külföldiek.

b)

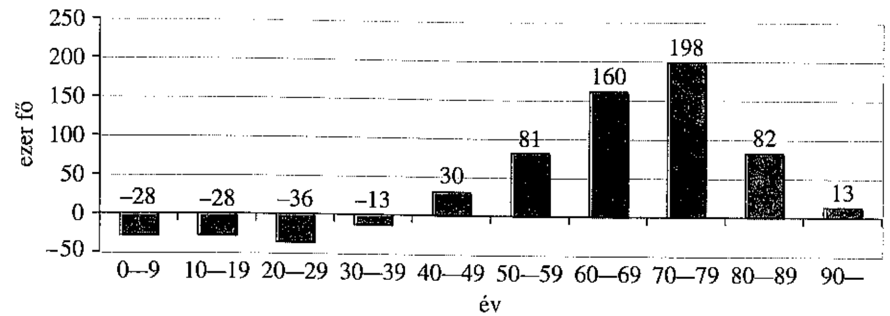


c) Közép-Magyarországon jelentősen több, Dunántúlon pedig több éjszakát töltenek el a külföldi turisták, mint a hazaiak, a másik három régióban viszont a magyar vendégek a gyakoribb látogatók. Ez leginkább Észak-Magyarországra jellemző.

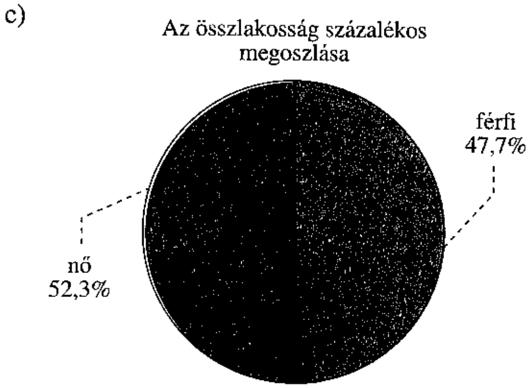
2595. a)



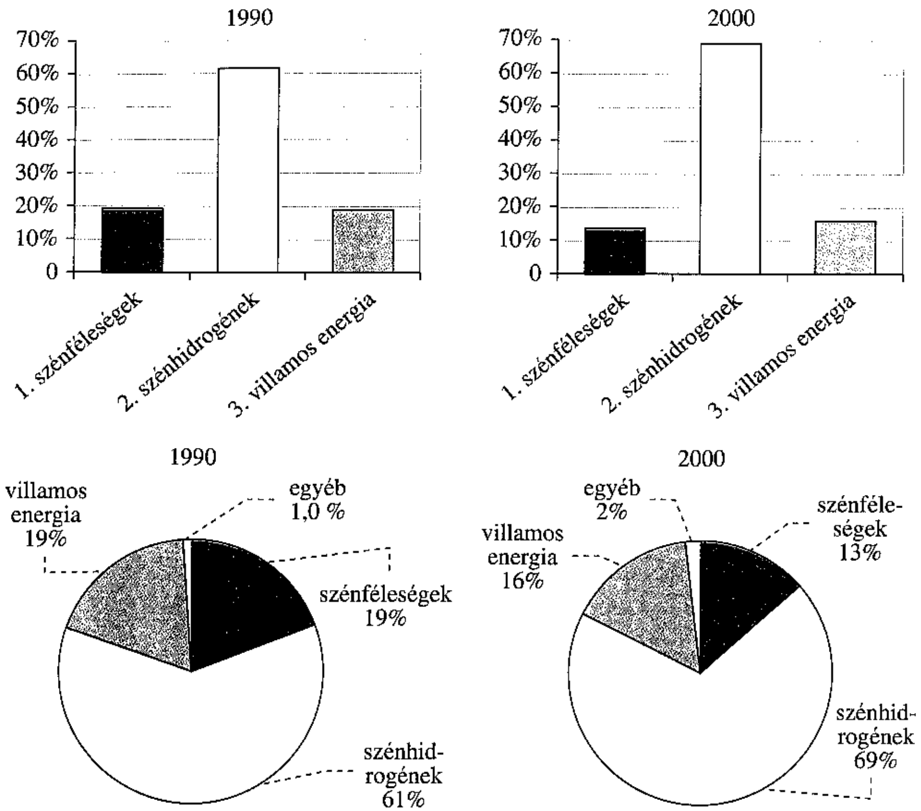
b) A nőtöbblet alakulása az egyes korcsoportokban:



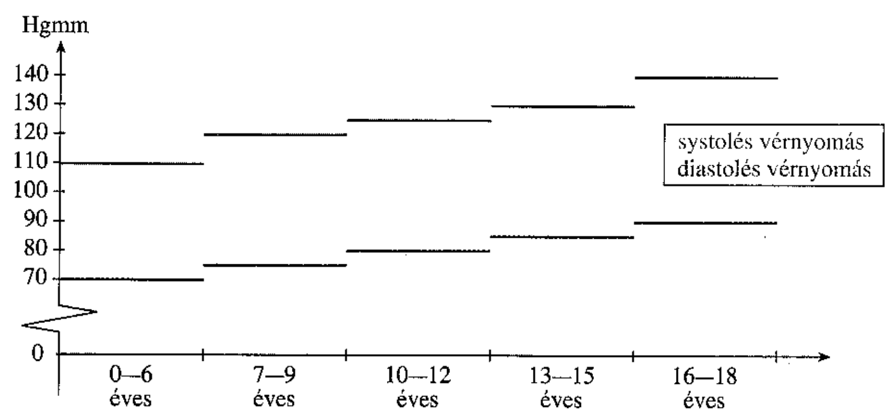
c)



2596.



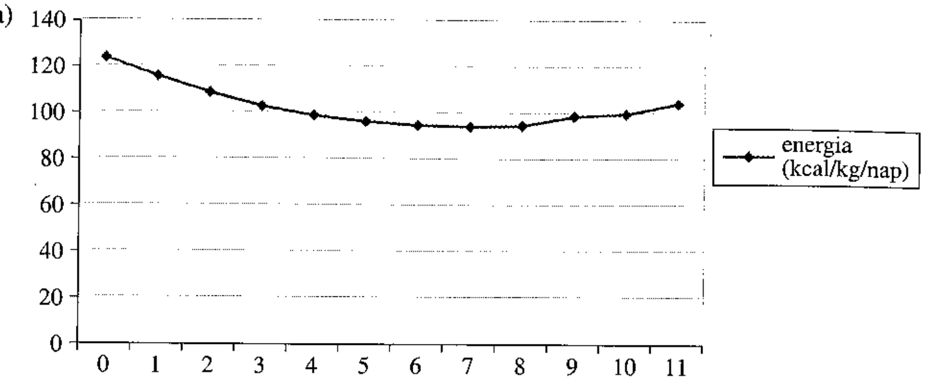
2597. a)



b)

	systolés vérnyomás (Hgmm)	diastolés vérnyomás (Hgmm)
átlag	125	80
medián	125	80

2598. a)



b) Az energiaszükséglet (kcal/kg/nap) átlaga: 103

szórása: 8,8

mediánja: 99,5.

c) A szereplő számsokaságnak 2 módusza van, a 99 és a 95.

d) Egy csecsemő energiaszükségletének átlagos havi változása (kcal/kg/nap):

Jelöljük d_i-vel az i-dik és az $(i-1)$-dik hónap közötti változást! $(1 \le i \le 11)$

$d_1 = 116 - 124 = -8$ $\qquad d_2 = 109 - 116 = -7$

$d_3 = 103 - 109 = -6$ $\qquad d_4 = 99 - 103 = -4$

$d_5 = 96{,}5 - 99 = -2{,}5$ $\qquad d_6 = 95 - 96{,}5 = -1{,}5$

$d_7 = 94{,}5 - 95 = -0{,}5$ $\qquad d_8 = 95 - 94{,}5 = 0{,}5$

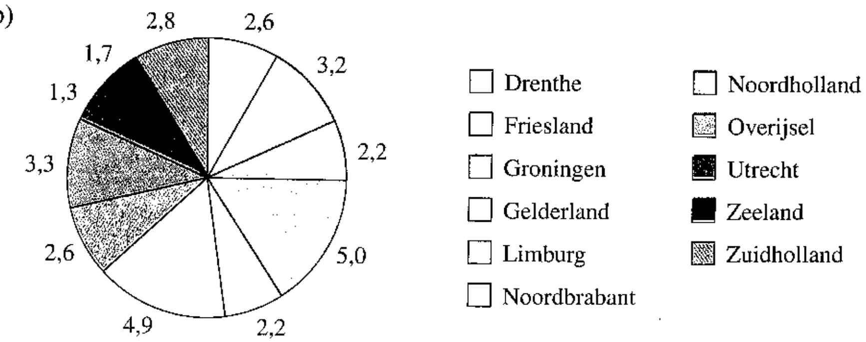
$d_9 = 99 - 95 = 4$ $\qquad d_{10} = 100 - 99 = 1$

$d_{11} = 104{,}5 - 100 = 4{,}5$

Az átlagos havi változás: $\dfrac{\sum_{i=1}^{11} d_i}{11} = \dfrac{-19{,}5}{11} = -1{,}77$ (kcal/kg/nap).

2599. a) Hollandia területe 31 800 km^2.

b)



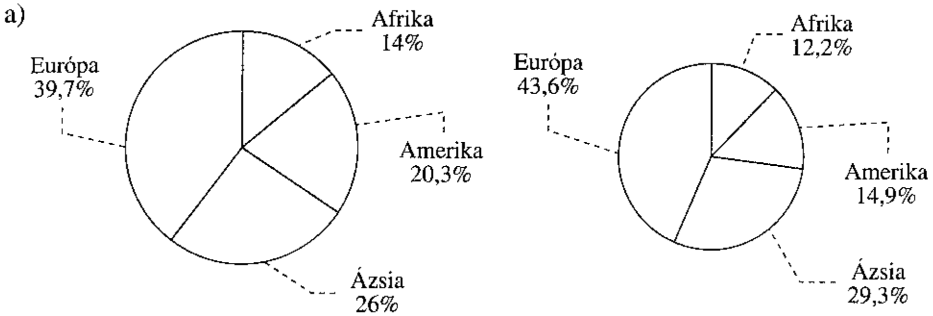
c) Egy holland tartomány átlagosan 31 800 : 11 ≈ 2890 (km^2).

2600. a) A nevesített 37 autómárkához tartozó eladási darabszámok átlaga:
(174 303 – 179) : 37 = 4706.

b) Az átlagtól való eltérés a következő autómárkák esetén:
Renault: 13 319, Seat: 414, Porsche: 4691.

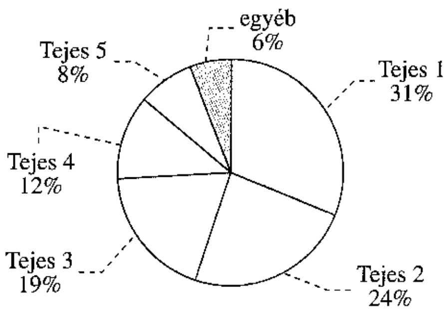
c) Az első 5 márka értékesítése fedi le az eladott darabszám felét.

2601. a)



b) A második évben az összbevétel csökkent, háromnegyedére esett vissza, ezt jeleztük a kisebb körrel. Átrendeződés folyt az egyes kontinensek között: Európa részesedése nőtt, hasonlóan Ázsiáé is, bár csak arányaiban, hiszen mindenhol kevesebb a bevétel, Amerikában zuhant vissza a legjobban.

2602. a) A kördiagramon a hatodik az egyéb kategória.

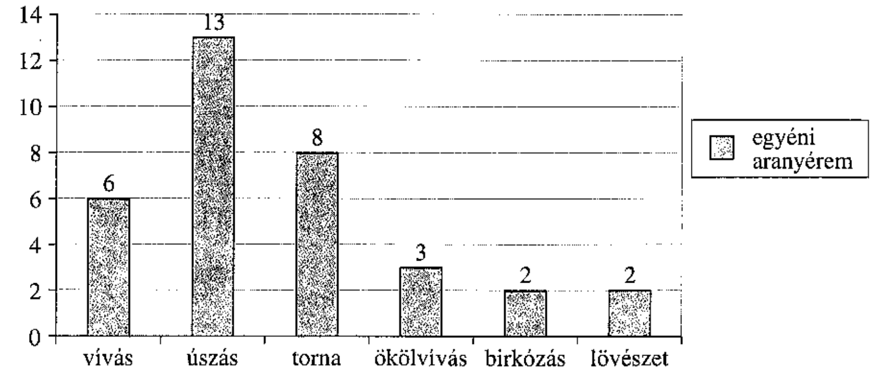


b) 2,6 millió literből 94% a felsorolt 5 cég, 6% az egyéb. Azaz 156 000 liter az egyéb, Tejes 1 806 000 liter; Tejes 2 624 000 liter; Tejes 3 494 000 liter; Tejes 4 312 000 liter; végül Tejes 5 208 000 literrel részesedik a napi fogyasztásból.

c) A vezető cég Tejes 1 806 000 literrel. Mivel Tejes 2 részesedése 624 000 liter, ezért 182 000 literrel többet kell megszereznie a többlet 600 000 literből, mint Tejes 1-nek, ha utol akarja érni. Ezért a többletből 30,3%-kal többet kell megszereznie, mint Tejes 1-nek. Azaz, ha Tejes 1 megszerez pl. 15%-ot, 90 000 litert, akkor Tejes 2-nek 90 000 + 182 000 = 272 000 litert kell megszereznie, ami éppen 30,3%-kal több, mint a 15, tehát 45,3%.

2603. a) átlag: 2,62
szórás: 1,0
medián: 2
módusz: 2

b)



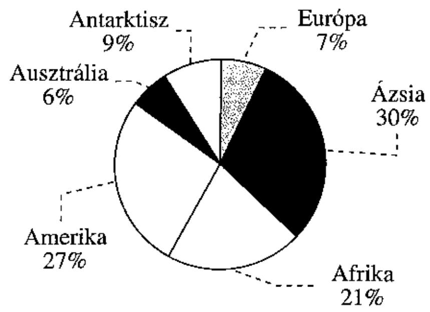
2604. a) A sportáganként összes érmes helyezések átlaga: 23,1
mediánja: 16.
A számsokaság kétmóduszú: móduszai 1 és 20
szórása: 23.

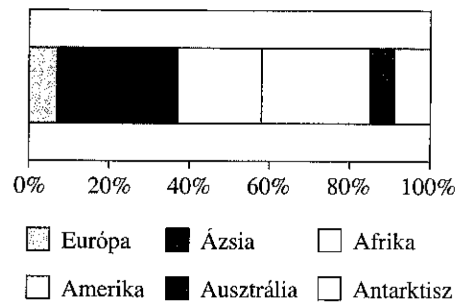
b) Az első öt sportág az ezüstérmek száma szerinti sorrendben:
kajak-kenu
vívás
úszás
birkózás
torna vagy atlétika

Az első öt sportág a bronzérmek száma szerinti sorrendben:
vívás
kajak-kenu
birkózás
atlétika (az előzővel felcserélhető)
úszás

Az első öt sportág az összes érmek száma szerinti sorrendben:
vívás
kajak-kenu
úszás
birkózás
torna

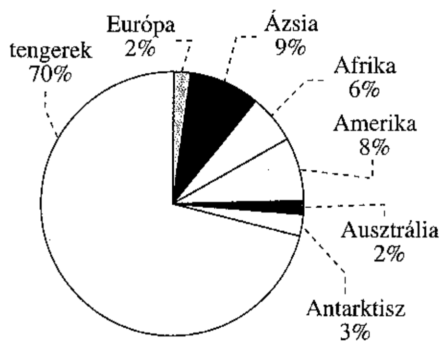
2605. a)



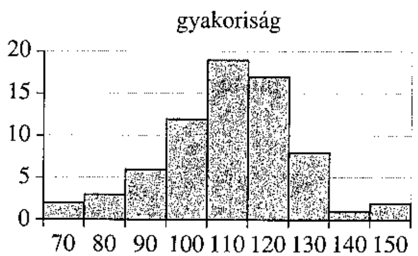


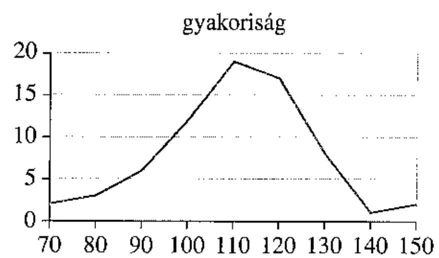
b) A Föld teljes felszínét a gömbbel való közelítésből kapjuk:

$F = 4R^2\pi = 5{,}112 \cdot 10^8$ km².
A megadott földrész-területek rendre, ugyancsak 10^8 km²-ben: 0,105; 0,449; 0,303; 0,398; 0,088; 0,133.
Ezek összege $1{,}476 \cdot 10^8$ km².
Mivel a teljes felszín
$5{,}112 \cdot 10^8$ km², ezért a tengerre adódik $3{,}636 \cdot 10^8$ km², arányában 70%.
A kördiagram a tengerekkel együtt:



2606. a) Oszlop, illetve vonaldiagram



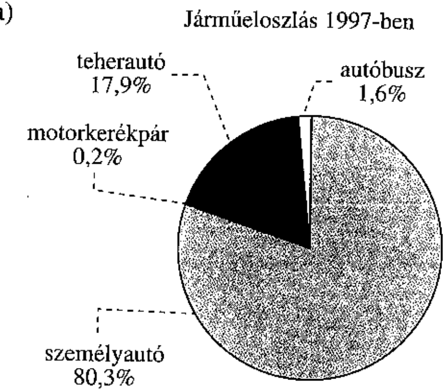


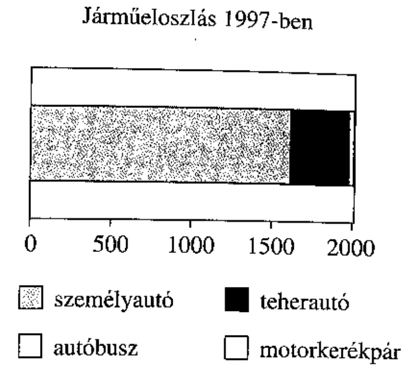
b) $\bar{x} = \dfrac{70 \cdot 2 + 80 \cdot 3 + 90 \cdot 6 + 100 \cdot 12 + \ldots + 130 \cdot 8 + 140 \cdot 1 + 150 \cdot 2}{70} = 110;$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{2 \cdot (110{,}43 - 70)^2 + 3 \cdot (110{,}43 - 80)^2 + \ldots + 2 \cdot (150 - 110{,}43)^2}{70}} \approx 16;$

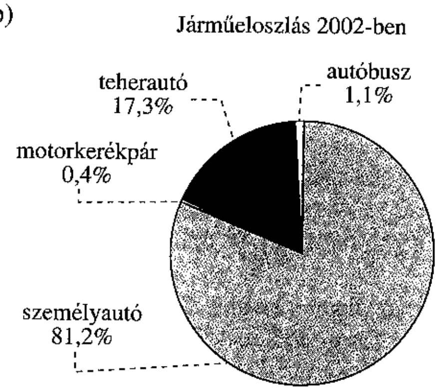
$\dfrac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}147$. (Az eredményeket egy zsebszámológép statisztikai üzemmódjával némi jártassággal ki lehet számítani, a fenti képletek végigszámolásához pedig türelem szükséges.)

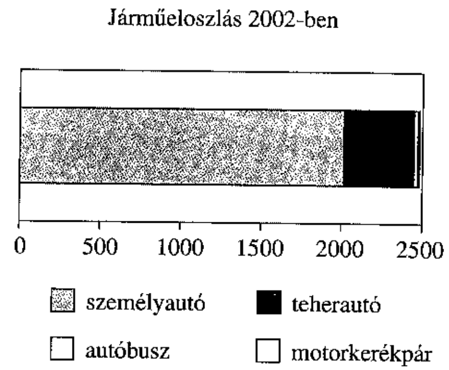
2607. a)





b)





c) Látszik, hogy a forgalom az óránkénti 2000 körüli (pontosan 2012) értékről 2500 körülire (2482) nőtt. Ez közel 25%-os növekedés. Ez az első észrevétel. A második az összetételre vonatkozik, ahol a tömegközlekedés aránya 2%-ról kb. a felére, 1%-ra esett vissza. Ez rossz jel, mert ezzel a terhelés és a környezetszennyezés tovább nő. A motorkerékpárok száma több, mint kétszeresére, 125%-kal nőtt, míg az autók kb. a forgalom növekedésének arányában nőttek, a teherautók kissé alatta. A buszok száma viszont csökkent 15,2%-kal! Az alábbi százalékos változás adható meg a négy járműtípusra:

személyautó	teherautó	autóbusz	motorkerékpár	összesen:
24,8%	19,4%	−15,2%	125%	23,4%

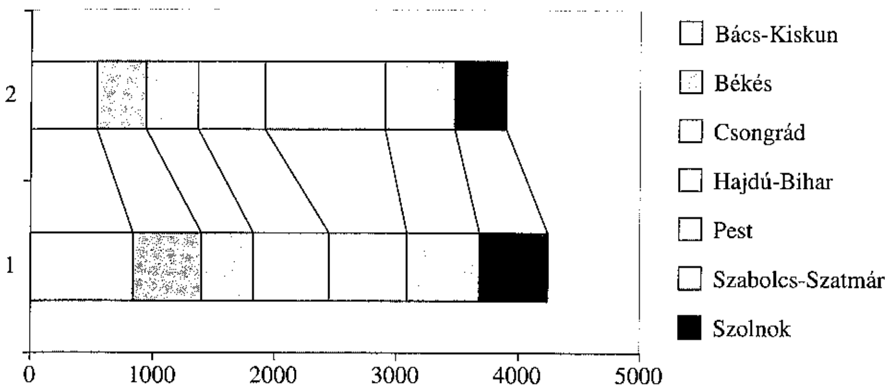
Az utolsó szám az összes jármű létszámnövekedése százalékban az 5 év alatt.

Megjegyzés:
Az egyes százalékos növekedések átlaga nem adja meg a 23,4%-ot, mert nem azonos súlyokkal szerepelnek!

2608. a)

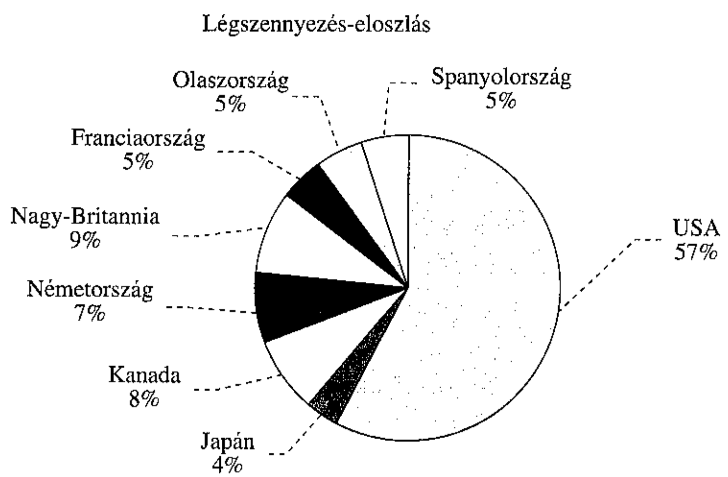
megye	terület (km²)	lakosság (ezer fő)	népsűrűség (lakos/km²)
Bács-Kiskun	8362	539,7	64,54
Békés	5632	402,5	71,47
Csongrád	4263	427,1	100,19
Hajdú-Bihar	6212	549,7	88,49
Pest	6393	985,1	154,09
Szabolcs-Szatmár	5937	572,4	96,41
Szolnok	5608	420,7	75,02

b)

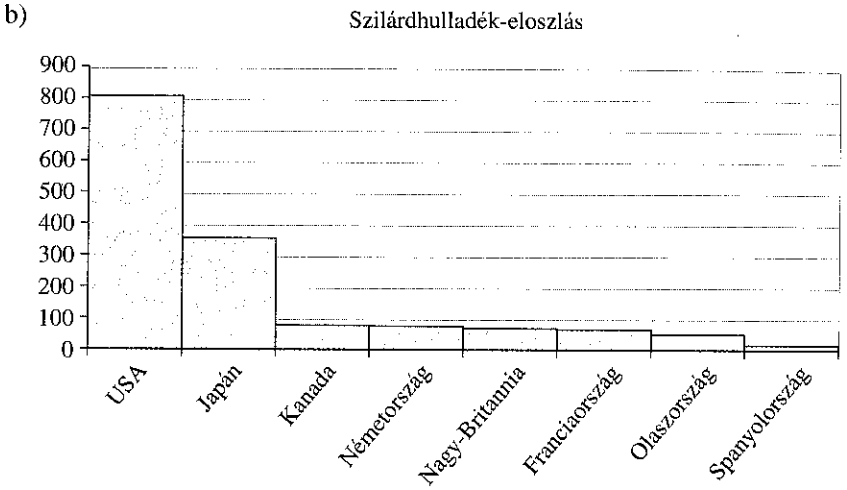


A felső szalagdiagramon a lakosság, az alsón a terület eloszlás látható. Pest esetén kis területen arányaiban sok lakos, míg fordítva: Bács-Kiskunban nagyobb területen arányaiban kisebb a lakosság. Tehát a népsűrűség minimuma az ábra szerint Bács-Kiskun, míg a maximuma Pest. Ezt természetesen az a)-ban megadott népsűrűség-adatok is jelzik. Minél jobban felfelé nyílik a két vonal ott nagyobb a népsűrűség.

2609. a)

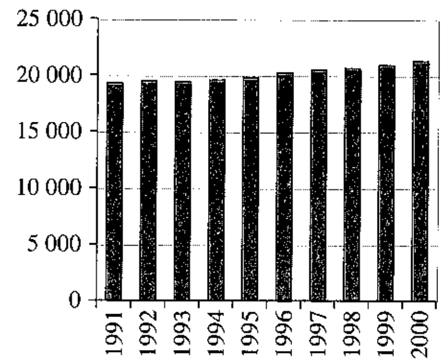


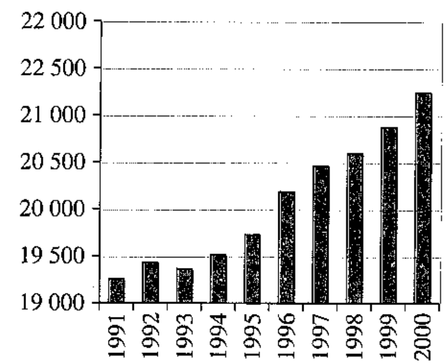
b)



c) A legnagyobb szemetelő az USA, bár egy főre jutó szilárd szemétben Japán alig marad le, hiszen jóval kevesebb emberre jut ez a mennyiség. Kanada például élre ugrik, hiszen a legkisebb lakossága van a felsorolt országok között. Figyelembe véve a lakosságot: légszennyezésben Kanada, USA, Nagy-Britannia a sorrend; szilárd szennyező anyagokban pedig: USA, Japán, Kanada.

2610.





Az első grafikon a lényegében változatlan, vagy csak alig növekvő lélekszám mellett érvelők fegyvere lehet (radikális sziú „nacionalisták": „lám, a gonosz többségi fehér társadalom elnyomja a kisebbségeket, elszívja népünk erejét, romlásba és nemzethalálba taszít" stb.); a második épp ellenkezőleg, a dinamikus fejlődést látóké („az állam nagyvonalú gondoskodása lendületes gyarapodást eredményez"; sőt ennek veszélyeit is felnagyíthatja egy többségi szélsőséges: „a mi pénzünkön sokasodnak, és majd kiszorítanak innen bennünket"). Mindkét túlzással szemben ajánlatos a józanság: hiszen ugyanarról az adatsorról beszélnek! Fontos lenne az egész (USA-beli, illetve kanadai) népesség növekedésének ismerete is, hogy azzal egybevetve mit mutat ez a növekedés.

2611. a)

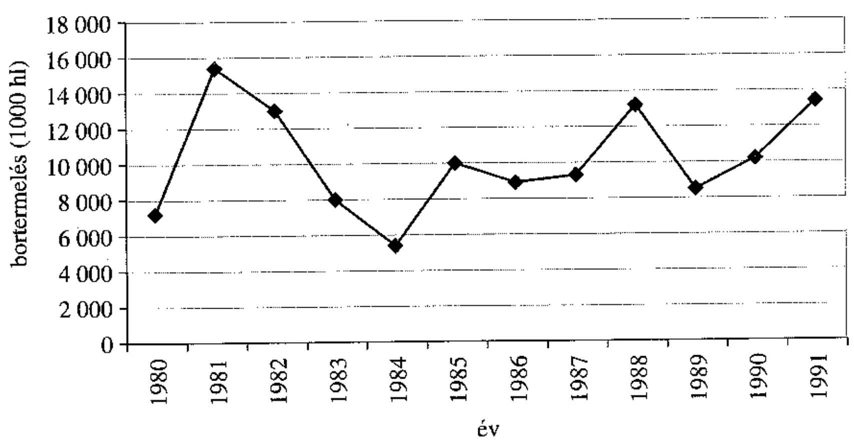
1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
123,1	122,1	121,5	121,7	122,2	123,2	125,4	127,5	129,9

b) Az első grafikon alkalmas olyan szubjektív benyomás keltésére, hogy nagymértékű változások történtek (erőteljes csökkenést sugall 1981—83-ban, erőteljes növekedést 1984—89 között). Az eredmények, illetve hiányosságok szándékos felnagyítására alkalmas tehát ez a grafikon.
A második grafikon az állandóság, illetve kismértékű emelkedés szubjektív érzetét keltheti, tehát alkalmas lehet az elért eredmények lekicsinylésére.

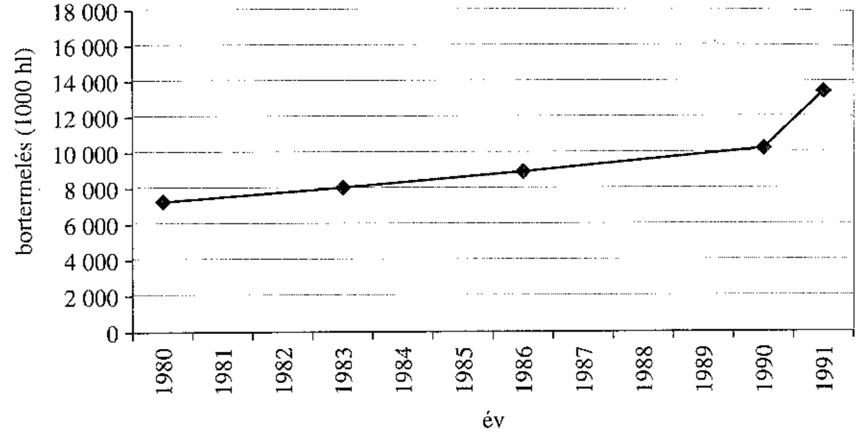
2612. a) Az első grafikon előnye, hogy a vizsgált időtartamra jó áttekintést ad. Megállapítható belőle, hogy a politikus népszerűségének enyhe csökkenése a fő tendencia a 12 hét során. Hátránya, hogy a részleteket, az ingadozásokat és a pontos értékeket nem lehet leolvasni.
A második grafikon előnye a pontos leolvashatóság, a rövid időtartamú változások jó megfigyelhetősége. Hátránya, hogy a változásokat felnagyítva manipulatív célokra használható.

b) A politikust támogatóként azt lehet sugallni, hogy a népszerűsége gyakorlatilag változatlan, míg ellenzékiként a második grafikon szubjektív hatására alapozva egyenletes és erőteljes csökkenést lehet sugallni a nem kellően figyelmes olvasó számára. A csökkenésen nem lehet vitatkozni, csupán annak mértékén.

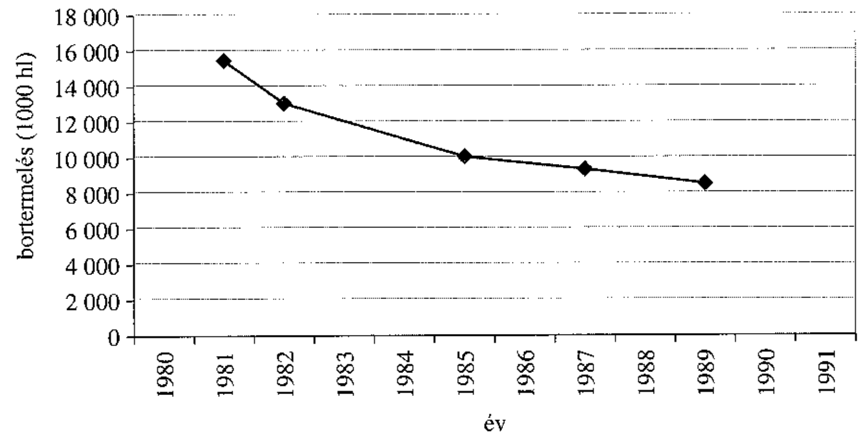
2613. a)



b)

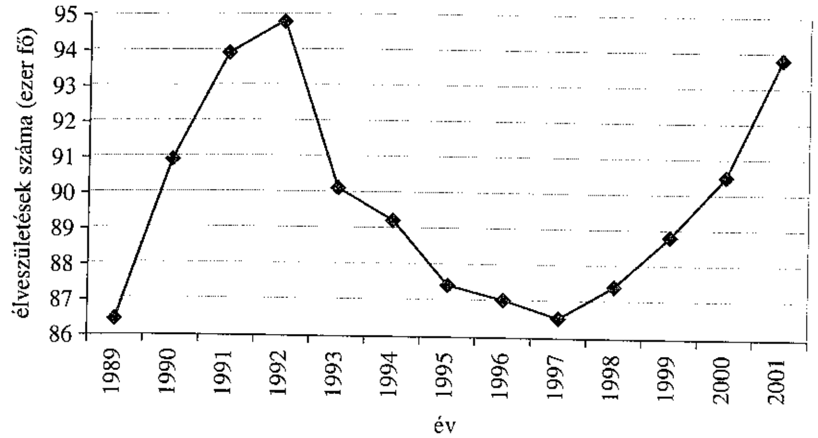


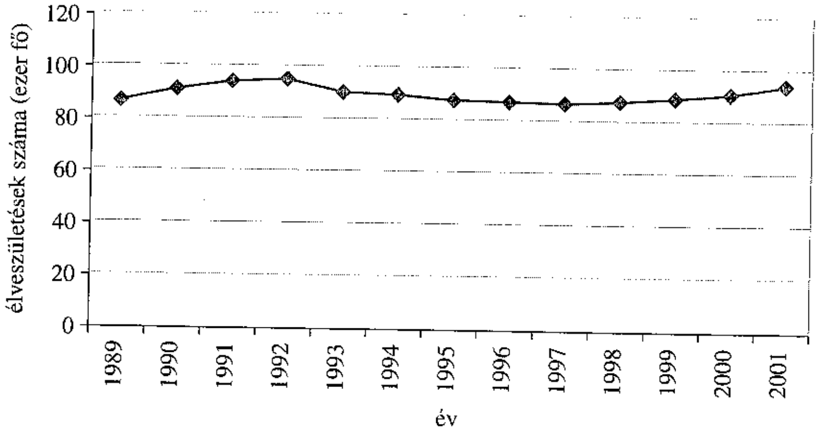
c)



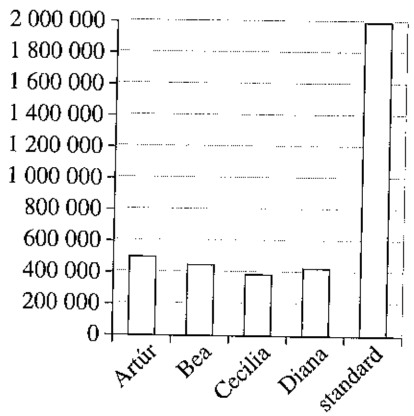
d) Az a)-beli diagram a bortermelés alakulását torzítatlanul mutatja évről évre. A b)-beli diagram alapján a bortermelés folyamatos növekedését, a c)-beli alapján pedig folyamatos csökkenését lehet sugallni manipulatív céllal.

2614.

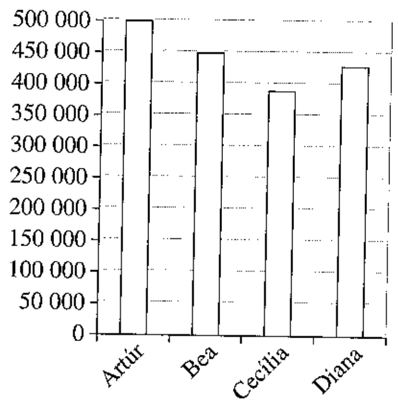




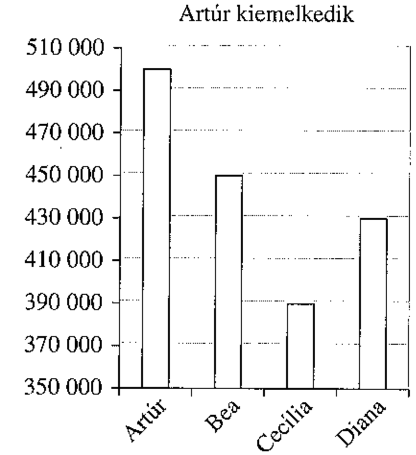
2615. a)

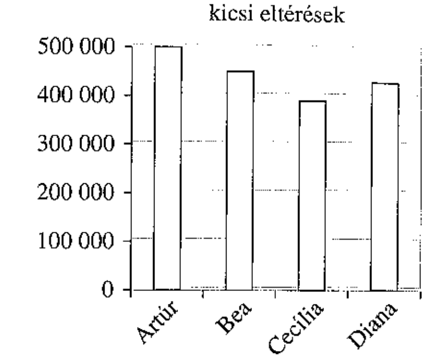


b)

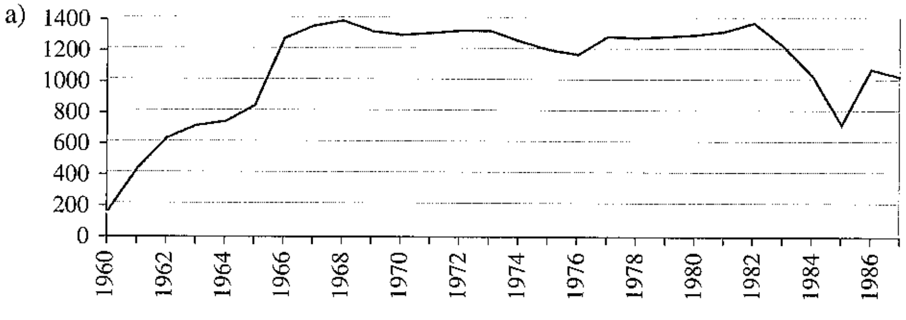


c) A skálán múlik minden, honnan indul, és milyen egységek vannak rajta (lépték).

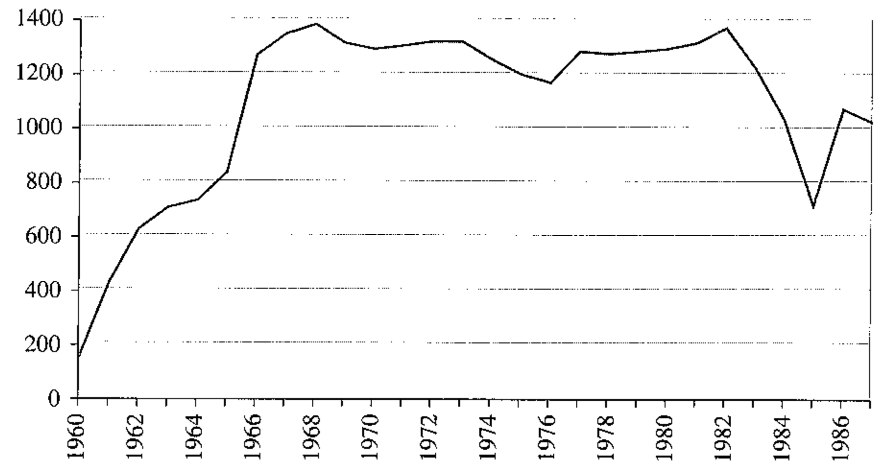




2616. a)



b)



Tovább lehet „élezni" a különbségeket, ha nem 0-nál kezdjük az y tengely beosztását.

2617. a)

idő	'93.09.	'95.03.	'96.01.	'97.01.	'97.11.	'98.08.	'99.01.	2000.01.	2000.08.
jegyár	25	35	50	60	70	75	90	95	100
bérlet	1140	1500	1950	2460	2800	3000	3400	3600	3800

b) Az a probléma, hogy az időt nem egyenletesen mutatja, van olyan két dátum, amelyek között csak 5 hónap telt el, s van olyan, amelyek között másfél év, illetve többször egy év. Ezért a változás meredeksége csalóka.

c) Mintha a növekedése az utolsó időkben lelassult volna, de ez a rossz lépték miatt van. A grafikon első részében általában egy-másfél év távolságú pontok vannak, míg a végén van 7 hónapos is.

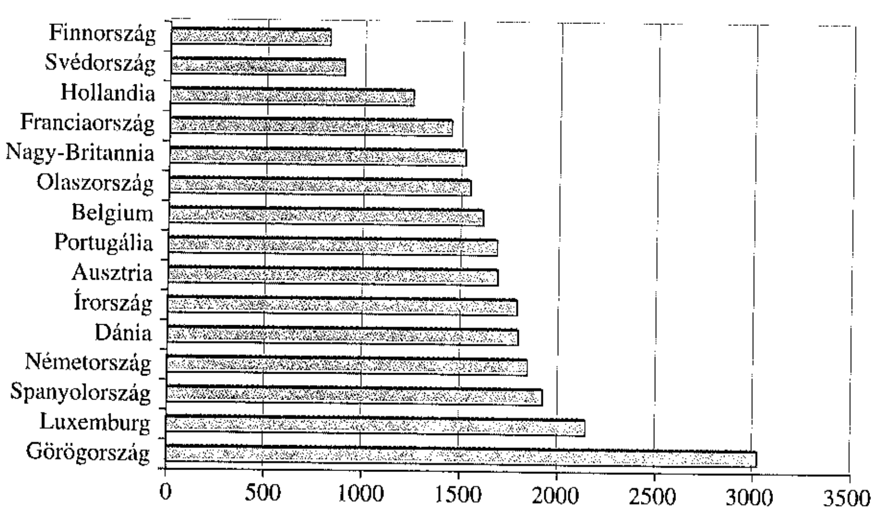
d) Nem helyes, zavaró a kettő együtt, mert más egység van megadva, az egyiknél 10 Ft; a másiknál 500 Ft az egység. Az azért leolvasható, hogy a bérletáraknál erőteljesebben emelkedtek a vonaljegyárak.

2618. a) Azt tudjuk leolvasni, hogy az egyes EU országokban egy év alatt átlagosan hány szál cigarettát szívtak el 1997-ben. Ismerve a lakosok számát, ebből meg lehet mondani, hogy hány szál cigaretta fogyott az egyes országokban.

b) Zavaró a ferde oszlopdiagram, amit a cigarettás doboz még el is takar, a vége pedig feleslegesen felkunkorodik –, nem lehet tudni, hogy az oszlopok csak a fehér vagy a fekete véggel együtt értendők. Aránytalan az oszlopok hossza, valamint az sem látható, hogy 0 szint hol van. Az sem világos, mit jelent a csillag Luxemburg és Finnország esetében.

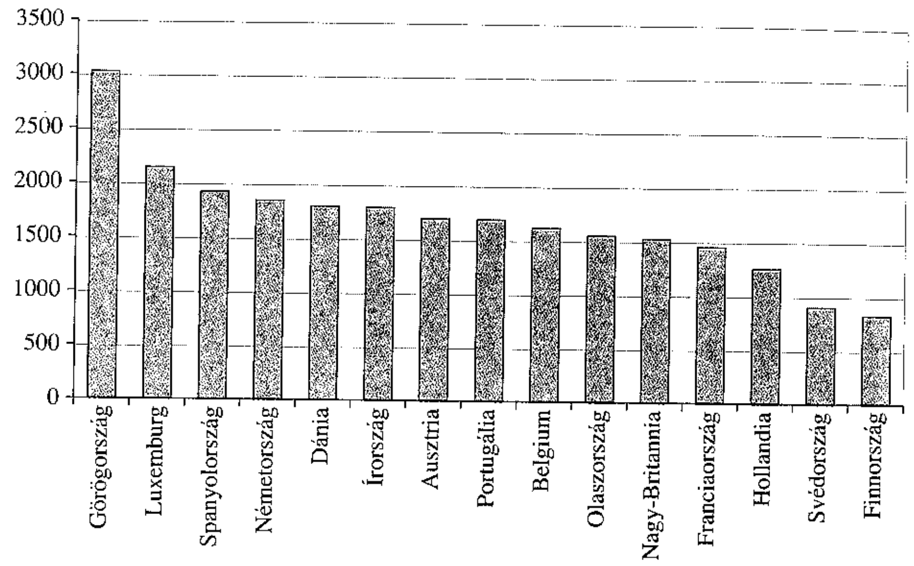
c) Egy korrekt ábra:

Egy főre jutó cigarettafogyasztás az EU tagállamaiban, db (1997)



vagy talán még jobb:

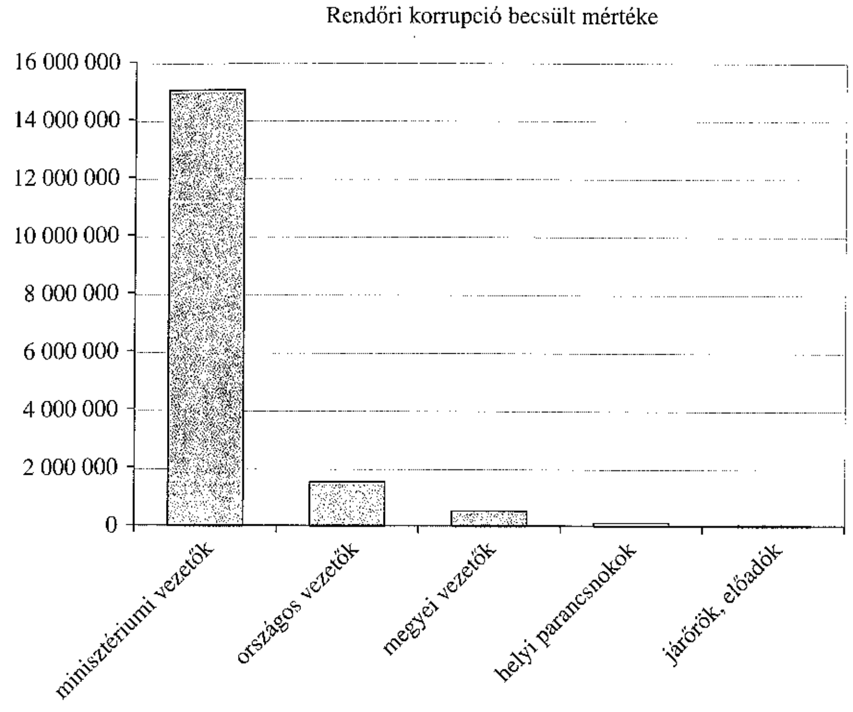
Egy főre jutó cigarettafogyasztás az EU tagállamaiban, db (1997)



d) Az átlagos egy főre jutó cigarettafogyasztás lehet a súlyozott számtani közép, ha ismerjük az országok lakosainak számát. Enélkül nem lehet a kérdésre válaszolni. (Az országok között a középső – medián – Portugália 1681 szállal, mert az a középső ország, hiszen a grafikonon már nagyság szerint sorba vannak rakva az országok.)

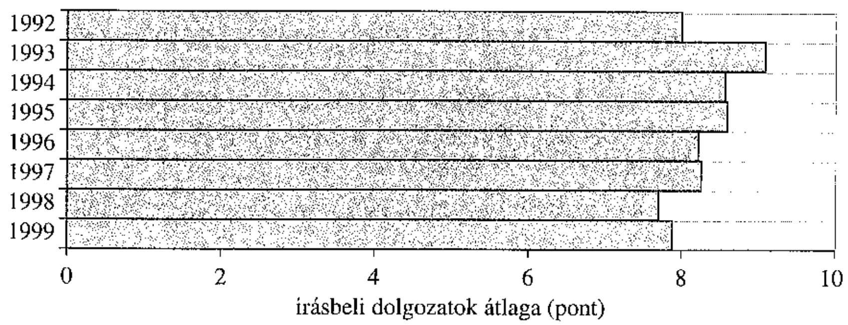
2619. a) A kenőpénzek nagyságát akarja a rendőrség különböző rangú vezetői esetén ábrázolni. Nem derül ki azonban, hogy ez egy ügyre, vagy egy bizonyos időszakra vetített összeg. A számok 130 rendőr megkérdezéséből származnak. Teljesen megbízhatatlan adat, ráadásul nem tudjuk, mire vonatkoznak a számok. Talán az egyetlen következtetés, hogy a minisztériumi vezetők kenőpénzei legalább egy nagyságrenddel nagyobbak az országos vezetőkénél, és a kisembereké 600-ad része a legmagasabb kenőpénzeknek.

b) Hiba, hogy a pénzoszlopok magassága nem arányos az értékükkel. Ráadásul teljesen feleslegesen girbe-gurbák, például ha a 25 000 Ft egy pénzérme, akkor 100 000 Ft nem 3, hanem 4 darab, míg az 500 000 már 20 darab (az ábrán talán 4), az 1 500 000 pedig már 60 darab (az ábrán 6), végül a legmagasabb 600 darab lenne (az ábrán talán 38, nehéz megszámolni). A térbeliség is zavaró lehet, bár nem ez a fő hiba.
Egy helyes ábra, az adatok alapján:



2620. a) Mert nem 0-tól indul a tengely, így a különbségek felnagyítva látszanak. Emellett pontatlan is, hiszen pl. 1994 és 1995 között 0,03 a különbség, ami nagyobbnak látszik, mint 1996 és 1997 között, ahol pedig már 0,04 a különbség.

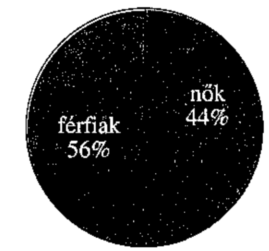
b) Egy helyesebb ábrázolás:



c) Nyilván nem csak a tanulók színvonala változott ilyen mértékben, hanem a felvételi dolgozatok nehézsége is. Emellett nem tudjuk, melyik tárgyra vonatkozik az ábra. Azaz lényegében semmit nem mond, ráadásul minden évben lehetett másik tantárgy, amiből a maximális pontszámot elérték.

2621. a) Először is nem világos, mi a munkanélküliségi ráta. Az sem világos, hogy a 246 300 munkanélkülibe már beszámították, vagy még hozzá kell adni a 135 000 tartós munkanélkülit. Ha beszámították, akkor a 3 978 000 foglalkoztatott mellett az arány $\dfrac{246\,300}{246\,300 + 3\,978\,000} = 0{,}058$, tehát 5,8%. Ha még hozzá kell adnunk a tartósan munkanélkülieket, akkor 0,0875, azaz 8,75% lenne az arány. Ez sehogy sem stimmel. A cikk szövege szerint egyébként bele kell érteni a 246 300-ba a 135 000 főt, amire a szövegben megadott arány 49,5%, ez sem jó, hiszen valójában 54,8%! Azaz a tartós munkanélküliek aránya még magasabb.

b) Az ábrán a férfi és női ráta viszonyait tüntettük fel, amiről a szövegben egy sort sem írnak, ráadásul a megadott 6,7% kb. az 5,8 és a 7,5 számtani közepe. Jobb lenne kördiagram a térbeli „sajt-" (ellipszis) diagramnál, ami pont a szögeket torzítja, így nem lehet leolvasni helyesen az arányokat.
A pontos diagramnál kicsit nagyobbat sugall az újság ábrája. Emellett inkább a munkanélküli nők és férfiak számát kellett volna ábrázolni, az többet mondana.

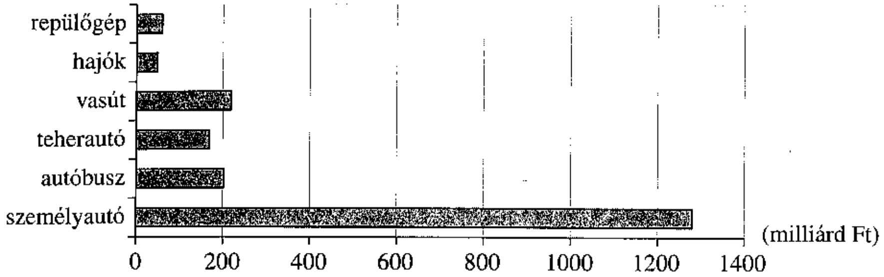


Megjegyzés:
Itt nyilván azt próbálták ábrázolni, hogy a nők körében 5,8%-os, a férfiak között 7,5%-os a munkanélküliség – de mit jelent így ez a diagram? Minek az eloszlása ez? Semminek. Viszont a 44%-56% valóban valami eloszlást jelent – itt viszont (adatok híján; sőt ismerve a nemek megoszlását, kifejezetten az adatok ellenére) az a háttérfeltételezés, hogy ugyanannyi a női és a férfi munkavállaló (munkaképes stb.), ami nem igaz.

2622. a) Az első két hasáb nem a képzeletbeli kezdővonalról indul; felesleges a térbeliség; zavaró a hajó és a felfestett víz az alsó téglán, mivel az éppen a személyautókat ábrázolja; nem világos, mi az a, és mi a b, megjegyzés; miért áll majdnem minden adat két számból (milyen tól-ig határokat ábrázolnak?); a két szám melyikét akarja jelezni a téglák hossza; amely egyébként messze nem arányos a feltüntetett költségekkel (egyik számmal sem).

b) Az alsó tengelyen lévő számok milliárd Ft-ot jelentenek, az ágazatokat átlagáron vettük, pl. autóbusz: $\dfrac{172 + 232}{2} = 202$, ami persze nem biztos, hogy jó, mert nem tudni, mit jelent a két érték!

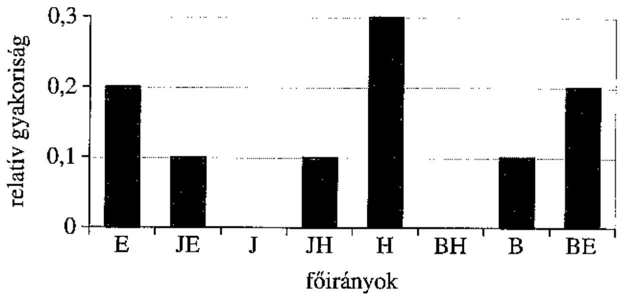
Tervezett közlekedésfejlesztési és -fenntartási beruházások Magyarországon (1994—2000)



2623. a) A gyakoriságokat épp a feladat táblázatában szereplő adatok jelentik. A relatív gyakoriságokat ebből az összes eset számával ($2 + 1 + 0 + 1 + 3 + 0 + 1 + 2 = 10$) való osztás révén kapjuk:

E	JE	J	JH	H	BH	B	BE
0,2	0,1	0	0,1	0,3	0	0,1	0,2

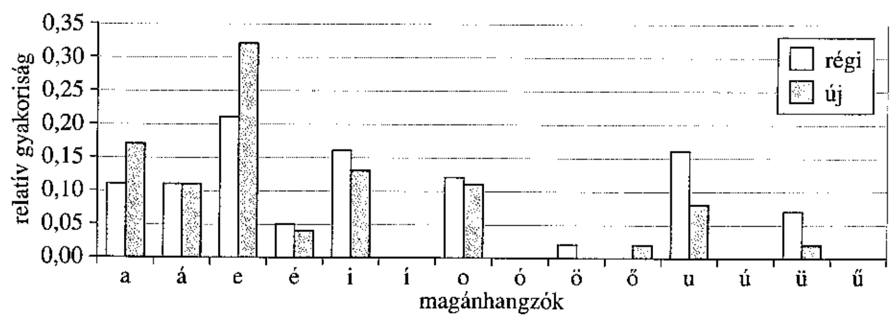
b) A diagramon a relatív gyakoriságok láthatók; a gyakoriságok diagramja ugyanilyen, csak a felvett értékek 10-szer ekkorák.



2624. a)

	a	á	e	é	i	í	o	ó	ö	ő	u	ú	ü	ű
régi	0,11	0,11	0,21	0,05	0,16	0	0,12	0	0,02	0	0,16	0	0,07	0
új	0,17	0,11	0,32	0,04	0,13	0	0,11	0	0	0,02	0,08	0	0,02	0

b)



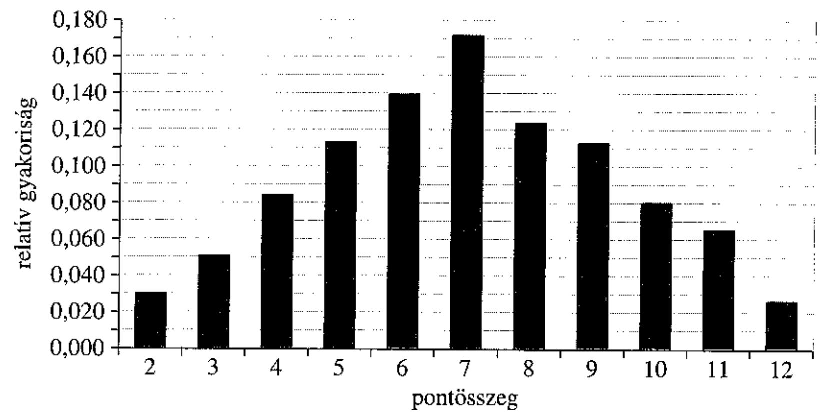
2625. a)

dobás	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	6	8	12	13	7	14
relatív gyakoriság	0,100	0,133	0,200	0,217	0,117	0,233

b) A leggyakrabban a hatos fordult elő.

c)

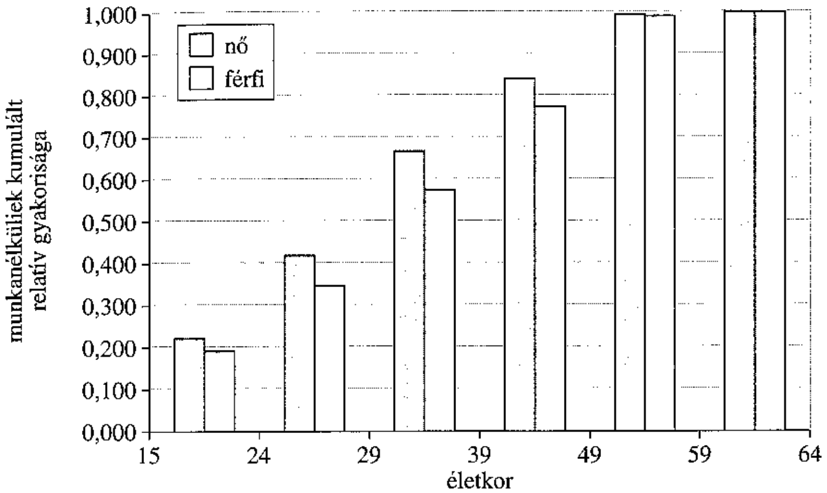
2626. a)



b) Számolás:

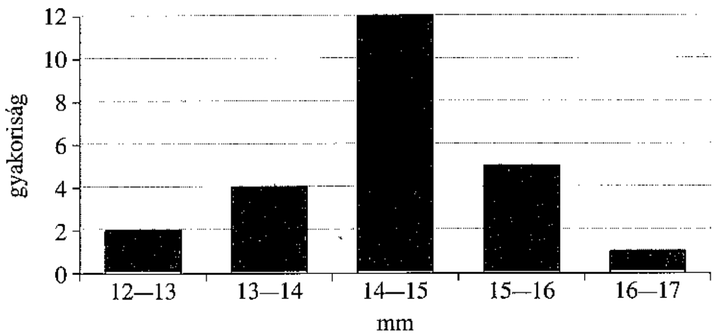
$2 = 1 + 1$	1 lehetőség	1/36
$3 = 1 + 2$	2 lehetőség	2/36
$4 = 1 + 3 = 2 + 2$	3 lehetőség	3/36
$5 = 1 + 4 = 2 + 3$	4 lehetőség	4/36
$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$	5 lehetőség	5/36
$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$	6 lehetőség	6/36
$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$	5 lehetőség	5/36
$9 = 3 + 6 = 4 + 5$	4 lehetőség	4/36
$10 = 4 + 6 = 5 + 5$	3 lehetőség	3/36
$11 = 5 + 6$	2 lehetőség	2/36
$12 = 6 + 6$	1 lehetőség	1/36

b)



c) Ez éppen a kumulált relatív gyakorisággal egyenlő, tehát a kérdezett gyakoriságok 0,668, illetve 0,576.

2630. a)



b)

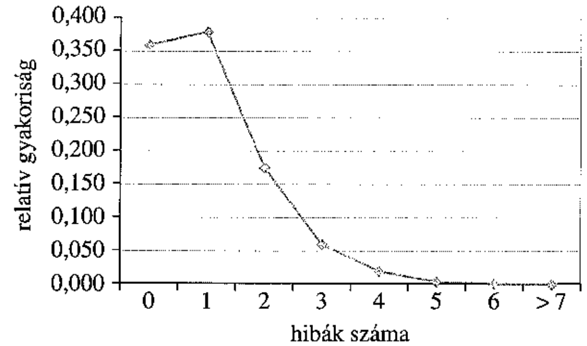
osztályhatárok mm-ben	gyakoriság	relatív gyakoriság
12—13	2	0,08
13—14	4	0,17
14—15	12	0,50
15—16	5	0,21
16—17	1	0,04

c) A minőségi előírások szerint kell, hogy a távolság legalább 14,5 – 1,5 = 13 (mm) és legfejebb 14,5 + 1,5 = 16 (mm) legyen. Ez 21 alkalommal fordul elő, ez az összes esetnek $\frac{21}{24} = 0,875$ része (87,5%-a).

2631. a) Készítsünk táblázatot az előforduló hibaszámok relatív gyakoriságáról:

hibák száma	relatív gyakoriság
0	0,36 = 0,360
1	0,74 – 0,36 = 0,380
2	0,915 – 0,74 = 0,175
3	0,975 – 0,915 = 0,060
4	0,995 – 0,975 = 0,020
5	0,999 – 0,995 = 0,004
6	1,000 – 0,999 = 0,001
> 7	0 = 0,000

A grafikon:



b) $\text{Átlagos hibaszám} = \dfrac{360 \cdot 0 + 380 \cdot 1 + 175 \cdot 2 + 60 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{1000} = 1,016.$

2632. a)

élettartam	gyakoriság
850—900	10
900—950	16
950—1000	28
1000—1050	40
1050—1100	60
1100—1150	45
1150—1200	25
1200—1250	17
1250—1300	9

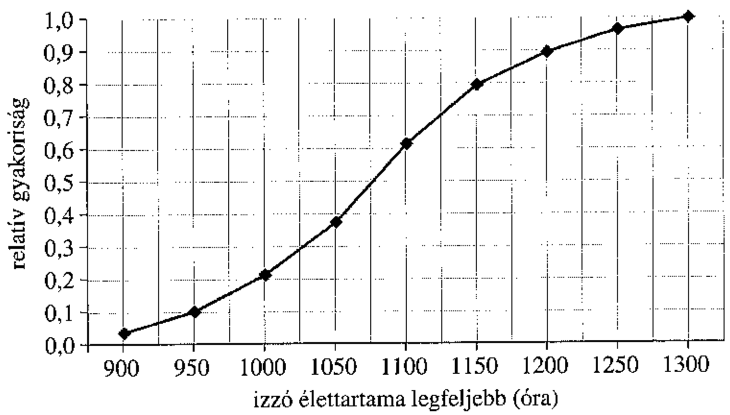
b) Az átlagos élettartam a várható élettartamnak jó becslése:

$\text{átlagos élettartam} \approx \dfrac{875 \cdot 10 + 925 \cdot 16 + \ldots + 1275 \cdot 9}{250} \approx 1075$ (óra).

c)

Az izzó élettartama legfeljebb (óra)	relatív gyakorisága
900	0,040
950	0,104
1000	0,216
1050	0,376
1100	0,616
1150	0,796
1200	0,896
1250	0,964
1300	1,000

A grafikon:

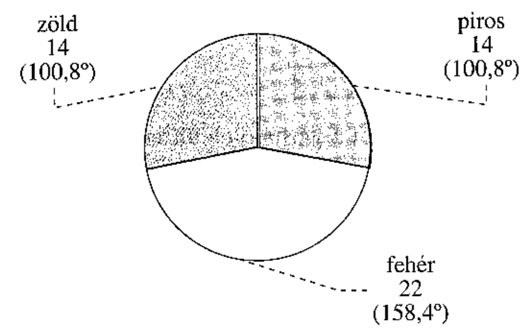


2633. a–b)

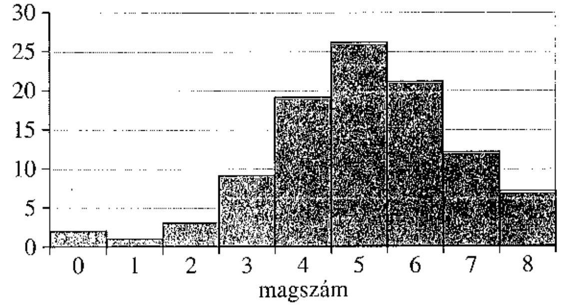
	P	F	Z
gyakoriság	14	22	14
relatív gyakoriság	0,28	0,44	0,28

c) A fehér szín fordult elő a leggyakrabban.

d)



2634. a)



b) Az átlagos magszám:

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 9+4\cdot 19+5\cdot 26+6\cdot 21+7\cdot 12+8\cdot 7}{2+1+3+9+19+26+21+12+7} = \frac{506}{100} = 5,06;$$

kerekítve mondhatunk kb. 5 magot.

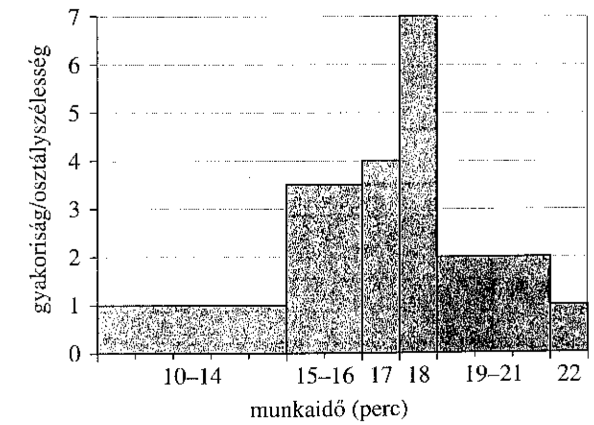
c) A medián az 50. és 51. mag átlaga, mindkettő 5, tehát 5. A módusz a leggyakoribb magszám, a gyakorisági diagramon jól láthatóan ez is 5.

2635. a) Az egyes „munkaidőosztály" átlagok rendre: 12; 15,5; 17; 18; 20; 22 – ahonnan a 30 dolgozat átlagos munkaideje a gyakoriságokkal súlyozott közepe a felsorolt 6 számnak: $\frac{12\cdot 5+15,5\cdot 7+17\cdot 4+18\cdot 7+20\cdot 6+22\cdot 1}{30} = \frac{504,5}{30} = 16,81\dot{6}$,

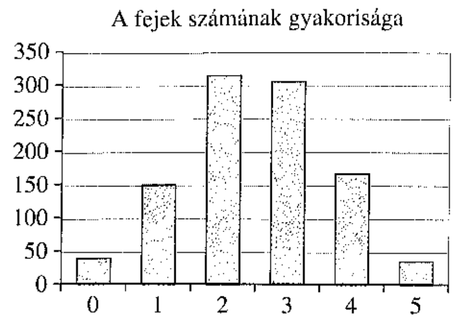
tehát az átlagos, egy dolgozatra eső munkaidő becsült értéke: 16 perc 49 sec.

b) A pontosabb átlag az osztályba sorolás előtti adatokból: $16,8\dot{6}$ perc, azaz 16 perc 52 másodperc, 3 másodperccel hosszabb. Az eltérés onnan van, hogy az osztályokban nem egyenletesen szerepelnek az értékek, így az osztályközép csak becslés.

c) Az első táblázat alapján a hisztogram: a 10—14 5 egység széles, 15—16 2 egység széles, a 19—21 három egység széles, a többi egységnyi. A magasságoknál a gyakoriságot kell osztani az osztályszélességgel, ez adja a hisztogram téglalapjai magasságát.



2636. a)



b) Az összes fejek száma: $148 + 2 \cdot 312 + 3 \cdot 303 + 4 \cdot 165 + 5 \cdot 34 =$
$= 148 + 624 + 909 + 660 + 170 = 2511.$

c) Mivel egyszerre 5 pénzt dobtak fel, 1000 kísérlet 5000 dobást jelent, tehát a relatív gyakoriság: $\dfrac{2511}{5000} = 0,5022.$

2637. A kerekített értékeket tartalmazó táblázat:

3,7	3,3	3,7	3,5	3,5
3,6	3,6	3,9	3,8	3,6
3,7	3,6	3,9	3,5	3,8
3,7	3,6	3,5	3,7	3,7

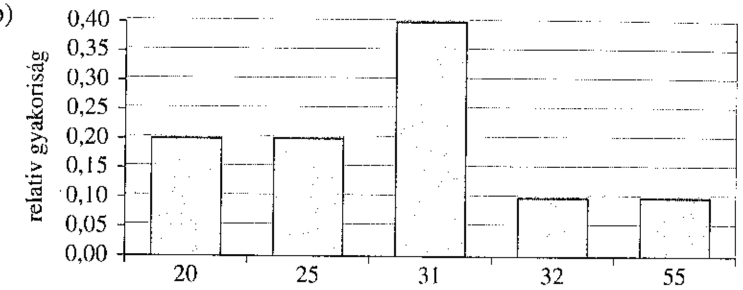
A gyakoriságot és relatív gyakoriságot tartalmazó táblázat:

adat	gyakoriság	relatív gyakoriság
3,3	1	0,05
3,4	0	0,00
3,5	4	0,20
3,6	5	0,25
3,7	6	0,30
3,8	2	0,10
3,9	2	0,10

2638. a)

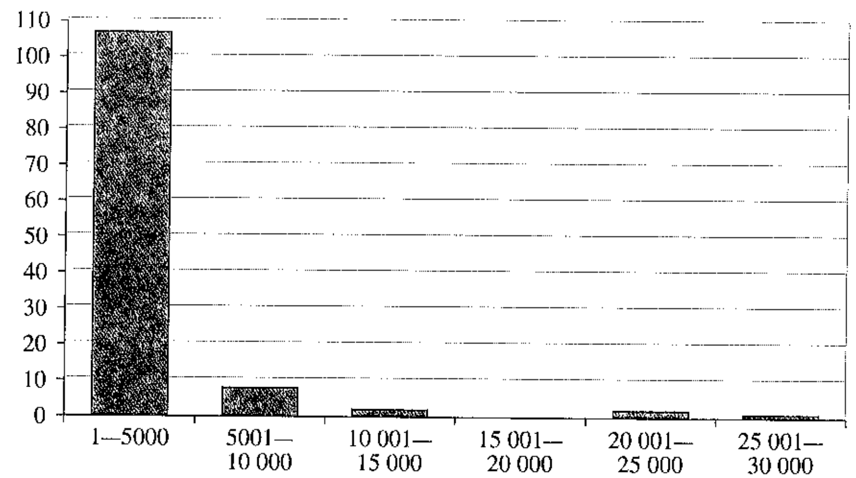
adat	gyakoriság	relatív gyakoriság
20	2	0,20
25	2	0,20
31	4	0,40
32	1	0,10
55	1	0,10

b)



2639. a)

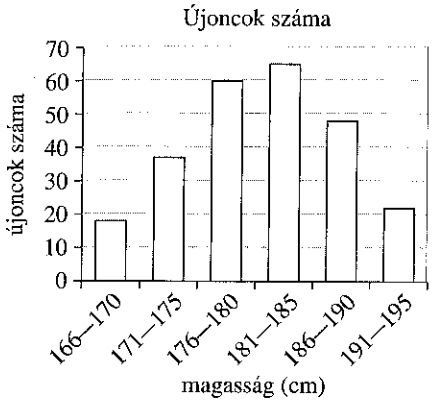
1—5000	107
5001—10 000	8
10 001—15 000	2
15 001—20 000	0
20 001—25 000	2
25 001—30 000	1
közötti létszámban	nyelvet beszélnek



b) A legnagyobb nyelv $\dfrac{30\,000}{232\,300} \approx 0,13$ részt jelent. Az öt legnagyobb nyelv beszélőinek együttes létszáma 103 000, ez $\dfrac{103\,000}{232\,300} \approx 0,44$ részt jelent. A tíz legnagyobbé pedig 151000, ez $\dfrac{151\,000}{232\,300} \approx 0,65$ rész.

c) Az osztályközepek: 4,5; 14,5; 24,5; 34,5; 44,5. Ezekkel számolva az összeg:
$3 \cdot 4,5 + 11 \cdot 14,5 + 22 \cdot 24,5 + 11 \cdot 34,5 + 3 \cdot 44,5 =$
$= 3 \cdot 49 + 11 \cdot 49 + 22 \cdot 24,5 = 1225,$
az átlag pedig: $\frac{1225}{50} = 24,5$ (természetesen, a szimmetria miatt).
Az eltérés oka az, hogy az osztálygyakorisági táblázatból már elveszett, hogy az egyes osztályokon belül milyen a pontszámok eloszlása, azt csak becsülni tudjuk egy átlagértékkel, az osztályközéppel.

2644. a)



b) Az átlagos magasságot csak becsülni lehet az osztályközépértékekkel:
$$\frac{168 \cdot 18 + 173 \cdot 37 + 178 \cdot 60 + 183 \cdot 65 + 188 \cdot 48 + 193 \cdot 22}{250} = 181,08$$
tehát kb. 180 cm az újoncok átlagmagassága.

c) A szórást is csak becsülni lehet, az eltérésnégyzet-összegek átlaga:
$$\frac{12^2 \cdot 18 + 7^2 \cdot 37 + 2^2 \cdot 60 + 3^2 \cdot 65 + 8^2 \cdot 48 + 13^2 \cdot 22}{250} = 48,08,$$
tehát a szórás ennek a négyzetgyöke: 6,9.

Megjegyzés:
Ha valaki nem tízesre kerekít, akkor a 181-es átlaggal ez $\sqrt{46,9} \approx 6,85$.

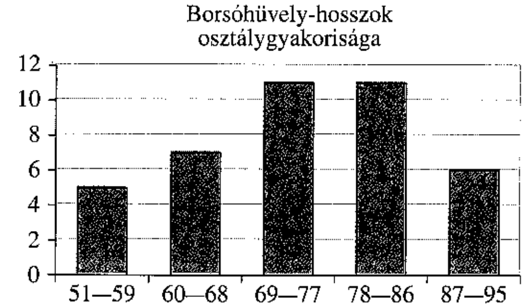
d) A legmagasabb 40 újoncból 22 191—195 cm közötti, 18 pedig 186—190 cm közötti. A középső 20. és 21. elemek átlaga már a 191—195 osztályban van. Azaz biztos az utolsó osztályba esik.

2645. a) Az osztályba soroláshoz 5 egyforma széles osztály kell, tehát a legkisebb (52 mm) és a legnagyobb (93 mm) adat távolságát kell 5 egyenlő részre osztani.
$93 - 52 = 41$, ennek ötöde kb. 8, tehát az osztályok:
51—59; 60—68; 69—77; 78—86; 87—95.
Ezek 9 adatot tartalmazó osztályok, ugyan 8 egység szélesek, de mindkét végük számít.

A gyakoriságok:

hosszúság	51—59	60—68	69—77	78—86	87—95
gyakoriság	5	7	11	11	6

A diagram:

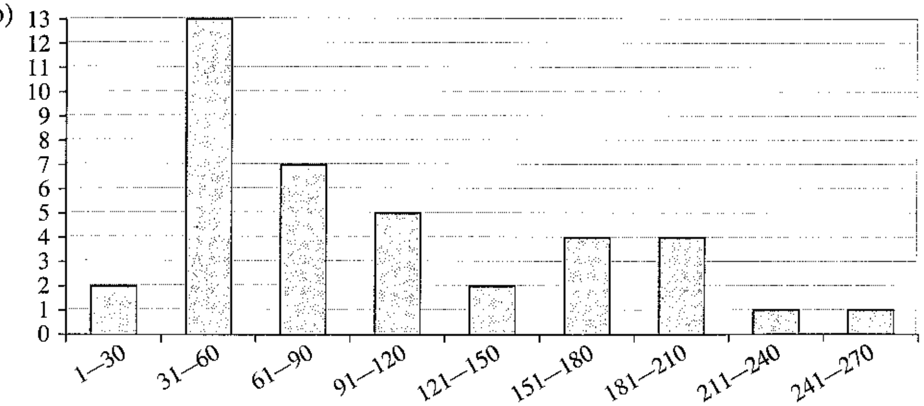


b) A pontos átlag az eredeti adatok alapján: $\bar{x} = 74,625 \approx 74,6$ mm, az osztályközepekkel számolt átlag: $\frac{55 \cdot 5 + 64 \cdot 7 + 73 \cdot 11 + 82 \cdot 11 + 91 \cdot 6}{40} = 74,35$ (mm).
Az eltérés oka a 2643. c) megoldásban már ismertetett kerekítés.

2646. a)

1—30	2
31—60	13
61—90	7
91—120	5
121—150	2
151—180	4
181—210	4
211—240	1
241—270	1
közötti számú példa	fejezetben szerepel

b)



c) Mint megszámolható, 39 fejezet van. Az osztályközepekkel szorozva az egyes osztályok létszámát, a következő átlagot kapjuk:

$$\frac{15,5\cdot 2+45,5\cdot 13+75,5\cdot 7+\ldots+225,5\cdot 1+255,5\cdot 1}{39}=\frac{3874,5}{39}\approx 99,35.$$

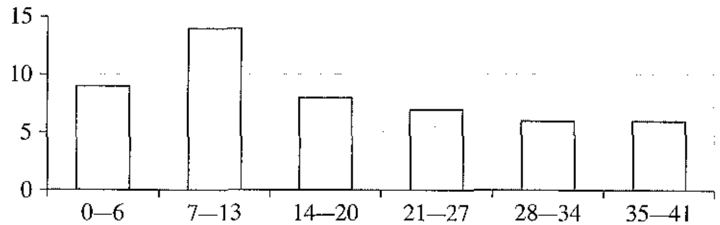
d) Az igazi átlag $\frac{3894}{39}\approx 99,85$. Az eltérés a c)-beli eredménytől mindössze 0,5 példa, ami most egyúttal (a 100-hoz igen közeli eredmény miatt) kb. 0,5%, igen csekély. (Nyilván általában az osztályszélességek csökkentése a hibát is csökkenti, növelése pedig növeli.)

2647. a) A legkevesebb betegszabadságon töltött nap a 0, a legtöbb a 41. Ez összesen 42-féle adat, ezt például 6 db hetes csoportba lehet osztani, így: 0—6; 7—13; 14—20; 21—27; 28—34; 35—41. (Lehetne még 3 db 14-es, vagy 7 db 6 egység széles osztály, a 14 db 3 egység széles már túl sok, a 2 db 21-es, illetve a 21 db 2 egység széles sem túl használható.) A kívánt táblázat tehát:

osztály	0–6	7—13	14—20	21—27	28—34	35—41
gyakoriság	9	14	8	7	6	6

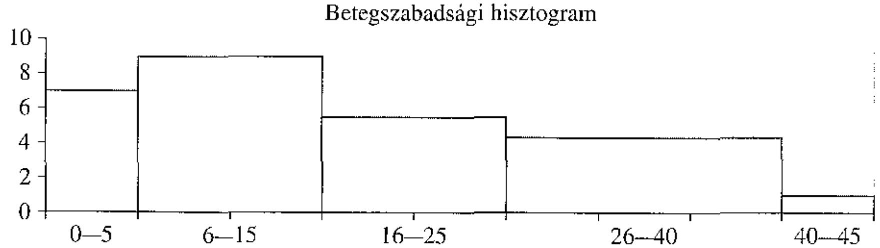
A hozzá tartozó ábrázolás pedig:

Egyenletes osztályköz gyakorisági diagram



b) Egy más osztályozás, ahol – mivel egy hét általában 5 munkanap –:
legfeljebb egy hetet (0—5 napot) hiányzók: 7 fő,
legalább egy, legfeljebb három hetet (6—15 napot) hiányzók: 18 fő,
legalább három, legfeljebb öt hetet (16—25 napot) hiányzók: 11 fő,
legalább öt, legfeljebb nyolc hetet (26—40 napot) hiányzók: 13 fő,
nyolc hétnél (40 napnál) többet hiányzók: 1 fő.
Ennek ábrázolása hisztogrammal:

Betegszabadsági hisztogram

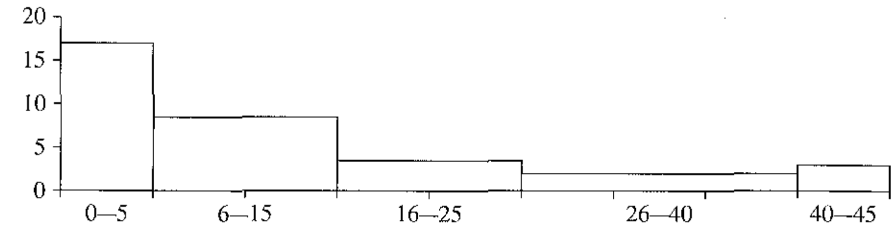


c) Az újítások után a táblázat az új adatokkal, a b)-beli osztályokkal:

betegnapok	0—5	6—15	16—25	26—40	41—45
gyakoriság	17	17	7	6	3

Ennek a hisztogrammja:

Új betegszabadsági eloszlás



d) Bár a két lépték nem azonos, kevésbé szembetűnő, de még így is látszik a változás. Jelentősen csökkent a betegnapok száma. Az első esetben $\bar{x}_1 = 17,6$, $\sigma_1 = 11,5$; a második esetben $\bar{x}_2 = 13,2$, $\sigma_2 = 12,2$; – azaz a szórás nem változott jelentősen, de az átlagos betegszabadságon töltött idő igen, hiszen az több mint 4 nappal, kb. 25%-kal csökkent. Több lett a rövidebb betegszabadság.

2648. a) $\bar{x}=\frac{4+3+4+5+3+5+4+2+3+4+5+5+4+5}{14}=\frac{56}{14}=4,00.$

b)

osztályzat	1	2	3	4	5
gyakoriság	0	1	3	5	5
relatív gyakoriság	0	$\frac{1}{14}\approx 0,07$	$\frac{3}{14}\approx 0,21$	$\frac{5}{14}\approx 0,36$	$\frac{5}{14}\approx 0,36$

Megjegyzés:
Ezekkel az adatokkal a fentieknél egyszerűbben is lehet átlagot számítani, hiszen $\frac{2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 5+5\cdot 5}{1+3+5+5}=\frac{56}{14}$, illetve $2\cdot\frac{1}{14}+3\cdot\frac{3}{14}+4\cdot\frac{5}{14}+5\cdot\frac{5}{14}=\frac{56}{14}$.

c) $\sigma=\sqrt{\frac{(2-4)^2\cdot 1+(3-4)^2\cdot 3+(4-4)^2\cdot 5+(5-4)^2\cdot 5}{14}}=\sqrt{\frac{12}{14}}=\sqrt{\frac{6}{7}}\approx 0,926.$

2649. Mindhárom jellemzőt könnyebben kiszámoljuk, ha készítünk egy gyakorisági táblázatot:

osztályzat	1	2	3	4	5
gyakoriság	5	2	4	5	3

Az átlag ekkor $\frac{1\cdot 5+2\cdot 2+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 3}{5+2+4+5+3}=\frac{56}{19}\approx 2,95$; a (két) módusz 1 és 4 (ezek az eredmények fordulnak elő a leggyakrabban); a medián 3 (ha felsoroljuk nagyság szerint rendezve mind a 19 adatot, a 10. a középső, ez most egy hármas).

2650. Legyen n számú osztályzat, összegük s (mindkét paraméter természetes szám). Kívánalom tehát, hogy $4,5 < \frac{s}{n} < 4,51$. Ezt $2n$-nel szorozva, $9n$-et kivonva:

$0 < 2s - 9n < 0{,}02n$ (∗).

Mivel $2s - 9n$ egész, a fentivel egyenértékű, hogy: $1 \leq 2s - 9n < 0{,}02n$, amiből $1 < 0{,}02n$, azaz $50 < n$; lévén n egész, tehát legalább 51.

Megjegyzések:

1. Ennyi jegy ritkán jön össze!
2. $n = 51$ esetén valóban előfordulhat a kívánt eset, pl. 26 db 5-ös és 25 db 4-es átlaga kb. 4,5098.
3. Nem jó minden, 50-nél nagyobb n; hiszen ha páros, akkor $2s - 9n$ is páros, így a (∗) azzal egyenértékű, hogy $2 \leq 2s - 9n < 0{,}02n$, amiből $100 < n$. A teljes megoldás tehát: az 50-nél nagyobb páratlan és a 100-nál nagyobb páros számok.

2651. a) $\dfrac{5\cdot 1 + 4\cdot 26 + 3\cdot 2017 + 2\cdot 52154}{1 + 26 + 2017 + 52154} = \dfrac{110468}{54198} \approx 2,038.$

b) $\dfrac{5\cdot 1 + 4\cdot 26 + 3\cdot 2017 + 2\cdot 52154 + 1\cdot 582147 (+0\cdot 1876042)}{2512387} = \dfrac{692615}{2512387} \approx 0,276.$

c) A találatok módusza természetesen 0 (ez a leggyakrabban előforduló eset), mediánja szintén 0 (mivel a szelvények jóval több mint fele 0-találatos, a találatok száma szerinti felsorolásban a középső szelvény még bőven ilyen).

2652. Az átlag $\dfrac{10 + 11 + 12 + \ldots + 99}{90} = \dfrac{109\cdot\frac{90}{2}}{90} = \dfrac{109}{2} = 54,5$; a medián ugyanennyi.

(Ha felsoroljuk nagyság szerint rendezve mind a 90 számot, a páros számosság miatt „középső" nincs, a 45. szám az 54, a 46. pedig az 55, ezek átlaga most a medián.) Mivel minden „adat" ugyanannyiszor (nevezetesen egyszer) fordul elő, e sokaságnak nincs módusza.

Megjegyzés:

Minden, egyenletesen változó adatsor – azaz számtani sorozat – átlaga és mediánja megegyezik; és – hacsak nem 0 a differencia – nincs módusza.)

2653. a) Az átlag $\dfrac{17 + 14 + 18 + 17 + 15 + 33 + 16 + 9 + 32 + 14}{10} = \dfrac{185}{10} = 18,5.$

A medián meghatározásához soroljuk fel nagyság szerint rendezve a 10 adatot: 9, 14, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 32, 33. A páros számosság miatt „középső" adat nincs, az 5. adat 16, a 6. pedig 17, ezek átlaga, 16,5 a medián.

b) Átlag: ha valaki mindegyik koncerten ott volt, átlagban ennyi dalt hallott; ha valaki a 10 koncert valamelyikére véletlenszerűen ment el, ennyi dalra számíthatott; az átlag és koncertek számának ismeretében könnyen megmondható az összes elhangzott dal száma. Medián: a koncertek felében ennél kevesebb, felében ennél több dal hangzott el.

2654. a) Lásd a táblázatot!

guarani	3 003 000
csirigvano	100 000
terena	25 000
asuslaj	15 000
csiripa	10 000
mbüa	5 000
szanapana	3 000
angaite	2 000
maszkoj	2 000
guajaki	1 000
guajkuru	1 000
kaszkiha	500

b) Az összeg (egyszerű összeadás révén) 3 167 500. Mivel 12 nyelvről van szó, az átlag $\dfrac{3\,167\,500}{12} \approx 263\,958$. A medián pedig a táblázatból könnyen kiolvasható: a páros számosság miatt „középső" adat nincs, a felsorolásban 6. adat 5000, a 7. 3000 – ezek átlaga, 4000 a medián.

c) Az eltérés oka a sok „kis" adat, és az egy nagyon „kilógó" nagy. (A guarani létszám egyedül kb. 95%-a az összegnek!) Ez az átlagot igen megemeli (annyira, hogy az az összes többi adatnál nagyobb!), miközben a medián az adatszámok zömét alkotó „kis" tartományban marad.

2655. a)

	m
Plútó	0,0025
Merkúr	0,05
Mars	0,1
Vénusz	0,81
Föld	1
Uránusz	14,54
Neptunusz	17,23
Szaturnusz	95,14
Jupiter	317,89

	r
Plútó	0,15
Merkúr	0,38
Mars	0,53
Vénusz	0,94
Föld	1
Neptunusz	3,88
Uránusz	4,1
Szaturnusz	9,44
Jupiter	11,27

	ϱ
Szaturnusz	0,69
Uránusz	1,19
Jupiter	1,31
Neptunusz	1,66
Plútó	2
Mars	3,94
Vénusz	5,25
Merkúr	5,42
Föld	5,52

	d
Jupiter	9,84 óra
Szaturnusz	10,23 óra
Uránusz	15,50 óra
Neptunusz	15,80 óra
Föld	23,93 óra
Mars	24,62 óra
Plútó	6,38 nap
Merkúr	58,65 nap
Vénusz	243,01 nap

b) A tömeg (m) és sugár (r) szerinti sorrend szinte megegyezik; és ezek erősen hasonlóak a másik két szempont (sűrűség, ϱ; tengelyforgás ideje, d) szerinti fordított sorrendhez. A „könnyű" bolygók egyúttal „kicsik", ami viszonylag könnyen érthető – annak dacára, hogy a „nagyok" sűrűsége jellemző módon jóval kisebb a „kicsikénél". Továbbá a „nagyok" jóval gyorsabban forognak tengelyük körül, mint a „kicsik". E két utóbbi szempontra könnyű, felületes magyarázat nincs is. (Nem szükséges tudni, bár földrajzi vagy fizikai tanulmányainkból tudható, hogy a Naprendszer bolygói éppen ezen jellemzők szerint oszthatók két csoportra: az ún. Föld-típusúakra [„könnyűk, kicsik", nagy sűrűségűek, lassabban forognak], és a Jupiter-típusúakra [„nagyok, nehezek", kis sűrűségűek, gyorsabban forognak]. Előbbiek kőzetekből, fémekből; utóbbiak folyékony hidrogénből és héliumból épülnek fel – ez magyarázza sűrűségük különbségét. A Plútó kivételével ráadásul a Naptól való távolságuk is jellemző a csoportok tagjaira – de ez már igazán messzire, a keletkezési elméletekhez vezet.)

c) Megadjuk mind a négy eredményt, hogy bármelyik kiválasztott ellenőrizhető legyen:

	m	r	ϱ	d
átlag	49,64	3,52	3,00	34,69 nap
szórás	99,13	3,93	1,90	75,80 nap

2656. a) Összesen $\frac{37\,880}{40} = 947$ fizető néző volt az évadban, ami átlagban $\frac{947}{13} \approx 73$ látogatót jelent estenként.

b) Egy belépőre $\frac{19\,980}{947} \approx 21$ Ft pályázati támogatás jutott (tehát a belépő kifizetett árához képest még kb. 50%).

2657. a) Az adatok összege 1251.

b) Az átlag kb. 74, a szórás kb. 39 (lévén létszámról szó, nincs értelme az egésznél kisebb helyiértékeknek, az egészeknél nagyobb pontosságnak e jellemzők esetén). Két módusz van, 60 és 78 – ezek fordulnak elő kétszer-kétszer, minden más adat csak egyszer. A medián pedig 62 (ha felsoroljuk nagyság szerint rendezve mind a 17 adatot, a 9. a középső, ez most 62).

c) A teljes bevételt a 60 + 25 Ft és az összlétszám szorzatának, valamint az 1500 Ft és az estek száma szorzatának összege adja:
$(60 + 25) \cdot 1251 + 1500 \cdot 17 = 131\,835$ (Ft).

2658. a) Átlagos jegyár $= \frac{280 \cdot 2000 + 120 \cdot 1200}{400} = 1760$ (batka).

b) Az adott színházban nincs 1760 batkás jegy, ezért az átlagos jegyárnak ilyen konkrét jelentése nincs. Önmagában, a színházjegyek árának eloszlása nélkül, az 1760 batka igen kevés tájékoztatást ad a valódi jegyárakról. Biztosan csak annyit tudhatunk meg ebből az egy számból, hogy nem lehet minden jegy olcsóbb 1760 batkánál és az sem lehet, hogy minden jegy ennél drágább.
Mire használható? Nem túl sok mindenre. Az adott szinház esetében gyorsan kiszámítható a teltházas árbevétel ($400 \cdot 1760 = 704\,000$ batka), vagy egy másik szinház átlagos jegyárával összehasonlítva az előző bekezdésben említettekhez hasonló megállapításokat tehetünk, vagy ha kibéreljük az egész színházat, ennyi lehet a jegy egységára.

2659. a) A megadott pontszámok átlaga:
$\frac{3 \cdot 100 + 1 \cdot 63 + 1 \cdot 62 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{11} = 47$, tehát a tanuló ezzel a jellemzővel érvelt.

b) A legtöbbször előforduló eredmény 100 pont, a tanár tehát a móduszt választotta.

c) Az igazgató a sorba rendezett adatok közül a középsőt, a mediánt választotta.

d) Az eddig megadott statisztikai jellemzőkhöz vegyük még hozzá a szórást is:
$$\sqrt{\frac{3 \cdot 53^2 + 16^2 + 15^2 + 13^2 + 2 \cdot 35^2 + 41^2 + 45^2 + 47^2}{11}} \approx 39,8.$$
Csupán ezekkel a statisztikai jellemzőkkel nem lehet megállapítani (főleg nem közülük egyetlen egynek a kiragadásával), hogy valóban „rendkívüli" volt-e a teszt eredménye. Ennek egyszerűen az az oka, hogy a „rendkívüli" fogalma számunkra most nincs pontosan meghatározva.
Legfeljebb hasonlókat tudunk mondani:
Ha az eddigi tesztek eredményei átlagban, eloszlásban „nagy" eltérést mutatnak a mostanihoz képest (pl. korábban mindenki legalább 90 pontot, vagy mondjuk legfeljebb 20 pontot ért el, vagy éppen a szórás minden esetben a mostaninál jóval kisebb volt, stb.), akkor lehet rendkívülinek (szokatlannak) minősíteni a mostani eredményt.
A fentiek miatt nem tudunk „igazságot tenni" a kérdésben még akkor sem, ha a relatív szórás $\frac{39,8}{47} \approx 0,847$ (azaz 84,7%), ami meglehetősen nagynak tűnik.

2660. Világos, hogy az osztályzatokból alkotott számsokaságnak nincs módusza, a mediánja és átlaga is 3.
A szórás: $\sqrt{\frac{10 \cdot 2^2 + 10 \cdot 1^2 + 5 \cdot 0^2}{25}} = \sqrt{2} \approx 1,41.$

2661. a) Például: 7db 2-es.

b) A 7 szám összege $7 \cdot 4{,}3 = 30{,}1$, ezért megfelel például a következő: 0; 0; 0; 0; 0; 0; 30,1.

c) A legnagyobb és a legkisebb adat különbségének abszolútértéke 0,8. Például: –0,8; –0,8; –0,8; 0; 0; 0; 0.

d) A szórás csak akkor lehet 0, ha mindegyik adat az átlaggal egyenlő, azaz minden adat ugyanaz. Például: 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5.

2662. a) Az életkorok átlaga 31,83 év, a fizetéseké 9395,8 fabatka.

b) Életkor: terjedelem = 28 év, szórás = 8,74 év; fizetés: terjedelem = 8000 fabatka, szórás = 1707,7 fabatka.

c) Különböző mennyiségek szóródását a relatív szórásuk segítségével is összehasonlíthatjuk.

Az életkorok relatív szórása: $\dfrac{8{,}74}{31{,}83} \approx 0{,}2746$ (27,46%),

a fizetések relatív szórása: $\dfrac{1707{,}7}{9395{,}8} \approx 0{,}1818$ (18,18%),

tehát az életkorok „jobban szóródnak", mint a fizetések.

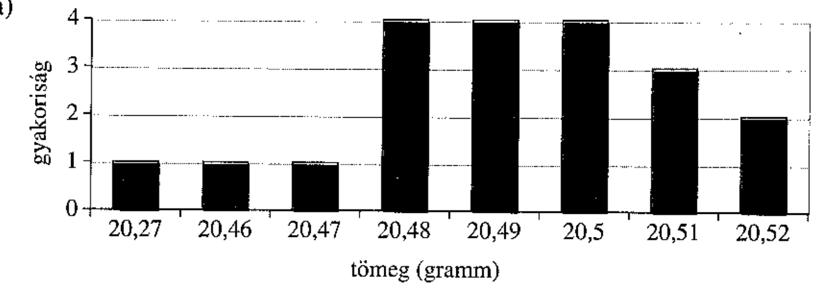
2663. a) Mindkét csoportban 5,5 az adott pontszámok átlaga. Csak ennek az adatnak az ismerete igen kevés messzemenő következtetések levonására, az azonban talán várható, hogy a termék nem arat majd osztatlan sikert. Elképzelhető, hogy szinte mindenki közepes minősítést ad majd a termékre (azaz nem lesz túl kelendő), de az is, hogy két pártra szakadnak a fogyasztók, és akár 50%-uk is lelkes vásárlója lehet a terméknek (ez a gyártó számára jóval kedvezőbb lenne, mint az előző változat).

b) Az E csoportban a szórás 0,764, az M csoportban 4,052. Ez alapján az E-beli tesztalanyok legalább 75%-a az $[5{,}5 - 2 \cdot 0{,}764;\ 5{,}5 + 2 \cdot 0{,}764]$ intervallumba eső pontszámokat adott, azaz leginkább 4-7 közötti pontok lehettek a csoportban (a 4-et és a 7-et is beleértve).
Az M csoportban tapasztalt szórás olyan nagy, hogy ez csak igen polarizált (a két „véglet" körül csoportosuló) adatok esetén jöhetett létre. A csoportban többen lelkesedhettek a termékért, de majdnem ugyanennyien elutasították azt. A két csoport eredményének ismeretében tehát inkább a gyenge-közepes minősítés várható a termék általános fogadtatását illetően.

c) A teszteredmények nem nevezhetők igazán kedvezőnek, ezért csak „manipulációval" lehet jó benyomást kelteni.
Az M csoportnál egyértelműen a móduszt célszerű kiemelni (a legtöbben maximális pontra értékelték a terméket), és „bölcsen hallgatni kell" például a mediánról vagy az átlagról (5, illetve 5,5). Az E csoportnál természetesen a maximális értéket (ez 7 pont, ami még jónak mondható) és mellé az alacsony szórást lehet kiemelni (ezzel a felületes szemlélőben azt a benyomást lehet kelteni, mintha a szórás a 7 ponthoz tartozna, tehát mintha az E csoport „inkább jó"-ra minősítette volna a terméket).

2664. A vélemény nagymértékben függ attól, hogy a „gyógyhatás" milyen betegségnél mutatkozik.
Ha pl. egy eddig gyógyíthatatlan kórról van szó, akkor mindkét esetben bizonyítottnak tekinthető a gyógyhatás, ha azonban olyan betegségről, amelyből spontán módon is nagy számban (pl. 60%-ban) gyógyulnak fel az emberek, akkor csak a második esetben mondható meggyőzőnek a készítmény gyógyító hatása.

2665. a)



b) $\bar{x} \approx 20{,}48$ gramm; $\sigma \approx 0{,}051$ gramm.

c) 19 mérés, ami az összesnek 95%-a.

2666. A másodszorra kifogott 200 ponty 9%-a megjelölt. Becslésnek megfelel, ha feltételezzük, hogy a tó teljes pontyállományának szintén 9%-a (azaz 200 darab)van megjelölve. A teljes pontyállomány tehát $\dfrac{200}{0{,}09} \approx 2{,}2$ ezer körülire becsülhető.
(Természetesen, hallgatólagosan feltételeztük, hogy a halastóban nem változott meg két hét alatt a pontyállomány száma pl. lehalászás vagy új telepítés következtében, továbbá azt is, hogy a két hét alatt nagy valószínűséggel egyenletesen elkeveredett a megjelölt 200 ponty a többi között.)

2667. Ha n tanuló írt dolgozatot, akkor az osztályzatok átlaga a feladat szerint $\dfrac{78}{n} = 3{,}25$.
Innen $n = 24$, tehát 24 tanuló írt dolgozatot. (∗)
A feltétel szerint nem volt elégtelen. Tegyük fel, hogy x tanuló írt jeles dolgozatot. Ha a többiek dolgozatát mind elégségesnek tekintjük, a dolgozatokra kapott osztályzatok összege biztosan nem lehetett 78-nál nagyobb, azaz $x \cdot 5 + (24 - x) \cdot 2 \le 78$. Ebből $x \le 10$ adódik. Tehát a jeles dolgozatok száma legfeljebb 10 lehetett. Ekkor az osztály többi tanulója valóban elégségest ért el, mert $10 \cdot 5 + 14 \cdot 2 = 78$.

Megjegyzés:
A *-tól az alábbi következtetéssel is megoldható a feladat: Ha mindenki jelest írt volna, az osztályzatok összege $5 \cdot 24 = 120$ lenne. Ha egy ötöst kettesre cserélünk, az összeg 3-mal csökken. $120 - 78 = 42$, ezért 42-vel kell csökkenteni az összeget, ezt $\frac{42}{3} = 14$ cserével lehet elérni.

2668. A leggyakrabban előforduló szám, a **módusz** a 31, ami 58-szor szerepelt. Az összesen 1624 darab $(48 + 45 + 56 + \ldots + 53 + 47 = 1624)$ kihúzott számot növekvő sorba rendezve, a középső kettő átlaga a számhalmaz mediánja (páros számú elem esetén). A 812. és a 813. szám is a 18, ezért a megadott számhalmaz **mediánja** a 18.

2669.

	január	július
a középhőmérsékletek átlaga	−1,11 °C	22,0 °C
módusz(ok)	−1,2 °C	21,6 °C ; 22,4 °C
az átlag eltérése a módusztól	0,09 °C	0,37 °C ; 0,43 °C
medián	−1,1 °C	22,0 °C
az átlag eltérése a mediántól	0,01 °C	0,03 °C

2670.

	1997.	1998.	1999.	2000.	átlag	szórás
a csapadék mennyisége	304 mm	644 mm	842 mm	389 mm	545 mm	212,4mm
a csapadékos napok száma	104	109	135	104	113	12,9
átlagos csapadék a csapadékos napokon	2,9 mm	5,9 mm	6,2 mm	3,7 mm		

Például: a csapadékos napok szórása:

$$D(113) = \sqrt{\frac{(104-113)^2 + (109-113)^2 + (135-113)^2 + (104-113)^2}{4}} = \sqrt{\frac{662}{4}} \approx$$

$\approx 12{,}9.$

2671. Budapesten 1997—2000 években a napsütéses órák átlaga 2076 óra, szórása 83,90 óra. 1997 és 2000 között a napsütéses órák számának átlaga 120 órával volt alacsonyabb, mint a 40-es évek második felében. Ez a különbség az utóbbi szórásánál is nagyobb érték. Csak egy évben volt több a napsütéses órák száma, mint az átlag 1946 és 1950 között.

2672.

osztályzat	1	2	3	4	5	módusz	átlag	szórás
1. osztály	0	0	24	0	0	3	3	0,000
2. osztály	0	7	10	7	0	3	3	0,764
3. osztály	7	0	8	0	7	3	3	1,595

2673. Az adatok móduszai (a leggyakrabban előforduló értékek): 32 ezer és 33 ezer lakos; mediánja: 34 ezer fő, mert a számsokaságot nagyság szerint rendezve a két középső elem, a 12.: 33 ezer fő és a 13.: 35 ezer fő, átlaga 34 ezer fő.

2674.

	kertvárosban	nagy házak között	lakásban
7 órakor	11 °C	13 °C	18 °C
10 órakor	12 °C	14 °C	20 °C
13 órakor	16 °C	17 °C	20 °C
16 órakor	16 °C	17 °C	21 °C
19 órakor	15 °C	16 °C	20 °C
átlag	14,0 °C	15,4 °C	19,8 °C
medián	15 °C	16 °C	20 °C
módusz	16 °C	17 °C	20 °C

2675.

a vásárlók / virágok	A	B	C	D	E	F	G	összesen
árvácska	16	20	24	30	24	26	24	164
bársonyvirág	12	12	10	18	20	24	12	108
százszorszép	20	16	24	24	16	16	18	134
nárcisz	8	10	12	16	12	18	20	96
tulipán	12	10	16	14	14	16	14	96
kankalin	10	14	14	10	12	14	14	88
a virágok ára összesen (Ft)	5440	5760	6880	7760	6800	7760	6800	

	átlag	módusz	medián
árvácska	23,4	24	24
bársonyvirág	15,4	12	12
százszorszép	19,1	16	18
nárcisz	13,7	12	12
tulipán	13,7	14	14
kankalin	12,6	14	14

Árvácskából fogyott a legtöbb, kankalinból a legkevesebb. A felsorolt vásárlók közül D és F fizetett legtöbbet a virágokért.

2676. Az érettségizők matematika átlaga:

$$\frac{26\cdot 3,27+30\cdot 3,43+24\cdot 3,83}{26+30+24}=\frac{279,84}{80}=3,498\approx 3,50.$$

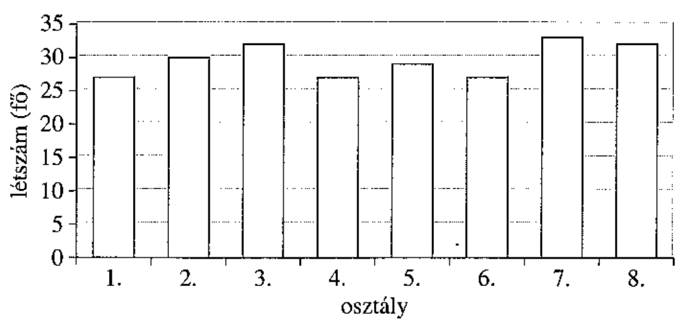
2677. a) Ha a 16 szám átlaga 3,25, akkor az összegük $16\cdot 3,25=52$. A medián 3, ezért a számokat nagyság szerint rendezve, a két középső szám átlaga 3 kell hogy legyen. Mivel az 5 számjegy mindegyike kell hogy szerepeljen, ezért a két középső szám a 3. A módusz is a három, ezért a 3 a legtöbbször szereplő szám.
A feltételeknek megfelelő számsor:
pl.: 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5 vagy
1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5 vagy
1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5 vagy
1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5 stb.

b) A számok összege: 54, a számok módusza 4, így a 4-esből lesz a legtöbb. A számok mediánja 3,5, ezért a nagyság szerint rendezett számsorban a két középső szám a 3 és a 4. A feltételeknek eleget tevő számsor:
pl.: 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5 vagy
1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5 stb.

c) a szórás az a) feladatbeli számsoroknál: 1,03, illetve 1,09, illetve 1,15, illetve 1,30 , a b) feladatbeli példáknál pedig: 0,93, illetve 1,05.

2678. a) Az osztálylétszámok átlaga 29,6, a medián 29,5, a módusz 27.

b)



2679. Például a fizetések növekvő sorrendben: 35e, 45e, 45e, 45e, 45e, 45e, 50e, 55e, 55e, 55e, 55e, 60e, 60e forint.

2680. A táblázatbeli számsokaság átlaga: 27,86 ≈ 28,
szórása: 6,6,
mediánja: 29,
a táblázatbeli számsokaságnak nincs módusza.

2681. a) Az egyes élelmiszerek decemberi árának átlaga a megadott három évben:

élelmiszer	átlag (Ft/kg)
sertéscomb	855,33
bontott csirke	469,67
napraforgó étolaj (liter)	261,33
kristálycukor	160,67
fehér kenyér	129,00
rizs	171,67
tej (liter, 2,8%-os)	123,00
burgonya	57,33
alma	107,33
citrom	269,33
narancs	199,33

b) Az egyes élelmiszerek árának változása 1999 és 2001 decembere között és a változás csökkenő mértéke szerinti sorrend:

élelmiszer	változás (%)
sertéscomb	52,51
tej (liter, 2,8%-os)	44,55
kristálycukor	33,09
fehér kenyér	30,36
bontott csirke	19,44
burgonya	12,00
citrom	5,14
narancs	4,04
alma	3,57
napraforgó étolaj (liter)	2,56
rizs	–5,62

2682. Az egyes tízéves időszakok alatt a következő volt a népességszám-növekedés (ezer főben; ezeket a táblázat szomszédos adatainak különbségeként kapjuk meg):
100, 110, 120, 120, 120, 430, 440, 610, 650. Ezen adatok átlaga:

$$\frac{100+110+120+120+120+430+440+610+650}{9}=\frac{2700}{9}=300,$$

tehát háromszázezer fő a tízéves népességszám-növekedések átlaga.

Másik megoldás (ötletesebb):
A táblázat utolsó és első adatának különbsége (3000 – 300 = 2700) éppen az utolsó és első év népességének különbsége (ezer főben). Mivel közben 1990 – 1900 = 90 év telt el, ez éppen kilenc darab tízéves időszakot jelent, tehát az átlag

$$\frac{2700}{9}=300 \text{ (ezer fő)}.$$

2683. a) A nyári olimpiai játékokon indult magyar versenyzők számának átlaga: 139,
szórása: 76.

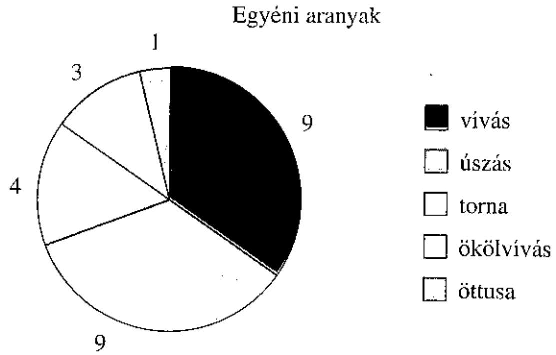
(21 olimpiát figyelembe véve)

b) Az átlagtól való eltérés 1896-ban: 132,
1996-ban: 73.

c) A II. világháború utáni olimpiákon résztvevő versenyzők számának átlaga: 188.

2684. a) A sportolók összes olimpiai bajnokságai számának átlaga: 4
szórása: 1,3
mediánja: 3,5
módusza: 3.

b) Az egyéni aranyak sportáganként megoszlásából készített kördiagram:



2685. Átlagosan (19,86) 20 érmet szereztünk olimpiánként.
Az érmek számának mediánja: 21.

2686. a) $\bar{x}_1 = 34{,}23$; $\sigma_1 = 7{,}9$; $me = 36$.

b)

16 alatt	16—24	25—33	34—41	41 felett
3	4	18	29	10

Az osztályközepek: 0—16 esetén 8, 16—24 esetén 20, 25—33 esetén 29, 34—41 esetén 37,5; végül a legnagyobb érték 53, tehát az utolsó osztály 42—53, ennek közepe: 47,5.

Ezzel az átlag: $\dfrac{8\cdot 3+20\cdot 4+29\cdot 18+37{,}5\cdot 29+47{,}5\cdot 10}{64} = 34{,}20$ óra;

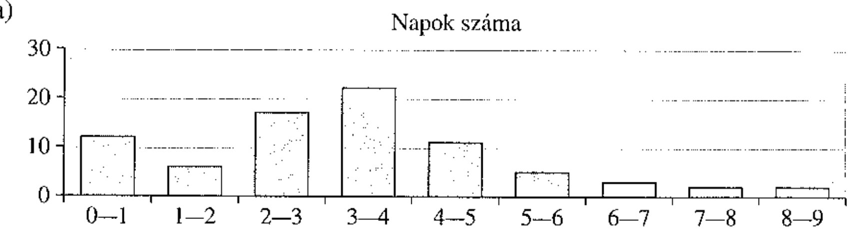
csak egy kicsit kevesebb, mint a részletes adatokból számolt 34,23!

A szórásnégyzet: $\dfrac{26{,}2^2\cdot 3+14{,}2^2\cdot 4+5{,}2^2\cdot 18+3{,}3^2\cdot 29+13{,}3^2\cdot 10}{64} = 84{,}96,$

ahonnan a szórás: 9,2 (óra). Ez már jobban eltér a pontosan számolt 7,9 órától.

c) Az összehasonlítást már b)-ben megtettük: a kétféle átlag alig tér el, a szórást viszont megnövelte az osztályba sorolás. De osztályba soroláskor bármilyen irányban lehet eltérés.

2687. a)



b) A napos órák átlagos száma az osztályközéppel számolva:

$$\frac{0{,}5\cdot 12+1{,}5\cdot 6+2{,}5\cdot 17+3{,}5\cdot 22+\ldots+8{,}5\cdot 2}{80} = 3{,}2875 \text{ (kb. 3,29) óra.}$$

c) A szórásnégyzet:

$$\frac{2{,}79^2\cdot 12+1{,}79^2\cdot 6+0{,}79^2\cdot 17+0{,}21^2\cdot 22+1{,}21^2\cdot 11+\ldots+5{,}21^2\cdot 2}{80} = 3{,}57;$$

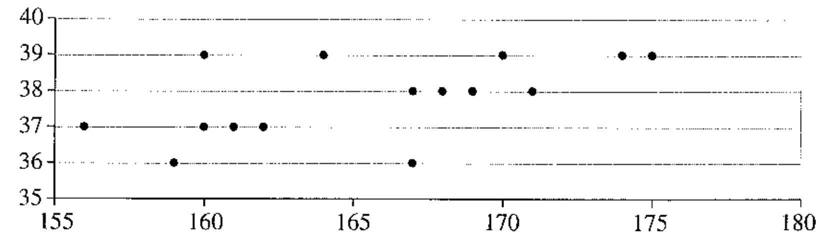
ahonnan a szórás: 1,89 (kb. 1,9) óra.

2688. a) A magasságátlag: 165,125 (cm), kb. 165 (cm); szórása: 5,6 (cm).

b) A tömeg mediánja (sorba rendezve a 8. és a 9. adat, vagyis 57 és 59 kg számtani közepe): 58 kg. Az alsó negyedelő a 4. és 5. adat átlaga: (54 és 55-ből) 54,5 kg; a felső negyedelő a 12. és 13. adat átlaga: (62 és 66-ból) 64 kg.

c) A cipőméret módusza (leggyakoribb értéke): 39, terjedelme 3 – hiszen a legnagyobb érték 39, a legkisebb 36, és 39 – 36 = 3.

d) Néhány kiugrástól eltekintve általában a magasabbnak a lába is nagyobb, de ez csak trend, nem egzakt összefüggés.



2689. a) Átlagos napi mennyiség: 111.

b) A szórás: 7,82.

c) Az átlag körüli kétszórásnyi intervallumban kb. 95% eséllyel benne lesz a napi várható mennyiség (ha normális eloszlást követnek a napi tojásszámok): [95; 127],

azaz naponta legalább 95 és legfeljebb 127 tojást várhat. Ezzel a heti minimum: 665, a várható maximum pedig 889 tojás.
Ha a normális eloszlástól nagyon eltér a tojásszám, akkor a Csebisev egyenlőtlenségből az átlag körüli háromszórásnyi intervallumban több, mint 89%-ban lesznek a tojások, ekkor még szélesebb intervallum adódik: [87; 135], amiből a minimális és maximális tojásszám eltérése még nagyobb lesz, a heti 609 és 945 között mozog közel 90%-os eséllyel.

2690. a) A 29 alkalmazott fizetésének az átlaga: 63 966 Ft. Ez elég rossz jellemző, hiszen három kivételével mindenki kevesebbet keres. A három kiugró érték felviszi az átlagot.

b) A medián: 46 000 Ft. Ez jól jellemzi, hogy kb. milyen fizetést várhat egy alkalmazott. A vezetők pénze ebből nem derül ki, de az a számtani középből sem. A módusz, a leggyakoribb fizetés szintén 46 000 Ft.
A számtani közép előnye, hogy a teljes bérkiáramlást, így pl. ebből az állam TB-bevételeit könnyen ki lehet számolni. Ezt a másik kettőből nem lehet. Nem informatív viszont egy munkavállaló számára. Arra a medián jobb. A módusz arra jó, hogy a leggyakoribb fizetéskategóriát tudjuk meg belőle, de ez sem az államnak, sem a munkavállalónak nem túl informatív.

2691. a) A számtani közép: 156 kg; a medián: 91 kg, mert a középen álló szarvasmarhatömeg pontosan ennyi, a táblázatban már sorban vannak a tömegek, így vizuálisan éppen a középsőt kell kiválasztani.

b) Mindegyik jól jellemzi, más-más szempontból. Ha a gazda az egész állományt el akarná adni, a kilónkénti ár ismeretében rögtön tudná, mennyit ér. Azonban az ebből nem derül ki, hogy sok kis tömegű (vélhetően fiatal) borjú van, és néhány fejlett nagy példány. A medián szerint az állomány több mint a fele nem éri el az 1 mázsát. Ilyenkor többet mond a második adat, anyagilag inkább az első a hasznosabb.

2692. a) Jóska magassága nem tekinthető átlagosnak, hiszen a maximális magasság eddig 192 cm volt, aminél 13 cm-rel magasabb Jóska. A számtani középnél (azaz az átlagnál) meg még jóval több.

b) A módusz marad: 164 cm (kilenc férfi magassága is ennyi, elég kis növésűek települése!); a medián $\frac{164+172}{2} = 168$ (cm) volt, ami a 33. elem hozzávételével 172 cm-re, tehát 4 cm-rel nő. A számtani közép eredetileg: 170,31 (cm) volt, Jóskával: 171,36 (cm) lett. Tehát ebben az esetben ez a közép sem változott sokat; (sőt kevesebbet, mint a medián, ami pedig ritka, általában kiugró adatra a számtani közép érzékenyebben reagál).

2693. Az átlagos koncentráció (számtani közép): 27,1 (mikrogramm/m³). A medián 26, mert az a 16. adat, ha sorba rendezzük a 31 darab értéket. (*Megjegyzés:* ki lehet találni, mikor volt szeles idő, esetleg csapadékkal, mert akkor mindig leesik az érték. Ködös, csendes időben pedig nő. Így inkább december elején lehetett változékonyabb idő, és az utolsó héten inkább csendes.)

2694. a) A 42 király átlagos uralkodási ideje: 22,3 év.

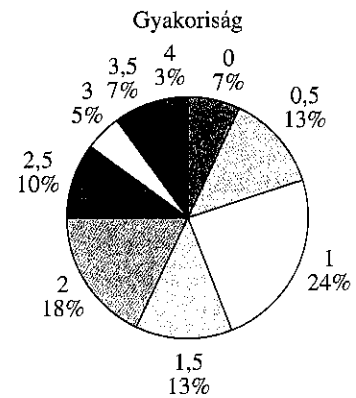
b) A szórás: 16,9 év. Igen nagy szórás, majdnem akkora, mint az átlag (a relatív szórás: 0,76, ami elég nagy.) Az ok a sok rövid, és a néhány igen hosszú uralkodási idő. Még Erzsébet sem vezet a (2002-ben) 50 évével, hiszen 56, 59 sőt 63 éves uralkodás is van. (Ez utóbbi Viktória királynőé.)

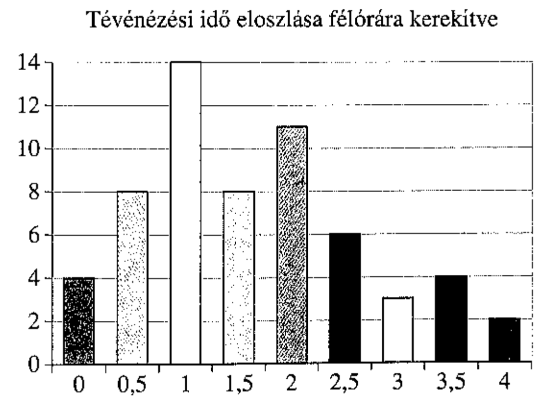
2695. a)

A tévé előtt töltött órák	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
tizenévesek száma	4	8	14	8	11	6	3	4	2

Az átlag 1,63 óra, azaz kicsit több, mint másfél óra. Mellesleg a leggyakoribb az 1 óra, ez közel 25%-ban fordul elő. A medián 1,5 óra. Tehát a gyerekeknek több mint a fele legfeljebb 1,5 óra tévét néz.

b) Minden relatív, attól függ, mit nevezünk soknak. Egy átlagfilm másfél-két óra, egy focimeccs szintén, így ez az adat napi egy ilyet jelent (vagy zenét, híreket, és egyebet). Az elgondolkoztató inkább az, hogy 25% legalább 2,5 órát nézi a tévét, ami már tényleg soknak tűnik, különösen annak a 6-nak az esetében, aki legalább 3,5 órát tévézik. Az eloszlást grafikusan is szemléltethetjük kör-, illetve oszlopdiagramon. Az előbbin jól látszik, hogy legfeljebb két órát a gyerekek 75%-a néz, és 3 óránál többet kevesebb, mint 10%. Tehát talán még nem annyira ijesztő az eredmény, bár ismerni kellene azt is, hogy mit néznek. Hiszen van sok értelmes, ismeretterjesztő vagy művészi produkció is, a túlnyomórészt felszínes, silány műsorok között.





2696. a) 3,58 az átlag, tehát átlagosan kevesebb, mint 4 könyvet olvasott ez az 50 ember az elmúlt évben. A medián 4, és a módusz is 4. Itt mindhárom jellemző közel egyenlő.

b) A szórás: kb. 2,16.

2697. a) 1,16; azaz kb. 1 testvér van átlagosan, a kétgyerekes családmodell az átlagos ebben az osztályban.

b) $1,16 \cdot 31 = 36$ a testvérek száma, ehhez jön a 31 osztályba járó gyermek, tehát ebben a 31 családban összesen 67 gyermek van. (*Megjegyzés:* az egy családra eső gyerekszám tehát 2,16. Ebből az országos számra, ami sajnos jóval 2 alatt van, azért nem lehet következtetni, mert ahol nincs gyermek, az nem is jár iskolába, így nem kerül egy ilyen mintába!)

2698. a) A négy csoport átlagát azzal kell súlyozni, hogy milyen arányban szerepelnek a 32 000 tanuló között: $2,93 \cdot 0,41 + 4,01 \cdot 0,18 + 3,65 \cdot 0,31 + 2,91 \cdot 0,1 = 3,3456$, azaz kerekítve 3,35 a matematika-érettségi országos átlaga. Úgyis számolhattunk volna, hogy a négy csoport létszámát kiszámoljuk a 32 000-es összlétszámból és a %-os arányokból. Ezután ezekkel a számokkal szorozzuk meg a csoportátlagokat, és végül 32 000-rel osztunk.

b) Ezalatt teljesített az 1. csoport (elsősorban a humán tárgyakat kedvelők) és a 4. csoport (akinek nincsenek kedvenc tantárgyai). A másik kettő felette, nyilván akik a reált szeretik inkább, vagy mind a reál, mind a humán tárgyakat. Ez elég logikus eredmény egyébként.

c) A reál tárgyakat kedvelők matematika jegyei annyival jobbak, hogy a humán, illetve a kedvenc tantárgyat nem megjelölők átlaga még az egyszórásnyi környezeten is kívül esnek, tehát a 2. csoport és az 1. és 4. csoport viszonylag élesen ketté válik. A 3. csoport viszont semelyik tábortól nem válik ilyen élesen el. Kicsit közelebb áll a 2. csoporthoz, mint a másik kettőhöz, de az egységnyinél nagyobb szórás miatt itt az átlag a legkevésbé jellemzi a teljesítményt. Azaz azt is megfogalmazhatjuk, hogy a humán-reál érdeklődésűek esetén szóródnak a legjobban az eredmények, igaz ez a második legnagyobb csoport. Az első a legnagyobb létszámú, mégis a legkisebb szóródású, tehát viszonylag megbízhatóan gyenge eredményt érnek el a humán érdeklődésűek a matematika-érettségin.

2699. a) Az átlagok egyszerűen a százalékokkal (azaz századrészekkel) súlyozott osztályzatok, és ekkor sehol nincs kiírandó nevező, mert az végig 1:
egyetem, főiskola: $0,001 \cdot 1 + 0,208 \cdot 2 + 0,296 \cdot 3 + 0,233 \cdot 4 + 0,262 \cdot 5 \approx 3,55$;
felsőfokú szakmai: $0,007 \cdot 1 + 0,573 \cdot 2 + 0,328 \cdot 3 + 0,071 \cdot 4 + 0,021 \cdot 5 \approx 2,53$;
középfokú szakmai: $0,01 \cdot 1 + 0,7 \cdot 2 + 0,253 \cdot 3 + 0,031 \cdot 4 + 0,006 \cdot 5 \approx 2,32$;
nem tanul tovább: $0,023 \cdot 1 + 0,677 \cdot 2 + 0,263 \cdot 3 + 0,035 \cdot 4 + 0,002 \cdot 5 \approx 2,32$.

b) A szórások ugyanígy:
egyetem, főiskola:
$\sqrt{0,001 \cdot 2,55^2 + 0,208 \cdot 1,55^2 + 0,296 \cdot 0,55^2 + 0,233 \cdot 0,45^2 + 0,262 \cdot 1,45^2} \approx 1,09$;
felsőfokú szakmai:
$\sqrt{0,007 \cdot 1,53^2 + 0,573 \cdot 0,53^2 + 0,328 \cdot 0,47^2 + 0,071 \cdot 1,47^2 + 0,021 \cdot 2,47^2} \approx 0,73$;
középfokú szakmai:
$\sqrt{0,01 \cdot 1,32^2 + 0,7 \cdot 0,32^2 + 0,253 \cdot 0,68^2 + 0,031 \cdot 1,68^2 + 0,006 \cdot 2,68^2} \approx 0,58$;
nem tanul tovább:
$\sqrt{0,023 \cdot 1,32^2 + 0,677 \cdot 0,32^2 + 0,263 \cdot 0,68^2 + 0,035 \cdot 1,68^2 + 0,002 \cdot 2,68^2} \approx 0,59$.
Az első csoport szórása a legnagyobb, de ott kb. 10-szer annyi tanuló van, mint a 2. vagy 3.-ban, és majdnem 60-szor annyi, mint a 4.-ben.

c) A 2., 3., 4. csoport szórása azért lett kisebb, most a létszámokat nem nézve, mert a nagy tömeg ugyanazt a jegyet (a kettest) szerezte. Az egyetemre igyekvők között négy jegy is hasonló mértékben fordul elő, ezért lesz nagy a szórás. Ezzel együtt nyilván az ő eredményük a legjobb. Utána a felsőfokú szakmai jön, és az utolsó kettő között gyakorlatilag nincs különbség. Egyformán gyenge mind a két csoport, szinte azonos átlaggal és szórással.

2700. a) A megyei átlagok kiszámítása soronként történik, a jegyeket a százalékok szerint súlyozva és összeadva, például Budapest:
$0,002 \cdot 1 + 0,235 \cdot 2 + 0,302 \cdot 3 + 0,214 \cdot 4 + 0,247 \cdot 5 = 3,47$.
A teljes táblázat a következő:

Budapest	3,47	Nógrád	3,31
Baranya	3,23	Pest	3,39
Bács-Kiskun	3,44	Somogy	3,22
Békés	2,99	Szabolcs-Szatmár-Bereg	3,20
Borsod-Abaúj-Zemplén	3,28	Jász-Nagykun-Szolnok	3,22
Csongrád	3,40	Tolna	3,25
Fejér	3,26	Vas	3,49
Győr-Moson-Sopron	3,50	Veszprém	3,31
Hajdú-Bihar	3,33	Zala	3,55
Heves	3,41	megyék átlaga	3,32
Komárom-Esztergom	3,15	országos átlag	3,35

b) Azért nem egyezik meg a kétféle átlag, mert a megyékben nem azonos a tanulólétszám, így ezzel súlyozni kellene.

c) Minden sor százalékos számainak az országos átlagtól való eltérései abszolút értékének összegét kell öttel osztani. Amelyik sorban ez a szám kisebb az jobban reprezentálja az országos átlagot. Ebben az összehasonlításban Csongrád megye a legreprezentatívabb, hiszen 0,98% jön ki. Alig rosszabb Veszprém, Hajdú-Bihar és Pest, egyformán 1,16%-kal. A legnagyobb az eltérés Békés esetében: 5,70%, ez közel hatszorosa Csongrádénak.

d) Ebben az esetben az eltérések négyzetösszege átlagának gyöke kell. Várhatóan az előző szempontból reprezentatív megyék itt sem lehetnek nagyon rosszak és fordítva. Itt is Csongrád vezet 1,157%-kal, utána Hajdú-Bihar 1,384%, Veszprém 1,485% és az utolsó itt is Békés 7,134%-kal.

2701. A 24 növény magasságának számtani közepe: 74,5 cm. A medián 91 és 91 számtani közepe (mivel páros számú adat esetén nincs középső, a képzeletbeli középső melletti két elem átlaga a medián ilyenkor), azaz 91 cm. A növények 75% elérte vagy meghaladta az elvárt 85 cm-es átlagos magasságot. A számtani közép ilyenkor nem túl informatív, mert ha néhány növény elpusztul (ezek adják a 6, 7 cm-es magasságokat), nagyon leviszi a számtani közepet. Igazat adnék ezért az üzletnek, hiszen ha az első négy (nyilván elhalt) növényt kihagyjuk, akkor 87,95 (kb. 88) cm lesz a megmaradó 20 növény átlaga. A cég tehát igazat állított, bár talán hozzá kellett volna tennie, hogy feltéve, ha a növény életben marad, amire ilyen és ilyen százalékos esély van.

2702. a) A módusz 2, akkor ez a leggyakoribb, tehát a hiányzó adat maximum 10 lehet.

b) Ha a medián 2, akkor a középső elem a 2 – viszont ha 36 vagy annál több elem van, akkor a középső sorszáma már nagyobb, mint 18. Tehát már nem 2 lenne az értéke. Azaz ekkor is 10 lehet a maximum. (11-nél már a 2 és a 3 számtani közepe a medián: 2,5.)

c) Ha az átlagos utas-szám $\frac{7}{3}$, akkor $\frac{1\cdot 7+2\cdot 11+3\cdot 7+4\cdot x}{25+x}=\frac{7}{3}$, ahonnan a $150 + 12x = 175 + 7x$ egyenlet adódik, tehát $5x = 25$, azaz a hiányzó negyedik adat értéke 5.

2703. Az A eljárás esetén:

$$\bar{x}_A = 23,\ \sigma_A=\sqrt{\frac{2^2+1^2+1^2+0^2+2^2+0^2+3^2+3^2}{8}}=\sqrt{3,5}\approx 1,87.$$

A B eljárás esetén:

$$\bar{x}_B = 23,\ \sigma_B=\sqrt{\frac{0^2+4^2+3^2+1^2+3^2+3^2+4^2+4^2}{8}}=\sqrt{9,5}\approx 3,08.$$

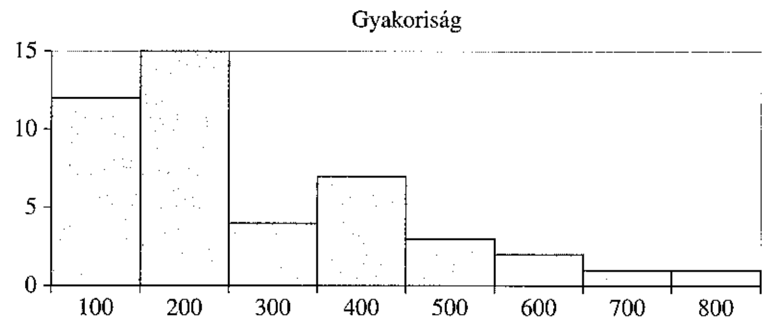
A várható élettartam megegyezik a két minta esetén, csak a második szórása nagyobb. Ezért egyenletessége miatt talán megbízhatóbb az A eljárás. A legfontosabb

megjegyzés azonban az, hogy jóval nagyobb mintát kellene megvizsgálni igazán megalapozott döntéshez.

2704. Nyilván az ellenőrzés alapján az a jobb gyártás, ahol az átlag közelebb van a célzott 25 mm-hez, és a szórás is kicsi, tehát kevés a selejt. Az A gyártósor esetén az átlag: 25,008 (mm) a szórás: 0,047 (mm), a B gyártósor esetén az átlag: 25,000 (mm) a szórás: 0,067 (mm). Érdekes helyzet, az átlag szerint jobb a B sor, az A-nál viszont kisebb a szórás, „egyformábbak" az eredményül kapott alkatrészek. Mivel azonban az átlagnál az eltérés csak az ezred milliméter, tehát mikrométer tartományban van, a szórásnál viszont 2 század, ezért talán mégis az A sort találnánk jobbnak.
Például tudjuk, hogy az alkatrészek 95%-a az átlag körüli 2 szórásnyi intervallumban van, mivel általában gyári termékek méreteloszlása normális.
Ezért ez A-nál: [24,914; 25,102], tizedpontossággal [24,9; 25,1]; míg a B sor esetén [24,866; 25,134], ami szélesebb intervallum, mint a másik, noha egy tizedesre kerekítve ekkor is [24,9; 25,1] adódik, azaz nincs jelentős különbség a két sor között. Ismét (az előző feladathoz hasonlóan) nagyobb mintát kellene kérni a döntéshez.

2705. a) Az átlag: 276 méter;
a medián (a középső, 23. adat a sorba rendezésben): 200 méter;
a módusz: 200 méter.

b)



2706. a) $\frac{13\ 633\cdot 17\ 840+23\ 912\cdot 15\ 920+10\ 100\cdot 12\ 260}{13\ 633+23\ 912+10\ 100}\approx 15\ 690\ \left(\frac{\text{kg}}{\text{ha}}\right).$

b) Dunántúl: $\frac{17\ 840-15\ 690}{15\ 690}\cdot 100\%\approx +13,7\%;$

Alföld: $\frac{15\ 920-15\ 690}{15\ 690}\cdot 100\%\approx +1,5\%;$

Észak-Magyarország: $\frac{12\ 260-15\ 690}{15\ 690}\cdot 100\%\approx -21,9\%.$

2707. a) András: $\dfrac{4\cdot5+2\cdot4+3\cdot5+3\cdot4}{12}=\dfrac{55}{12}\approx4,58;$

Zoli: $\dfrac{2\cdot5+3\cdot4+3\cdot5+3\cdot5}{11}=\dfrac{52}{11}\approx4,73;$

Béla: $\dfrac{4\cdot5+3\cdot5+3\cdot3}{10}=\dfrac{44}{10}=4,4.$

b) Zoli, András, Béla.

2708.

	átlag	szórás
1. dolgozat	2,63	1,27
2. dolgozat	3,06	1,14
3. dolgozat	2,75	1,52

2709. $\dfrac{1,4\cdot(2\cdot5+2\cdot4+2\cdot3)+2+3+5+0,8\cdot(2\cdot3+4)}{12}\approx4,3,$

tehát 4-es osztályzatot kap a tanuló.

Megjegyzés:

Az „értékszorzó” nem azonos a súlyozással. Ha ezek a szorzók egyben súlyok is, akkor az átlag: $\dfrac{1,4\cdot(2\cdot5+2\cdot4+2\cdot3)+2+3+5+0,8\cdot(2\cdot3+4)}{1,4\cdot6+3+0,8\cdot3}\approx3,74$, tehát a tanuló csak közepest kap! Mellesleg „értékszorzó” alkalmazásával akár 5-nél nagyobb átlagot is el lehet érni...

2710. a) 93,1 ezer Ft.

b) 10 ezer Ft-tal nő.

c) 10%-kal (9310 Ft-tal) nő.

2711. a) 53 perc.

b) Rendezzük az adatokat nagyság szerint növekvő sorba:

1.	2	10.	15	19.	23
2.	3	11.	15	20.	25
3.	5	12.	15	21.	27
4.	10	13.	15	22.	27
5.	10	14.	16	23.	27
6.	11	15.	17	24.	34
7.	12	16.	18	25.	40
8.	12	17.	18	26.	45
9.	13	18.	22	27.	55

A sorban 14. adat a medián: 16.

c)

perc	gyakoriság
0—10	5
11—20	12
21—30	6
31—40	2
41—50	1
51—60	1

A legtöbb elem a „11—20” osztályban van.

2712. Rendezzük célszerűen az adatokat egy táblázatba:

város	bolt1	bolt2	bolt3	bolt4	bolt5	átlag	helyezés	medián	helyezés	módusz	helyezés
Budapest	254	257	257	259	268	259	1—3.	257	3—4.	257	1.
Miskolc	252	254	255	267	267	259	1—3.	255	1—2.	267	3—4.
Szeged	255	256	257	266	266	260	4.	257	3—4.	266	2.
Győr	252	254	255	267	267	259	1—3.	255	1—2.	267	3—4.

(Az alacsonyabb érték „előkelőbb” helyezést jelent.)

2713. A sorba rendezett adatok között 50. helyen az 51, az 51. helyen az 52 áll, tehát a medián 51,5. A leggyakrabban kihúzott szám az 54 volt (4-szer).

Megjegyzés:

3-szor húzták ki:
25, 26, 42, 50, 51, 52, 60,72.

2-szer húzták ki:
5, 6, 11, 19, 27, 28, 31, 56, 63, 66, 69, 70, 77, 79, 81, 84, 85, 88, 89.

1-szer húzták ki:
1, 2, 4, 8, 12, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 32, 34, 36, 40, 43, 45, 47, 48, 53, 55, 58, 62, 67, 71, 74, 75, 76, 78, 82, 83, 90.

1-szer sem húzták ki:
3, 7, 9, 10, 13, 17, 18, 29, 30, 33, 35, 37, 38, 39, 41, 44, 46, 49, 57, 59, 61, 64, 65, 68, 73, 80, 86, 87.

2714. a) Terjedelem: 188 – 65 = 123 (eFt);
átlag: 80,9 eFt;
átlagos abszolút eltérés (eFt-ban):

$$\frac{8\cdot|65-80,9|+5\cdot|72-80,9|+4\cdot|80-80,9|+2\cdot|115-80,9|+1\cdot|188-80,9|}{20}=$$

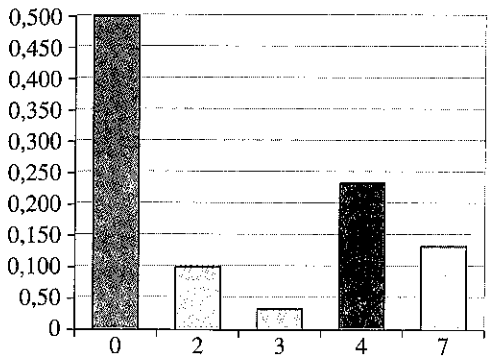
= 17,53
szórás: 28,48 eFt.

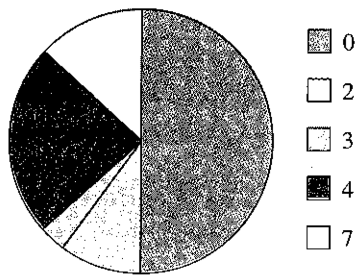
b) Az átlagfizetéstől való „távolságok" változatlanok maradtak, ezért a szóródási mutatók sem változtak.

c) Az átlagfizetéstől való „távolságok" 1,1-szeresre nőttek, ezért a szóródási mutatók is 1,1-szeresükre változtak.

2715. a)

időtartam	relatív gyakoriság
0	0,500
2	0,100
3	0,033
4	0,233
7	0,133





b) Átlag: 2,17 nap az első félévben,
szórás: 2,50 nap,
terjedelem: 7 nap,
átlagos abszolút eltérés: 2,2 nap.

2716. a) A megadott adathalmaz mediánja 0, módusza 0, tehát legfeljebb a számtani közép lehet 6,5 cm, ami teljesül is: $\frac{65}{10} = 6,5$.

Megjegyzés:
Elég értelmetlen, hogy a ki nem kelteket is bekalkulálják az átlagba, hiszen itt vagy nincs növényem, vagy kb. 20 cm-es lesz, tehát a számtani közép semmitmondó, 6,5 cm-es átlagnövény nem lesz. A másik két közép azt mutatja, hogy a növények több mint a fele ki sem kel!

b) A szórás: $\sqrt{\frac{13,5^2 + 15,5^2 + 16,5^2 + 7 \cdot 6,5^2}{10}} = 9,95$ (cm).

A szórás nagyobb, mint az átlagérték, a relatív szórás 1,53, tehát 153%-os. Azaz ez az átlag semmitmondó.

2717. Az öt szám számtani közepe: $\frac{23+N}{5}$, a medián attól függ, hogy N a megadott négy számhoz képest hol helyezkedik el.
Ha $N < 5$, akkor a medián 5, tehát $23 + N = 25$, azaz $N = 2$, ami tehát megoldás.
Ha $5 \le N \le 7$, akkor a medián maga N. Ekkor $23 + N = 5N$, ahonnan $4N = 23$, tehát $N = 5,75$, ami szintén lehet, mert 5 és 7 közé esik. (Ha N csak egész szám lehetne, akkor ebből nem adódna megoldás!)
Ha $7 < N$, akkor a medián 7. Ekkor végül $23 + N = 35$, ahonnan $N = 12$. Ez is jó, tehát három megoldás van: $N = 2$; $N = 5,75$; $N = 12$.

2718. a) 26,2

b) Ismertek:

σ_x: szórás;
n: adatok száma;
Min$x$: a legkisebb adat;
Max$x$: a legnagyobb adat;

$\sum(X - \bar{x})^2$: az átlagtól való eltérések négyzetének összege, másként négyzetes eltérés $(= n \cdot \sigma_x^2)$.

Nem ismertek:

Kvr1x: alsó negyedelő, másként alsó kvartilis; ez a sorba rendezett adatok közül az $\frac{n}{4}$-edik adat, ennek hiányában, ahogy a mostani példában is, két közrefogó adat számtani közepe;
Kvr3x: felső negyedelő, másként felső kvartilis; ez a sorba rendezett adatok közül a $\frac{3n}{4}$-edik adat, ennek hiányában, ahogy a mostani példában is, két közrefogó adat számtani közepe.

c) $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(X - \bar{x})^2}{n}}$.

2719. a)

csapat	ugrók száma	medián (cm)	módusz (cm)	átlag (cm)	szórás (cm)	relatív szórás
Szöcskék	10	125	125	126	5,83	0,046
Brekik	8	125	120	128,75	9,92	0,077

b) Fontos tudni, milyen feltételekkel írták ki a csapatversenyt. Nyilván nem sok értelme lenne csapatversenyről beszélni, ha a legnagyobb magasságot ugró ember csapatát hirdetnék ki győztesnek. A kiírási feltételek alapján mérlegelhető, milyen összeállítású csapat indítása célszerű (a csupa 240 cm felett ugrókból álló csapat persze nehezen verhető).
Nem egyenlő létszámú csapatok indítása esetén az átlageredmény nem igazságos

mérőszám. A nagy létszámú csapatnál a „közepes" többség szinte elenyészővé teheti a kimagaslóan jó, vagy nagyon gyenge eredmények átlagra gyakorolt hatását, míg egy kis létszámú csapatban éppen fordítva: egy kimagaslóan jó teljesítmény az átlagot magasba szökkenti, egy-egy igen gyenge teljesítmény pedig alaposan lehúzhatja. Célszerű tehát azonos létszámú csapatok számára kiírni a versenyt, illetve meghatározni, hogy a kiírt létszámnál nagyobb indulószám esetén mely eredményeket veszik figyelembe. A jelenlegi adatok esetén kitűzhető például csapatverseny a legjobb 8 ugró átlagára. Ebben az esetben a nagyobb létszámmal induló csapat előnyben van, hiszen a rossz formát kifogó versenyzőinek eredménye (részben legalábbis) hatástalanítható. Ilyen feltételek mellett is a Brekik csapata nyerne azonban, hiszen a legjobb 8 „Szöcske" átlaga is csak 127,5 cm.
Elképzelhető például, hogy a középső 6 eredményeit veszik figyelembe, kiszűrve ezzel a „szélsőségeket", erősítve a verseny csapat jellegét. Ekkor a Szöcskék átlaga 125 cm, a Brekik átlaga pedig 127,5 cm lenne. Ez megerősíti azt a benyomásunkat, hogy a Brekik csapatban jobb teljesítményt nyújtottak, mint a Szöcskék.

2720. a) Az átlag: délután 4,28 pont (75 fő); este 2,8 pont (90 fő).

b) Módusz: délután 5, este 3; medián: délután 5, este 3.

c) Szórás: délután 1,03, este 1,30; relatív szórás: délután 23%, este 46%.
Az egyesített lista mutatói: módusz 5, medián 4, átlag 3,47, szórás 1,395, relatív szórás 40%.
Az elemzés elkészítéséhez segítséget, ötleteket adhat a 2663. feladat megoldása is.

2721. A viszonylag nagy szórás (relatív szórás) az átlagtól való nagyobb eltérések gyakori fellépésére utal. Az átlag mindkét osztályban közel van a közepeshez, a B osztályban azonban a relatív szórás kb. 55%, szemben az A osztálybeli 32%-kal. Ez azt sejteti, hogy a B osztályra lehet inkább jellemző a több jó–jeles, illetve elégséges–elégtelen.

Az alábbiakban felhasználjuk azt a tényt, hogy a szórásra igaz, hogy $n \cdot \sigma^2$ megadja a négyzetes eltérések összegét.

a) Ha az A osztályban 10-nél több 4-es lenne, akkor ezek négyzetes eltérésének összege legalább $11 \cdot (4-2{,}84)^2 \approx 14{,}80$ lenne, azaz a többi 14 osztályzat négyzetes eltérésének összege legfeljebb $25 \cdot 0{,}92^2 - 14{,}8 = 6{,}36$ lehetne.
Vegyük még figyelembe, hogy a jeles négyzetes eltérése $(5-2{,}84)^2 \approx 4{,}67$, a közepesé $(3-2{,}84)^2 = 0{,}0256$, az elégségesé $(2-2{,}84)^2 \approx 0{,}71$, az elégtelené $(1-2{,}84)^2 \approx 3{,}39$.
A négyestől különböző 14 osztályzat összege $25 \cdot 2{,}84 - 11 \cdot 4 = 71 - 44 = 27$. Ezekből látható, hogy a 14 osztályzat legkisebb négyzetes eltérés-összegét úgy kaphatjuk, ha a lehető legkisebb négyzetes eltérésűből a lehető legtöbbet választjuk (a közepes négyzetes eltérésének minden más osztályzat négyzetes eltérése legalább 27-szerese!). Közepesből legfeljebb 6 választható, hiszen 7 közepes esetén a másik 7 osztályzat összege 6 lenne, ami nyilván lehetetlen.
A 6 közepes mellé tehát még 8 osztályzatot kell választani úgy, hogy azok összege 10, négyzetes eltéréseik összege legfeljebb $6{,}36 - 6 \cdot 0{,}0256 \approx 6{,}21$ legyen.
Világos, hogy a nyolc osztályzat között nem lehet sem 4-es, sem 5-ös, hiszen ekkor a másik 7 osztályzat összege 7-nél kevesebb lenne, ami nyilván nem lehetséges.
Elégségesből ugyanezért nem lehet kettő (vagy több). Az egyetlen lehetséges eset tehát, hogy 1 db elégségesnek és 7 db elégtelennek kell lennie:

5	4	3	2	1
0	11	6	1	7

Ennek az eredménynek a szórása azonban 1,25, ezért nem lehetséges az A osztályban. A 4-esek számának növelésével a szórás csak növekedhet, hiszen a 2,84-es átlag megmaradása miatt egyidejűleg a közepesből elégségesre vagy elégségesről elégtelenre kell változtatni egy vagy több osztályzatot. Ilyen módon azonban a négyzetes eltérés tovább növekszik.
Az A osztályban tehát nem lehetett 10-nél több jó eredményű teszt, ez csak a B osztályban fordulhatott elő. A feladat szövege szerint tehát 10 vagy még több közepes volt az A-ban és a közepes volt a módusz, 10-nél több jó volt a B-ben és ott a 4-es volt a módusz. A közepes osztályzat tehát az A osztályban volt jellemző.

b) Becsüljük meg, legalább hány elégtelen lehetett a B osztályban!
A 28 osztályzat négyzetes eltérésének összege $28 \cdot 1{,}57^2 \approx 69{,}02$, az osztályzatok összege pedig 80.
Az osztályzatok között volt legalább 11 db 4-es, ezek négyzetes eltérésének összege $11 \cdot 1{,}14^2 \approx 14{,}30$. Tegyük fel, hogy pontosan 11 db 4-es volt. Ekkor a többi 17 osztályzat összegére 36, négyzetes eltérésük összegére pedig kb. 54,72 marad.
A jeles négyzetes eltérése 4,67, a négyesé 1,30, a közepesé 0,02, az elégségesé 0,74, az elégtelené pedig 3,39.
Megmutatjuk, hogy legalább 10 elégtelen osztályzat volt a B-ben.
A 17 osztályzat összege 36, ezért „túl sok" jeles nem lehetett, konkrétan legfeljebb 4. Ha ugyanis a jelesek száma 5 (vagy több) lenne, akkor a 12 másik osztályzat összege 11 (vagy kevesebb) lenne, ami nyilván lehetetlen. A legfeljebb négy jeles négyzetes eltérése együtt legfeljebb kb. 18,32, tehát a 13 másik osztályzaté együtt legalább $54{,}72 - 18{,}32 = 36{,}4$. Ha az elégtelenek száma legfeljebb 9 lenne, akkor ezek négyzetes eltérése összesen legfeljebb kb. 31,14, vagyis a 4 másik osztályzaté együtt legalább kb. 5,36. Ez azonban lehetetlen, hiszen a lehetséges osztályzatok közül a 4-es a legnagyobb négyzetes eltérésű, ám $4 \cdot 1{,}30 < 5{,}36$. Ezzel beláttuk, hogy a B-ben legalább 10 elégtelen dolgozat volt, ha a jók száma 11.

Ha B-ben 11-nél több 4-es volt, akkor az elégtelenek számára vonatkozó alsó becslésünket a fenti gondolat megismétlésével bizonyíthatjuk. (A 2,86-os átlagból adódik, hogy a 4-esek száma biztosan kevesebb 17-nél, a szórás felhasználásával ezt az értéket még lejjebb is szoríthatnánk. Ennek most nincs gyakorlati jelentősége, hiszen a közölt bizonyítás könnyen megismételhető a megmaradt 4 esetben.)
Ha az A-ban legalább 10 elégtelen dolgozat van, akkor a közepesek száma legalább 11. Ennek a 21 osztályzatnak az összege 43, ami azt jelenti, hogy a megmaradó 4 osztályzat összege 28 (a 2,84-es átlag miatt). Ez nyilván lehetetlen, ezért az A-ban 10-nél kevesebb elégtelen volt (ha volt egyáltalán).

Megjegyzés:
Az alábbi táblázatban egy, a feladat szövegének megfelelő eloszlás látható.

	5	4	3	2	1	átlag	szórás
A	3	0	12	10	0	2,84	0,92
B	3	13	0	1	11	2,86	1,57

2722. a) A kapott gólok száma alapján X jobbnak látszik.

b) A kapott gólok számának eloszlása X-nél egyenletes, Y-nál hullámzó teljesítményre utal, tehát inkább megerősíti az X melletti döntést.
A közölt táblázat természetesen nem döntő érv X mellett, hiszen a kapus teljesítménye nem önmagában, hanem a csapatával együtt mérhető. Sokat számít az is, milyen erősségű ellenfelekkel küzdöttek az egyes kapusok csapatai. Elképzelhető például, hogy X csapatának csupa „könnyű", míg Y csapatának igen kemény ellenfelei voltak. Ez esetben akár meg is fordulhat az a)-beli információ alapján meghozott („elsietett") döntés, hiszen Y javuló formát mutatott, míg X inkább hanyatlót.

2723. Az első csapat átlagpontszáma: 30,04, a második csapat átlagpontszáma: 26,61. A különbség 3,43.

2724. a) A harmadik vizsgán, hiszen a másik kettőn az átlagnál alacsonyabb teljesítményt nyújtott, míg a harmadikon 5 ponttal jobbat. Feltéve, hogy az átlag körüli szórásnyi intervallumon belül kb. az adatok 65%-a található normális eloszlást feltételezve, a maradék fele alatta, fele felette van, akkor a felső 17,5%-ban van a teljesítménye (a másik két esetben ugyanez az alsó 17,5%-kal igaz!)

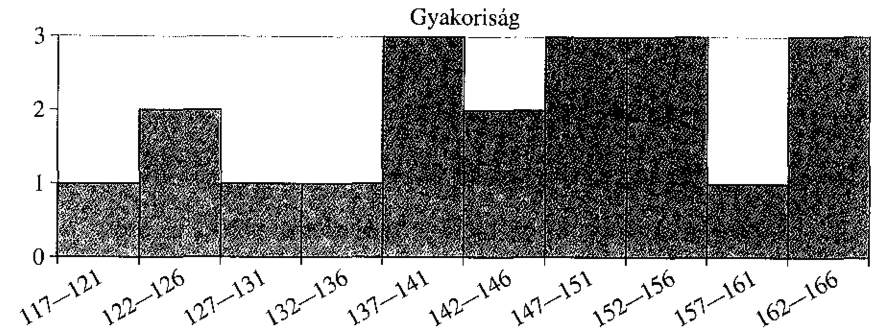
b) A második vizsga teljesítménye jobb volt, mint az első; mind a teljes évfolyamon, mind X tanuló esetében, bár nála csupán 1 ponttal, ami nem jelentős. Az átlagpontszám viszont 5-tel magasabb, míg az első szórása csak 3 volt, tehát tömegesen jobb eredmények kellett, hogy szülessenek, igaz a szórás is megnőtt, azaz maradt gyenge is. Mégis az átlag 5 pontot javult.

2725. a) Mivel A eredményessége: $\frac{176}{242} = 0,73$; míg B eredményessége: $\frac{328}{504} = 0,65$, ezért a büntetőt A-val dobatnám.

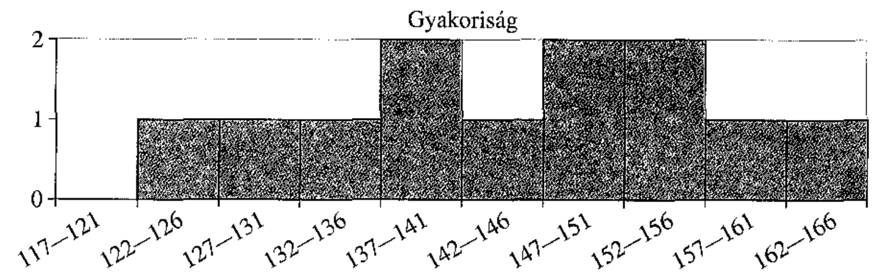
b) Feltéve, hogy ezek a relatív gyakoriságok mint a bedobás esélyei szerepelnek, valamint, hogy az egyes dobások sikeressége nem befolyásolja a dobó állapotát (ami sajnos nem igaz), a két arány ötödik hatványát kell venni. Azaz 0,20, illetve 0,12 eséllyel dobna be A, illetve B egymás után öt büntetőt.

2726. a) A minimum 118, a maximum pedig 166 liter, a különbség 48 liter. Ekkor az egyenlő, 5 literes tartományok 10 osztályt jelenthetnek, mondjuk 117-től 167-ig: 117—121; 122—126; 127—131; 132—136; 137—141; 142—146; 147—151; 152—156; 157—161; és 162—166-ig.

b) A holstein-fríz esetében a gyakoriság eloszlása:



A magyar tarka esetében a gyakoriság eloszlása:



c) Az összehasonlításhoz néhány jellemző szám: átlagok, mediánok, szórások, mindenhol a pár első tagja a holstein-fríz, a második a magyar tarka:
átlagok {145; 145}, mediánok {146; 145}, szórások {13,6; 11,1}.
Nagyon kicsi a különbség, bár tendenciózusan az első egy kicsit jobb, még a szórásnál is, mert ott figyelembe kell venni, hogy több adat van, és mégsem nagyobb a szórása. Ebből azért nehéz lenne dönteni a két fajta tenyésztése között, ha csak a tejhozamért tartjuk.

2727. Legyenek a sokaság elemei $x_1, x_2, \ldots x_n$. Tudjuk, hogy az átlaguk 56, és mondjuk $x_1 = 68$, valamint azt is, hogy ez többször nem fordul elő, azaz ha $i > 1$, akkor $x_i \neq 68$. A 68 nélkül a maradék számok átlaga 55. Ekkor ezen számok összege $55(n-1)$. Ehhez hozzávéve a 68-at, az átlag 56 lesz, tehát $55(n-1)+68 = 56n$, ahonnan $n = 13$ következik. Ha 12 pozitív elem átlaga 55, akkor a legkisebb szóba jövő elem az 1. Akkor lesz a maximum a legnagyobb, ha 11 darab 1-est veszünk. Mivel a számok összege 660, ha 11 db 1-est veszünk, akkor 649 a legnagyobb. Minden más esetben kisebb a legnagyobb elem, tehát a keresett maximum legfeljebb 649. (És legalább 55, ha mind a 12 szám egyforma.)

2728. a) A nagyobb létszámú osztályban jobb jellemző az átlag, mert annak ellenére, hogy több elem van, mégis kisebb a szórás, az elemek kevésbé térnek el a 168 cm-től.

b) A kisebb osztályban, mert ott ez az eredmény az átlagtól háromszoros szórásnál messzebb lévő elemeket jelenti, tehát még a durva Csebisev-egyenlőtlenség szerint is az esély $\frac{1}{9}$-nél (0,111) kisebb, míg a másik osztályban a 15-ös eltérés majdnem a szórás négyszerese, pontosan $\frac{15}{4} = 3{,}75$-szorosa. Tehát a Csebisev-egyenlőtlenség szerint az esély kisebb, mint $\frac{1}{3{,}75^2} \approx 0{,}071$. Így a kisebb osztályban a nagyobb szórás miatt mégis valószínűbb ez az eset.

2729. Mivel a győztes csapat testmagasságai jól láthatóan két csoportba oszthatók: 144—152 intervallumban van 7 fő, majdnem a csapat fele, míg a másik csoport minimuma 180, maximuma 198, tehát 9 fő pedig a 180—198 intervallumban van. A csapat átlagos testmagassága 173 cm, a szórása: 21,8 cm. Mivel „normális esetben” az átlag körül vannak a játékosok magasságai, míg itt az átlag a „senki földjén” van, nagy eséllyel mondhatjuk, hogy ez a „Törpék és óriások” csapata lehet, tehát ők győztek, feltéve, hogy az ellenfél egy normális, nem egy másik „Törpe és óriás” csapat.

2730. a) A keresett átlagok rendre: 953,9; 8,8; 18,6; 0,11. Magyarország (bár „átjáró” ország) mindenben jelentősen lemaradt, még az átlag harmadát sem éri el! Ez jelentős útfejlesztést igényel a közeljövőben.

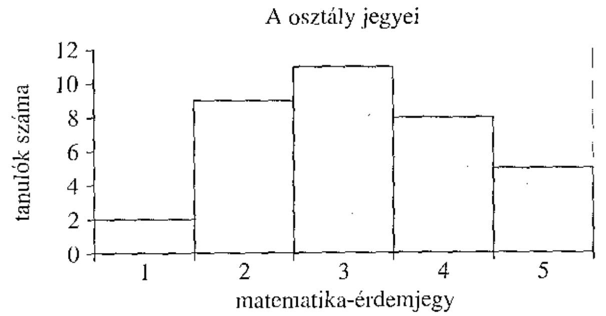
b) A terjedelmek rendre: 1873; 24,24; 53,9; 0,24. Igen nagyok, főleg az első három, amelyek az átlag két-háromszorosai, ezt mutatják az alább megadott szórások is. (Bár ezek kiszámítása nem volt kérdés: 627; 6,27; 17,22; 0,06. A relatív szórások – 0,66; 0,71; 0,93; 0,55 – még jobban mutatják, milyen nagy különbségek vannak.)

c) Például úgy, hogy az átlag alattiak vagy felettiek. Lehet persze, hogy egy-egy ország az egyik szempont szerint az átlag alá, a másik szerint fölé esik. Mindenképpen nagyon jó közlekedésű az az ország, amelyik minden szempontból átlag

feletti: pl. Luxemburg kimagaslik, igaz nagyon kicsi területű, ráadásul tranzitország. Dánia háromban fölötte, egyben éppen csak alatta van, hasonlóan Hollandia, Franciaország. Mindenképpen a gyengén „behálózott” országok közé tartozik: Portugália (igaz, „végország”), Görögország, illetve sajnos Magyarország is verseng az előbbi kettővel a lemaradásban (közútban Görögország megelőzi, de őket autópályában „verjük”, Portugáliával éppen fordított a helyzetünk: ott kevesebb a közút, de jobb az autópálya-mutató.)

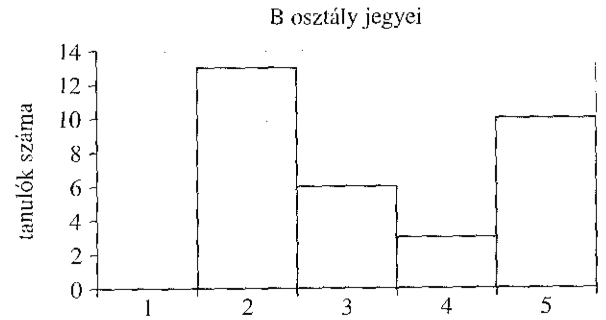
d) Mérjük az eltérést azzal, hogy az átlag hány százaléka a magyar adat. Ezek rendre: 34%, 33%, 20%, 31%. Ezek közül a 20%, az 1000 km²-re eső autópályahossz a legrosszabb adatunk.

2731. a)



Az osztály eredménye átlagos, a több kettest, mint négyest a jelesek szép száma ellensúlyozza, megbízható tömeg a közép, a tanulók kb. harmada közepes. Az átlag egyébként 3,14, ami matematikából egész „rendesnek” mondható, míg a szórás: 1,12.

b) Először itt is egy grafikon, majd a jellemzők kiszámítása után hasonlítjuk össze a két osztályt:



Minden jellemző kiszámítása nélkül is látszik a fő különbség, hogy a B osztályban szinte nincs középmezőny, sok a gyenge (igaz nincs elégtelen, csak kettes), és sok jeles van. Az átlag itt: 3,31, ami jobb az A osztályénál, viszont a szórás: 1,29.

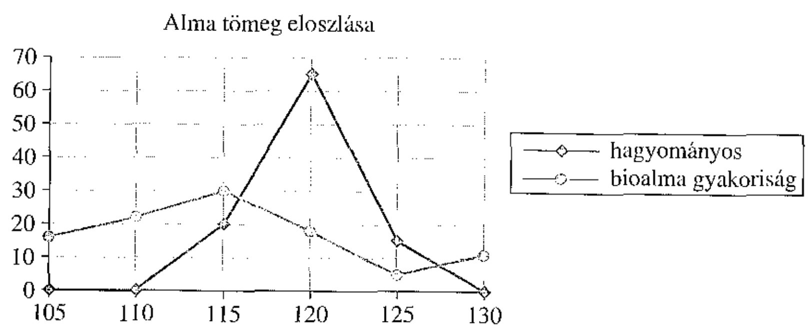
Az összehasonlítás tehát a következő: a B osztályban több jó eredmény született, de nagyobb a szóródás, főleg azért, mert kisebb a középmezőny. A szokásos összehasonlítás szerint (átlag) a B osztály lenne a „nyerő". A medián egyébként azonos (3). A módusz viszont az A osztályban jobb: 3, míg a B-ben csak 2.

2732. a) Akkor elég, ha egy napra legfeljebb 999 fiú, illetve ugyanennyi lány születése esik. Mivel minden évben 95 000 és 280 000 között volt az újszülöttek száma, aminek kb. a fele fiú és lány. Mivel az eltérés legfeljebb 5%, vegyük például a lányokat nagyobbnak (a legszélsőségesebb eset: 52,5% lány és 47,5% fiú): 49 875 és 147 000 közé esik az egy évben született lányok száma. Most a felső határ az érdekes, 147 000-ből egy napra 402,7 jut átlagosan. Mivel a 999 ennek több, mint kétszerese, ezért várhatóan általában elegendő a személyi szám. Nagy ritkán persze előfordulhat extrém eset.

b) Mivel 8-szor annyian vannak, ha a születések száma is arányos, akkor napi 3222 lány várható átlagosan, így biztosan nem lenne jó ez a rendszer, ott eggyel növelni kellene a jegyek számát.

2733. a) Hagyományos alma: átlag 119,75 (g), medián 120 (g); módusz 120 (g). Bioalma: átlag 115,3 (g) medián 115 (g), módusz 115 (g).

b)



A bioalma szóródása nagyobb, és kisebb hullámzást mutatnak a gyakoriságok, a hagyományos alma jobban hasonlít egy normális eloszlás harangjára, kisebb a szóródás. Hasonlóság nemigen látszik az ábrán.

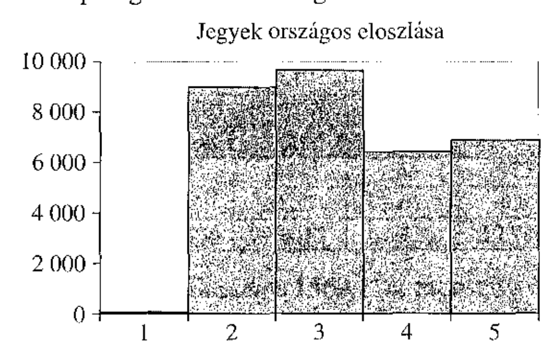
2734. a), b) Az első oszlop valamilyen nyilvántartásból származhat, az adott államban bejelentett gépkocsik száma, valószínűleg többé-kevésbé megbízható. Ugyanez mondható el a harmadik oszlopról is, ahol az adott államban bekövetkezett halálos balesetek áldozatainak a számát találjuk. A második oszlop az adott államban vélhetően a megjelölt számú gépkocsik által megtett összes út hossza mérföldben kifejezve. Ez az adat tűnik a legkérdésesebbnek. Honnan tudja a sofőr pontosan, hogy az adott államban, ahol be van jelentve gépkocsija, pontosan mennyit haladt, s mennyit más államokban. Ezzel együtt ez az adat kétséges biztonságú.

c) Több szempontot is figyelembe vehetünk, pl. hol a legkisebb az egy autóra eső balesetek száma, vagy hol minimális az 1 mérföld megtett útra eső balesetek száma. Esetleg a kettő kombinációjaként kiszámoljuk az egy autóra eső mérföldszámot, s ezzel osztjuk a halálesetek számát. A három különböző modell szerinti eredmény:

állam	egy autóra eső balesetszám	egy mérföldre eső balesetszám	egy autóra eső mérföldszám
Alaszka	0,000 218	0,000 000 0279	0,013 56
Kalifornia	0,000 172	0,000 000 0145	0,322 75
Florida	0,000 242	0,000 000 0217	0,222 01
New York	0,000 184	0,000 000 0164	0,160 18
Rhode Island	0,000 127	0,000 000 0103	0,006 38

Az első szerinti biztonsági sorrend: 1. Rhode Island, 2. Kalifornia, 3. New York, 4. Alaszka, 5. Florida.
A második szerint: 1. Rhode Island, 2. Kalifornia, 3. New York, 4. Florida, 5. Alaszka. Tehát csak a végén van egy helycsere.
A harmadik azonban nagyon széthúzza a mezőnyt, itt az egy autóra eső mérföldszám a nevező, a halálesetek száma pedig a számláló: 1. Rhode Island, 2. Alaszka, 3. New York, 4. Florida, 5. Kalifornia. Mindenképpen Rhode Island a legjobb, New York középen van, Florida pedig a lista második felében.

2735. a) Az eloszláshoz először meghatározzuk az egyes csoportok létszámát:
humán: 13 120; reál: 5760; humán és reál: 9920 és végül nincs irányultsága: 3200 tanulónak. (Az adatok nem teljesen pontosak, hiszen nem pontosan 32 000 tanuló van.) Eszerint elégtelent kapott: 39 humán (0,3%), 6 reál, 10 humán-reál irányultságú és 16 irányultság nélküli, összesen: 71 tanuló.
Hasonló módszerrel elégséges: 5130 + 622 + 1845 + 1382 = 8979 tanuló,
közepes: 4736 + 1192 + 2718 + 1002 = 9648 tanuló,
jó: 2152 + 1405 + 2381 + 483 = 6421,
jeles: 1063 + 2534 + 2966 + 317 = 6880.
Oszlopdiagramon az országos eloszlás:



b) Az országos eloszlás százalékos aránya: 0,2%; 28,1%; 30,2%; 20,1%; 21,5%. A legközelebb a harmadik sor (humán-reál) van ehhez, ugyanis az abszolút eltérések átlaga az első csoportnál: $\frac{0,1+11,0+5,9+3,7+13,4}{5} = 6,8$ (%),

a második csoportnál: $\frac{0,1+17,3+9,5+4,3+22,5}{5} = 10,7$ (%),

a harmadik csoportnál: $\frac{0,1+9,5+2,8+3,9+8,4}{5} = 4,9$ (%),

a negyedik csoportnál: $\frac{0,3+15,1+1,1+5,0+11,6}{5} = 6,6$ (%).

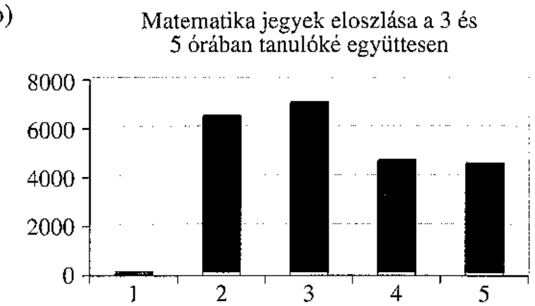
Ez a legkisebb a humán-reál csoportnál. Egészében tehát ez a legreprezentatívabb csoportja az országos átlagnak. Átlagos négyzetes eltéréssel számolva is ez az eredmény.

c) Ahol a jó jegyekben többet, a rosszban kevesebbet produkáltak, az a jobb az átlagnál. Eszerint a legjobb, egyébként ez az átlagból is látszik, a második (reál) csoport. A humán-reál van legközelebb az átlaghoz, de attól felfelé tér el. Az irányultság nélküli és a humán átlag alatti, és egymáshoz képest kicsi a különbség. Az irányultság nélküliek a leggyengébbek, de alig jobb a humán csoport. Az átlagok: humán: 2,93; reál: 4,01; humán-reál: 3,65; irányultság nélküli: 2,91. Az országos átlag: 3,35. Azaz, ahogyan mondtuk, átlag feletti a második és a harmadik csoport, átlag alatti az első és a negyedik, közel egyformán gyenge, de picivel jobb a humán, ahogy éreztük az eloszlásból is.

2736. a) Az első eloszlás 32 000-ből 57%-nyi, azaz 18 240 tanulóra,
a második eloszlás 14%-nyi, azaz 4480 tanulóra vonatkozik,
eszerint a gyakoriságokból összesen 22 720 tanulóra vonatkozó eloszlás:
18 240-ből 55, 4480-ból 9 elégtelen, azaz összesen: 64 elégtelen.
Hasonló megfontolással:
elégséges: 6056 + 408 = 6464 tanuló;
közepes: 6220 + 802 = 7022 tanuló;
jó: 3502 + 1151 = 4653 tanuló;
jeles: 2408 + 2110 = 4518 tanuló.

Matematika érettségi jegyek	1	2	3	4	5
3 órás gyakoriság	55	6056	6220	3502	2408
5 órás gyakoriság	9	408	802	1151	2110

b)



c) A bal oldali, 3 órás eloszláshoz hasonlít a kép jobban, mert azok a diákok több, mint 4-szer annyian vannak, így a súlyozott középben mindig 4-szer olyan súlyt jelentenek.

2737. a) A térképről leolvashatjuk, hogy az egyes megyékben százezer főre hány tbc-s jut. Ezt a táblázatból kiolvasható lakosságszámmal szorozva megkapjuk az egyes megyékben, illetve Budapesten a tbc-sek számát. Ezt osztva az összlakossággal, kijön, hogy 100 000 főre hány tbc-s jut. Ez valójában a lakosság eloszlása szerinti súlyozott közepe a tbc-s arányszámoknak (nem egyszerű számtani közép, ami rossz megoldás!). Tehát pl. Bács-Kiskun megyében a térkép szerint 9,73 tbc-s jut 100 000 lakosra, amit szorozni kell 5,31-dal, mert ennyi százezerben a lakosságszám. Kapjuk, hogy ebben a megyében 51,6663 tbc-s beteg van. Hasonlóan kapjuk a betegek számát a többi megye esetében, és ez osztandó a lakosságszámok összegével (100,44), ami az összlakosság 100 000-ben (tehát 10 044 000 fő a kerekített összlakosság). A számlálóhoz beírjuk a térkép adatait a megadott táblázatban egy beszúrt sorba (a sorok végén összegeztük a lakosság-, illetve betegszámot):

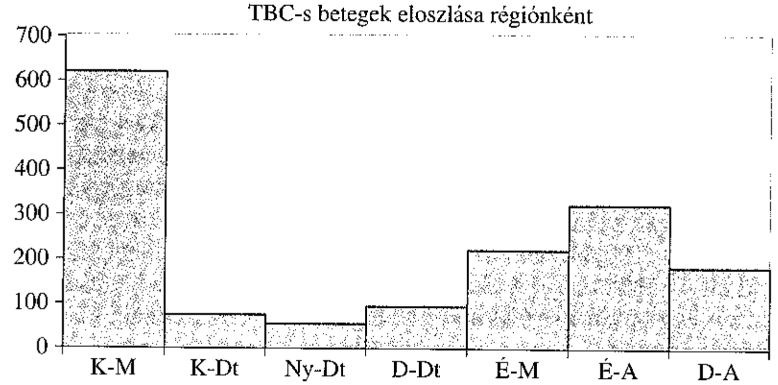
B-K	Ba	Bé	B-A-Z	Bp.	Cso	Fe	összesen
531	401	392	729	1815	418	426	4712
9,73	10,18	17,61	21,65	21,65	14,75	8,45	
51,6663	40,8218	69,0312	157,8285	392,9475	61,655	35,997	809,9473
Gy-M-S	H-B	He	J-N-Sz	K-E	Nó	Pe	összesen
424	542	323	411	309	216	1032	3257
8,49	30,71	10,49	11,58	6,77	13,31	22	
35,9976	166,4482	33,8827	47,5938	20,9193	28,7496	227,04	560,6312
So	Sz-Sz-B	To	Va	Ve	Za	összesen	
330	569	244	266	373	293	2075	
6,92	19,24	12,23	2,61	4,8	4,06		
22,836	109,4756	29,8412	6,9426	17,904	11,8958	198,8952	

Az összes betegek száma 1569,474; ezt osztva 100,44-gyel megkapjuk a keresett arányt, tehát az országos átlag: 15,63 tbc-s 100 000 lakosra. Látszik, hogy nagy a szórás, hiszen van 30,71-os érték, majdnem kétszerese, és 2,61, ami csak hatoda az átlagnak.

Megjegyzés:
Az újság adatai nem teljesen pontosak, mert egész számú betegnek kell lennie az egyes megyékben, s az ezekkel az adatokkal nem teljesülhet. Hiszen pl. B-K esetében a 5,31 százezer lakos és a 9,73 arányszám együtt biztosan nem lehet jó. Ha az adott évben 51 tbc-s volt a megyében, akkor 531 000 lakos mellett ez 9,60-os arány; ha viszont 52 beteg volt, az meg 9,79. Viszont 51,6663 beteg meg nem lehet!

b) Először szükségünk van a tbc-s betegek megyénkénti számára, s ezt kell a régiók szerint összegezni, ami az előző táblázat beszúrt „szorzatsorainak" az egészre kerekített számai, azaz a húsz szám rendre: 52; 41; 69; 158; 393; 62; 36; 36; 166; 34; 48; 21; 29; 227; 23; 109; 30; 7; 18; 12. Ez a régiók szerint: K-M: 620; K-Dt: 75; Ny-Dt: 55; D-Dt: 94; É-M: 221; É-A: 323; D-A: 183.
Oszlopdiagramon ábrázolva:

TBC-s betegek eloszlása régiónként

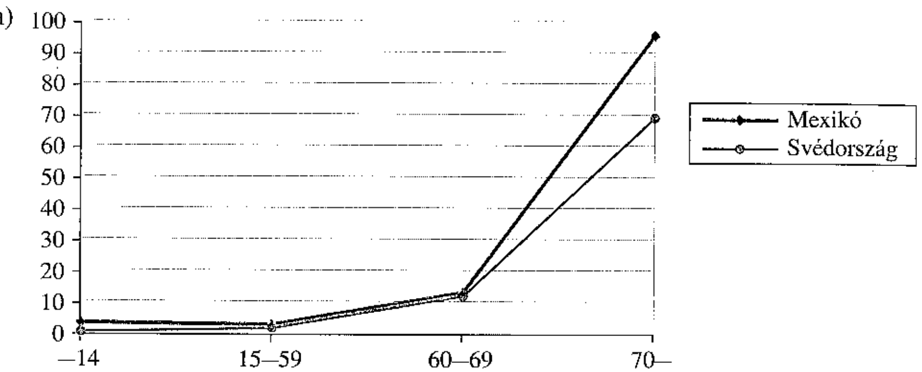


c) A régiók között keressük az abszolút szám, illetve az arány maximumát, ez tehát egy újabb összesítést igényel a megyei táblázatból, illetve az előző pontbeli diagram révén. Az abszolút szám láthatóan Közép-Magyarország esetében a legnagyobb (620), az arányhoz kellenek a lakosságszámok, ez (százezrekben) az egyes régiókban rendre 28,47; 11,08; 9,83; 9,75; 12,68; 15,22; 13,41. Az arányok így: 21,78; 6,77; 5,60; 9,64; 17,43; 21,22; 13,65. Tehát – ha alig 0,5-del is – szintén Közép-Magyarország a listavezető az arányok tekintetében is, amely régiót szorosan követi az Észak-Alföld régió, majd Észak-Magyarország, a legjobb helyzet a nyugat-dunántúli régióban van, ahol csak 5,6 ez az arányszám.

2738. a) Az egyes csökkenések 1930-at véve 100%-nak: 17,8%, 28,1%, 27,3%, 54,7%, 77,0%, 87,3%. Ezek átlagát, amiből válaszolhatnánk a kérdésre nem tudjuk kiszámítani, mivel nem ismerjük, hogy hány nő esett az egyes osztályokba, és itt súlyozott közép kell!

b) Ugyanazt, amit az a)-ban is tudni kellett volna, nevezetesen az egyes korosztályok létszámát. Előfordulhatna, pl. ha 1994-ben a vizsgált korosztályokba tartozó nők száma több, mint kétszerese az 1930-asnak. Ez elég valószínűtlen (nem is így van)!

2739. a)



b) Az egész népességre vonatkozó halálozási mutatóhoz összegezzük, hogy hányan haltak meg 1998-ban külön-külön a két országban: Mexikó esetén a négy adat összege: 446 448 fő, Svédország esetén 90 330 fő. Minden a lakosság méretétől függ: Mexikó összlakossága 91,53 millió, Svédországé 8,66 millió. Ebből Mexikóban kisebb mégis a halálozási mutató: 4,9 ezrelék, Svédországban 10,4 ezrelék. Az összlakosság a halálozási arányszámokból kiszámítható, hiszen pl. a 110 471 halott gyermek 0,33%-a a 14 év alatti gyerekeknek, ahonnan ez a létszám 33 476 061, lásd a táblázat első sor második oszlopát.
Hasonlóan kaptuk a többi elemét is a táblázatnak.

	Mexikó	Svédország
–14	33 476 061	1 506 667
15–59	51 940 000	5 091 579
60–69	4 719 542	1 117 967
70–	1 399 300	949 654,7
Σ	91 534 902	8 665 868
arány	**4,9**	**10,4**

c) A paradox jelenség oka, hogy Mexikó nagyon „fiatal ország": több, mint 30%-a 14 év alatti gyerek, míg Svédországban a gyerekek aránya 17%; alig több, mint a fele. A középkorosztály Mexikóban 57%, Svédországban 59%; és a fő különbség, hogy az öregek aránya Mexikóban csak 12%, míg a svédeknél kb. kétszerese, 24%. Tehát elöregedettebb a svéd társadalom. Kevesebb gyerek születik, viszont azok tovább élnek.

2740. a) A félévi három legjobb: Sz. Tamás 4,30, B. Dóra 3,85, F. Réka 3,22.

b) Az év végi három legjobb: Sz. Tamás 3,70, F. Réka 3,25, B. Dóra 3,20.

c) A három legtöbbet javító (mint az a mellékelt táblázatból kiolvasható): F. András 0,97, R. György 0,63, L. Péter 0,56.

d) Lásd a táblázatot!

e) Az átlagok átlaga félévkor 2,56, év végén 2,64; a jegyek átlaga félévkor 2,50, év végén 2,80.

	javítás	félévi jegy	év végi jegy
B. Dóra	−0,65	4	3
D. Rózsa	0,01	2	2
F. Réka	0,03	3	3
F. András	0,97	2	3
H. László	0,45	2	3
L. Péter	0,56	2	3
R. György	0,63	1	2
Sz. Tamás	−0,60	4	4
Sz. Gábor	−0,36	2	2
T. Borbála	−0,16	3	3
átlag		2,50	2,80

2741. a)-b)

	Sipi	Cifkó	Times	Bazsa	Péter	Ádám	Zozó	Laci	Katus	Maci
szereplésszám	140	124	118	71	64	55	51	21	17	9
relatív gyakoriság	1,00	0,89	0,84	0,51	0,46	0,39	0,36	0,15	0,12	0,06

A relatív gyakoriságokat az első sorbeli gyakoriságok 140-nel (az összes koncert számával) való osztásával kapjuk.

c) A szereplések számának nincs módusza, mert minden adat csak egyszer fordul elő. A medián a nagyság szerinti felsorolásban a „középső", illetve most a páros számú adat miatt a két középső átlaga, $\frac{55+64}{2} = 59,5$.

d) Ha 140 koncert mindegyikén 5 zenész szerepelt, akkor összesen $140 \cdot 5 = 700$ szereplés történt. A táblázatbeli szereplések számának összege 670, így 30 szereplési alkalom nincs feltüntetve.

2742. a) Lásd a táblázatot!

b) A gólkülönbségek átlaga 0.

c) Mivel minden berúgott gólt be is kapott valamely csapat, ezért ugyanannyi az összes rúgott gól, mint amennyi a kapott. A gólkülönbségek összege így természetesen 0, tehát az átlaguk is.

d) Egyik ilyen lehetőség éppen az előző pontban említett: megegyezik-e a rúgott és kapott gólok száma? Egy másik: ugyanannyi-e a győztes mérkőzések száma, mint a vesztes eké; a döntetlenek összes száma pedig páros-e. A nyertes, vesztes és döntetlen meccsek számának összege meg

MTK	33
Dunaújváros	20
ZTE	18
FTC	4
Videoton	3
Újpest	−1
Debrecen	−5
Sopron	−9
Kispest	−11
Győr	−11
Vasas	−20
Haladás	−21

kell egyezzék a lejátszott meccsek számával – csapatonként külön-külön, és a táblázat összesítésében is. A „győzelmek száma" · 3 + „döntetlenek száma" · 1 meg kell egyezzék a pontok számával – szintén csapatonként és összesítésben is.

2743. a) Lásd a táblázatot; a népsűrűséget fő/km^2 egységben adtuk meg.

	népsűrűség
Európa	56
Ázsia	74
Afrika	22
Észak- és Közép-Amerika	19
Dél-Amerika	17
Ausztrália és Óceánia	3
Antarktisz	0
átlag	27

b) A kapott népsűrűségek átlaga, mint látható, 27 fő/km^2. (Ha Antarktisz nullás adatát figyelmen kívül hagyjuk, akkor 32 fő/km^2.) Ugyanakkor a lakott szárazföldek teljes területe 134 millió 300 ezer km^2, összlakossága 5 milliárd 341 millió fő (a feladatgyűjteménybeli táblázat megfelelő oszlopainak összegzésével). Az ezek hányadosaként kapott átlagos népsűrűség 40 fő/km^2. (Ha a gyakorlatilag lakatlan Antarktisz területét is beszámítjuk, az összterület 147 millió 600 ezer km^2, az átlagos népsűrűség pedig 36 fő/km^2 lesz.) Akár a 27-36, akár a 32-40 párost vizsgáljuk, a különbség jelentős. (Márpedig csak ezeket lehet összevetni Antarktisz figyelembe vétele vagy nem vétele miatt.) Ennek oka, hogy a földrészek területe különbözik. A népsűrűségek átlagában mindegyik kontinens népsűrűsége azonos súllyal esik latba, a kicsi és ritkán lakott Ausztráliáé ugyanúgy, mint a nagy és sűrűn lakott Ázsiáé – a teljes átlagos népsűrűségben viszont tulajdonképpen a területtel súlyozva átlagoljuk a kontinensek népsűrűségét. (Ellenőrizze egy fiktív adatsorral: ha azonos lenne minden földrész területe, a kétféle módon számított átlag megegyezne. Érdekes lenne a helyzet egy fordított „szereposztásban": nagy, de ritkán lakott és kicsi, de sűrűn lakott kontinensek esetén a kétféle átlag nagysági viszonya akár fordított is lehetne.)

c) A terület szerinti sorrend: Ázsia, Afrika, É-K-Amerika, D-Amerika, Antarktisz, Európa, Ausztrália-Óceánia; a lakosság szerinti: Ázsia, Afrika, Európa, É-K-Amerika, D-Amerika, Ausztrália-Óceánia; Antarktisz; a népsűrűség szerinti: Ázsia, Európa, Afrika, É-K-Amerika, D-Amerika, Ausztrália-Óceánia, Antarktisz.

d) A szárazföldek összterülete 147,6 millió km^2 (lásd b) rész), ez az 510 millió km^2-es összfelületnek 29%-a, tehát 71%-ot borít víz.

2744. a) A táblázatban 12 piros színnel jelölt (tehát kecsua) nyelv található.

b) A 12 adat összegzésével: 7 millió 589 ezer.

c) Ehhez össze kell adni mind a 44 létszám-adatot, az összeg: 9 744 275.

A két létszám hányadosa: $\frac{7\ 589\ 000}{9\ 744\ 275} \approx 0,78$.

d) A most szükséges hányados: $\frac{9\ 744\ 275}{20\ 000\ 000} \approx 0,49$, azaz kb. 49%.

2745. a) A csikitano, 20 000 beszélővel.

b) Az 5000 (háromszor: baure, csimane, zamuko).

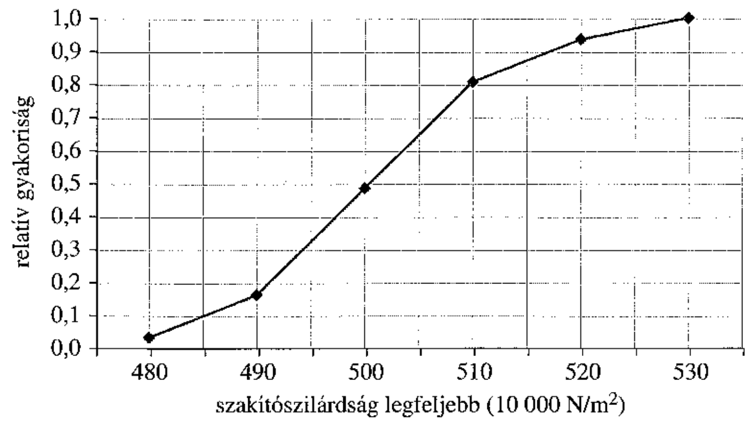
2746. a)

szakítószilárdság (10 000 N/m²)	470—480	480—490	490—500	500—510	510—520	520—530
gyakorisága	1	4	10	10	4	2

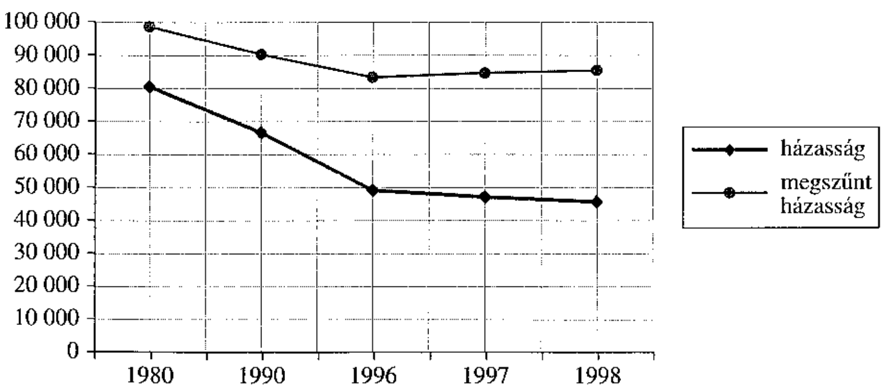
b)

A szakítószilárdság legfeljebb (10 000 N/m²)	480	490	500	510	520	530
relatív gyakorisága	$\frac{1}{31} \approx 0{,}032$	$\frac{5}{31} \approx 0{,}161$	$\frac{15}{31} \approx 0{,}484$	$\frac{25}{31} \approx 0{,}806$	$\frac{29}{31} \approx 0{,}935$	$\frac{31}{31} = 1$

A grafikon:



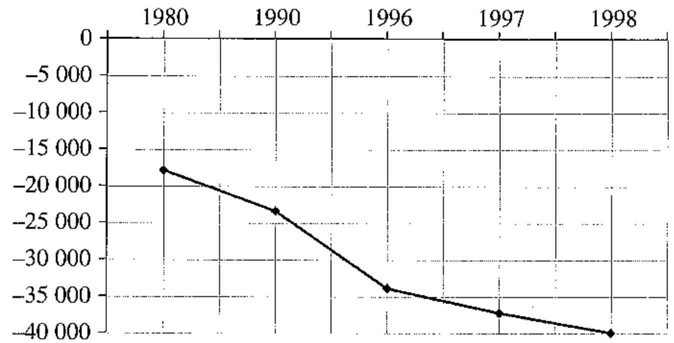
2747. a)



b) A házasságban élők számának változása megkapható a házasságok számának növekedése (házasságkötések száma) és csökkenése (megszűnt házasságok száma) különbségeként.

	1980	1990	1996	1997	1998
házasságkötések száma	80 331	66 405	48 930	46 905	45 500
megszűnt házasságok száma	98 221	89 817	82 863	84 193	85 000
házasságok számának változása	−17 890	−23 412	−33 933	−37 288	−40 000

Vonalgrafikonon szemléltetve:



c) A megadott táblázat megfelelő sorait választva:

	1980	1990	1996	1997	1998
házasságkötések száma	80 331	66 405	48 930	46 905	45 500
válás következtében megszűnt	27 797	24 888	22 590	24 992	25 500
Ezer házasságkötésre jutó válás	346,0	374,8	461,7	532,8	560,4

d) A táblázat utolsó előtti sora megadja, hogy az adott évben fennálló házasságok hány ezrelékével egyenlő az adott évi válások száma. Mivel a válások száma ismert, ezért a fennálló házasságok számát egy osztással kaphatjuk meg. Például 1980-ban: $\frac{27\ 797}{0{,}0099} \approx 2{,}81 \cdot 10^6$, tehát a fennálló házasságok száma kb. 2,81 millió volt.

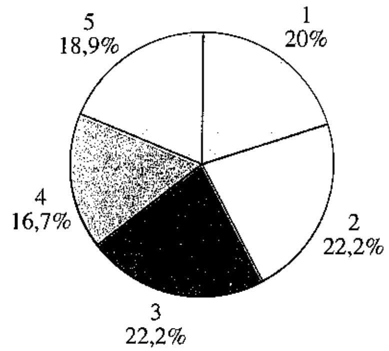
	1980	1990	1996	1997	1998
megszűnt házasságok száma válás következtében	27 797	24 888	22 590	24 992	25 500
ezer fennálló házasságra jutó válás	9,9	9,9	9,7	10,9	11,3
fennálló házasságok száma (millió)	2,81	2,51	2,33	2,29	2,26

2748. a) A telitalálatos sorsolásokon szereplő számok összege 259 = 37 · 7, ezért eddig 37 sorsoláson találtak telitalálatos szelvényt.

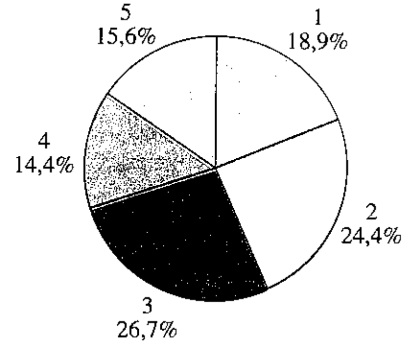
b) Nándinak van igaza.

2749. a)

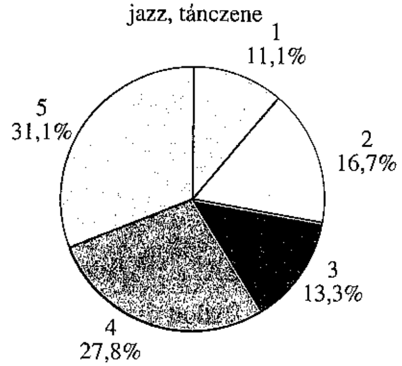
komolyzene, opera



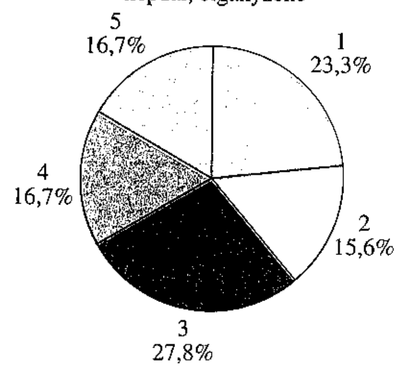
operett, musical



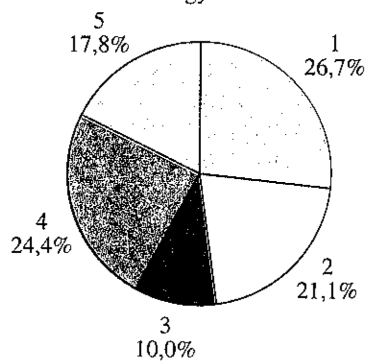
jazz, tánczene



népdal, cigányzene



egyéb



b)

	átlag	szórás
komolyzene, opera	2,92	1,39
operett, musical	2,83	1,32
jazz, tánczene	3,51	1,37
népdal, cigányzene	2,88	1,38
egyéb	2,86	1,49

A számítás módját a jazz, tánczene kategóriával kapcsolatban részletezzük:

$$\bar{x} = \frac{28\cdot 5 + 25\cdot 4 + 12\cdot 3 + 15\cdot 2 + 10\cdot 1}{90} = 3,5\dot{1}.$$

$$D(3,5\dot{1}) = \sqrt{\frac{28\cdot(5-3,5\dot{1})^2 + 25\cdot(4-3,5\dot{1})^2 + \ldots + 10\cdot(1-3,5\dot{1})^2}{90}} =$$

$$= \sqrt{\frac{168,489}{90}} \approx 1,37.$$

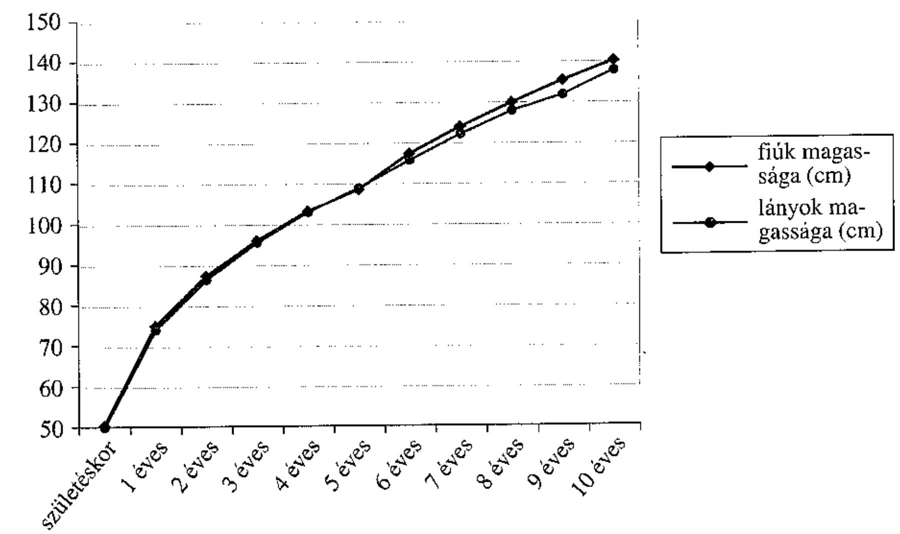
Bebizonyítható, hogy a szórás az alábbi egyszerűbb módon is kiszámítható:

$$D(3,5\dot{1}) = \sqrt{\frac{28\cdot 5^2 + 25\cdot 4^2 + 12\cdot 3^2 + 15\cdot 2^2 + 10\cdot 1^2}{90} - 3,5\dot{1}^2} =$$

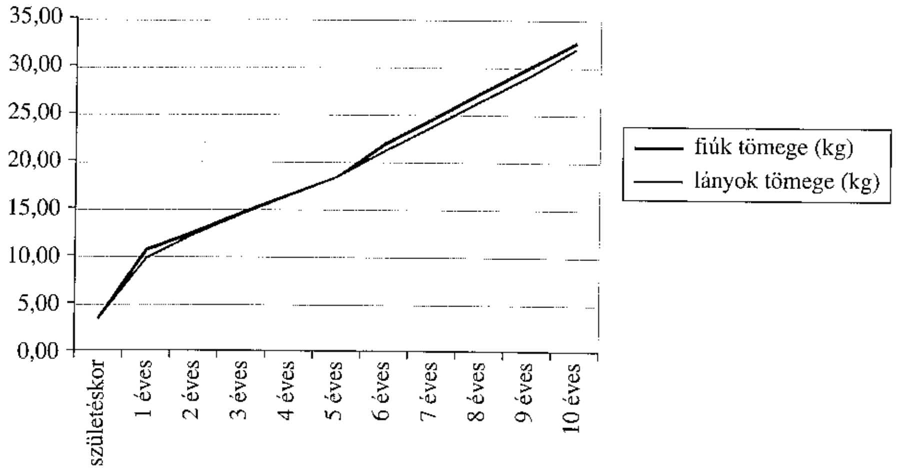
$$= \sqrt{14,2 - 12,3279} \approx 1,37.$$

Megjegyzés:
A 100%-tól való eltérés a kerekítésekből adódik.

2750.* a) Testmagasság:



Tömeg:



b) Egy év alatt egy fiú tömegének változása:

Jelöljük d_i-vel az i-edik és az $(i-1)$-edik év közötti változást! $1 \le i \le 10$

$d_1 = 10{,}07 - 3{,}40 = 6{,}67$

$d_2 = 12{,}56 - 10{,}07 = 2{,}49$

$d_3 = 14{,}61 - 12{,}56 = 2{,}05$

$d_4 = 16{,}50 - 14{,}61 = 1{,}89$

$d_5 = 18{,}37 - 16{,}50 = 1{,}87$

$d_6 = 21{,}90 - 18{,}37 = 3{,}53$

$d_7 = 24{,}54 - 21{,}90 = 2{,}64$

$d_8 = 27{,}26 - 24{,}54 = 2{,}72$

$d_9 = 29{,}94 - 27{,}26 = 2{,}68$

$d_{10} = 32{,}60 - 29{,}94 = 2{,}66$

Az éves változás átlaga: $\dfrac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{10} = \dfrac{29{,}2}{10} = 2{,}92$ (kg).

Az éves változás kiszámolásának másik módja: a 10 éves kori tömegből kivonjuk a születéskori tömeget és átlagolunk: $\dfrac{32{,}6 - 3{,}4}{10} = \dfrac{29{,}2}{10} = 2{,}92$ (kg).

Egy év alatt egy fiú magasságának változása: (a fenti gondolatmenetet követve): 8,97 cm ~ 9 cm.

Egy év alatt egy lány tömege, illetve magassága átlagosan 2,85 kg-ot, illetve 8,78 cm ~ 9 cm-t növekszik.

c) A %-os növekedés születéstől 10 éves korig fiúk esetében:

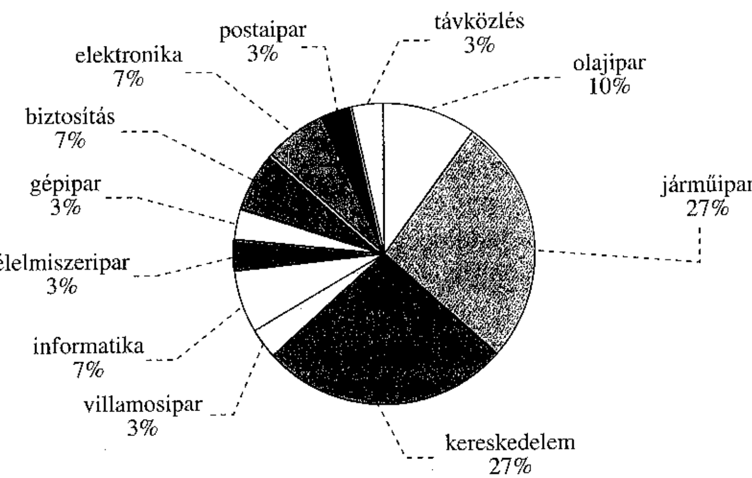
- tömeg: 858,82% (3,4 kg-ról 32,6 kg-ra történt a növekedés, tehát a változás 29,2 kg.)
- magasság: 177,27%.

A %-os növekedés születéstől 10 éves korig lányok esetében:

- tömeg: 849,4%
- magasság: 174,9%

2751. a)

A fő gazdasági területek gyakoriság eloszlása a világ 30 legnagyobb vállalkozása alapján

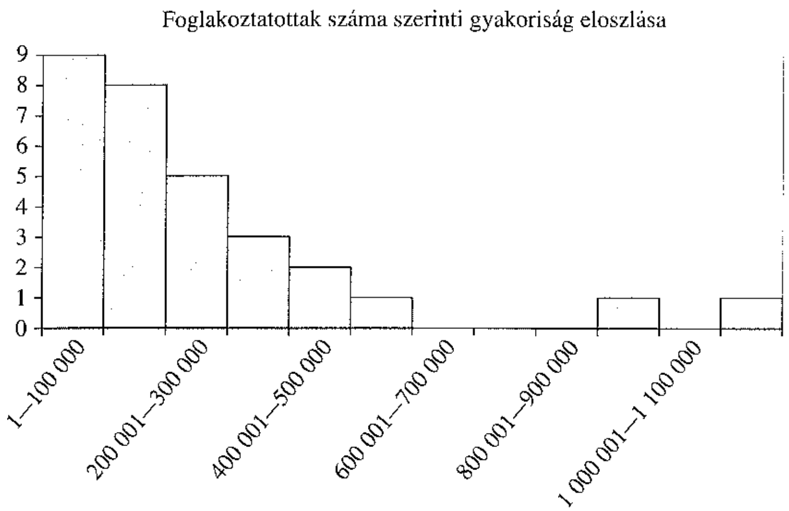


b) Az osztályok legyenek egyenletesen megadva: a legnagyobb létszámot (1 140 000) figyelembe véve legyenek 100 000 szélesek, tehát 1—100 000; 100 001—200 000; ... 1 100 001—1 200 000.

Eszerint a gyakoriságok:

foglalkoztatottak száma	gyakoriság
1—100 000	9
100 001—200 000	8
200 001—300 000	5
300 001—400 000	3
400 001—500 000	2
500 001—600 000	1
600 001—700 000	0
700 001—800 000	0
800 001—900 000	0
900 001—1 000 000	1
1 000 001—1 100 000	0
1 100 001—1 200 000	1

A gyakorisági diagram:



c) A cégek átlagos bevétele az ötödik oszlopban lévő számok átlaga: 98,97 (azaz kb. 99) milliárd dollár.

Megjegyzés:
A szórás: 37,7 milliárd, a relatív szórás 0,38. A medián 83,9 milliárd, ez a sorban a 15. és 16. vállalat átlaga, mert nincs középső.

d) Az ötödik oszlop és a negyedik oszlopban lévő számok hányadosa az egy főre eső bevétel. Excel-ben könnyen sorba rakhatók a vállalatok ezen mutató szerint. Enélkül is megállapíthatók az ebben a tekintetben élen állók. Nyilván azok vezetnek, ahol nagy bevétel kevés foglalkoztatottra esik. Az Itochuban, a Marubeniben és a NISSHO IWAI-ban mindössze 5 800 ember alkalmazott, a Sumomitoban 8 500, de a Mitsuinál és a Mitsubishinél is csak 11 000, illetve 11 700. A többiek jóval, akár egy nagyságrenddel több embert alkalmaznak, a következő a Citygroup is 38 300, s aztán már 82, illetve 87 ezer jön, a többi 100 000 feletti. Mivel a bevételek között nincs ilyen nagyságrendi különbség, ezért ezek a felsoroltak fognak vezetni az egy főre eső jövedelemben. A legkisebb létszámú Itochu a bevételben ugyan csak 9., de előtte két 11 000 alkalmazottú van, amelyek nem forgalmaztak legalább kétszer annyit, tehát első az Itochu az egy főre eső 19,43 millió dollárjával! A Marubeni és a NISSHO szintén 5800 fővel 98, ill. 75,9 milliárdot forgalmaz, náluk ez a mutató 16,9, ill. 13,09 millió dollár egy főre. A Sumomitonál 11 millió dollár, és a Mitsuinál és Mitsubishinél ez a mutató: 12,47 millió, illetve 9,67 millió dollár. A Citygroup már „csak" 2,1 millió dollár egy főre eső bevétellel bír. A többi biztosan kevesebb. Tehát a sorrend: Itochu, Marubeni, NISSHO, Mitsui, Sumomito, Mitsubishi. A nevek alapján mind a hat japán cég, 5 kereskedéssel foglalkozik, az egyetlen „termelő" a Mitsubishi, itt nyilván a robotizáció magas foka az ok, a többi ötnél az elektronika, az e-kereskedelem rohamos fejlődése lehet a kevés emberi munkaerő-igény oka.

2752. a) Az összesített adatok hányadosa $\frac{152\ 000}{262\ 400} \approx 0,58$, ennyied rész, vagyis 58% volt még nyelvhasználó.

b) A három legnagyobb beszélői létszám: kri 58 000, ozsibva 40 000, csipevéj 9800. A három legnépesebb etnikum: ozsibva 95 000, kri 60 000, mikmak 13 000.

c) A legnagyobb arányban beszélt nyelv a nitinat (7 a 7-ből, 100%), ezt követi a csipevéj (9800 a 10 000-ből, 98%). A harmadik helyen „holtversenyben" a kri (58 000 a 60 000-ből) és az ecsaottin (1450 az 1500-ból, egyaránt 97%).

2753. a) Az A változat szerint: $15 + 46 = 61$ fő fizetne 600 Ft-ot, míg $35 + 4 = 39$ fő 1000 Ft-ot.
Akkor az átlagos egy főre eső bevétel: $\frac{61 \cdot 600 + 39 \cdot 1000}{100} = 756 \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}}\right)$.

b) A B változat szerint a bevételek: 15 fő fizetne 350 Ft-ot, 46 fő 600 Ft-ot, 35-en 850 Ft-ot, végül 4-en 1250 Ft-os napijegyet. Ez összesen: 67 600 Ft, tehát 1 főre 676 Ft esik.

c) Az első változat szórásnégyzete:
$\frac{61 \cdot 156^2 + 39 \cdot 244^2}{100} = 38\ 064$, így kb. 195 Ft a szórás,
a második változat szórásnégyzete: $\frac{15 \cdot 326^2 + 46 \cdot 76^2 + 35 \cdot 174^2 + 4 \cdot 574^2}{100} =$
$= 42\ 374$; így kb. 206 Ft a szórás. Tehát a finomabb rendszer szórása nagyobb.

d) Az elsőt, mert nagyobb a bevételem és a szórás is kisebb, tehát megbízhatóbb.

2754. Az egyes iskolafokozatokon az egy pedagógusra jutó diákszám átlaga az OECD országokban:

	óvoda	általános iskola	középiskola
átlag	17,37	18,63	14,81

Az átlagokhoz legközelebb álló országok:
- óvoda esetében az Egyesült Államok és Spanyolország,
- általános iskola esetében a Cseh Köztársaság és az Egyesült Államok,
- középiskola esetében a Cseh Köztársaság és Németország.

TARTALOMJEGYZÉK